

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ
(„Радиофизика“, № 1, 1972 г.)

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
67	1 снизу	... проинтегрируем уравнение (10) проитерируем уравнение (10) ...
71	формула (33)	$nl_2/k_0 \ll 1,$	$nl^2/k_0 \ll 1,$

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Гинзбург Э. И., Журавский О. Г. Статистическая модель фединга коротковолновых радиосигналов, наклонно отраженных от ионосферы	5
Гуревич А. В. Движущиеся возмущения ионизации в поле сильных электромагнитных волн	11
Миловский Н. Д., Попова Л. Л. Об устойчивости одночастотного ОКГ на неоднородно уширенном активном веществе	19
Мишаков Г. А., Пихтелев А. И., Сапожников Ю. М., Ульянов А. А. Анализ методики наполнения ячеек для квантового стандарта частоты на парах Rb^{87}	27
Эпштейн Э. М. Тепловая неустойчивость полупроводника в лазерном луче	33
Еру И. И., Песковацкий С. А. Об использовании андалузита в «теплых» парамагнитных усилителях	38
Розанов Н. Н. К теории фазового взаимодействия мод	43
Сорокин Ю. М. Об одном энергетическом соотношении для волн в системах с бегущими параметрами	51
Андреев Г. А., Магид Р. М. Влияние флуктуаций интенсивности на измерение углового положения источника излучения оптико-электронным моноимпульсным методом	55
Фомин Я. А. Приближенное определение интегральной функции распределения наибольших значений в реализациях случайных последовательностей	62
Барабаненков Ю. Н. О преобразованном стохастическом уравнении	66
Безродный В. Г., Фукс И. М. Пространственно-временная корреляция амплитуды и фазы поля в волноводе со статистически неровной границей	73
Кириленко А. А., Масалов С. А. Дифракция H -поляризованных волн на ленточной решетке типа «жалюзи»	83
Леонтьев Е. А. Коротковолновая асимптотика решения задачи дифракции на выпуклом теле III	98
Раевский С. Б. Комплексные волны в двухслойном круглом экранированном волноводе	112
Фиалковский А. Т., Чайка В. Е. Коаксиальный открытый резонатор, образованный бочкообразным внешним и цилиндрическим внутренним зеркалами	117
Троцюк Н. И. Поля некоторых спиральных систем	126
Рапопорт Г. Н., Коцаренко Н. Я. О «поверхностных токах» трубчатого пучка с винтовыми траекториями электронов в поле быстрой волны	136

Краткие сообщения и письма в редакцию

Сизоненко В. Л., Степанов К. Н. Возбуждение кинетической неустойчивости плазмы почти-моноэнергетическим пучком	144
Гречишкин В. С., Шишкин Е. М. Влияние внешнего магнитного поля на двухчастотное квадрупольное спиновое эхо	145
Фомин Я. А., Рембовский А. М. Распределение длительности последовательной процедуры при обнаружении сигналов	147
Котосонов Н. В., Хлявич Я. Л., Базарский О. В. Исследование пространственной когерентности излучения некоторых антенн СВЧ диапазона	150
Руденко А. И. Переходные токи, ограниченные пространственным зарядом, в твердых телах с учетом захвата на ловушки	152

УДК 621.371.25

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФЕДИНГА КОРОТКОВОЛНОВЫХ РАДИОСИГНАЛОВ, НАКЛОННО ОТРАЖЕННЫХ ОТ ИОНОСФЕРЫ

Э. И. Гинзбург, О. Г. Журавский

Быстрые замирания коротковолнового сигнала моделируются пуассоновской последовательностью импульсов. Из эксперимента определяются законы распределения амплитуд и длительностей импульсов. Вычисляются функция автокорреляции и функция распределения уровней сигнала и проводится сравнение с экспериментом.

Особенности распределения уровней коротковолнового сигнала в отдельных реализациях существенно зависят от условий распространения волны и определяются многочисленными параметрами, характеризующими состояние среды и сигнала. Влияние каждого из этих параметров на формирование статистических характеристик сигнала относительно невелико. Те из параметров, влияние которых не является малым, входят в функцию распределения уровней в явном виде (модельные параметры).

В хорошо известной статистической модели сигнала (см., например, [1]), приводящей к так называемому «омещенному гауссову» распределению уровней, модельными параметрами являются E_c — амплитуда «зеркально отраженной» волны и β — отношение энергий «зеркальной» и «шумовой» компонент сигнала. В модели Накагами [2] в качестве модельных параметров выступают m — параметр «многолучевости» и $\overline{R^2}$ — второй момент распределения.

Поскольку экспериментальные распределения в значительном числе случаев не совпадают с теоретическими [1, 2], делаются попытки создания более сложных моделей. В статистической модели [3, 4] случайная компонента сигнала представляется пуассоновым шумом. Для определения функции распределения уровней сигнала априорно выбираются форма отдельного импульса и функция плотности вероятности амплитуд импульсов. В качестве модельных параметров распределения выступают E_c , m и E_r — эксцесс отдельного луча. (До настоящего времени нет данных о всесторонней экспериментальной проверке предложенного распределения.)

1. В данной работе мы постараемся на основе экспериментального материала обосновать следующее предположение: функция распределения уровней коротковолнового сигнала определяется большим числом модельных параметров, относительное влияние каждого из которых мало.

Это предположение не исключает возможности сильного влияния некоторой группы модельных параметров на распределение уровней отдельных реализаций. Однако при статистическом усреднении по реализациям за достаточно большой период наблюдения функция распределения должна зависеть только от нурмированной переменной.

2. Нами проведен статистический анализ записей амплитуд напряженности поля коротковолнового сигнала $\xi(t)$. Запись проводилась на восьми среднеширотных радиотрассах СССР, протяженностью от 1000 до 2800 км, диапазон рабочих частот — $7 \div 18$ МГц. Измерения осуществлялись компараторами FSM-5, и результаты измерений фиксировались самописцами Н-370. Длительность каждого сеанса записи 5 минут. Были обработаны записи за июль 1968 года, проводившиеся в период с 10.30 до 13.30 час местного солнечного времени в точке отражения. Общее количество обработанных пятиминутных сеансов равно 150.

Для каждой трассы и частоты волны значения уровня сигналов за весь период наблюдения представлены в виде интегрального распределения $P(x) = P((\xi - \xi_0)/\sigma_0)$, где ξ_0 — медианное значение уровня поля за месяц, σ_0^2 — дисперсия полученного распределения.

Вид функции распределения $P(x)$ не зависит от длины трассы и частоты волны; в точках $F(x) = 5$ и 95% разброс значений $F(x)$ не превышает $\pm 5\%$ от среднего значения. Полученный результат является основным аргументом в пользу сделанного в п. 1 предположения. В частности, из сопоставления данного результата с результатом работы [5] можно сделать вывод о слабом влиянии многолучевости на вид функции $P(x)$.

Если отсчитывать значения уровней сигнала от среднего уровня $\bar{\xi}$ каждой пятиминутной реализации, то коротковолновый сигнал можно рассматривать как последовательность знакопеременяющихся импульсов

$$\xi - \bar{\xi} = \sum_{v=1}^n (-1)^v a_v F\left(\frac{t - t_v}{\vartheta_v}\right). \quad (1)$$

Здесь $a_v = |\xi_v - \bar{\xi}|$ — «амплитуда» отдельного импульса, t_v — момент возникновения импульса, $\vartheta_v = t_{v+1} - t_v$ — длительность импульса, ξ_v — максимальное значение уровня сигнала в интервале ϑ_v .

Обработка экспериментальных данных в соответствии с представлением (1) позволяет сделать следующие выводы:

а) форма отдельного импульса $F(\theta)$ близка к треугольной (или, с несущественным отличием, к синусоидальной);

б) плотность вероятности амплитуд «положительных» импульсов имеет вид

$$W_a(a) da = \frac{1}{a_0} \exp(-a/a_0) da; \quad (2)$$

в) распределение длительности импульсов близко к виду

$$W_\vartheta(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\vartheta_0} \exp(-\vartheta/\vartheta_0) d\vartheta. \quad (3)$$

Здесь a_0 и ϑ_0 — соответственно среднее значение амплитуды «положительного» импульса и средняя длительность импульса. Вид распределений (2), (3) справедлив и для отдельной реализации и для всей совокупности реализаций. С помощью критерия Колмогорова был найден доверительный интервал для функций $W_a(a)$ и $W_\vartheta(\vartheta)$. Он равен 95%.

3. Найдем автокорреляционную функцию $\Psi(\tau)$ и функцию распределения $P(x)$ при следующих предположениях [6, 7]:

а) моменты возникновения импульсов t_v в интервале реализаций T распределены равномерно:

$$W(t_v) dt_v = dt_v/T; \quad (4)$$

б) все a_n и t_n для неперекрывающихся и все a_n, t_n, ϑ_n для перекрывающихся импульсов независимы между собой;

в) плотности распределений $W(a)$, $W(\vartheta)$, $W(t_n)$ задаются выражениями (2) — (4).

В силу условий (3), (4) случайный процесс (1) можно считать пуассоновым шумом. Распределение числа импульсов в интервале $(0—T)$ задается распределением Пуассона $P(n)$.

Спектральная плотность процесса $g_1(\omega)$ для неперекрывающихся импульсов ($\vartheta_n = t_{n+1} - t_n$) определяется выражениями

$$g_1(\omega)\delta(\omega - \omega') = \overline{c(\omega) c^*(\omega')},$$

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi(t) - \bar{\xi}(t)] e^{-i\omega t} dt = \sum_{\nu=1}^n (-1)^\nu a_\nu \vartheta_\nu f(\omega\vartheta_\nu) e^{-i\omega t_\nu},$$

$$f(\omega\vartheta_\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) \exp(-i\theta\vartheta_\nu\omega) d\theta.$$

Опуская несложные преобразования и вводя обозначения

$$K(\omega) = \overline{\vartheta_\nu^2 |f(\omega\vartheta_\nu)|^2}, \quad H^*(\omega) = \overline{\vartheta_\nu f^*(\omega\vartheta_\nu)},$$

$$J(\omega) = \overline{f(\omega\vartheta_\nu) \vartheta_\nu \exp(-i\omega\vartheta_\nu)},$$

получим

$$g_1(\omega) = 2\pi n_1 \left\{ \overline{a^2} K(\omega) - 2\overline{a^2} \operatorname{Re} \frac{H^*(\omega) J(\omega)}{1 + \varphi(\omega)} \right\}, \quad (5)$$

$\varphi(\omega)$ — характеристическая функция ϑ_ν , $n_1 = 1/\bar{\vartheta}$.

Если $\overline{a^2} = \overline{a^2} = a^2$ и форма импульса прямоугольная, получаем спектральную плотность обобщенного телеграфного сигнала [6]. В случае перекрывающихся импульсов

$$g_2(\omega) = 2\pi n_1 \left\{ \overline{a^2} K(\omega) - 2\overline{a^2} |H(\omega)|^2 \operatorname{Re} \frac{\varphi(\omega)}{1 + \varphi(\omega)} \right\}. \quad (6)$$

Для треугольной формы импульсов вычислены на ЭВМ автокорреляционные функции

$$\Psi_{1,2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{1,2}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega.$$

Для разных значений параметра n_1 определены радиусы корреляции, $\tau_{0.5}$ — интервал τ , на котором значения функции $\Psi(\tau)$ уменьшаются в два раза. Экспериментальные значения $\Psi(\tau)$ были найдены из выражения

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi(t_i) \xi(t_i + \tau) - \bar{\xi}(t)^2,$$

где N — число измерений.

Проведено сравнение теоретических и экспериментальных значений $\tau_{0.5}$ (при одном и том же значении n_1). Отклонения теоретических значений $\tau_{0.5}$ от экспериментальных не превышают 10%. Зависимости $\tau_{0.5}$

от частоты и длины трассы не обнаружено. Для разных реализаций $\tau_{0.5}$ изменяется в пределах $5 \div 12$ сек. Автокорреляционные функции $\Psi_1(\tau)$ и $\Psi_2(\tau)$ совпадают с точностью до 5%.

4. Вывод функции распределения $P(x)$ для случая неперекрывающихся импульсов связан с определенными математическими трудностями. Совпадение функций $\Psi_1(\tau)$ и $\Psi_2(\tau)$ дает некоторое основание ограничиться лишь случаем перекрывающихся импульсов.

Характеристическая функция отдельного импульса f_{x_v} имеет вид

$$f_{x_v}(u) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} W_a(a_v) da_v \int_0^{\infty} W_{\vartheta}(\vartheta_v) d\vartheta_v \int_{-T/2}^{T/2} \exp \left\{ i(-1)^v a_v F \left(\frac{t-t_v}{\vartheta_v} \right) u_v \right\} dt_v =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{\infty} W_a(a_v) da_v \int_0^{\infty} \vartheta_v W(\vartheta_v) d\vartheta_v \int_{(t-T/2)/\vartheta_v}^{(t+T/2)/\vartheta_v} \exp \{ i(-1)^v a_v F(\vartheta_v) u_v \} d\vartheta_v,$$
(7)

где

$$x_v = (-1)^v a_v F \left(\frac{t-t_v}{\vartheta_v} \right).$$

Характеристическая функция $f_T(u)$ n импульсов имеет вид

$$f_T(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) f(u/n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \exp(-T/\bar{\vartheta}) \frac{1}{\bar{\vartheta}^n} \prod_v \int_0^{\infty} W_a(a_v) da_v \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \vartheta_v W_{\vartheta}(\vartheta_v) d\vartheta_v \int_{(t-T/2)/\vartheta_v}^{(t+T/2)/\vartheta_v} \exp \{ i(-1)^v a_v u_v F(\vartheta_v) \} d\vartheta_v,$$
(8)

$f(u/n)$ — условная характеристическая функция.

Обозначая

$$\varphi(u) = \int_0^{\infty} W_a(a) da \int_0^{\infty} \vartheta W_{\vartheta}(\vartheta) d\vartheta \int_{(t-T/2)/\vartheta}^{(t+T/2)/\vartheta} \exp \{ -iau F(\vartheta) \} d\vartheta,$$

из (8) получим

$$f_T(u) = e^{-T/\bar{\vartheta}} \left\{ \operatorname{ch} \frac{|\varphi|}{\bar{\vartheta}} + \frac{\varphi}{|\varphi|} \operatorname{sh} \frac{|\varphi|}{\bar{\vartheta}} \right\}.$$
(9)

После выполнения предельного перехода $T \rightarrow \infty$ имеем

$$f(u) = \exp \left\{ \operatorname{Re} \int_0^{\infty} W(a) da \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(-iau F(\vartheta)) - 1] d\vartheta \right\}.$$
(10)

Плотность распределения $W(\xi - \bar{\xi})$, согласно [8], имеет вид ряда Эджворта:

$$W(\xi - \bar{\xi}) = \frac{\Phi^0(x)}{\sigma} + \frac{\lambda_4}{4! \sigma^5} \Phi^{(4)}(x) + \frac{\lambda_3^2}{72 \sigma^7} \Phi^{(6)}(x) + \dots,$$
(11)

где

$$\sigma = \sqrt{D(x)}, \quad x = \frac{\xi - \bar{\xi}}{\sigma}, \quad \lambda^m = \frac{1}{a^m} \int_{-\infty}^{\infty} F^m(\theta) d\theta,$$

$$\Phi^{(m)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^m}{dx^m} \exp(-x^2/2).$$

Для искомой функции распределения $P(x)$ получаем

$$P(x) = \varphi^0(x) + \frac{\lambda_4}{4! \sigma^4} \varphi^{(4)}(x) + \frac{\lambda_5^2}{72 \sigma^6} \varphi^{(5)}(x). \quad (12)$$

Функция $P(x)$ табулирована [9].

На рис. 1 изображена функция распределения (12) и экспериментальная функция распределения (точки). Согласно критерию Колмогорова, для интервала вероятностей 0,2—0,9 доверительный интервал сходимости экспериментального распределения к теоретическому равен 95%. Следует отметить тот факт, что при экспоненциальной форме импульса функция распределения (12) с точностью до третьего знака дает нормальный закон, что не совпадает с экспериментальным распределением.

Значительное расхождение экспериментальной и теоретической кривой в области значений вероятностей меньше 0,2 объясняется следующим. При выводе распределения (12) было принято, что законы распределений «положительных» и «отрицательных» амплитуд совпадают. Но распределение отрицательных амплитуд резко обрывается в области $a \leq \bar{\xi}$, что должно приводить к быстрому спаду теоретической кривой в области больших отрицательных значений уровней.

С учетом вышесказанного, представление экспериментального распределения теоретическим (12) можно считать удовлетворительным.

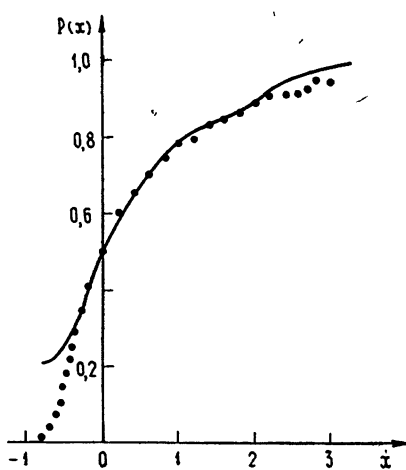


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн и ионосфера, изд. АН СССР, М., 1960.
2. M. Nakagami, Statistical methods in radio wave propagation, Pergamon Press, 1960.
3. И. С. Всехсвятская, Геомагнетизм и аэрономия, 2, № 4, 712 (1962).
4. И. С. Всехсвятская, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 10, 1490 (1968)
5. Э. И. Гинзбург, О. Г. Журавский, Л. Н. Ручкан, Геомагнетизм и аэрономия, 11, № 2, 343 (1971).
6. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
7. Я. И. Хургин, Научн. докл. высш. шк.—Радиотехника и электроника, 1, 96 (1958)
8. Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948.
9. Таблицы математической статистики, изд. АН СССР, М., 1960.

A STATISTICAL MODEL OF SHORT-WAVE RADIO SIGNAL FADING
AT OBLIQUELY REFLECTION FROM THE IONOSPHERE

E. I. Ginzburg, O. G. Zhuravskii

Rapid fadings of short-wave signals are modelled by Poisson pulse succession. The laws of the pulse amplitude and duration distribution are determined from the experiment. The auto-correlation function and the function of the signal level distribution are calculated. A comparison with the experiment is made.

УДК 538 56 : 533 9

ДВИЖУЩИЕСЯ ВОЗМУЩЕНИЯ ИОНИЗАЦИИ В ПОЛЕ СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

А. В. Гуревич

Рассматривается возмущение ионизации и температуры электронов в плазме в поле сильных электромагнитных волн. Показано, что усиленное поглощение волн в области их отражения приводит к появлению движущихся возмущений ионизации плазмы. Определены условия возникновения движущихся возмущений, их скорость и пространственная структура. Показано, что в слабонеоднородной плазме такие возмущения появляются в окрестности точки отражения волны и перемещаются навстречу волне, вызвавшей возмущение. Это приводит к генерации в плазме незатухающих нелинейных колебаний. Определена частота колебаний, она уменьшается с увеличением поглощаемой мощности волны.

Под взаимодействием поля электромагнитных волн электроны плазмы нагреваются [1], в результате изменяется ионизационный баланс и возникает возмущение ионизации плазмы [2, 3]. В области отражения поле волны возрастает [4]. Это приводит к резкому увеличению поглощения волны и усилению вызываемого ею возмущения плазмы [5]. Отметим, что возмущение плазмы в области отражения волн особенно усиливается при возникновении параметрической неустойчивости [6-8]. В этом случае волна может почти полностью поглощаться в тонком слое плазмы в окрестности точки отражения [9]. Таким образом, обычно имеет место усиленное поглощение волны в области ее отражения в плазме. Здесь будет показано, что это приводит к появлению движущихся возмущений ионизации и температуры плазмы*.

Распределение ионизации N и температуры электронов T_e в плазме в поле сильных электромагнитных волн описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \nabla(D_a \nabla N) - \nabla\left(D_{aT} \frac{N}{T_e} \nabla T_e\right) = q; \quad (1)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} - \frac{1}{N} \nabla(\kappa_e \nabla T_e) = -\delta_e \nu_e (T_e - T) + \frac{\sigma E_0^2}{3N}. \quad (2)$$

Здесь T — температура молекул или ионов (для простоты они приняты равными); D_a , D_{aT} и κ_e — коэффициенты амбиполярной диффузии, термодиффузии и электронной теплопроводности; ν_e — частота соударений электронов с молекулами, ионами; δ_e — средняя доля энергии, теряемой электроном при одном ударе; $q = q_i - q_{рек}$ — количество пар электронов и ионов, возникающих в 1 см^3 в 1 сек за счет ионизационных (q_i) и исчезающих за счет рекомбинационных процессов ($q_{рек}$); E_0 — амплитуда переменного электрического поля волны; σ — проводимость плазмы на частоте волны ω . Последний член в (2) описывает

* Движущиеся возмущения ионизации в поле сильных радиоволн, по-видимому, наблюдались в ионосфере Утлаутом и др. [10, 11].

нагрев электронов плазмы под воздействием поля радиоволны. Он резко возрастает в окрестности точки отражения волны $z=z_1$: $N(z_1) = m \omega^2 / 4\pi e^2$.

Рассмотрим малые возмущения плазмы, вызываемые волной. Линеаризуя уравнения (1), (2), а именно, полагая $N = N_0 + \Delta N$, $T_e = T + \Delta T_e$, $\Delta N \ll N_0$, $\Delta T_e \ll T$, имеем

$$\frac{\partial \Delta N}{\partial t} - D_a \frac{\partial^2 \Delta N}{\partial z^2} - D_{ar} \frac{N_0}{T} \frac{\partial^2 \Delta T_e}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0 \Delta N + \left(\frac{\partial q}{\partial T} \right)_0 \Delta T_e; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Delta T_e}{\partial t} - k_e \frac{\partial^2 \Delta T_e}{\partial z^2} = -\delta_e \nu_e \Delta T_e + B \delta(z - z_1) \quad (k_e = \nu_e / N_0). \quad (4)$$

В уравнении (4) учтено лишь поглощение волны вблизи точки отражения $z = z_1$. Здесь B — поток поглощаемой энергии на один электрон, равный $B = \frac{1}{N_0} \frac{dP}{ds}$, где $P(s)$ — полная поглощаемая мощность, ds —

элемент площади в плоскости, ортогональной направлению распространения волны z , $N_0 = N(z_1)$ — концентрация плазмы в точке отражения, $\delta(x)$ — дельта-функция*.

Будем искать решения уравнений (3), (4) в виде бегущих волн: ΔN , $\Delta T_e \sim f(z + v_0 t)$. Тогда (3), (4) переписываются в виде

$$v_0 \frac{d \Delta N}{dx} - D_a \frac{d^2 \Delta N}{dx^2} - D_{ar} \frac{N_0}{T} \frac{d^2 \Delta T_e}{dx^2} = \left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0 \Delta N + \left(\frac{\partial q}{\partial T_e} \right)_0 \Delta T_e; \quad (5)$$

$$v_0 \frac{d \Delta T_e}{dx} - k_e \frac{d^2 \Delta T_e}{dx^2} = -\delta_e \nu_e \Delta T_e + B \delta(x); \quad (6)$$

$$x = z - z_1 = z - z_0 + v_0 t. \quad (7)$$

Рассмотрим вначале однородное уравнение (6) (без последнего члена). Подставляя в него

$$\Delta T_e = C e^{-kx}, \quad (8)$$

находим

$$k^2 + k \frac{v_0}{k_e} - \frac{\delta_e \nu_e}{k_e} = 0, \quad (9)$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{v_0^2 + 4 \delta_e \nu_e k_e} - v_0}{2 k_e}, \quad k_2 = \frac{-\sqrt{v_0^2 + 4 \delta_e \nu_e k_e} - v_0}{2 k_e}.$$

Учтем теперь последний член в (6). Он равен нулю всюду, кроме точки $x = 0$. В этой точке вторая производная $\frac{d^2 \Delta T_e}{dx^2}$ обращается в бесконечность, а первая производная терпит разрыв:

$$\left(\frac{d \Delta T_e}{dx} \right)_{x \rightarrow +0} - \left(\frac{d \Delta T_e}{dx} \right)_{x \rightarrow -0} = - \int \frac{B}{k_e} \delta(x) dx = - \frac{B}{k_e}. \quad (10)$$

Отсюда следует, что искомое решение уравнения (6) имеет вид

* Конкретный механизм поглощения для дальнейшего несуществен. Необходимо лишь, чтобы размер области усиленного поглощения вблизи точки отражения волны был мал по сравнению с характерными длинами $L_T = \sqrt{k_e / \delta_e \nu_e}$ и $L_N = \sqrt{-D_a / \left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0}$ (см. ниже (23)).

$$\Delta T_e = C \times \begin{cases} \exp(-k_1 x) & (x > 0) \\ \exp(-k_2 x) & (x < 0) \end{cases}, \quad (11)$$

$$C = \frac{B}{k_e(k_1 - k_2)} = \frac{B}{\sqrt{v_0^2 + 4\delta_e \nu_e k_e}},$$

x определяется (7).

Рассмотрим теперь уравнение (5). Его решение представим в виде $\Delta N = \Delta N_1 + \Delta N_2$. Здесь ΔN_1 — решение однородной части уравнения (5):

$$\Delta N_1 = \begin{cases} C_3 \exp(-k_3 x) & (x > 0) \\ C_4 \exp(-k_4 x) & (x < 0) \end{cases}, \quad (12)$$

$$k_{3,4} v_0 + D_a k_{3,4}^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0 = 0,$$

$$k_3 = \frac{\sqrt{v_0^2 - 4D_a \left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0} - v_0}{2D_a}, \quad k_4 = \frac{-\sqrt{v_0^2 - 4D_a \left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0} - v_0}{2D_a}.$$

В (12) $\left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0 = \left(\frac{\partial q_i}{\partial N} \right)_0 - \left(\frac{\partial q_{\text{рек}}}{\partial N} \right)_0$, причем всегда $\left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0 < 0$ (в противном случае в плазме имеется ионизационная неустойчивость). Поэтому $k_3 > 0$, $k_4 < 0$ и возмущение ΔN_1 , как и ΔT_e , убывает с ростом $|x|$. Далее, ΔN_2 — вынужденное решение неоднородного уравнения:

$$\Delta N_2 = C_2 \Delta T_e = -B \times \begin{cases} A(k_1) \exp(-k_1 x) & (x > 0) \\ A(k_2) \exp(-k_2 x) & (x < 0) \end{cases}, \quad (13)$$

$$A(k) = \frac{D_{\text{ар}} \frac{N_0}{T} k^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial T_e} \right)_0}{\sqrt{v_0^2 + 4\delta_e \nu_e k_e} \left[D_a k^2 + v_0 k + \left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0 \right]}.$$

Константы C_3 и C_4 определяются из условий непрерывности ΔN и скачка производной $\frac{d\Delta N}{dx}$ при $x = 0$. Первое из этих условий дает

$$C_3 - BA(k_1) = C_4 - BA(k_2). \quad (14)$$

Интегрируя по dx уравнение (5) в малой окрестности точки $x = 0$ и учитывая непрерывность ΔN и ΔT_e и скачок производной $\left(\frac{d\Delta T_e}{dx} \right)_{x=0}$ определенной формулой (10), имеем

$$\begin{aligned} -D_a \left[\left(\frac{d\Delta N}{dx} \right)_{x \rightarrow +0} - \left(\frac{d\Delta N}{dx} \right)_{x \rightarrow -0} \right] &= D_{\text{ар}} \frac{N_0}{T} \left[\left(\frac{d\Delta T_e}{dx} \right)_{x \rightarrow +0} - \right. \\ &\left. - \left(\frac{d\Delta T_e}{dx} \right)_{x \rightarrow -0} \right] = -\frac{BD_{\text{ар}} N_0}{k_e T}. \end{aligned} \quad (15)$$

Зная конкретный вид $\Delta N(x)$, т. е. (12), (13), приходим к второму соотношению:

$$-C_3 k_3 + k_1 BA(k_1) + C_4 k_4 - k_2 BA(k_2) = \frac{Bk_{\text{т}} N_0}{k_e T} \quad \left(k_{\text{т}} = \frac{D_{\text{ар}}}{D_a} \right). \quad (16)$$

Из (14), (16) следует, что

$$C_3 = \frac{B}{k_4 - k_3} \left[\frac{k_T N_0}{k_e T} + (k_2 - k_4) A(k_2) - (k_1 - k_4) A(k_1) \right], \quad (17)$$

$$C_4 = \frac{B}{k_4 - k_3} \left[\frac{k_T N_0}{k_e T} + (k_2 - k_3) A(k_2) - (k_1 - k_3) A(k_1) \right].$$

Полученные выражения полностью определяют искомое решение. Вид функций $\Delta N(x)$ и $\Delta T_e(x)$ показан на рис. 1.

Точка отражения радиоволны, как следует из (7), есть $x = 0$, т. е.

$$z = z_1 = z_0 - v_0 t. \quad (18)$$

Она движется навстречу возмущающей волне со скоростью v_0 . В точке отражения $\varepsilon = 1 - 4\pi e^2 N/m\omega^2 = 0$, т. е.

$$1 = \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} (N_0 + \Delta N_{x=0}).$$

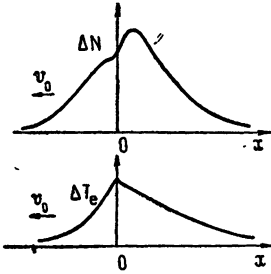


Рис. 1.

Подставляя сюда $\Delta N_{x=0}$ из (12), (13), (17), имеем

$$\frac{m\omega^2}{4\pi e^2} - N_0 = \frac{BD_a}{\left[v_0^2 - 4D_a \left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0 \right]^{1/2}} \left\{ (k_4 - k_2) A(k_2) - (k_3 - k_1) A(k_1) - \frac{k_T N_0}{k_e T} \right\}. \quad (19)$$

Это соотношение определяет скорость v_0 . Из (19) следует, что рассматриваемые здесь решения существуют лишь в области прозрачности $\omega^2 > \omega_0^2 = 4\pi e^2 N_0/m$.

Переходя к анализу выражения (19) для скорости неоднородности v_0 , примем вначале, что

$$v_0^2 \ll 4\delta_e v_e k_e. \quad (20)$$

Это условие обычно выполнено в силу того, что коэффициент электронной теплопроводности в плазме велик в сравнении с коэффициентом амбиполярной диффузии $k_e \gg D_a^*$. Соотношение (19) в этом случае упрощается и принимает вид

$$q = \frac{1 + \alpha\zeta}{(y^2 + \zeta)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{1 + y + (y^2 + \zeta)^{1/2}} + \frac{1}{1 - y + (y^2 + \zeta)^{1/2}} - \frac{2}{1 + \alpha\zeta} \right\} \quad (y = v_0 L_T / 2D_a). \quad (21)$$

Здесь ζ , α и q — безразмерные параметры:

$$\zeta = \left(\frac{L_T}{L_N} \right)^2, \quad \alpha = -T \left(\frac{\partial q}{\partial T_e} \right)_0 / k_T N_0 \left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0, \quad q = \left(\frac{m\omega^2}{4\pi e^2 N_0} - 1 \right) \frac{4k_e T}{Bk_T L_T}, \quad (22)$$

L_T и L_N — характерные пространственные размеры, определяющие установление температуры электронов (L_T) и ионизации плазмы (L_N):

$$L_T = (k_e / \delta_e v_e)^{1/2}, \quad L_N = \left[-D_a / \left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0 \right]^{1/2}. \quad (23)$$

* При высоких степенях ионизации плазмы это соотношение может нарушиться, так как коэффициент амбиполярной диффузии сильно возрастает с увеличением степени ионизации [12].

Соотношение (21) нетрудно разрешить. При этом получаем следующее выражение для скорости неоднородности:

$$v_0^2 = \frac{4D_a^2}{L_T^2} \left\{ \frac{1}{16q^2} [\pm \sqrt{[q(1+\zeta) + 2(1-\alpha\zeta)]^2 - 16q\zeta(1-\alpha)} - [q(1+\zeta) + 2(1-\alpha\zeta)]^2 - \zeta] \right\}. \quad (24)$$

Выражение в квадратных скобках в формуле (24) должно быть больше нуля, q также больше нуля. Поэтому решение существует лишь при $\zeta > 1/\alpha^2$.

Зависимость скорости v_0 от q (т. е. от поглощаемой мощности и от $\Delta N = m\omega^2/4\pi e^2 - N_0$) показана на рис. 2. Из рисунка видно, что если $\zeta > 1/\alpha$, то скорость $v_0 \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow 0$, т. е. при $\omega \rightarrow \omega_0$. С ростом q скорость v_0 уменьшается.

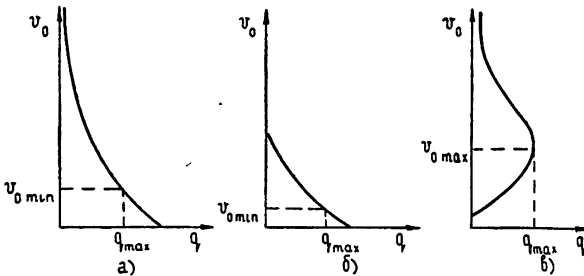


Рис. 2. а) $\alpha > 1$, $\zeta > 1/\alpha$; б) $\alpha > 1$, $1/\alpha^2 < \zeta < 1/\alpha$; в) $\alpha < 1$.

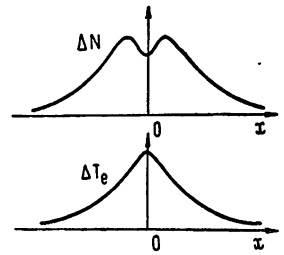


Рис. 3.

Важно, однако, что v_0 не может сделаться равной нулю. Действительно, распределение возмущений температуры и концентрации для покоящейся неоднородности имеет вид, приведенный на рис. 3. Видно, что в точке отражения волны $x = 0$ концентрация плазмы $N = N_0 + \Delta N(x)$ имеет минимум*. Но в этом случае волна не может дойти до точки отражения, и такие решения невозможны. Необходимо, чтобы ход $\Delta N(x)$ вблизи точки отражения $x = 0$ в области $x < 0$ (т. е. с той стороны, откуда приходит волна) был монотонным. Это приводит к условию $\left(\frac{\partial \Delta N}{\partial x}\right)_{x \rightarrow -0} \geq 0$, которое и определяет минимальную возможную скорость неоднородности $v_0 \text{ min}$.

* Причина образования минимума в том, что, согласно условию (15), скачок производной ΔN противоположен по знаку скачку производной ΔT_e . Поскольку температура ΔT_e всегда имеет максимум при $x = 0$, то концентрация ΔN при $v_0 = 0$ должна иметь в этой точке минимум. Физически это объясняется тем, что в области $x \sim 0$, где велики градиенты $\frac{d^2 \Delta T_e}{dx^2}$ и $\frac{d^2 \Delta N}{dx^2}$, главную роль играют диффузионные процессы, приводящие к установлению гидродинамически равновесной конфигурации. Если при этом $k_T > 0$, то возмущения концентрации и температуры противоположны по знаку.

Здесь предполагалось, что $k_T > 0$. Если термодиффузионное отношение $k_T < 0$, то возмущения ΔN и ΔT_e в окрестности точки $x = 0$ имеют одинаковый вид и решение в форме покоящегося возмущения возможно. Иначе говоря, возможен покоящийся слой дополнительной ионизации. Он, однако, неустойчив. Действительно, точка отражения волны совпадает в этом случае с максимумом слоя. При малом понижении концентрации в максимуме волна проходит сквозь слой, не поглощаясь, и он разрушается.

Используя решение (12) — (17), находим, что при выполнении условия (20) скорость $v_{0 \min}$ определена кубичным уравнением

$$y_{\min}^3 - \frac{1}{4} \frac{(\alpha\zeta - 1)[1 + (\alpha + 2)\zeta]}{(\alpha\zeta + 1)} y_{\min}^2 + \frac{\zeta(\zeta - 1)}{2} y_{\min} - \frac{\zeta^2(\zeta - 1)(\alpha^2\zeta - 1)}{4(1 + \alpha\zeta)} = 0$$

$$(y_{\min} = v_{0 \min} L_T / 2D_a). \quad (25)$$

На рис. 4 показана область существования движущихся возмущений при различных значениях параметра $\alpha = -T \left(\frac{\partial q}{\partial T_e} \right)_0 / k_T N_0 \left(\frac{\partial q}{\partial N} \right)_0$.

Кривая 1 на этих рисунках соответствует $q = 0$, кривая 2 — $v_0 = v_{0 \min}$. Область существования движущихся возмущений заштрихована. Если $\alpha \geq 1$, то q (при фиксированных α и ζ) монотонно нарастает с уменьшением v_0 : от $q = 0$ до значения $q_{\max}^0 = q(v_{0 \min})$, определенного формулами

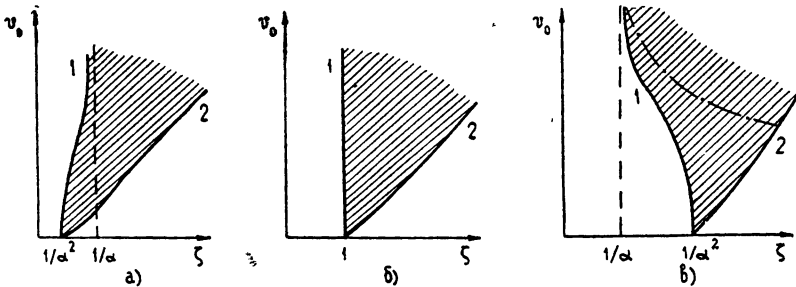


Рис. 4. а) $\alpha > 1$; б) $\alpha = 1$; в) $\alpha < 1$.

(21), (25) (см. рис. 2а, б). Если же $\alpha < 1$, то q нарастает с уменьшением v_0 лишь до некоторого значения q_{\max} , а затем убывает. Значение q_{\max} дается формулой (21) при $v_0 = v_{0 \max}$. Скорость $v_{0 \max}$ определена условием $\left(\frac{\partial q}{\partial v_0} \right)_{\alpha, \zeta} = 0$. Из (24) получаем

$$v_{0 \max}^2 = \frac{4 D_a^2}{L_T^2} \left\{ \left[\frac{\zeta(1-\alpha) + \sqrt{\zeta^2(1-\alpha)^2 + \zeta(1+\zeta)(\alpha\zeta-1)(1-\alpha)/2}}{\alpha\zeta - 1} \right]^2 - \zeta \right\}. \quad (26)$$

Выражение в квадратных скобках должно быть больше нуля. Поэтому $v_{0 \max}$ существует лишь при $\alpha < 1$. Зависимость $v_{0 \max}$ от ζ показана на рис. 4в штрих-пунктиром.

Выше предполагалось, что скорость v_0 не очень велика (см. (20)). Это условие выполнено, если $y^2 \ll (k_e/D_a)^2$. Из рисунков видно, что при малых значениях q последнее неравенство может и не выполняться. Полагая поэтому $q \rightarrow 0$, находим непосредственно из (19)

$$v_0 = \frac{2D_a}{L_T q^{1/3}} \left(\frac{k_e}{2D_a} \right)^{2/3} \left\{ \alpha\zeta - 1 + \frac{D_a}{k_e} (\alpha - 1) \right\}^{1/3}. \quad (27)$$

Выражение (27) справедливо при $y^2 \gg (k_e/D_a)^2$, где $y = v_0 L_T / 2D_a$. Видно, что скорость v_0 при $\zeta > 1/\alpha$ по-прежнему неограниченно возрастает при $q \rightarrow 0$. Это, разумеется, справедливо, лишь если применимы уравнения (1), (2), т. е. при $v_0 < c$, где c — скорость звука в плазме.

Физический смысл рассматриваемых здесь решений вполне прозрачен. Поглощение волны вблизи точки отражения приводит к нагреву, а следовательно, и к изменению концентрации плазмы. Благодаря это-

му точка отражения волны сдвигается. Если концентрация нарастает с увеличением температуры электронов ($q > 0$), то возмущенная область перемещается навстречу волне, вызывающей возмущение плазмы. Так возникает движущееся возмущение плазмы.

Выше предполагалось, что концентрация невозмущенной плазмы N_0 постоянна. Примем теперь, что плазма слабонеоднородна, т. е. N медленно меняется в зависимости от z . В этом случае среду можно рассматривать как локально однородную, т. е. при анализе характера возмущения плазмы электромагнитной волной использовать однородные решения, считая лишь, что параметры среды медленно меняются в зависимости от z . Начальная точка отражения волны z_0 определена условием $N(z_0) = m\omega^2/4\pi e^2$. Вблизи нее $N(z)$ можно считать линейной функцией z , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{m\omega^2}{4\pi e^2} - N_0 &= \bar{N}(z_0) - N(z) = \left(\frac{dN}{dz}\right)_0 (z_0 - z), \\ q &= \beta(z_0 - z), \quad \beta = \frac{1}{N_0} \left(\frac{dN}{dz}\right)_0 \frac{4k_e T}{Bk_\tau L_T}. \end{aligned} \quad (28)$$

Если $\zeta > 1/a^2$, то, как следует из предыдущего анализа (см. рис. 4), вблизи точки отражения ($q \rightarrow 0$) появляется возмущение, которое перемещается в сторону меньших z со скоростью v_0 , определенной формулами (24), (27). По мере удаления от точки z_0 параметр q возрастает, а скорость v_0 уменьшается. На рис. 4 этому движению соответствует перемещение точки сверху вниз. Когда возмущение достигнет точки z_k , скорость v_0 сравнивается с $v_{0\min}$ или с $v_{0\max}$. Возмущение концентрации достигает при этом максимального значения q_{\max} , при котором еще может существовать движущееся возмущение. После этого возмущение распадается. Тогда волна вновь проходит до начальной точки отражения и здесь опять возникает движущееся возмущение. Перемещаясь навстречу волне, оно вновь достигает точки z_k , распадается там и процесс повторяется сначала. Таким образом, в неоднородной плазме в поле сильной волны возбуждаются незатухающие колебания, сопровождающиеся последовательной генерацией и исчезновением движущихся возмущений и осцилляциями точки отражения волны (от $z = z_0$ до $z = z_k$)*.

Для возникновения колебаний необходимо, чтобы возмущение было достаточно велико:

$$\frac{\alpha B}{T(k_e \delta_e v_e)^{1/2}} \gg L_T \left(\frac{dN}{dz}\right)_0. \quad (29)$$

Частота колебаний определяется временем распространения возмущения от точки z_0 до точки z_k :

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi \left[\int_{z_k}^{z_0} \frac{dz}{v_0(z)} \right]^{-1} = \frac{16\pi TD_a \delta_e v_e}{Bk_\tau J} \frac{1}{N_0} \left(\frac{dN_0}{dz}\right)_0, \\ J &= \int_0^{q_{\max}} dq/y(q), \quad y = v_0 \Delta_l / 2D_a. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь учтено, что точка z_k задана выражением

$$z_k = z_0 - q_{\max}/\beta,$$

* Эти колебания в известном смысле аналогичны релаксационным колебаниям плазмы в Q-машине [13].

q_{\max} — максимальное значение q (при данных α и ζ), определенное формулой (21) при $v_0 = v_{0 \min}$ (25) или $v_0 = v_{0 \max}$ (26); зависимость $y(q)$ дается формулой (24). Отсюда видно, что частота колебаний убывает с ростом поглощаемой мощности и с уменьшением градиента $\left(\frac{dN}{dz}\right)_0$.

Заметим, что вблизи точки отражения волны скорость перемещающихся возмущений может превысить скорость звука. В этом случае здесь генерируются слабые ударные волны ионизации.

Автор признателен В. Л. Гинзбургу за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, 70, 201 (1960), УФН, 70, 393 (1960)
2. Ю. П. Райзер, УФН, 99, 687 (1969)
3. А. В. Гуревич, Геомагнетизм и аэронавигация, 5, 70 (1965); 7, 291 (1967).
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
5. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 48, 701 (1965)
6. В. П. Силин, ЖЭТФ, 48, 1679 (1965).
7. W. L. Kruer, P. K. Kaw, J. M. Dawson, C. Oberman, Phys. Rev. Lett., 24, 987 (1970).
8. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 59, 2215 (1970).
9. К. Ф. Сергейчев, И. Р. Геккер, Письма в ЖЭТФ, 5, 183 (1967).
10. W. F. Utlaut, Geophys. Res., 75, 6402 (1970)
11. W. F. Utlaut, E. J. Violette, A. K. Paul, J. Geophys. Res., 75, 6429 (1970).
12. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, УФН, 91, 609 (1967).
13. А. В. Гуревич, Р. А. Салимов, Н. С. Бучельникова, ТВТ, 7, 1075 (1969)

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
25 мая 1971 г.

TRAVELING IONIZATION DISTURBANCES IN A FIELD OF STRONG ELECTROMAGNETIC WAVES

A. V. Gurevich

The disturbance of the electron ionization and the temperature in a plasma in the field of strong electromagnetic waves is considered. A stronger wave absorption in the reflection region is shown to lead to traveling disturbances of the plasma ionization. The conditions of appearance of the travelling disturbances, their velocity and spatial structure are determined. In a weakly inhomogeneous plasma such disturbances are shown to occur in the vicinity of the wave reflection point and travel toward a wave which produces the disturbance. This leads to generation of undamped nonlinear plasma oscillations. The oscillation frequency is determined which is decreased with the growth of the absorbed wave power.

УДК 621.378.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЧАСТОТНОГО ОКГ НА НЕОДНОРОДНО УШИРЕННОМ АКТИВНОМ ВЕЩЕСТВЕ

Н. Д. Миловский, Л. Л. Попова

Проведено исследование устойчивости одночастотной генерации одномерной модели лазера бегущей волны на неоднородно уширенном активном веществе по отношению к широкому классу возмущений, зависящих от координаты и от времени. Получены аналитические выражения для формы «контура линии усиления» для спектральных компонент возмущений поля при произвольном отношении ширины линии люминесценции к естественной ширине. Показано, что с ростом этого отношения уменьшается критическое превышение накачки над пороговым значением, при котором возникает неустойчивость

В работах [1-3] была исследована устойчивость одночастотного режима одномерной модели лазера бегущей волны на однородно уширенном активном веществе. Было показано, что из-за многофотонного взаимодействия при достаточно больших превышениях накачки n^0 над пороговым значением n_n^0 ($\lambda = n^0/n_n^0 - 1 > \lambda_c$) стационарный режим становится неустойчивым.

В настоящей заметке рассмотрена аналогичная задача для ОКГ на неоднородно уширенном активном веществе и показано, что неоднородное уширение существенно уменьшает значение λ_c .

Рассматривается одномерная модель ОКГ бегущей волны на активном веществе, неоднородное уширение которого возникает из-за доплеровского смещения собственной частоты каждой молекулы, движущейся в $+\xi$ -направлении со скоростью $\beta \xi_0 = v/v_\phi = v(\sqrt{\epsilon\mu}/c)$ относительно неподвижной системы координат. Потери резонатора лазера предполагаются равномерно распределенными по всему объему (длине l).

Исходной системой уравнений для описания процессов в таком ОКГ служит совокупность уравнений Максвелла и уравнений для матриц плотности двухуровневой системы

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + 2\Gamma \frac{\partial E}{\partial \tau} &= -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \langle (\rho + \rho^*) \rangle, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - i\Omega_0 + 1 + \beta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \rho &= i\gamma E n, \\
 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma^2 + \beta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) n - \gamma^2 n^0 &= 2i\gamma E (\rho - \rho^*),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

в которой сведены безразмерные переменные и координаты: $E = [(E \mathbf{d}_{1,2})/\hbar \sqrt{\gamma_\perp \gamma_\parallel}]$ — напряженность электрического поля, $\rho = [4\pi N |\mathbf{d}_{1,2}|^2 \rho_{1,2}/\hbar \epsilon \sqrt{\gamma_\perp \gamma_\parallel}]$ — поляризация, $n = [4\pi N |\mathbf{d}_{1,2}|^2 (\rho_{2,2} - \rho_{1,1})/\hbar \epsilon \sqrt{\gamma_\perp \gamma_\parallel}]$ — инверсная разность населенностей, $\rho_{1,1}, \rho_{1,2}, \rho_{2,2}$ — элементы матрицы плотности двухуровневой молекулы, $\gamma_\perp^{-1}, \gamma_\parallel^{-1}$ — попереч-

ное и продольное времена релаксации соответственно, $\gamma^2 = \gamma_{\parallel} \gamma_{\perp}^{-1}$, $\xi = z \gamma_{\perp} (\sqrt{\epsilon \mu} / c)$ — координата, $\tau = t \gamma_{\perp}$ — время, $|d_{1,2}|$ — матричный элемент электродипольного перехода, N — концентрация. Правая часть в первом уравнении системы (1) представляет собой поляризацию, усредненную по функции распределения молекулы по скоростям, которая для простоты предполагается лоренцевской [4]:

$$f(\beta) = \frac{\bar{\beta} / \pi}{\beta^2 + \bar{\beta}^2}. \quad (2)$$

Предполагается также, что одна из собственных частот холодного резонатора лазера $\Omega_{q_0}^* = (2\pi q_0 / l)$ совпадает с частотой центра линии Ω_0 .

В этом случае стационарное решение системы (1) с учетом закона распределения (2) имеет вид

$$E_{ct} = \bar{E} \cos [\Omega_0 (\tau - \xi)] = \bar{E} \cos [+],$$

$$\langle \bar{\rho} \rangle = \left\langle \frac{(\gamma n^0 / 2) \bar{E} (t - \Omega_0 \beta)}{1 + \bar{E}^2 + \Omega_0^2 \beta^2} e^{i[+]} \right\rangle = \frac{(\gamma n^0 / 2) \bar{E} i e^{i[+]}}{\sqrt{1 + \bar{E}^2 (\Omega_0 \bar{\beta} + \sqrt{1 + \bar{E}^2})}}, \quad (3)$$

$$\langle \bar{n} \rangle = \left\langle \frac{n^0 (1 + \Omega_0^2 \beta^2)}{1 + \bar{E}^2 + \Omega_0^2 \beta^2} \right\rangle = n^0 \frac{(\Omega_0 \bar{\beta} + 1 / \sqrt{1 + \bar{E}^2})}{\Omega_0 \bar{\beta} + \sqrt{1 + \bar{E}^2}},$$

где амплитуда поля \bar{E} определяется параметрами резонатора и активной среды:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \bar{E}^2} &= 0,5 \left[-\Omega_0 \bar{\beta} + \sqrt{\Omega_0^2 \beta^2 + (2\Omega_0 n^0 / \Gamma)} \right] \equiv \\ &\equiv 0,5 \left[-\Omega_0 \bar{\beta} + \sqrt{\Omega_0^2 \beta^2 + 4(\lambda + 1) (\Omega_0 \bar{\beta} + 1)} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (3) описывает процесс одночастотной генерации лазера бегущей волны на частоте центра линии люминесценции активной среды.

В качестве возмущений стационарного решения (1) рассматриваются распространяющиеся вместе с основной волной возмущения поля $e = \text{Re} \{ [e_R(\tau, \xi) - i e_I(\tau, \xi)] e^{i[+]}, \text{ поляризации } [\sigma_R(\tau, \xi) + i \sigma_I(\tau, \xi)] e^{i[+]} \text{ и инверсной разности населенностей } \eta(\tau, \xi), \text{ амплитуды которых медленно меняются в зависимости от координаты и времени по сравнению с } \cos [+]. \text{ Допплеровская ширина линии люминесценции предполагается малой по сравнению с оптической частотой, так что комплексную амплитуду } \langle \sigma_R \rangle + i \langle \sigma_I \rangle \text{ возмущения макрополяризации}$

$$\langle (\sigma_R + i \sigma_I) e^{i[+]} \rangle \equiv (\langle \sigma_R \rangle + i \langle \sigma_I \rangle) e^{i[+]} \quad (5)$$

можно считать медленно меняющейся функцией координаты и времени

Линеаризуя (1) вблизи стационарного состояния (3) и используя метод Ван-дер-Поля, можно получить линейную систему уравнений для медленных амплитуд возмущений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau} + \Gamma \right) (e_R - i e_I) &= -i \Omega_0 (\langle \sigma_R \rangle + i \langle \sigma_I \rangle), \\ \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - i \Omega_0 \beta + 1 + \beta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\sigma_R + i \sigma_I) - i \frac{\gamma}{2} \bar{E} \eta &= \end{aligned} \quad (6)$$

$$= \frac{(i\gamma n^0)}{2} \frac{1 + \Omega_0^2 \beta^2}{1 + \bar{E}^2 + \Omega_0^2 \beta^2} (e_R - ie_I),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma^2 + \beta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \eta + 2\gamma \bar{E} \sigma_I = 2i\gamma \left(\frac{i\gamma n^0}{2} \right) \bar{E} \frac{e_R - \beta \Omega_0 e_I}{1 + \bar{E}^2 + \Omega_0^2 \beta^2},$$

аналогичную системе (1) работы [1].

Поскольку поле в кольцевом резонаторе является периодической функцией координаты $e(\xi) = e(\xi + l)$, то решение уравнений (6) нужно искать в виде суперпозиции периодических функций

$$(e_R, e_I, \sigma_R, \sigma_I, \eta) = [e_R^0(p), e_I^0(p), \sigma_R^0(p), \sigma_I^0(p), \eta^0(p)] \exp(p\tau - i\alpha_q \xi), \quad (7)$$

где $i\alpha_q = i(2\pi q/l)$ и $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Из уравнений (6) можно установить связь между спектральными компонентами микрополяризации $\sigma_{R,I}^0(p) \equiv \sigma_{R,I}^0$ и спектральными компонентами возмущений поля $e_{R,I}^0(p) \equiv e_{R,I}^0$:

$$\begin{aligned} -i(\sigma_R^0 + i\sigma_I^0) &= (\gamma n^0/2) (\Omega_0^2 \beta^2 + 1 + \bar{E}^2)^{-1} \{ -(\gamma^2 \bar{E}^2/2)(1 + i\beta \Omega_0)(p - \\ &- i\beta \alpha_q + 2)(e_R^0 + ie_I^0) + [(p + 1 - i\beta \alpha_q + i\beta \Omega_0)(p + \gamma^2 - i\beta \alpha_q)(\Omega_0^2 \beta^2 + 1) - \\ &- (\gamma^2 \bar{E}^2/2)(1 - i\beta \Omega_0)(p - i\beta \alpha_q)] (e_R^0 - ie_I^0) \} \{ (p + \gamma^2 - i\beta \alpha_q) [(p + \\ &+ 1 - i\beta \alpha_q)^2 + \Omega_0^2 \beta^2] + \gamma^2 \bar{E}^2 (p + 1 - i\beta \alpha_q) \}^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для получения макрополяризации необходимо усреднить (8) по функции распределения (2), что, как известно [3], сводится к сумме вычетов в особых точках произведения правых частей (8) и (2) в верхней (или нижней) полуплоскости комплексного β (рис. 1). Особые точки (8) и (2) являются простыми полюсами и могут быть определены при любом значении параметров $\Omega_0, \gamma^2, \bar{E}^2, \alpha_q, \beta^2$. Однако в дальнейшем для простоты будем считать $\gamma^2 = 1$, тем более, что этот случай представляет наибольший практический интерес.

На рис. 1 изображено примерное расположение полюсов (8) и (2):

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -i\alpha_q^{-1} (p + 1), \\ \beta_{1,2} &= \pm i\Omega_0^{-1} \sqrt{(p + 1)^2 + \bar{E}^2 + \Delta\beta_{1,2}(\alpha_q/\Omega_0)}, \\ \beta_{3,4} &= \pm i\sqrt{1 + \bar{E}^2} \Omega_0^{-1}, \\ \beta_{5,6} &= \pm i\bar{\beta}, \end{aligned} \quad (9)$$

в комплексной плоскости β для действительных положительных значений параметров $\bar{\beta}, \Omega_0, \bar{E}^2$ и α_q . Из рис. 1 видно, что полюс β_0 находится в (Ω_0/α_q) раз дальше от действительной оси, чем полюсы $\beta_{3,4}$ и $\beta_{5,6}$. Вклад β_0 в макрополяризацию по порядку величины составляет примерно $(\alpha_q/\Omega_0)^2$ часть вклада любого другого полюса. Кроме полюса β_0 , поправки второго и первого порядков малости по этому параметру вносят в макрополяризацию малые добавки $\Delta\beta_{1,2}(\alpha_q/\Omega_0)$ в выражениях для полюсов $\beta_{1,2}$ и члены $-i\beta\alpha_q$ в числителе выражения (8). Учет таких поправок в правых частях уравнений (6) эквивалентен учету старших производных (второй и более высокого порядка) по координате в левых частях этих уравнений. Однако при выводе уравнений (6) старшие производные от медленных амплитуд поля предполагались пренебрежимо

малыми, поэтому учет вышеупомянутых поправок является недопустимым превышением точности. А это значит, что правильное выражение для усредненной поляризации может быть получено только в том слу-

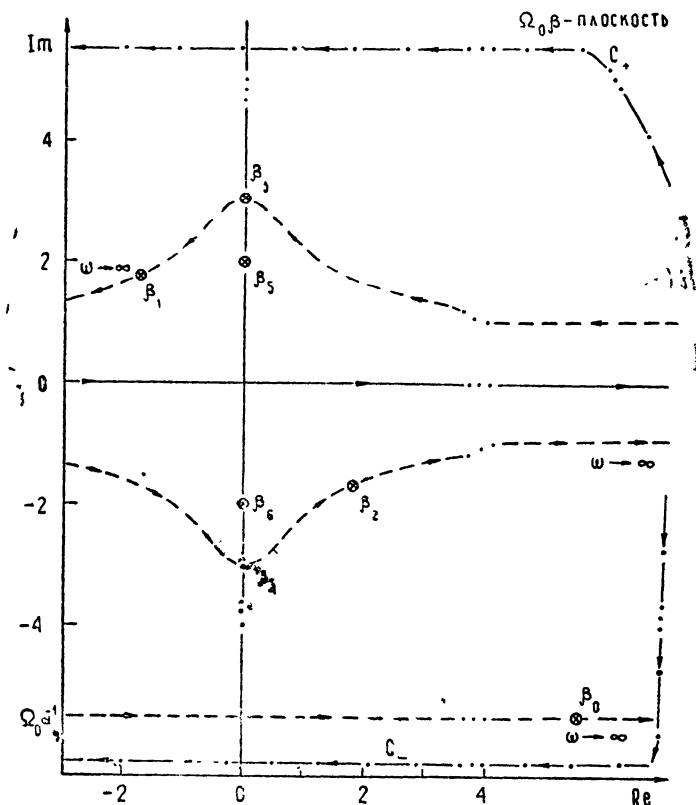


Рис. 1. Картина возможного расположения полюсов функции $[\sigma_T(\beta) - i\sigma_R(\beta)]/f(\beta)$ в комплексной плоскости $\Omega_0\beta$. Пунктирные линии указывают траектории движения полюсов при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$. Особо отмечены положения полюсов в случае $\bar{E}^2=8$, $\omega=3$, $\Omega_0\bar{\beta}=2$, $\alpha_q>0$, $\Omega_0>0$, $\alpha_q^{-1}\Omega_0\gg 1$. Штрих-пунктирными линиями C_+ и C_- обозначены два возможных пути интегрирования в комплексной плоскости $\Omega_0\beta$.

чае, если не удерживать члены $\beta \frac{\partial}{\partial \xi}$ в операторах уравнений для поляризации и инверсной разности населенностей отдельной молекулы.

Подставляя выражения для спектральных компонент усредненной поляризации в уравнения для спектральных компонент поля, можно найти характеристическое уравнение (аналогичное уравнению (3.7) работы [1]), которое может быть представлено в виде двух независимых характеристических уравнений:

$$(2/\Omega_0 n^0)(p - i\alpha_q + \Gamma)R - \left\{ \frac{(\Omega_0\bar{\beta}) [(p+1)^2 + \bar{E}^2 - (p+1)]}{p \sqrt{(p+1)^2 + \bar{E}^2} [\Omega_0^2\bar{\beta}^2 - (p+1)^2 - \bar{E}^2]} - \frac{(\Omega_0\bar{\beta}) (\bar{E}^2 / \sqrt{1 + \bar{E}^2})}{p (\Omega_0^2\bar{\beta}^2 - 1 - \bar{E}^2)} \right\}$$

$$\left. - \frac{(\Omega_0^2 \bar{\beta}^2 - 1)(p + 1) + \bar{E}^2}{(\Omega_0^2 \bar{\beta}^2 - 1 - \bar{E}^2) [\Omega_0^2 \bar{\beta}^2 - (p + 1)^2 - \bar{E}^2]} \right\}_R = 0; \quad (10a)$$

$$(2/\Omega_0 n^0)(p - i\alpha_q + \Gamma)_I - \left\{ \frac{(\Omega_0 \bar{\beta}) \sqrt{(p + 1)^2 + \bar{E}^2}}{(p + 1) [\Omega_0^2 \bar{\beta}^2 - (p + 1)^2 - \bar{E}^2]} - \frac{(\Omega_0/\bar{\beta}) (\bar{E}^2/\sqrt{1 + \bar{E}^2})}{(p + 1)(\Omega_0^2 \bar{\beta}^2 - 1 - \bar{E}^2)} - \frac{(\Omega_0^2 \bar{\beta}^2 - 1)(p + 1)^2 - \bar{E}^2}{(p + 1)(\Omega_0^2 \bar{\beta}^2 - 1 - \bar{E}^2) [\Omega_0^2 \bar{\beta}^2 - (p + 1)^2 - \bar{E}^2]} \right\}_I = 0. \quad (106)$$

Уравнения (10 а) и (10 б) описывают законы распространения амплитудных $e_R(\tau, \xi)$ и фазовых $e_I(\tau, \xi)$ возмущений в горячем резонаторе и переходят в случае однородного уширения ($\Omega_0 \bar{\beta} \rightarrow 0$) в соответствующие уравнения (3.7) работы [1]. Если параметр $-i\alpha_q$ считать комплексным, $-i\alpha_q = -i\alpha + \omega$, то на уравнения (10 а) и (10 б) можно смотреть как на параметрические границы D -разбиения (параметром является частота $p = i\omega$), разделяющие плоскость $-i\alpha_q^*$ на области устойчивости и неустойчивости [3]. В этом случае $\omega(\omega)$ характеризует инкремент нарастания $\omega(\omega)l$ (или декремент затухания, если $\omega < 0$) в горячем резонаторе спектральной компоненты возмущения поля с частотой $\Omega_0 + \omega$ (ω — расстройка частоты возмущения от частоты центра линии Ω_0). Зависимость $\alpha(\omega) = \omega(1 + \Delta(\omega))$ характеризует дисперсию в активной среде горячего резонатора, т. е. определяет зависимость фазовых скоростей $v_\phi = (\Omega_0 + \alpha(\omega))(c/\sqrt{\epsilon\omega})(\Omega_0 + \omega)^{-1}$ спектральных компонент возмущений от частоты. Дисперсия в большинстве случаев пренебрежимо мала $\Delta(\omega) \ll 1$, поэтому форма каждой из параметрических кривых (годографов) $\omega(\alpha)$ почти соответствует форме «контура линии усиления» для возмущений $(\omega(\omega) + \Gamma)l$.

На рис. 2 изображены четыре варианта D -разбиения плоскости комплексного параметра $-i\alpha_q$. Восемь годографов $K_i^R(\omega)$ и $K_i^I(\omega)$ рис. 2 рассчитаны по формулам (10 а) и (10 б) с помощью ЭВМ при $\Gamma = 0,1$; $\lambda = 15$; $\Omega_0 \bar{\beta}_i = 0; 1; 3; 5$ соответственно для $i = 1, 2, 3, 4$. На каждый из них, ввиду малости дисперсии, можно смотреть как на «контур линии усиления» для соответствующих возмущений (амплитудных e_R и фазовых e_I). В случае однородного уширения ($\Omega_0 \bar{\beta} = 0$), как следует из рисунка (см. годографы K_1^R и K_1^I), а также из работ [1–3], многофотонное взаимодействие оказывает влияние только на инкремент нарастания амплитудных возмущений $\omega_R(\omega)$, фазовые же возмущения распространяются в горячем резонаторе, не взаимодействуя с сильным полем. Они усиливаются $(\omega_I(\omega) + \Gamma) > 0$ исключительно за счет стационарного распределения инверсной разности населенностей, которая частично «подсажена» интенсивным полем генерации. Поэтому зависимость декремента затухания фазовых возмущений ($\omega_I < 0$) от частоты ω (см. K_1^I рис. 1) совпадает с формой контура линии однородно уширенного активного вещества.

* Заметим, что физический смысл на плоскости $-i\alpha_q$ имеют только чисто мнимые дискретные значения этого параметра.

Как следует из рис. 2, с ростом параметра неоднородного уширения линии $\Omega_0 \bar{\beta}$ «контура линии усиления» фазовых возмущений K_i^I начинает изменять свою форму. За счет активных атомов, центральные частоты

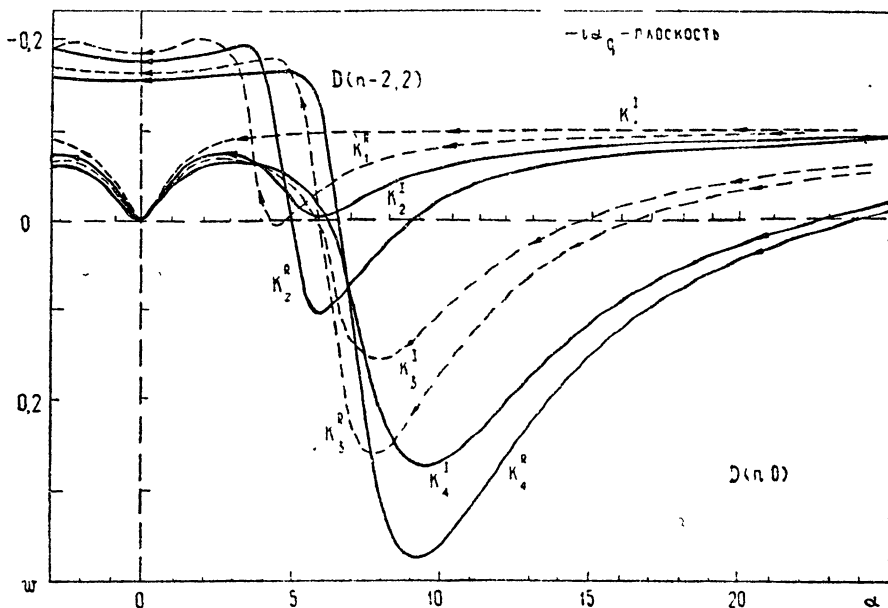


Рис. 2. D -разбиение плоскости комплексного параметра $-i\alpha q(\omega) = -i\alpha(\omega) + w(\omega)$ на области устойчивости $D(n, 0)$ и неустойчивости $D(n-k, k)$. В области $D(n-k, k)$ находится k корней характеристического уравнения (10) с положительной действительной частью. Частотные годографы $K_i(K_i^R, K_i^I)$ построены по формулам (10а) и (10б) для $\gamma^2=1$, $\Gamma=0,1$, $\lambda=15$ и $\Omega_0 \bar{\beta}_i$ ($\Omega_0 \bar{\beta}_1=0$, $\Omega_0 \bar{\beta}_2=1$, $\Omega_0 \bar{\beta}_3=3$, $\Omega_0 \bar{\beta}_4=5$).

которых смещены от Ω_0 и которые из-за этого не принимают участия в стационарной генерации, происходит дополнительное, по сравнению с однородно уширенным веществом, усиление спектральных компонент возмущений. Появляются характерный провал в центре «контура линии усиления» и два симметричных максимума, которые растут с ростом $\Omega_0 \bar{\beta}$ и ростом λ . При определенной связи между $\Omega_0 \bar{\beta}$ и λ может появиться инкремент нарастания возмущений на частотах этих максимумов. Зависимость критического превышения накачки над пороговым значением Λ_c (превышение, при котором появляется положительный инкремент $w_I > 0$) от параметра неоднородного уширения $\Omega_0 \bar{\beta}$ представлена на рис. 3. Сравнивая кривые K_i^I с кривой K_1^I , можно оценить влияние атомов, не принимающих участия в стационарной генерации, на процесс усиления фазовых возмущений.

Из-за многофотонного взаимодействия «контура линии усиления» для амплитудных возмущений для однородно уширенного вещества существенно отличается от «контура линии усиления» для фазовых возмущений не только по форме. Отличие состоит еще и в том, что спектральные компоненты амплитудных возмущений с частотами $\Omega_0 + \omega$ и $\Omega_0 - \omega$ взаимодействуют друг с другом [6, 7], поэтому их нельзя считать независимо усиливающимися. Из рис. 2 (ср. K_i^R и K_i^I) можно оценить влияние многофотонного взаимодействия на процесс усиления амплитудных возмущений и сравнить его с влиянием на этот процесс активных атомов,

не участвующих в стационарной генерации. На рис. 3 показано, что критическое превышение накачки над пороговым значением λ_c для амплитудных возмущений всегда меньше соответствующего превышения Δ_c для фазовых возмущений. Однако с ростом $\Omega_0 \bar{\beta}$ это различие становится незначительным, и при $\Omega_0 \bar{\beta} \gg 3$ они практически совпадают.

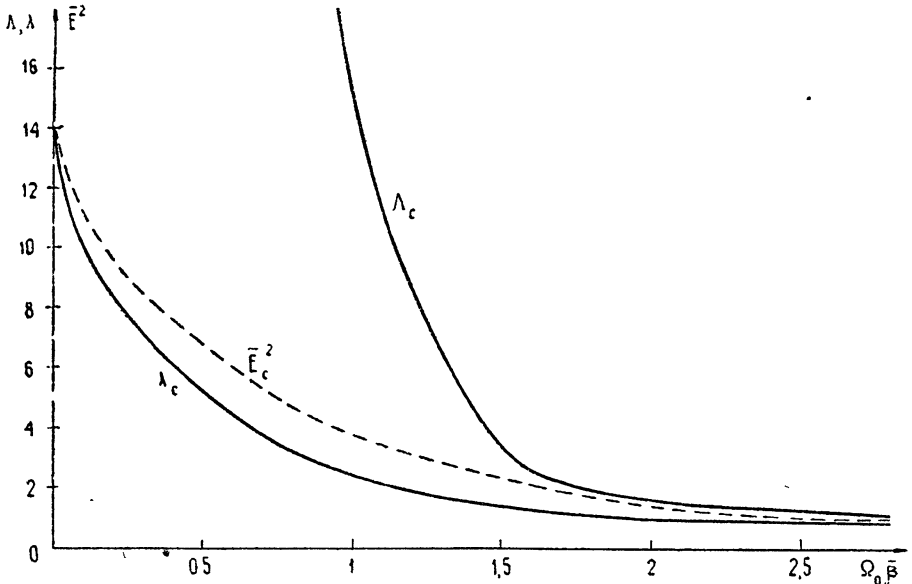


Рис. 3. Зависимости критических превышений накачки над пороговым значением для амплитудных (λ_c) и фазовых (Δ_c) возмущений от параметра неоднородного уширения $\Omega_0 \bar{\beta}$. Пунктирная кривая \bar{E}_c^2 описывает зависимость критической интенсивности стационарной генерации от $\Omega_0 \bar{\beta}$.

Представляет интерес найти величину критической интенсивности, которая может служить для качественных оценок пригодности вещества для достижения мощной устойчивой стационарной генерации [3]. Соответствующая зависимость представлена пунктиром на рис. 3.

В заключение необходимо отметить, что настоящая теория позволяет:

аналитически исследовать формы провалов в «контурах линий усиления» для амплитудных и фазовых возмущений и оценить область частот, в пределах которой возможно возникновение неустойчивости;

установить наличие трех различных механизмов усиления амплитудных и фазовых возмущений и оценить влияние каждого из них на этот процесс;

найти закон изменения критической интенсивности устойчивой стационарной одночастотной генерации от $\Omega_0 \bar{\beta}$ и оценить по порядку величины мощность этой генерации.

Авторы выражают благодарность В. И. Таланову за постоянный интерес и внимание к работе, В. И. Беспалову, Я. И. Ханину и Е. И. Якубовичу за полезную дискуссию, а также В. И. Петрухиной за составление программы и расчеты на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Risken, K. Nummedal, J. Appl. Phys., **39**, 4662 (1968).
2. H. Risken, K. Nummedal, Phys. Lett., **26A**, 275 (1968).
3. Н. Д. Миловский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **14**, № 1, 93 (1971).
4. Е. И. Якубович, ЖЭТФ, **55**, 7, 304 (1968).
5. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, изд. Наука, М., 1965
6. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутиан, ЖЭТФ, **49**, 1605 (1965)
7. В. М. Арутюнян, Е. Г. Конечян, В. О. Чалтыкян, ЖЭТФ, **59**, вып. 1 (7), 195 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
15 апреля 1971 г.

ON STABILITY OF A SINGLE-FREQUENCY LASER ON INHOMOGENEOUSLY
BROADENED ACTIVE MATERIAL

N. D. Milovskii, L. L. Popova

An investigation has been made of the single-frequency generation stability of a one-dimensional model of a travelling-wave laser on an inhomogeneously broadened active material with respect to a wide class of perturbations depending on the coordinate and time. Analytical expressions are obtained for the form of the „amplification line contour“ for the spectral components of the field perturbations at the arbitrary ratio of the luminescent line width to the natural width. It is shown that a critical pump value at which the instability occurs is decreased with the growth of this ratio

УДК 621.378.33

АНАЛИЗ МЕТОДИКИ НАПОЛНЕНИЯ ЯЧЕЕК ДЛЯ КВАНТОВОГО СТАНДАРТА ЧАСТОТЫ НА ПАРАХ Rb⁸⁷

Г. А. Мишаков, А. И. Пихтелев, Ю. М. Сапожников, А. А. Ульянов

Исследовано влияние различных физических процессов на воспроизводимость ячеек для квантового стандарта частоты на Rb⁸⁷. Экспериментально достигнута точность воспроизведения частоты спектральной линии газовой ячейки $2 \cdot 10^{-11}$.

Повышение точности воспроизведения частоты наиболее широко используемого квантового стандарта частоты на парах рубидия весьма актуально. Точность воспроизведения частоты его определяется, в основном, точностью воспроизведения частоты спектральной линии газовой ячейки, которая зависит от рода и давления буферного газа, наполняющего ячейку. Поэтому необходим анализ процессов, определяющих состав и давление газовой смеси при откачке, наполнении и отпайке газовых ячеек. Такие данные в литературе отсутствуют. Имеется работа [1], в которой получена воспроизводимость $\sim 2 \cdot 10^{-9}$, в работе [2] нами была предложена методика, позволившая получить воспроизводимость частоты $\sim (1 \div 2) \cdot 10^{-10}$. В настоящей работе проведен анализ физических процессов, влияющих на воспроизводимость частоты квантовых ячеек, позволивший улучшить ее до величины $\sim 2 \cdot 10^{-11}$.

1. ПЕРЕТЕКАНИЕ ГАЗА В ЯЧЕЙКУ

Наполнение откаченной ячейки производится из сравнительно большого буферного объема через узкий канал. В общем случае температура ячейки отличается от температуры буферного объема. По мере поступления газа в ячейку его температура будет выравниваться с температурой ячейки (ячейка находится в термостате рубидиевого дискриминатора). Процесс выравнивания температуры практически идет намного быстрее, чем процесс натекания. Для вязкого течения (имеющего место в реальных условиях) процесс натекания будет описываться уравнением [3]

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{\pi r^4}{16\eta l T_0 k} \left\{ \frac{[(N_0 - N_1) k T_0]^2}{V_0^2} - \frac{N_1^2 k^2 T_1^2}{V_1^2} \right\}, \quad (1)$$

решение которого имеет вид

$$n_1(t) = \frac{n_0 T (e^{t/\tau} - 1)}{(T_0 \gamma + T_1) e^{t/\tau} - (T_0 \gamma - T_1)}, \quad (2)$$

где $\tau = 8\eta l V_1 T_0 / P_0 \pi r^4 T_1$ — постоянная времени наполнения, r , l — радиус канала и его длина, η — вязкость газовой смеси, T_0 — температура буферного объема, V_0 , V_1 , T_1 — объем и температура ячейки, N_0 , N_1 — число атомов газа в буферном объеме и наполняемой ячейке, k — постоянная

ная Больцмана, $n_1 = N_1/V_1$, $n_0 = N_0/V_0$, $\gamma = V_1/V_0 \ll 1$. Переходя от измерения давления к измерению частоты, получим

$$\Delta f(t) = \alpha_{\text{см}} P_0 \frac{e^{t/\tau} - 1}{e^{t/\tau} + 1}, \quad (3)$$

где $P_0 = n_0 k T_0$ — давление газа в буферном объеме, $\alpha_{\text{см}}$ — коэффициент сдвига частоты спектральной линии на единицу давления газовой смеси [2].

На рис. 1 представлены теоретические и экспериментальные кривые

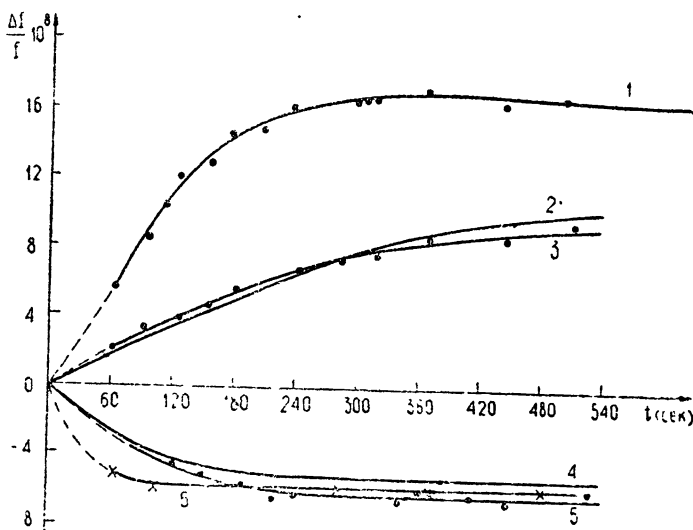


Рис. 1. Кривые наполнения ячеек газовой смесью:

1—экспериментальная кривая наполнения ячейки аргон-неоновой газовой смесью ($P_0=6,5$ тор, $r=0,25$ мм, $l=50$ мм), 2, 3—теоретическая и экспериментальная кривые наполнения ячейки неонием ($P_0=2,6$ тор, $r=0,25$ мм, $l=50$ мм), 4, 5—теоретическая и экспериментальная кривые наполнения ячейки аргонием ($P_0=7$ тор, $r=0,25$ мм, $l=50$ мм), 6—экспериментальная кривая наполнения ячейки аргонием ($P_0=7$ тор, $r=0,4$ мм, $l=50$ мм).

изменения частоты спектральной линии ячейки во времени для различных каналов и давлений газа. Из рис. 1 видно, что результаты расчета и эксперимента находятся в достаточном соответствии и что для узких каналов и малых давлений процесс наполнения должен быть длительным. Узкие каналы, как будет видно из дальнейшего, необходимы для того, чтобы не изменить существенно давление в процессе отпайки ячейки от вакуумной системы.

Во время эксперимента наполняемая ячейка устанавливается в специальном измерительном стандарте частоты (рис. 2), ее частота сравнивается с образцовой. При подходе к заданному значению частоты процесс наполнения заканчивается и ячейка отпайвается от вакуумной системы. В процессе наполнения ячейки из буферного объема давление газовой смеси в ней и частота спектральной линии непрерывно изменяются в соответствии с выражением (3). Процесс измерения частоты занимает некоторое время $\tau_{\text{изм}}$, причем, как правило, увеличение точности измерения сопровождается увеличением $\tau_{\text{изм}}$. За время измерения давление газа в ячейке будет меняться, что приведет к погрешности воспроизведения частоты. Для ее уменьшения необходимо затягивать процесс наполнения. Однако условие $\tau \gg \tau_{\text{изм}}$ приводит к слишком большому постоянному времени ($\tau \sim 5-6$ час), которые весьма

неудобны на практике. Для устранения этой трудности нами использовался ступенчатый процесс наполнения.

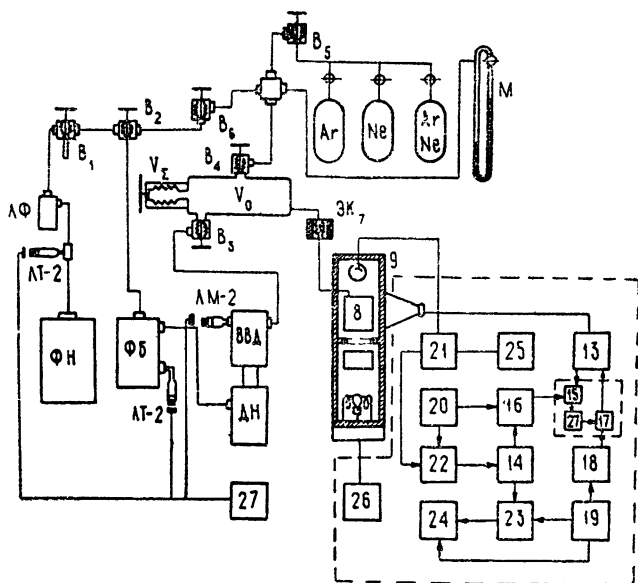


Рис. 2. Блок-схема установки для единичного наполнения ячеек с контролем давления по частоте атомного перехода:

$B_1 \dots B_6$ — высоковакуумные вентили, ЭК₇ — электромагнитный клапан, 8 — наполняемая ячейка, 9 — рубидиевый дискриминатор, 13 — клистронный генератор, 14 — генератор кварцевый, 15 — смеситель, 16 — умножитель, 17 — фазовый детектор, 18 — синтезатор, 19 — блок опорной частоты, 20 — НЧ генератор, 21 — селективный усилитель, 22 — фазовый детектор, 23 — компаратор, 24 — счетчик электронный, 25 — осциллограф, 26 — ВЧ генератор, 27 — УПЧ.

При ступенчатом наполнении в буферном объеме V_0 выставляется необходимое давление P_0 по манометру с некоторой точностью ΔP при закрытом кране ЭК₇. Затем кран ЭК₇ открывается, и после натекания газа в ячейку измеряется ее частота. Если она не соответствует заданной, то в небольших пределах ее можно изменять, меняя давление газа в ячейке переменным объемом V_2 . Погрешность воспроизведения частоты в этом случае определяется выражением

$$\sigma_n = \frac{\alpha_{\text{с.}} \Delta P \tau_{\text{изм.}}}{f_0 \tau} \quad (4)$$

При групповом наполнении ячеек, когда группа ячеек калибруется по измерительной ячейке, появляются дополнительные погрешности воспроизведения частот спектральных линий, обусловленные различием в температурах измерительной и наполняемых ячеек и разбросом входных каналов по радиусам. Первая погрешность связана с тем, что плотность атомов в измерительной ячейке, имеющей температуру T_1 ,

$$n_1 = \frac{n_0 T_0 (e^{h\nu} - 1)}{T_1 (e^{h\nu} + 1)}, \quad (5)$$

будет отлична от плотности атомов в наполняемых ячейках, имеющих температуру T_2 ,

$$n_2 = \frac{n_0 T_0 (e^{h\nu} - 1)}{T_2 (e^{h\nu} + 1)}, \quad (6)$$

что приведет к тому, что частоты их спектральных линий будут отличаться на величину

$$\sigma_T \approx \frac{\alpha_{\text{см}} P_0}{f_0} \frac{\Delta T}{T}, \quad (7)$$

где $T = T_1 T_2 / T_0$ и $\Delta T = T_1 - T_2$.

Для аргон-неоновой смеси 45% Ar и 55% Ne при $T_1 = 300^\circ\text{K}$ и $T_2 = 300^\circ\text{K}$ имеем $\sigma_T / P_0 \Delta T = 7 \cdot 10^{-11} \text{ мор}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$. Экспериментально при этих условиях была получена величина $\sim 8 \cdot 10^{-11} \text{ мор}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$.

Вторая погрешность связана с разбросом входных каналов по радиусам и определяется величиной

$$\sigma_r = \frac{\alpha_{\text{см}} (t/\tau) e^{t/\tau}}{(1 + e^{t/\tau})^2} \chi_r, \quad (8)$$

где $\chi_r = dr/r$ — максимальный разброс по радиусам. Для $\chi_r = 1\%$ и $t/\tau = 1,5$ $\sigma_r = 3,6 \cdot 10^{-9} \text{ мор}^{-1}$. Однако с увеличением времени наполнения погрешность быстро падает, и при $t/\tau = 10$ ее значение уменьшается до величины $\sim 6 \cdot 10^{-12} \text{ мор}^{-1}$.

2. ТЕРМОДИФФУЗНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ СМЕСИ БУФЕРНЫХ ГАЗОВ

Желание повысить точность воспроизведения частоты ячеек привело нас к опытам с весьма большими постоянными времени наполнения. Однако при этом было обнаружено явление постоянного сползания частоты ячеек. Это сползание не объяснялось рассмотренными ранее процессами. Исследования показали, что в этом случае мы имеем дело с явлением термодиффузного разделения смеси газов, отличающихся по атомному весу. Необходимый для этого разделения градиент температуры получался между буферным объемом, находящимся при комнатной температуре, и ячейкой, помещенной в термостат измерительного стандарта частоты ($T_1 = 330^\circ\text{K}$), которые были соединены каналом сечением S и длиной l .

Процесс термодиффузии через узкий канал описывается уравнениями [4]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta n_n}{n} \right) &= - \frac{n D_{1,2} \Delta T S}{T_0 l} \left[\frac{\Delta n_n}{n} \frac{1}{\ln T_1 / T_0} - k_T \right] \left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_1} \right), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta n_T}{n} \right) &= - \frac{n D_{1,2} \Delta T S}{T_0 l} \left[\frac{\Delta n_T}{n} \frac{1}{\ln T_1 / T_0} + k_T \right] \left(\frac{1}{N_0} + \frac{1}{N_1} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где Δn_n и Δn_T — изменение плотности легкой и тяжелой компонент, k_T — коэффициент термодиффузии, n — плотность атомов обоих видов, $D_{1,2}$ — коэффициент взаимной диффузии. Решения уравнений (9) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n_n}{n} &= k_T \ln \frac{T_1}{T_0} (1 - e^{-t/\tau'}), \\ \frac{\Delta n_T}{T} &= - k_T \ln \frac{T_1}{T_0} (1 - e^{-t/\tau'}), \end{aligned} \quad (10)$$

$\tau' = \frac{N_0 N_1}{N_0 + N_1} \frac{l T \ln T_1 / T_0}{n D_{1,2} S \Delta T}$ — постоянная времени процесса.

Изменение частоты ячейки, обусловленное этим процессом, определяется выражением

$$\frac{\Delta f}{P_0 \Delta T} = \frac{k_T}{T_0} (\alpha_{Ne} \gamma_{Ne} - \alpha_{Ar} \gamma_{Ar}) \quad (11)$$

и для смеси 45% Ar и 55% Ne $k_T = 0,06$ [5] при $T = 330^\circ\text{K}$ равно

$$\frac{\Delta f}{P_0 \Delta T} = 0,045 \text{ ц} \cdot \text{тор}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}, \quad (12)$$

что согласуется по знаку и величине с наблюдавшимся эффектом. Кроме этого, термодиффузия приводит к оползанию ТКЧ газовой смеси из-за нарушения ее процентного содержания [2]. Эту величину можно оценить по формуле

$$\frac{d\delta}{f_0} = \frac{\delta_{Ne} - \delta_{Ar}}{f_0} d\gamma. \quad (13)$$

Разделение газовой смеси, определяемое процессом термодиффузии, ограничивается величиной $k_T \Delta T / T$, что дает при $\Delta T \approx 30^\circ\text{C}$ и $d\gamma \leq 0,6\%$ значение $d\delta / f_0 \leq 0,6 \cdot 10^{-11} \text{ тор}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$.

Наблюдение эффекта термодиффузии при столь малой разности температур (и небольшом времени) говорит о большой чувствительности используемой нами установки к процессам, влияющим на состав газовой смеси. Эта чувствительность может быть использована при определении некоторых газовых постоянных и исследовании физических процессов в газах.

Таким образом, процесс наполнения нельзя затягивать как угодно долго, так как это приводит к разделению газовых смесей. С другой стороны, применение входных каналов большого радиуса для быстрого наполнения ячеек нежелательно из-за технологической погрешности частоты.

3. ИЗМЕНЕНИЕ СОСТАВА И ДАВЛЕНИЯ ГАЗА В ЯЧЕЙКЕ ПРИ ЕЕ ОТПАЙКЕ

Используя полученные выше результаты, можно с высокой точностью выставлять частоту спектральной линии газовой ячейки. Однако процесс отпайки ее от вакуумной системы может изменить выставленное давление и привести к дополнительной погрешности воспроизведения частоты. Она может быть вызвана перераспределением давления газовой смеси в системе за счет ее прогрева и выделения посторонних газов из стекла при отпайке [6]. Для погрешности, обусловленной этими причинами, легко получить выражение

$$\sigma_{\text{техн}} = \frac{\alpha_{\text{см}} P_0}{2f_0} \frac{\pi r^2 \Delta l}{V_1} \frac{T_1}{T} + \frac{r \Delta l}{V_1} \sum_i \alpha_i m_i, \quad (14)$$

где T — температура отпайки, Δl — прогреваемая часть канала при отпайке, m_i , α_i — количество i -й компоненты газа, выделенного единицей поверхности стекла, и его постоянная.

На рис. 3 представлена расчетная зависимость первой погрешности от радиуса канала при $T = 600^\circ\text{K}$, $T = 320^\circ\text{K}$, $\Delta l = 1 \text{ см}$, $V_1 = 100 \text{ см}^3$ и $P_0 = 20 \text{ тор}$. В литературе недостаточно данных, чтобы оценить вторую погрешность, но на том же графике приведена экспериментальная зависимость суммарной технологической погрешности от радиуса канала. Из рис. 3 видно, что с уменьшением радиуса канала технологическая погрешность резко уменьшается, но использование очень узких каналов

не целесообразно из-за больших постоянных времени процесса наполнения и термодиффузионного разделения газовой смеси.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что для получения воспроизводимости $\sim 1 \cdot 10^{-11}$ необходимо выбрать канал радиусом $\sim 0,25$ мм. Экспериментально при таком радиусе канала нами была достигнута воспроизводимость $2 \cdot 10^{-11}$.

Таким образом, анализ физических процессов, изложенный выше, позволил на порядок улучшить полученные ранее результаты и получить воспроизводимость квантовых ячеек $2 \cdot 10^{-11}$.

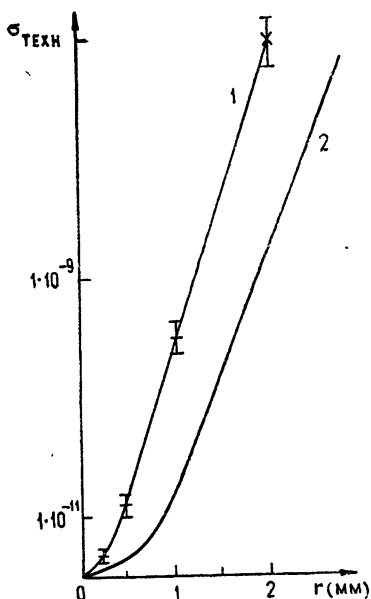


Рис. 3. Зависимость технологической погрешности частоты от радиуса канала:

1—экспериментальная кривая для общей технологической погрешности, 2—теоретическая кривая для первого члена технологической погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Гужва, В. С. Жёлнеров, Е. С. Мамедова, К. М. Москаленко, Н. Н. Якобсон, Вопросы радиоэлектроники, сер. XII, вып. 10, 101 (1966).
2. А. И. Пихтелев, М. П. Беспалова, Ю. М. Сапожников, Г. А. Мишаков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 5, 712 (1970).
3. И. К. Кикоин, А. К. Кикоин, Молекулярная физика, ГИФМЛ, М., 1963.
4. К. Э. Грю, Т. Л. Иббс, Термическая диффузия в газах, ИЛ, М., 1959.
5. Н. Б. Варгафтик, Справочник по теплофизическим свойствам жидкостей и газов, ГИФМЛ, М., 1963.
6. С. Дешман, Научные основы вакуумной техники, изд. Мир, М., 1964.

Поступила в редакцию
28 декабря 1970 г.,
после доработки
20 сентября 1971 г.

ANALYSIS OF CELL FILLING-UP PROCEDURE FOR QUANTUM FREQUENCY STANDARD ON Rb^{87} VAPOURS

G. A. Mishakov, A. I. Pikhteleu, Yu. M. Sapozhnikov, A. A. Uliyanov

The influence of different physical processes on the cell reproducibility for the quantum frequency standard on Rb^{87} vapours has been investigated. The reproducibility accuracy of the spectral line frequency of gas cell $2 \cdot 10^{-11}$ is experimentally achieved.

УДК 539.293

ТЕПЛОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКА В ЛАЗЕРНОМ ЛУЧЕ

Э. М. Эпштейн

Рассмотрен тепловой баланс в собственном полупроводнике в присутствии лазерного луча с энергией фотона, меньшей ширины запрещенной зоны, в результате чего основную роль играет поглощение свободными носителями. Показано, что существует порог мощности излучения, выше которого стационарное распределение температуры невозможно. При типичных значениях параметров пороговая мощность ~ 1 квт, время развития неустойчивости $\sim 10^{-8} + 1$ сек.

1. В настоящей работе мы хотим обратить внимание на один возможный механизм лавинного нарастания температуры под действием лазерного луча, который в принципе может привести к разрушению кристалла.

Рассмотрим собственный полупроводник, в котором распространяется лазерный луч с частотой $\omega < E_g/\hbar$, где E_g — ширина запрещенной зоны. Первоначально слабое поглощение луча свободными носителями при внутрizonных переходах вызывает некоторое повышение температуры внутри кристалла, что приводит к увеличению концентрации свободных носителей, сопровождаемому ростом коэффициента поглощения и, следовательно, дальнейшим разогревом кристалла. Благодаря конечным размерам образца, этот процесс приводит к установлению некоторого стационарного распределения температуры. Мы покажем, однако, что для данных граничных условий существует порог интенсивности лазерного луча, выше которого стационарное распределение температуры оказывается невозможным. Такая тепловая неустойчивость по существу представляет собой высокочастотный тепловой пробой и имеет много общего с тепловым пробоем в постоянном электрическом поле [1] и с тепловым взрывом при экзотермических химических реакциях [2].

Рассмотрим наиболее простую для анализа ситуацию. Пусть лазерный луч распространяется вдоль оси образца цилиндрической формы, причем $R \ll L \ll \alpha_1^{-1}$, где R и L — соответственно радиус и длина образца, α_1 — коэффициент поглощения света при начальной температуре. В дальнейшем мы убедимся, что температура, при которой происходит потеря тепловой устойчивости, лишь немного превышает начальную температуру, и поэтому можно принять, что поглощение света на длине образца мало вплоть до порога неустойчивости (точный критерий будет указан ниже). При указанных условиях можно считать образец бесконечным, а плотность светового потока постоянной вдоль образца. Радиус поперечного сечения лазерного луча равен ρ ($\lambda \ll \rho \leq R$, где λ — длина световой волны), распределение энергии по сечению луча предполагается однородным. Предположим также, что ρ много больше диффузионной длины носителей. При этом условии концентрация носителей в каждой точке однозначно определяется температурой в этой точке.

Коэффициент внутризонного поглощения пропорционален концентрации носителей и, следовательно, зависит от температуры по закону

$$\alpha(T) = \alpha_0 \exp(-T_0/T), \quad (1)$$

где $T_0 = E_g/2k$, k — постоянная Больцмана. Величина α_0 , вообще говоря, зависит от температуры, но по степенному закону, и этой зависимостью мы будем пренебрегать по сравнению с экспоненциальной. На том же основании мы пренебрегаем температурной зависимостью коэффициента теплопроводности λ_0 . Здесь и в дальнейшем предполагается, что можно пренебречь разностью температур электронов и решетки. Ниже будет показано, что это допущение оправдано даже при мощности излучения, соответствующей потере тепловой устойчивости.

Температуру боковой поверхности образца будем считать постоянной*, равной температуре внешней среды T_1 . Стационарное распределение температуры в образце описывается уравнением

$$\frac{\lambda_0}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{W}{\pi r^2} \alpha(T) \theta(\rho - r) = 0, \quad (2)$$

где W — мощность излучения, $\theta(r)$ — ступенчатая функция Хевисайда.

Следуя обычной методике [2], будем искать условия, при которых стационарное распределение температуры оказывается невозможным, т. е. условия, при которых уравнение (2) при заданных граничных условиях не имеет решения. В дальнейшем мы убедимся, что при $T_1 \ll T_0$ (что почти всегда выполняется) максимальная (на оси образца) критическая температура T_m мало отличается от температуры внешней среды и, кроме того, при $T = T_m$ выполняется условие $T_0 \tau^2/T_1^3 \ll 1$, где $\tau = T - T_1$. Разлагая показатель экспоненты в (1) по степеням τ , получим

$$\alpha = \alpha_1 \exp\left(\frac{T_0}{T_1^2} \tau\right), \quad (3)$$

где $\alpha_1 = \alpha_0 \exp(-T_0/T_1)$ — коэффициент поглощения при температуре внешней среды.

Переходя к безразмерным переменным $\xi = r/\rho$, $\xi_0 = R/\rho$, $\Theta = T_0 \tau/T_1^2$, $\delta = T_0 \alpha_1 W/\pi \lambda_0 T_1^2$ и учитывая (3), перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + \delta e^\Theta = 0 \quad (0 \leq \xi < 1); \quad (4)$$

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Theta}{d\xi} \right) = 0 \quad (1 < \xi \leq \xi_0). \quad (5)$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$\Theta = \ln 4a - 2 \ln \left(\eta \xi^{1 - \sqrt{a\delta/2}} + \eta^{-1} \xi^{1 + \sqrt{a\delta/2}} \right) \quad (0 \leq \xi < 1), \quad (6)$$

где a и η — произвольные постоянные.

Потребовав, чтобы температура на оси образца была конечной, получим

$$\Theta = \ln \frac{8\eta^2}{\delta(\xi^2 + \eta^2)^2} \quad (0 \leq \xi < 1). \quad (7)$$

* Более реальным, конечно, является граничное условие третьего рода. Использование его не меняет результатов по существу, а лишь делает их более громоздкими. Наше граничное условие соответствует бесконечному коэффициенту теплообмена на границе и, следовательно, приводит к некоторому завышению порога неустойчивости.

Из уравнения (5) и граничного условия $\Theta(\xi_0) = 0$ следует

$$\Theta = C \ln \frac{\xi}{\xi_0} \quad (1 < \xi \leq \xi_0). \quad (8)$$

Из условия непрерывности температуры и теплового потока при $\xi = 1$ после несложных преобразований можно получить следующую связь между δ и η :

$$\delta = \frac{8 \eta^2}{(1 + \eta^2)^2} \xi_0^{-4/(1+\eta^2)}. \quad (9)$$

Функция $\delta(\eta)$ имеет максимум при

$$\eta^2 = 2 \ln \xi_0 + \sqrt{4 \ln^2 \xi_0 + 1} \equiv y. \quad (10)$$

Отсюда следует, что в условиях, когда

$$\delta > \delta_0 \equiv \frac{8y}{(1+y)^2} \xi_0^{-4/(1+y)}, \quad (11)$$

стационарное распределение температуры оказывается невозможным.

Значение мощности лазерного излучения, соответствующее порогу тепловой неустойчивости, равно

$$W_0 = \frac{\pi \lambda_0 T_1^2 \delta_0}{T_0 \alpha_1}. \quad (12)$$

Если радиус сечения лазерного луча близок к радиусу образца, так что $\ln \xi_0 \ll 1$, то

$$\delta_0 = 2(1 - 2 \ln \xi_0). \quad (13)$$

В обратном предельном случае, $\ln \xi_0 \gg 1$, имеем

$$\delta_0 = \frac{2}{e \ln \xi_0} \quad (14)$$

(e — основание натуральных логарифмов).

Оценим характерное значение W_0 . При $T_1 \sim 100^\circ\text{K}$, $\lambda_0 \sim 1 \text{ вт} \cdot \text{см}^{-1} \times \text{град}^{-1}$, $T_0 \sim 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$, $\delta_0 \sim 1$, $\alpha_1 \sim 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ имеем $W_0 \sim 1 \text{ квт}$.

2. Проверим справедливость допущений, сделанных в ходе расчета. Из (7) следует, что безразмерная температура на оси образца, соответствующая порогу неустойчивости, равна

$$\Theta_m = \ln \frac{8}{\delta_0 y^2} \leq \ln 4 = 1,39. \quad (15)$$

Переходя к размерным величинам, найдем, что вплоть до порога неустойчивости температура на оси образца (и тем более вне оси) мало отличается от температуры внешней среды:

$$\tau_m = T_m - T_1 \sim T_1^2/T_0 \ll T_1. \quad (16)$$

Из (15) вытекает также условие $T_0 \tau^2/T_1^3 \ll 1$, необходимое для того, чтобы было справедливо равенство (3).

Из (3) и (15) следует, что у порога неустойчивости

$$\alpha < \alpha_1 \exp(\Theta_m) = 4 \alpha_1, \quad (17)$$

так что при $\alpha_1 \Delta \ll 1$ можно считать плотность энергии одинаковой во всех точках внутри лазерного луча вплоть до порога неустойчивости.

Неоднородность светового потока необходимо, однако, учитывать в задаче о дальнейшем развитии тепловой неустойчивости, поскольку поглощение света у входа в кристалл является механизмом, ограничивающим лавинное нарастание температуры внутри кристалла. Эта задача требует отдельного рассмотрения.

Покажем, наконец, что разность температур электронов и решетки мала по сравнению с другими характерными температурами. Из элементарной теории разогрева следует [3]

$$T_e - T = \frac{2 \alpha W \tau_e}{3 \pi r^2 k n}, \quad (18)$$

где τ_e — время релаксации энергии электронов, n — их концентрация. При типичных значениях параметров $\alpha \sim 10^{-3} \text{ см}^{-1}$, $W \sim 1 \text{ квт}$, $r \sim 0,1 \text{ см}$, $n \sim 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $\tau_e \sim 10^{-11} \text{ сек}$ получаем $T_e - T \sim 1^\circ \text{К}$, так что сделанное выше допущение является оправданным.

3. Из вида нестационарного уравнения теплопроводности, а также соотношений (12), (16) и (17) следует, что при $W \gg W_0$ время, за которое температура на оси образца достигает порогового значения, по порядку величины равно

$$t_m \sim \frac{\Lambda}{a} \tau_m \left(\frac{W_0}{\pi r^2} \alpha_1 \exp(\Theta_m) \right)^{-1} \sim \frac{\rho^2}{\delta_0 a},$$

где a — коэффициент температуропроводности кристалла. Численные оценки показывают, что $t_m \sim 10^{-3} \div 1 \text{ сек}$. Таким образом, для возникновения рассмотренной здесь неустойчивости необходима работа лазера практически в непрерывном режиме. В частности, рассмотренный механизм не может быть ответствен за разрушение прозрачных диэлектриков короткими ($10^{-7} \div 10^{-9} \text{ сек}$) лазерными импульсами, наблюдаемое многими авторами (см., например, [4]). Он может, однако, быть основной причиной разрушения под действием непрерывно действующего излучения полупроводников с малыми фотоупругими постоянными, когда неустойчивость, связанная с вынужденным рассеянием Мандельштама—Бриллюэна, не возникает.

Автор признателен В. Л. Бонч-Бруевичу, Ю. В. Гуляеву, И. П. Звягину, П. Е. Зильберману и А. Г. Миронову за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В Франц, Пробой диэлектриков, ИЛ, М., 1961.
2. Д. А. Франк-Каменецкий, Диффузия и теплопередача в химической кинетике, изд. Наука, М., 1967
3. Э Конуэлл, Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях, изд. Мир, М., 1970.
4. Действие лазерного излучения, сб. статей под ред. Ю. П. Райзера, изд. Мир, М., 1968.

THERMAL SEMICONDUCTOR INSTABILITY IN A LASER BEAM

E. M. Epshtein

The thermal balance in an intrinsic semiconductor in the presence of the laser beam with the photon energy smaller than the band gap is considered. It is assumed that absorption by free carriers plays the main role. It is shown that there exists the radiation power threshold above which the steady temperature distribution is impossible. For the typical parameter values the power threshold is 1 kW, the time of the instability development is $\sim 10^{-3} \div 1$ sec.

УДК 621.375.7

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АНДАЛУЗИТА В «ТЕПЛЫХ» ПАРАМАГНИТНЫХ УСИЛИТЕЛЯХ

И. И. Еру, С. А. Песковацкий

Проведено экспериментальное исследование инверсии населенностей спиновых уровней ионов Fe^{3+} в андалузите (Al_2SiO_5) в 3-сантиметровом диапазоне в интервале температур $2 \div 60^\circ K$. Показано, что в этом интервале температур в андалузите, в отличие от рубина и рутила, еще отсутствует заметное влияние двухфононных релаксационных процессов. Дан анализ возможностей применения андалузита в КПУ, работающих при повышенных температурах.

Квантовые парамагнитные усилители (КПУ), работающие обычно при температурах жидкого гелия, являются наиболее совершенными малошумящими усилителями СВЧ диапазона. Основными причинами, затрудняющими широкое использование этих усилителей, являются сложность охлаждения их до таких низких температур и резкое ухудшение характеристик КПУ при повышении рабочей температуры. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что с повышением температуры, согласно закону Кюри, магнитная восприимчивость кристалла уменьшается. Кроме того, повышение температуры сопровождается уменьшением коэффициента инверсии [1].

Уменьшение магнитной восприимчивости кристалла с ростом температуры можно частично компенсировать путем повышения концентрации парамагнитной примеси [2]. Хотя повышение концентрации возможно лишь до тех пор, пока ширина линии поглощения растет медленнее, чем сама концентрация, тем не менее оно все же позволяет несколько улучшить параметры КПУ. Но даже и в этом случае при повышенных рабочих температурах вследствие снижения коэффициента инверсии температура собственных шумов КПУ получается уже довольно высокой (в 3-сантиметровом диапазоне на рубине получено $T_{ш} = 100^\circ K$ при $T = 77,4^\circ K$ [2,3] и $T_{ш} = 75^\circ K$ при $T = 40^\circ K$ [4]).

Падение коэффициента инверсии с повышением температуры, наблюдаемое в экспериментах, до настоящего времени не получило еще удовлетворительного объяснения. В случае однофононной релаксации при температурах выше некоторой ($T > 0,5^\circ K$ для Sr^{3+} в рубине и $T > 2,0^\circ K$ для Sr^{3+} в рутиле) коэффициент инверсии не должен вообще зависеть от температуры. Не объясняют уменьшения инверсии и существующие в спин-системе кросс-релаксационные связи, так как с ростом температуры их влияние может только ослабляться.

В КПУ с трехуровневой схемой подсветки одной из причин такого уменьшения коэффициента инверсии при повышенных температурах может быть, по нашему мнению, следующее обстоятельство. Хорошо известно, что в этом случае коэффициент инверсии равен

$$J_{12} = \frac{\nu_{23}/\nu_{12} - \omega_{12}/\omega_{23}}{1 + \omega_{12}/\omega_{23}}$$

При повышенных температурах в случае прямой однофононной релаксации

$$\frac{\omega_{12}}{\omega_{23}} \rightarrow \left(\frac{a_{12}}{a_{23}} \right)^2 \left(\frac{\nu_{12}}{\nu_{23}} \right)^2,$$

а для двухфононных процессов

$$\frac{\omega_{12}}{\omega_{23}} = \left(\frac{a_{12}}{a_{23}} \right)^2,$$

где a_{ik} — матричные элементы переходов.

Чтобы получить $J_{12} > 1$, необходимо иметь

$$\frac{\nu_{12}}{\nu_{23}} < 1.$$

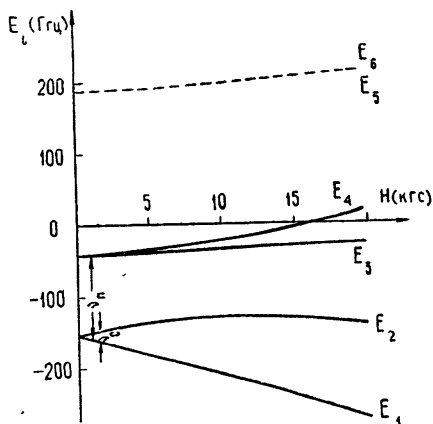
Поэтому усиление роли двухфононных процессов в механизме обмена энергией между спин-системой и решеткой, происходящее при повышении температуры, неминуемо приведет к падению коэффициента инверсии. Влияние двухфононной релаксации на величину инверсии при повышенных температурах можно ослабить, повысив скорость однофононных процессов, либо понизив скорость двухфононных процессов при этих температурах. При прочих равных условиях скорость однофононных релаксационных процессов тем выше, чем больше величина соответствующего кванта. С этой точки зрения представляется предпочтительным использование в «теплых» КПУ больших квантов подсветки.

Для понижения скорости двухфононных процессов можно воспользоваться тем обстоятельством, что в области температур порядка дебаевской температуры кристалла ($T \approx \Theta_D$) существует сильная зависимость этой скорости от величины Θ_D . (Расчет показывает, что заметное влияние величины Θ_D на скорость двухфононной релаксации обнаруживается уже при $T/\Theta_D = 0,2 \div 0,3$.) Поэтому понижение дебаевской температуры кристаллов до рабочих температур «теплых» КПУ (т. е. использование в КПУ кристаллов со столь низкими дебаевскими температурами) может существенно уменьшить скорость двухфононных процессов и, тем самым, ослабить их влияние на величину инверсии при указанных температурах.

С этой точки зрения представляло несомненный интерес выяснить возможность использования в КПУ, работающих при повышенных температурах, кристаллов андалузита (Al_2SiO_5) с примесью трехвалентного железа [5]. Судя по механическим свойствам этого кристалла, его дебаевская частота должна быть существенно ниже, чем у рубина. С другой стороны, характерные кванты в спин-системе иона Fe^{3+} в андалузите более чем на порядок выше характерных квантов в спин-системе иона Cr^{3+} в корунде.

Рассчитать форму температурной зависимости коэффициента инверсии в андалузите было невозможно. При температуре $8 \div 10^\circ K$ на величине коэффициента инверсии в андалузите начинают сказываться релаксационные характеристики самого верхнего, третьего дублета в спектре ЭПР иона Fe^{3+} , полностью вымороженного при более низких температурах, а непосредственное измерение этих характеристик пока невозможно из-за отсутствия аппаратуры для проведения релаксационных измерений на соответствующих частотах (≈ 350 Гц). Поэтому нами было предпринято экспериментальное исследование инверсии населенностей в этом кристалле в 3-сантиметровом диапазоне длин волн и в интервале температур $2 \div 60^\circ K$, с тем чтобы определить недостаю-

щие характеристики андалузита. Была использована 90-градусная ориентация кристалла во внешнем магнитном поле и трехуровневая схема подсветки (рис. 1). Кристаллы естественного происхождения имели концентрацию ионов $Fe^{3+} 0,06 \div 0,08\%$.



Изменение температуры резонансной системы в широких пределах приводит к значительным изменениям ее собственных частот. Поэтому для проведения измерений подсветка в этих экспериментах осуществлялась в нерезонансном режиме — в режиме «бегущей волны».

Рис. 1. Трехуровневая схема инверсии на андалузите (90-градусная ориентация).

Конструкция резонансной системы приведена на рис. 2. На сигнальной частоте (10 Гц) использовалась основная ТЕМ-мода отрезка коаксиальной линии, образованного стержнем ($d = 2$ мм) в цилиндрическом расширении ($D = 5$ мм) волновода подсветки и укороченного емкостью между концом стержня и стенкой волновода. Стержень был укреплен на гибкой мембране, что позволяло перестраивать коаксиальный резонатор в широком диапазоне частот. Геометрия и размеры этого резонатора были выбраны такими, что КСВН в волноводе подсветки ($\nu_n = 120$ Гц), пересекавшем его, не превышал 2. Температурная зависимость коэффициента инверсии снималась при прогреве криостата от температуры жидкого гелия до азотной. Контроль температуры осуществлялся термопарой медь — константан и угольным термометром.

Все экспериментальные результаты, полученные в этих исследованиях, приведены на рис. 3. Имевшаяся в нашем распоряжении мощность

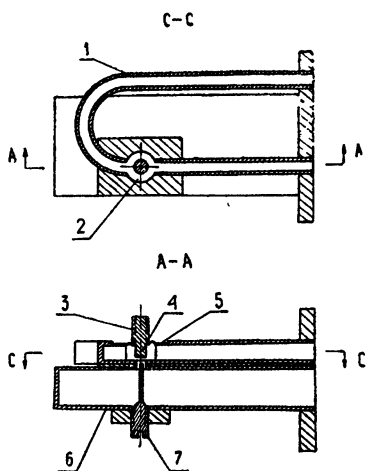


Рис. 2. Конструкция резонансной системы:

1—волновод подсветки, 2—резонатор, 3—привод настройки, 4—стержень, 5—мембрана, 6—сигнальный волновод, 7—регулировка связи.

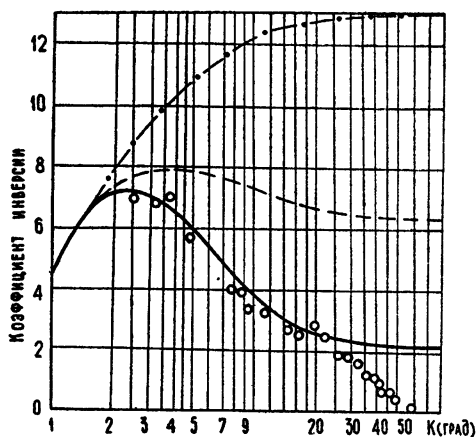


Рис. 3. Температурная зависимость коэффициента инверсии в андалузите: экспериментальные точки и расчетные кривые (90-градусная ориентация, $\lambda = 3,0$ см);
 — — — — — $-A_1/A_2 = 0,25$; — — — — — $-A_1/A_2 = 1$;
 - · - · - · - $-A_1/A_2 = \infty$.

подсветки (≈ 100 мвт) оказалась недостаточной для насыщения перехода подсветки при температурах выше 20°K . Об этом свидетельствовали зависимости коэффициента инверсии от мощности подсветки в этом интервале температур. Поэтому величины коэффициента инверсии, достигнутые здесь, были ниже своих предельных значений.

В случае прямых, однофононных процессов релаксации вероятность релаксационного перехода может быть записана в виде

$$w_{ik} = a_{ik}^2 f(\nu_{ik}, T),$$

где

$$a_{ik} = |\langle i | \hat{H}_{\text{с.-ф.}} | k \rangle|,$$

$$f(\nu_{ik}, T) = \nu_{ik}^3 \left[\exp\left(\frac{\hbar \nu_{ik}}{kT}\right) - 1 \right]^{-1},$$

$\hat{H}_{\text{с.-ф.}}$ — гамильтониан спин-фононного взаимодействия. В слабых магнитных полях ($H_0 < \Delta E_0/g\beta$, ΔE_0 — начальное расщепление спиновых уровней), когда при расчете волновых функций состояний можно ограничиться первым приближением теории возмущений, вероятности релаксационных переходов между дублетами будут определяться гамильтонианом вида

$$\hat{H}_{\text{с.-ф.}} = A_1 [\hat{S}_z (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) + (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \hat{S}_z] + A_2 [\hat{S}_+^2 + \hat{S}_-^2].$$

Поэтому аналитическое выражение для коэффициента инверсии в андалузите, записанное в предположении однофононной релаксации, будет содержать в качестве параметра отношение A_1/A_2 :

$$J = J(\nu_{ik}, T, A_1/A_2).$$

Из сравнения расчетных кривых и экспериментально полученных значений коэффициента инверсии в андалузите видно, что в этом кристалле температурная зависимость коэффициента инверсии хорошо описывается кривой с $A_1/A_2 = 0,25$ (рис. 3).

Совпадение экспериментальных данных с расчетными, основанными на однофононном характере релаксации, указывает на то, что в этом интервале температур в андалузите действительно еще отсутствует заметное влияние двухфононных процессов релаксации. Об этом же свидетельствует сравнительно медленное уменьшение степени насыщения перехода подсветки с ростом температуры выше 20°K , когда мощность источника подсветки уже недостаточна для полного насыщения. В случае двухфононных процессов уменьшение степени насыщения должно было быть значительно более быстрым ($\sim T^{-(7-9)}$).

Воспользовавшись найденным значением параметра A_1/A_2 , можно показать, что на более низких частотах усиливаемого сигнала температурная зависимость коэффициента инверсии будет иметь аналогичную форму, а величины его при повышенных температурах будут приблизительно обратно пропорциональны рабочей частоте.

Анализ всех данных, полученных в этих экспериментах, позволяет сделать некоторые выводы о возможных шумовых характеристиках КПУ на андалузите, работающем при повышенных температурах. Как видно из рис. 3, коэффициент инверсии в андалузите даже при азотной температуре в 3-сантиметровом диапазоне не падает ниже $2,0 \div 2,2$, что, по крайней мере, вдвое выше, чем в рубине при этих же температурах [3]. А это означает, что в КПУ на андалузите в 3-сантиметровом диапазоне можно рассчитывать получить при азотной температуре ($77,4^\circ\text{K}$) шумовую температуру $40 \div 50^\circ\text{K}$. Если же несколько снизить рабочую

частоту усилителя и перейти в 10-сантиметровый диапазон длин волн, который имеет в настоящее время очень широкую область применений, то при азотной температуре можно, по-видимому, получить коэффициент инверсии $6 \div 7$, а значит, и снизить шумовую температуру КПУ до $20 \div 25^\circ\text{K}$.

Из рис. 3 видно также, что в принципе на кристалле с благоприятным соотношением констант гамильтониана A_1 и A_2 ($A_1/A_2 \gg 1$, т. е. при отсутствии влияния верхнего, третьего дублета) можно получить при азотной температуре коэффициент инверсии даже более высокий, чем при гелиевой.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. S. Yungvesson, J. Quant. Electr., **QE-2**, 165 (1966).
2. T. H. Maiman, Quantum Electr., Symposium, Columbia University Press, 1960, p. 324.
3. E. O. Ammann, IEEE Trans., **MTT-13**, 186 (1965).
4. П. С. Лифанов, Л. И. Невоструева, М. П. Столпянский, К. В. Филатов, В. Б. Штейнлейгер, Радиотехника и электроника, **9**, 1586 (1966).
5. I. I. Eru, S. A. Peskovatskii, A. N. Chernets, J. Quantum Electr., **QE-4**, 723 (1968).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
28 декабря 1970 г.

THE USE OF ANDALUZITE IN „WARM“ PARAMAGNETIC AMPLIFIERS

I. I. Eru, S. A. Peskovatskii

An experimental investigation is made of the inversion of populations of Fe^{3+} ion spin levels in andaluzite (Al_2SiO_5) in 3 cm range over the temperature interval. $2 \div 60^\circ\text{K}$. It is shown that a marked influence of two-phonon relaxation processes are still absent in this temperature interval in andaluzite in contrast to ruby and rutile. The possibilities of applying andaluzite in the quantum paramagnetic amplifiers at the raised temperature are analysed.

УДК 621.375.9 : 535

К ТЕОРИИ ФАЗОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОД

Н. Н. Розанов

Исследованы автоколебательные режимы генерации лазеров при фазовой связи мод. Методом малого параметра найдены условия существования и вид периодического во времени решения в низшем приближении. Устойчивые периодические решения отвечают автоколебательным режимам, неустойчивые периодические решения характеризуют конечные размеры области притяжения устойчивого стационарного режима и указывают при некоторых условиях на существование автоколебательных режимов другого типа. Конкретные вычисления относятся к теории нелинейного фазового взаимодействия угловых типов колебаний.

Как известно, фазовое взаимодействие мод является одной из причин пичковых (автоколебательных) режимов генерации лазеров. Анализ таких нестационарных режимов весьма сложен и требует специального подхода в каждом частном случае. В настоящей работе рассмотрена довольно общая ситуация фазового взаимодействия мод, применительно к случаям, когда на границе области стационарного захвата имеется пара чисто мнимых характеристических показателей. Конкретные вычисления относятся к теории нелинейного фазового взаимодействия угловых типов колебаний [1, 2].

Мы будем пользоваться полуклассической лэмбовской теорией, справедливой вблизи пороговых значений накачки для газовых лазеров, поэтому наши исходные уравнения значительно отличаются от использованных Островским [3] для описания твердотельных лазеров. Гистерезисные явления при захвате частоты в кольцевом газовом лазере приближенными или численными методами исследовались Кругликом [4], Ландой, Ларионцевым и Чернобровкиным [5]. Основное отличие нашего подхода — в установлении существования периодических решений при нахождении локальных величин, вычисленных в состоянии равновесия. Применительно к взаимодействию лазерных мод такое рассмотрение, по-видимому, не проводилось.

Теория взаимодействия внеосевых мод в резонаторе со сферическими зеркалами развита в [1, 2]. Рассмотрим здесь несколько более общую систему уравнений, описывающую нелинейное фазовое взаимодействие двух мод:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= 2I_1[\alpha_1 - \beta_1 I_1 - (\theta_1 + \rho_1 \cos\psi)I_2], \\ \dot{I}_2 &= 2I_2[\alpha_2 - \beta_2 I_2 - (\theta_2 + \rho_2 \cos\psi)I_1], \\ (\dot{\varphi}_1 + \Delta\nu_1)I_1 &= c_1 \rho_1 I_1 I_2 \sin\psi, \\ (\dot{\varphi}_2 + \Delta\nu_2)I_2 &= -c_2 \rho_2 I_1 I_2 \sin\psi. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $I_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ — соответственно интенсивности и фазы мод, $\psi = 2(\varphi_2 - \varphi_1)$, $\Delta\nu = \Delta\nu_1 - \Delta\nu_2$ — расщепление частот резонатора. Коэффициенты $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\theta_{1,2}$, $\rho_{1,2}$, $c_{1,2}$ вычислены в [1, 2] и здесь предполагаются известными. При выводе (1) используется обычное для теории

газовых лазеров приближение «слабого поля», т. е. накачка предполагается достаточно близкой к пороговому значению. Кроме того, использовано также обычное приближение «медленно меняющихся» амплитуд и фаз.

Рассмотрим сначала стационарный одномодовый режим

$$I_1 = \alpha_1/\beta_1, \quad \dot{\varphi}_1 = -\Delta\nu_1, \quad I_2 = 0. \quad (2)$$

Из (1) можно получить условие его устойчивости

$$\alpha_{2 \text{эфф}} \equiv \alpha_2 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} (\theta_2 + \rho_2 \cos \psi) < 0, \quad (3)$$

причем

$$\cos \psi = \begin{cases} 0 & (|\Delta\nu| > \Delta\nu_0 \equiv |c_2 \rho_2 \alpha_1 / \beta_1|) \\ \text{sgn}(c_2 \rho_2) \left[1 - \left(\Delta\nu / c_2 \rho_2 \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)^2 \right]^{1/2} & (|\Delta\nu| < \Delta\nu_0) \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрение другого одномодового режима ($I_1 = 0$) переобозначением индексов сводится к проделанному. Аналогичные условия приведены в [2] в несколько менее общем виде.

Полагая $I_{1,2} \neq 0$, получаем из (1) автономную систему трех дифференциальных уравнений для величин I_1, I_2, ψ . Стандартным способом находим условия устойчивости стационарных решений (критерий Ляпуна — Шипара):

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 \equiv a_1 a_2 - a_3 > 0. \quad (5)$$

Явный вид коэффициентов a_i мы здесь не приводим.

Потеря устойчивости при выходе из области захвата может происходить за счет изменения знака либо a_3 , либо a_4 . В последнем случае на границе области захвата имеется пара чисто мнимых характеристических показателей, и тогда вблизи этой границы существуют периодические решения указанного в Приложении вида.

Следует отметить, что количественное сравнение результатов, основанных на анализе системы (1), с экспериментом в настоящее время затруднительно. Прежде всего, экспериментально трудно реализовать двухмодовый режим; селекция угловых типов с помощью диафрагм приводит к искажениям структуры мод. Само частотное расщепление мод определяется, главным образом, случайными факторами — дефектами зеркал. В то же время даже при дополнительных упрощающих предположениях система (1) имеет сложную структуру. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть сначала математически наиболее простой случай, положив

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 \equiv \beta, \quad \theta_1 = \theta_2 \equiv \theta, \quad \rho_1 = \rho_2 \equiv \rho, \\ x \equiv \frac{c_1 + c_2}{8} > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Ниже мы покажем, что качественный характер решений сохраняется и в более реальном случае.

Считая $\beta > \theta + \rho$, найдем, что одномодовые режимы неустойчивы, а решения с равными интенсивностями

$$I_1(t) = I_2(t) \equiv I(t) \quad (7)$$

устойчивы, т. е. достаточно малые разности интенсивностей со временем асимптотически приближаются к нулю. Тогда, введя безразмерные величины

$$u = \frac{I}{I_0}, \quad I_0 = \frac{\alpha}{\beta + \theta}, \quad t' = 4\alpha t, \quad k_1 = \frac{\rho}{\beta + \theta}, \quad (8)$$

$$k_2 = \frac{\Delta\nu}{8\alpha},$$

найдем (можно считать $k_2 \geq 0$, $0 \leq k_1 < 1$)

$$\frac{du}{dt'} = \frac{1}{2} u [1 - (1 + k_1 \cos \psi) u], \quad \frac{d\psi}{dt'} = 4 [k_2 - k_1 u \cos \psi]. \quad (9)$$

Как следует из первого уравнения (9), для достаточно больших значений времени

$$\frac{1}{1 + k_1} \leq u \leq \frac{1}{1 - k_1}. \quad (10)$$

Соотношение (7) определяет явный вид «нейтральной поверхности» (см. Приложение). Для рассмотрения поведения траекторий на нейтральной поверхности удобно ввести полярные координаты $x = u \cos \psi$, $y = u \sin \psi$. Помимо интересующего нас фокуса, нейтральная поверхность содержит еще два неустойчивых состояния равновесия (одно из них — начало координат $x = y = 0$). Можно показать, что при $k_1 > k_{1\text{кр}} = (1 + 8k_2)^{1/2}$ границе области устойчивости отвечает пара чисто мнимых корней характеристического уравнения.

Вычисления показывают, что для них величина α_3 (см. Приложение) положительна. Поэтому вблизи границы области устойчивости устойчивое состояние равновесия окружено неустойчивым предельным циклом. Последний характеризует область притяжения стационарного режима и указывает на существование другого — устойчивого предельного цикла, на который «наматываются» траектории с начальными условиями на нейтральной поверхности вне неустойчивого предельного цикла. Эти выводы иллюстрирует рис. 1, полученный путем численного решения (9). Предельные циклы определялись с помощью специального приема [9]. При некотором удалении от границы области захвата предельные циклы исчезают, так как в центре этой области (при $k_2 = 0$) система (9) предельных циклов не имеет.

В общем случае системы (1) в зависимости от соотношения коэффициентов при чисто мнимом характеристическом показателе на границе области устойчивости величина α_3 может быть любого знака. В табл. 1 приведены в качестве примера некоторые данные для следующих значений параметров (одномодовые режимы при этом неустойчивы):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \beta_1 = \beta_2 = 1, \quad \theta_1 = \theta_2 = 0,5, \quad c_1 = c_2 = -1.$$

Последнее соотношение отвечает случаю стоячих угловых типов колебаний. Заметное различие коэффициентов ρ_1 и ρ_2 возможно при учете пространственной неоднородности накачки и теплового движения атомов для мод с сильно различающимися угловыми индексами. При $\alpha_3 < 0$ найденные периодические решения, существующие в области неустойчивости стационарного режима захвата, оказываются устойчивыми. В случае $\alpha_3 > 0$ получаем картину, вполне аналогичную рассмотренной выше (при условии (6)). Это утверждение иллюстрирует рис. 2, полученный

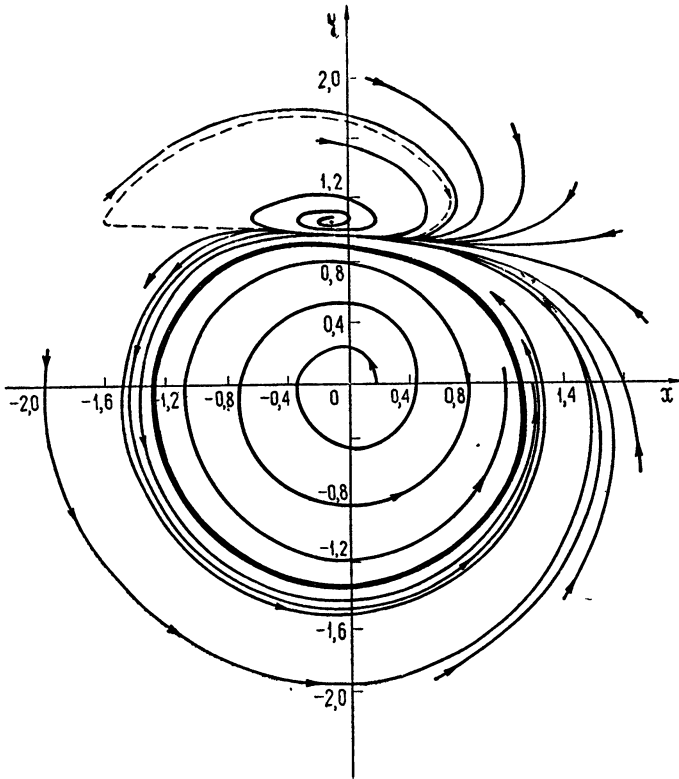


Рис. 1. Фазовая плоскость системы (9) (полярные координаты).

Сплошная замкнутая линия — устойчивый предельный цикл, пунктирная — неустойчивый предельный цикл, точка внутри него — устойчивый стационарный режим. При начальных условиях, соответствующих внутренней области неустойчивого предельного цикла, устанавливается стационарный режим, в противном случае — автоколебательный; $k_1=0,6$; $k_2=0,64$; $\alpha=1$.

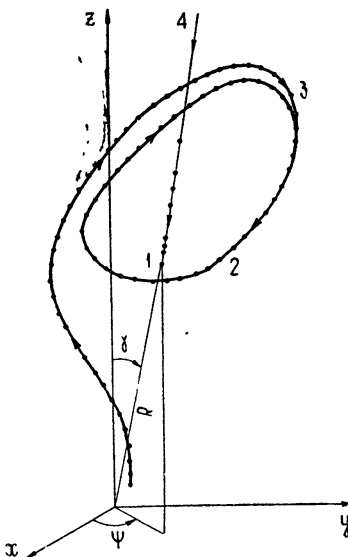


Рис. 2. $\rho_1=0$; $\rho_2=0,613$;
1 — стационарный режим захвата, 2 — автоколебательный режим, 3, 4 — переходные процессы.

Таблица 1

ρ_1	ρ_2	$ \Delta v $	ψ	$\text{sgn}(\alpha_3)$
0	0,614	0,783	1,2	+1
0	0,763	0,772	1,3	+1
0	0,990	0,751	1,4	+1
0,1	0,896	0,728	1,4	+1
0	1,35	0,712	1,5	+1
0,1	1,21	0,701	1,5	+1
0,2	1,08	0,690	1,5	+1
0	1,94	0,642	1,6	+1
0,1	1,72	0,648	1,6	+1
0,2	1,52	0,653	1,6	+1
0,3	1,34	0,658	1,6	+1
0	3,06	0,528	1,7	+1
0,1	2,62	0,557	1,7	+1
0,2	2,27	0,583	1,7	+1
0,3	1,98	0,607	1,7	-1
0,4	1,74	0,630	1,7	-1

путем численного решения дифференциальных уравнений и построенный в переменных R, γ, ψ ($R^2 = I_1^2 + I_2^2$, $\operatorname{tg}(2\gamma) = I_2/I_1$, см. [10]). Как показывает рис. 2, в зависимости от начальных условий устанавливается либо стационарный режим захвата, либо автоколебательный режим.

Подчеркнем, что автоколебательные режимы могут быть двух типов. Непосредственно найденные в Приложении, периодические решения в случае их устойчивости отвечают малым изменениям интенсивностей и разности фаз двух мод. Об этом режиме можно говорить как о слабой «автомодуляции» режима захвата, так как ввиду ограниченности разности фаз частота биений (но не частота модуляции) равна нулю. Второй тип автоколебательных режимов (см. рис. 1 и 2) отвечает ненулевой частоте биений.

Таким образом, найденная в Приложении локальная величина α_3 позволяет эффективно исследовать автоколебательные режимы и гистерезисные явления при взаимодействии угловых типов колебаний. Очевидно аналогично могут быть рассмотрены и другие виды фазового взаимодействия мод.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим автономную систему $n = m + 2$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dx'}{dt} = -y' + \sigma W_1(x'_1, \dots, x'_m) + X'(x', y', x'_1, \dots, x'_m),$$

$$\frac{dy'}{dt} = x' + \sigma y' + \sigma W_2(x'_1, \dots, x'_m) + Y'(x', y', x'_1, \dots, x'_m). \quad (\text{П.1})$$

$$\frac{dx'_s}{dt} = \sum_{j=1}^m b_{sj} x'_j + \sigma W_{s+2}(x', y', x'_1, \dots, x'_m) + X'_s(x', y', x'_1, \dots, x'_m).$$

Здесь b_{sj} — постоянные, σ — малый параметр, W_j — линейные функции, X', Y', X'_s — аналитические в окрестности точки $x' = y' = x'_1 = \dots = x'_m = 0$ функции, степенное разложение которых начинается с членов не ниже второго порядка:

$$\begin{aligned} X'(x, y, x_1, \dots, x_m) &= a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2 + \\ &+ \sum_{j=1}^m (\tilde{a}_{1,n} x x_j + \tilde{a}_{2,n} y x_j) + \dots + a_{30} x^3 + a_{21} x^2 y + a_{12} x y^2 + a_{03} y^3 + \dots \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Функции Y', X'_s получаются из (П.2) заменой коэффициентов $a \rightarrow b, c$, соответственно. Невыписанные члены нам здесь не потребуются.

К виду (П.1) при известных предположениях [6, 7] приводятся системы более общего вида, фундаментальное уравнение которых имеет корень с малой вещественной частью. Нас будут интересовать условия возникновения периодических решений системы (П.1) при изменении параметра σ вблизи значения $\sigma = 0$. В случае $n = 2$ эти условия полностью определяются знаками σ и α_3 — третьей фокусной величины [8]. При $n > 2$ системы вида (П.1) рассматривались в целом ряде работ, однако конкретный вид необходимых нам условий в литературе, по-видимому, не приводился.

Введем малый параметр μ и новые переменные x, y, x_s :

$$\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) \mu^2, \quad x' = \mu x, \quad y' = \mu y, \quad x'_s = \mu x_s. \quad (\text{П.3})$$

Соответствующая система дифференциальных уравнений для переменных x, y, x_s является квазилинейной (и одновременно близкой к системе Ляпунова [6]). Для определения периодических решений этой системы применим метод малого параметра [6]. Полагая

$$\begin{aligned} t &= \tau(1 + h_1 \mu + \dots), & y(\tau) &= y^{(0)}(\tau) + \mu y^{(1)}(\tau) + \dots, \\ x(\tau) &= x^{(0)}(\tau) + \mu x^{(1)}(\tau) + \dots, & x_s(\tau) &= x_s^{(0)}(\tau) + \mu x_s^{(1)}(\tau) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

в нулевом приближении (при дополнительном условии $\frac{dx(0)}{d\tau} = 0$) получаем

$$x^{(0)}(\tau) = M \cos \tau, \quad y^{(0)}(\tau) = M \sin \tau, \quad x_s^{(0)}(\tau) = 0. \quad (\text{П.5})$$

Из уравнений первого приближения

$$\frac{dx^{(1)}}{d\tau} + y^{(1)} = -h_1 y^{(0)} + \frac{M^2}{2} [(a_{20} + a_{02}) + b_{11} \sin(2\tau) + (a_{20} - a_{02}) \cos(2\tau)], \quad (\text{П.6})$$

$$\frac{dy^{(1)}}{d\tau} - x^{(1)} = h_1 x^{(0)} + \frac{M^2}{2} [(b_{20} + b_{02}) + b_{11} \sin(2\tau) + (b_{20} - b_{02}) \cos(2\tau)],$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_s^{(1)}}{d\tau} - \sum_{j=1}^m b_{sj} x_j^{(1)} &= \frac{M^2}{2} [(c_{20,s} + c_{02,s}) + c_{11,s} \sin(2\tau) + \\ &+ (c_{20,s} - c_{02,s}) \cos(2\tau)] \end{aligned}$$

при условии $h_1 = 0$ находим

$$\begin{aligned} x^{(1)}(\tau) &= M^2 [u_0 + M_1 \cos \tau + M_2 \sin \tau + c_0 \cos(2\tau) + d_0 \sin(2\tau)], \\ y^{(1)}(\tau) &= M^2 [u_0 - M_2 \cos \tau + M_1 \sin \tau + f_0 \cos(2\tau) + g_0 \sin(2\tau)], \\ x_j^{(1)}(\tau) &= M^2 [A_j + C_j \cos(2\tau) + S_j \sin(2\tau)]. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Здесь

$$u_0 = -\frac{b_{20} + b_{02}}{2}, \quad v_0 = \frac{a_{20} + a_{02}}{2},$$

$$c_0 = \frac{1}{6} [(b_{20} - b_{02}) - 2a_{11}], \quad d_0 = \frac{1}{6} [2(a_{20} - a_{02}) + b_{11}], \quad (\text{П.8})$$

$$f_0 = -\frac{1}{6} [(a_{20} - a_{02}) + 2b_{11}], \quad g_0 = \frac{1}{6} [2(b_{20} - b_{02}) - a_{11}].$$

Величины A_j, C_j, S_j находятся из систем линейных алгебраических уравнений (определитель которых отличен от нуля), получающихся после подстановки $x_j^{(1)}$ в виде (П.7) в уравнения (П.6) для $\frac{dx_s^{(1)}}{d\tau}$ ($s = 1, \dots, m$).

Условия существования периодического решения во 2-м приближении приводят к уравнению

$$M^2 \alpha_3 = -\operatorname{sgn}(\sigma), \quad (\text{П.9})$$

где

$$\alpha_3 = \alpha'_3 + \alpha''_3,$$

$$\alpha'_3 = \frac{1}{4} [3(a_{30} + b_{03}) + a_{12} + b_{21} - 2(a_{20}b_{02} - a_{02}b_{02}) + \\ + a_{11}(a_{20} + a_{02}) - b_{11}(b_{20} + b_{02})]; \quad (\text{П.10})$$

$$\alpha''_3 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \left[\tilde{a}_{1j} \left(A_j + \frac{1}{2} C_j \right) + \frac{1}{2} (\tilde{a}_{2j} + \tilde{b}_{1j}) S_j + b_{2j} \left(A_j - \frac{1}{2} C_j \right) \right]. \quad (\text{П.11})$$

Одновременно определяется h_2 . Считая $\alpha_3 \neq 0$, получаем

$$M^2 = -\text{sgn}(\sigma)/\alpha_3. \quad (\text{П.12})$$

Согласно (П.12), условием существования периодического решения системы (П.1), расположенного в малой окрестности точки $x' = y' = x'_1 = \dots = x'_m = 0$, является противоположность знаков величин σ и α_3 . Отметим, что α'_3 только множителем π отличается от выражения для третьей фокусной величины. При $n = 2$ $\alpha_3 = \alpha'_3$ и (П.12) полностью согласуется с соответствующими результатами [8] (следует учесть, что величина σ определяет устойчивость состояния равновесия). В исходных переменных «размеры» периодического движения характеризуются величиной

$$\mu M = (-\sigma/\alpha_3)^{1/2}. \quad (\text{П.13})$$

Существование периодических решений в виде рядов (П.7) и их сходимость для достаточно малых σ гарантируется общей теорией [6] (то, что наш случай «особый» [6], не существенно).

Будем считать, что вещественные части всех корней соответствующего (П.1) фундаментального уравнения (за исключением пары комплексно-сопряженных корней с малой вещественной частью) отрицательны, так как иначе стационарное и периодическое решения были бы неустойчивыми. Тогда устойчивость найденного периодического решения можно определить [6], представив малые отклонения от периодического решения в виде

$$e^{\alpha\tau} \varphi_j(\tau), \quad \alpha = \mu a_1 + \mu^2 a_2 + \dots \quad (j = 1, \dots, n), \quad (\text{П.14})$$

где $\varphi_j(\tau)$ — периодические функции.

Вычисление a_i близко к проделанному при выводе (П.12), но более громоздко. Однако представляется довольно очевидным, что устойчивость найденного периодического решения должна определяться только знаком σ и быть противоположной устойчивости состояния равновесия. При $n = 2$ это следует из результатов [8]. Случай $n > 2$ фактически сводится к предыдущему, если ввести представление о некоторой «нейтральной» двумерной поверхности в n -мерном фазовом пространстве, проходящей через состояние равновесия и траекторию периодического движения и состоящей из траекторий системы (П.1). В малой окрестности состояния равновесия введение «нейтральной» поверхности эквивалентно усреднению по «быстрым» движениям, отвечающим не малым вещественным частям корней характеристического уравнения. Такое рассмотрение подтверждается анализом конкретных систем (см. выше).

Устойчивые периодические решения системы (П.1) отвечают автоколебательным режимам. Представления о «нейтральной» поверхности

показывают, что неустойчивые периодические решения могут характеризовать размеры области притяжения устойчивости стационарного режима и указывать при некоторых условиях на существование автоколебательных режимов другого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Белоусова, Г. Н. Винокуров, О. Б. Данилов, Н. Н. Розанов, ЖЭТФ, 52, 1146 (1967).
2. С. Г. Зейгер, Э. Е. Фрадкин, сб. Физика газовых лазеров, изд. ЛГУ, 1969.
3. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 48, 1087 (1965); 49, 1535 (1965).
4. Г. С. Круглик, ЖПС, 7, 569 (1967).
5. П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, Г. А. Чернобровкин, Радиотехника и электроника, 13, 2026 (1968).
6. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
7. Ю. А. Рябов, Уч. зап. МГУ, вып. 165, 131 (1954).
8. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, изд. Наука, М., 1967.
9. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, изд. Наука, М., 1966.
10. Н. Н. Розанов, Оптика и спектроскопия, 22, 831 (1967).

Поступила в редакцию
13 июля 1970 г.,
после доработки
5 июля 1971 г.

ON THE THEORY OF PHASE MODE INTERACTION

N. N. Rozanov

The auto-oscillating regimes of the laser generation at the phase mode coupling are investigated. The conditions of existence and the form of the periodic solution in the lowest approximation are found by the small parameter method. The stationary periodic solutions correspond to auto-oscillating regimes, the nonstationary periodic solutions characterize the finite dimensions of the attraction region of the stationary regime and point under certain conditions to existence of the auto-oscillating regimes of other types. Concrete calculations refer to the theory of the nonlinear phase interaction of angular modes.

УДК 538.56

**ОБ ОДНОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ СООТНОШЕНИИ ДЛЯ ВОЛН
В СИСТЕМАХ С БЕГУЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

Ю. М. Сорокин

Получено соотношение, связывающее полные энергии и частоты квазимонохроматических волновых пакетов, распространяющихся в линейных системах с параметрами, изменяющимися во времени и пространстве по закону бегущей волны произвольного профиля.

Применение вариационных методов при исследовании распространения волн в системах с переменными параметрами позволяет [1-3] получить некоторые общие соотношения (в частности, доказать инвариантность определенных величин) для широкого класса таких систем без уточнения их физической природы.

Целью настоящей заметки является вывод соотношения, связывающего полные энергии и частоты квазимонохроматических волновых пакетов, распространяющихся в линейных системах с параметрами, изменяющимися во времени и пространстве по закону бегущей волны $p_i = f_i(x - Vt)$ произвольного профиля, где $V = \text{const}^*$. Ранее такая задача рассматривалась [3, 4] лишь для одномерных систем, описываемых функцией Лагранжа с одной обобщенной координатой. Представляет интерес обобщить полученные в указанных выше работах энергетические соотношения для трехмерных систем с m обобщенными координатами; при этом следует несколько видоизменить метод, использованный в [3].

Рассмотрим линейную систему, описываемую плотностью функции Лагранжа**:

$$\Delta = a_{ik}^{\alpha\beta}(\zeta_i) \dot{q}_\alpha^i \dot{q}_\beta^k + d_{ik}(\zeta_i) q^i q^k. \tag{1}$$

Здесь q^i — обобщенные координаты ($i, k = 1 \div m$), $\dot{q}_\alpha^i = \frac{\partial q^i}{\partial x_\alpha}$ ($\alpha, \beta = 1 \div 4$), причем $x_1, 2, 3, 4 = x, y, z, t$, $\zeta_1 = x_1 - Vx_4$, а по повторяющимся индексам производится суммирование. Уравнение Лагранжа для системы (1) можно записать в виде

$$a_{ik}^{\alpha\beta} \ddot{q}_{\alpha\beta}^k + \dot{q}_\beta^k \frac{\partial}{\partial \zeta_1} (a_{ik}^{4\beta} - Va_{ik}^{1\beta}) - d_{ik} q^{ik} = 0. \tag{2}$$

Сделаем в (2) замену независимых переменных:

$$\zeta_\gamma = x_1 - V_\gamma x_4, \quad \zeta_\mu = x_\mu; \tag{3}$$

здесь и далее индексы γ, δ пробегают значения 1, 4, а μ, ν — значения

* Соотношения такого типа были получены ранее для предельных случаев медленного (адиабатического) изменения параметров среды [5] и движущейся резкой границы [6].

** Для краткости здесь опущены члены типа $\dot{q}^i q_\alpha^k$. Их учет, по существу, не меняет последующих рассуждений.

2, 3; $V_1 = V$; V_4 ($V_4 \neq 0$, V) — произвольная постоянная, не зависящая от V_1 . Учитывая, что коэффициенты в (2) зависят лишь от ζ_1 , получим

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{\gamma\delta}^k (a_{ik}^{11} - V_{\gamma} a_{ik}^{(14)} + V_{\gamma} V_{\delta} a_{ik}^{44}) + \ddot{q}_{\gamma\mu}^k (a_{ik}^{(1\mu)} - V_{\gamma} a_{ik}^{(4\mu)}) + \ddot{q}_{\mu\nu}^k a_{ik}^{\mu\nu} + \\ + \dot{q}_{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial \zeta_1} [(a_{ik}^{11} - V_1 a_{ik}^{41}) - V_{\gamma} (a_{ik}^{14} - V_1 a_{ik}^{44})] + \\ + \dot{q}_{\mu}^k \frac{\partial}{\partial \zeta_1} (a_{ik}^{1\mu} - V_1 a_{ik}^{4\mu}) - q^k d_{ik} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где обозначено $a_{ik}^{(\alpha\beta)} = a_{ik}^{\alpha\beta} + a_{ik}^{\beta\alpha}$, а под символом \dot{q}_{α}^k подразумевается производная по переменной ζ_{α} .

Систему уравнений (4) сокращенно запишем так:

$$\hat{L}(q^k; a_{ik}^{\alpha\beta}, d_{ik}; V_1, V_4) = 0. \quad (5)$$

Если $V = 0$ (т. е. $V_1 = 0$), то уравнения (5) описывают распространение волн в некоторой стационарной системе с параметрами $a_{ik}^{\alpha\beta}(x_1)$, $d_{ik}(x_1)$. При этом, как легко видеть из (4), меняются лишь значения коэффициентов при соответствующих производных, вид уравнений остается неизменным.

Построим другую, тоже стационарную систему K' таким образом, чтобы описывающие ее в переменных $x_1, x_{\mu}, x'_4 = x_1 - V'_4 x_4$ уравнения

$$\hat{L}[(q^k)'; A_{ik}^{\alpha\beta}, D_{ik}; 0, V'_4] = 0 \quad (6)$$

совпали с (5). Как нетрудно убедиться с помощью (4), для этого можно выбрать

$$\begin{aligned} V'_4 &= V_4 - V_1, \quad A_{ik}^{\alpha\beta} = a_{ik}^{\alpha\beta}, \quad D_{ik} = d_{ik}, \\ A_{ik}^{1\alpha} &= a_{ik}^{1\alpha} - V_1 a_{ik}^{4\alpha}, \quad A_{ik}^{\alpha 1} = a_{ik}^{\alpha 1} - V_1 a_{ik}^{\alpha 4}, \\ A_{ik}^{11} &= a_{ik}^{11} - V_1 a_{ik}^{(14)} + V_1^2 a_{ik}^{44}; \end{aligned} \quad (7)$$

для сокращения записи в (7) считаем $\alpha, \beta = 2, 3, 4$. Отметим, что из совпадения (5) и (6) следует, что решение $q^k(\zeta_{\alpha})$ получается из $(q^k)^1(x_1, x_{\mu}, x'_4)$ простой сменой аргументов x_1, x_{μ}, x'_4 на ζ_{α} .

Решение вспомогательной (стационарной) задачи без ограничения общности можно взять гармоническим по переменным x_{μ}, x_4 :

$$(q^k)' = \sum_l^n Q_l^k \exp \left[j(\omega' x_4 - x^{\mu} x_{\mu} - \int x_l^1 dx_1) \right]. \quad (8)$$

Пусть изменение параметров в исходной системе K происходит внутри конечной движущейся области, что соответствует неподвижному неоднородному слою в системе K' . Вне слоя, в области постоянных параметров, Q_l имеют смысл амплитуд, а x и ω' — волновых чисел и частоты n нормальных волн, существующих в такой системе. Из (8) с учетом сказанного выше для q^k нетрудно получить

$$q^k = \sum_l^n Q_l^k \exp(j\theta_l), \quad (9)$$

где

$$\theta_l = \omega' x_4 - \int x_l^1 d\zeta_1 - x^{\mu} x_{\mu}.$$

Как следует из (8) и (9), решение исходной задачи вне области изменения параметров также записывается в виде суммы n волн, амплитуды которых Q_l равны амплитудам соответствующих волн в системе K' , а частоты и волновые числа, определяемые как $\omega_l = \frac{\partial \theta_l}{\partial x_4}$, $k_l^1 = -\frac{\partial \theta_l}{\partial x_1}$, $k^{\mu} = -\frac{\partial \theta_l}{\partial x_{\mu}}$, равны

$$\omega_l = \omega' + V x_1^1, \quad k_l^1 = x_1^1, \quad k^{\mu} = x^{\mu}, \quad (10)$$

причем величины ω_l , k_l удовлетворяют соотношениям Допплера

$$\omega_l \left(1 - V \frac{v_{lx}}{v_l^2}\right) = \omega_0 \left(1 - V \frac{v_{0x}}{v_0^2}\right), \quad (11)$$

где v_{lx} — составляющая фазовой скорости волны l вдоль оси x_1 ($l = 0$ относится к падающей волне).

При рассмотрении энергетических соотношений на движущихся границах наряду с изменением амплитуды и частоты следует учесть также преобразование длительности сигнала (импульса) или его объема (Λ), которое для однородного волнового пакета имеет вид [1]

$$\frac{\Lambda_l}{\Lambda_0} = \left| \frac{u_{lx} - V}{u_{0x} - V} \right|, \quad (12)$$

где u_{lx} — x -компонента групповой скорости волны l .

Определим «число квантов» в волновом пакете энергии W_l и частоты ω_l как $N_l = W_l/\omega_l$; при этом величина N_l вместе с ω_l может менять знак, как легко видеть из соотношений Допплера (11). Докажем, что

$$\sum_l^n \{ N_l \operatorname{sgn}(u_{lx} - V) \} = 0, \quad (13)$$

где фигурные скобки обозначают разность значений заключенных в них величин по разные стороны неоднородной области.

Обозначим через $\langle \omega_l \rangle$ и $\langle s_l \rangle$ соответственно среднюю по периоду плотность энергии и x -компоненту плотности потока энергии в волне l . Тогда $W_l = \Lambda_l \langle \omega_l \rangle$, $\langle s_l \rangle = u_{lx} \langle \omega_l \rangle$, и равенство (13) с учетом (12) можно переписать следующим образом:

$$\sum_l^n \left\{ \frac{\langle s_l \rangle - V \langle \omega_l \rangle}{\omega_l} \right\} = 0. \quad (14)$$

Поскольку в монохроматической волне $\langle L_l \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} \langle \omega_l \rangle &= \left\langle \dot{q}_4^k \frac{\partial L_l}{\partial \dot{q}_4^k} \right\rangle = \omega_l (a_{ik}^{14} k_l^1 - a_{ik}^{44} \omega_l + a_{ik}^{\mu 4} k_l^{\mu}) Q_l^i Q_l^k, \\ \langle s_l \rangle &= \left\langle \dot{q}_1^k \frac{\partial L_l}{\partial \dot{q}_1^k} \right\rangle = \omega_l (a_{ik}^{11} k_l^1 - a_{ik}^{41} \omega_l + a_{ik}^{\mu 1} k_l^{\mu}) Q_l^i Q_l^k \end{aligned} \quad (15)$$

согласно [7].

Подставляя (15) в (14) и учитывая затем формулы (10), получим

$$\sum_l^n \left\{ \left[(a_{ik}^{11} - V_1 a_{ik}^{41}) + V_1^2 a_{ik}^{44} \right] x_l^1 - (a_{ik}^{41} - V_1 a_{ik}^{44}) \omega' + (a_{ik}^{\mu 1} - V_1 a_{ik}^{\mu 4}) x_l^{\mu} \right\} Q_l^i Q_l^k = 0,$$

или, принимая во внимание [7], $\sum_I^n \{ \langle s'_i \rangle \} = 0$, что означает равенство

нулю суммарного потока энергии через поверхность, охватывающую неподвижную неоднородную область в системе K' , и представляется очевидным в силу консервативности последней. Тем самым доказано соотношение (13) для квазимонохроматических волновых пакетов в произвольной лагранжевой системе (1) с бегущими параметрами. Соотношение (13) с учетом сказанного выше для N_i можно трактовать как равенство нулю полного «потока квантов» через поверхность, охватывающую движущуюся неоднородную область. Оно позволяет, в частности, судить об энергетических характеристиках взаимодействующих волновых пакетов, если известны их частотные характеристики.

Если же под числом квантов понимать, как обычно, величину $|N_i|$, равенство (13) с учетом (11) удобнее переписать в виде

$$\sum_I^n \left\{ |N_i| \operatorname{sgn} \left[(u_{ix} - V) \left(1 - V \frac{v_{ix}}{v_i^2} \right) \right] \right\} = 0. \quad (16)$$

Тогда в зависимости от дисперсионных свойств системы условие (16) может соответствовать как сохранению общего числа квантов во вторичных волнах по отношению к первичной, так и рождению новых квантов [6, 4], если одна из волн лежит в пределах черенковского конуса по отношению к скорости движения неоднородной области ($v_{ix} V > v_i^2$).

Более подробное обсуждение относящихся сюда вопросов можно провести аналогично тому, как это сделано в [1-3] для некоторых частных случаев.

Автор приносит благодарность Н. С. Степанову за предложенную задачу и помощь в работе, а также М. А. Миллеру и Л. А. Островскому за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
2. Л. А. Островский, ЖЭТФ, 61, вып. 2 (8), 551 (1971).
3. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, ПМТФ (в печати).
4. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 1, 19 (1971).
5. Н. С. Степанов, ЖЭТФ, 53, вып. 6 (12), 2186 (1967).
6. L. A. Ostrovskii, N. S. Stepanov, Alta Frequenza, 38, No. speciale, 204 (1969).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М, 1967.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
17 июня 1971 г.

AN ENERGY RELATION FOR WAVES IN SYSTEMS WITH TRAVELING PARAMETERS

Yu. M. Sorokin

An expression is obtained which relates the full energies and frequencies of quasi-monochromatic wave packets with the parameters changing in time and space according to the arbitrary profile traveling wave law.

УДК 538.56 : 621.371.24

ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ НА ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ ОПТИКО-ЭЛЕКТРОННЫМ МОНОИМПУЛЬСНЫМ МЕТОДОМ

Г. А. Андреев, Р. М. Магид

Получено выражение для среднеквадратичной ошибки измерения углового положения удаленного источника излучения, обусловленной хаотическими амплитудными флуктуациями из-за турбулентности атмосферы. Приведенные теоретические результаты и экспериментальные данные позволяют оценить возможности моноимпульсного метода измерения углового положения источника оптического излучения в среде со случайными неоднородностями.

В астрономии и некоторых других приложениях [1, 2] требуются устройства, автоматически вырабатывающие электрические сигналы, пропорциональные угловому положению источника оптического излучения в декартовой системе координат. На рис. 1 приведена функциональ-

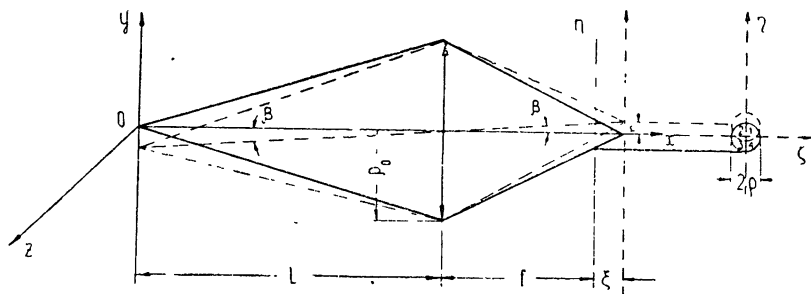


Рис. 1. Функциональная схема оптико-электронного устройства для измерения углового положения источника излучения.

ная схема, решающая эту задачу. Источник излучения, расположенный в начале координат плоскости Oyz , на расстоянии L по оси x от входной апертуры приемной системы, создает в плоскости $\Pi(\eta, \zeta)$, смещенной к объективу на величину ξ по оси x от фокальной плоскости, изображение в виде круга радиусом $\rho = (\xi/f)\rho_0$, где ρ_0 — радиус отверстия (апертуры), а f — фокусное расстояние объектива. При смещении источника излучения, например, по оси y , в плоскости Oyz на угол $\beta \ll 1$ круг, изображающий источник в плоскости Π , смещается по вертикали на величину η . Это показано отдельно на рис. 1 справа. При $\beta \ll 1$ и $f \gg \xi$ $\eta = \beta f$.

Для пояснения получения функциональной зависимости между электрическими сигналами $U_i = K_i \mathcal{E} S_i$, снимаемыми с i -го квадранта четырехэлементного фотообразователя, помещенного в плоскости $\Pi(\eta, \zeta)$, и углом β используем вынесенную вправо на рис. 1 плоскость $\Pi(\eta, \zeta)$ с изображением кругов для несмещенного (сплошная линия) и смещенного (пунктирная) положений источника излучения.

Предполагая, что коэффициенты преобразования K_i i -м преобразователем поверхностной плотности энергии оптического излучения (количества облучения) одинаковы, можно показать, что комбинация сигналов вида

$$U_\beta = \frac{U_1 + U_2 - U_3 - U_4}{\sum_{i=1}^4 U_i} = \frac{(S_{1\eta} + S_{2\eta}) - (S_{3\eta} + S_{4\eta})}{\sum_{i=1}^4 S_{i\eta}} = g(\eta_*) = \frac{1}{\pi} \left[\pi - 2 \arccos \eta_* - 2 \eta_* \sqrt{1 - \eta_*^2} \right] \quad (1)$$

зависит только от относительного линейного смещения изображения источника излучения $\eta_* = \eta/\rho$ ($S_{i\eta}$ — площадь i -го квадранта круга). Связь между угловым положением источника излучения $\beta = \eta/f$ и η_* записывается в виде

$$\beta = \eta_* \frac{\rho}{f}. \quad (2)$$

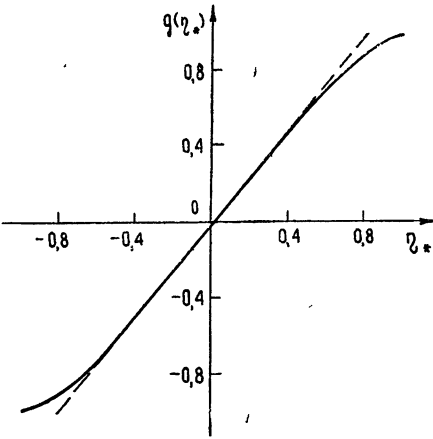


Рис. 2. Зависимость величины выходного сигнала $U_\beta = g(\eta_*)$ от относительного линейного смещения $\eta_* = \eta/\rho$ (углового $\beta = \eta_* \rho/f$) изображения источника излучения.

На рис. 2 представлен график функции $g(\eta_*)$, описываемой соотношением (1). Из графика и соотношения (1) следует, что в диапазоне изменения $\eta_* = \pm 0,6$ $g(\eta_*) = g'_\eta(0)\eta_* = (4/\pi)\eta_*$, т. е. функция является линейной (пунктирная линия на рис. 2). На линейном участке $g(\eta_*)$ связь между углом β и сигналом U_β (1) записывается в виде

$$\beta = \frac{\pi \rho}{4 f} \frac{U_1 + U_2 - U_3 - U_4}{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} = \frac{\pi \rho}{4 f} U_\beta. \quad (3)$$

Аналогично получается выражение для γ :

$$\gamma = \frac{\pi \rho}{4 f} \frac{U_1 + U_4 - U_2 - U_3}{U_1 + U_2 + U_3 + U_4} = \frac{\pi \rho}{4 f} U_\gamma.$$

При распространении оптического излучения в приземном слое атмосферы у сигналов U_i возникают амплитудные флуктуации — мультипликативная помеха из-за турбулентных неоднородностей показателя преломления атмосферы. Флуктуирующие сигналы для последующего анализа удобно записывать в виде $\tilde{U}_i = U_i + \Delta U_i(\rho_i, t)$, где $U_i = \langle \tilde{U}_i \rangle$ — статистическое среднее, $\Delta U_i(\rho_i, t) = \tilde{U}_i - U_i$ — флуктуации сигнала на выходе i -го квадранта фотопреобразователя, а ρ_i — радиус-вектор центра тяжести квадранта круглой апертуры объектива. Поскольку преобразование в электрический сигнал U_β осуществляется площадками, разнесенными в пространстве, в один и тот же момент времени, то из-за неполной корреляции флуктуаций ΔU_i возникают флуктуации сигнала U_β , что, очевидно, приводит к ошибкам в определении β .

В i -м квадранте относительная флуктуация сигнала равна

$$\Delta U_{*i} = \frac{\tilde{U}_i}{\sum_{j=1}^4 \tilde{U}_j} - \frac{U_i}{\sum_{j=1}^4 U_j} = \frac{U_i}{\sum_{j=1}^4 U_j + \sum_{j=1}^4 \Delta U_j} - \frac{U_i}{\sum_{j=1}^4 U_j} - \frac{\Delta U_i}{\sum_{j=1}^4 U_j + \sum_{j=1}^4 \Delta U_j}.$$

Обозначим $\tilde{m}_2 = \frac{\sum_{j=1}^4 \Delta U_j}{\sum_{j=1}^4 U_j}$. При $\Delta U_j \ll U_j$, $\tilde{m}_2 \ll 1$. С использо-

ванием первого члена разложения в ряд по параметру m_2 величина ΔU_{*i} представляется в виде

$$\Delta U_{*i} = \frac{\Delta U_i}{\sum_{j=1}^4 U_j} (1 - \tilde{m}_2) - \tilde{m}_2 \frac{U_i}{U_j}.$$

Средний квадрат величины ΔU_{*i} (дисперсии $D\{U_{*i}\}$), на основании квадратичных соотношений теории вероятностей [3], представляется в виде

$$D\{U_{*i}\} \approx D\left\{\frac{\tilde{U}_i}{\sum_{j=1}^4 U_j}\right\} [1 + D\{\tilde{m}_2\}]. \quad (4)$$

При получении соотношения (4) пренебрегли величиной $(U_i / \sum_{j=1}^4 U_j)^2$ по сравнению с единицей.

Для упрощения предположим, что $U_i = U$, тогда величина дисперсии (первый множитель в (4))

$$D\left\{\frac{\tilde{U}_i}{\sum_{j=1}^4 U_j}\right\} = \frac{\sigma_u^2}{16U^2} = \frac{m_u^2}{16}, \quad (5)$$

где

$$m_u = \sqrt{D\{\tilde{U}\}/M\{\tilde{U}\}} = \sigma_u/U, \text{ а } D\{\tilde{m}_2\} = D\left\{\frac{\sum_{j=1}^4 \Delta U_j}{\sum_{j=1}^4 U_j}\right\}/16U^2;$$

величину m_u назовем глубиной хаотической модуляции [4]. Для вычисления $D\left\{\frac{\sum_{j=1}^4 \Delta U_j}{\sum_{j=1}^4 U_j}\right\}$ воспользуемся квадратичным соотношением [3] в виде

$$D\left\{\sum_{j=1}^n \Delta U_j\right\} = \sum_{j=1}^n D\{\tilde{U}_j\} + 2 \sum_{\substack{(n) \\ (m)}} \Psi_{ik},$$

где $\Psi_{ik} = \langle \Delta U_i \Delta U_k \rangle$ — корреляционная функция, а $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$.

Целесообразно ввести коэффициенты корреляции $R_{ik} = \Psi_{ik}/\sigma_u^2$, которые теоретически могут быть оценены по коэффициенту корреляции $R_\chi(\rho)$ поперечных пространственных флуктуаций уровня излучения $\chi = \ln(A_1/A_0)$ в плоскости входной апертуры приемной оптической сис-

темы [4, 5] и по глубине хаотической модуляции m_u с использованием соотношения

$$R_u(\rho) = \frac{\exp[\ln(1 + m_u^2) R_\chi(\rho)] - 1}{m_u^2}. \quad (6)$$

Выражение (6) для коэффициента корреляции флуктуаций напряжения U на выходе фотопреобразователя получено с учетом соотношения $\ln(\tilde{U}/U_0) = 2\chi$ и логарифмически нормальной плотности вероятностей \tilde{U}

Для локально однородных и изотропных турбулентных флуктуаций показателя преломления атмосферы коэффициент корреляции $R_u(\rho)$ обладает круговой симметрией. С использованием круговой симметрии коэффициента корреляции $R_u(\rho)$ член $2 \sum_{\binom{4}{2}} \Psi_{ik}$ представляется в виде

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\binom{4}{2}} \Psi_{ik} &= 2\sigma_u^2 (R_{12} + R_{13} + R_{14} + R_{23} + R_{24} + R_{34}) = \\ &= 4\sigma_u^2 [2R_u(0,8\rho_0) + R_u(\rho_1)]. \end{aligned}$$

При выводе этого соотношения учли, что

$$\begin{aligned} R_{12} = R_{14} = R_{23} = R_{34} &= R_u(\rho = 0,8\rho_0), \\ \text{а } R_{13} = R_{24} &= R_u(\rho_1) = R(\rho_1) = R, \end{aligned}$$

где $\rho_1 = 1,2\rho_0$, т. е. ρ_1 равно удвоенному расстоянию между центрами тяжести накрест лежащих соседних квадрантов.

Величина $\rho = 0,85\rho_0$ определена как удвоенная координата центра тяжести квадранта входной апертуры $Z_c = Y_c = \frac{4}{3\pi} \rho_0 \approx 0,425\rho_0$. Поскольку

$$D\{\tilde{U}_j\} = \sigma_u^2, \text{ то}$$

$$D\{m_2\} = \frac{m_u^2}{4} [2R_u(0,8\rho_0) + R_u(\rho_1)].$$

Таким образом, соотношение (4) представляется в виде

$$D\{U_{*i}\} = \frac{m_u^2}{16} \left\{ 1 + \frac{m_u^2}{4} [2R_u(0,8\rho_0) + R_u(\rho_1)] \right\}.$$

По аналогии с приведенными вычислениями можно показать, что в указанном приближении

$$D\{U_\beta\} = \frac{m_u^2}{4} (1 - R). \quad (7)$$

Заметим, что аппаратная реализация алгоритма (3), содержащего нелинейную операцию деления мгновенных амплитудных значений сигналов, создает известные трудности. В связи с этим часто используют алгоритм в виде

$$\begin{aligned} \gamma &= K(u) (U_1 + U_4 - U_2 - U_3), \\ \beta &= K(u) (U_1 + U_2 - U_3 - U_4). \end{aligned}$$

При этом $K(u) = K_1 / (\sum U_i)$ реализуют с помощью системы, применяемой в радиолокационной станции [6], действие которой сводится к сгла-

живанию (усреднению) во времени (черта сверху) суммы в знаменателе. При использовании алгоритма обработки сигналов со сглаженной суммой в знаменателе $m_\varepsilon = 0$, $D\{m_\varepsilon\} = 0$, и соотношение (7) является точным. Оно может быть получено более просто, так как флуктуации ΔU_{*i} в этом случае представляются в виде $\Delta U_{*i} = (\tilde{U}_i - U) / \sum_{j=1}^4 U_j$, т. е. предполагается, что в результате сглаживания суммарный сигнал в знаменателе не флуктуирует.

Из соотношения (3) следует, что $\sqrt{D\{U_\beta\}} = \frac{4}{\pi} \sigma_\beta \frac{f}{\rho}$, где σ_β — среднеквадратичная угловая ошибка в определении величины β из-за амплитудных флуктуаций составляющих алгоритма обработки (3). На основании (7) последнее соотношение целесообразно представить в виде

$$\sigma_\beta = \frac{\pi}{4} \frac{m_u}{2} \sqrt{1-R} \frac{\rho}{f}. \quad (8)$$

Из изложенного выше следует, что максимальное значение углового положения источника излучения $\beta_+ = 0,6 \rho / f$, соответствующее верхнему пределу линейной зоны графика на рис. 2, так же как и σ_β , зависит от ρ / f . Поэтому для оценки влияния мультипликативной помехи для любой дальности L в линейной зоне пеленгационной характеристики целесообразно пользоваться относительным среднеквадратичным значением ошибки:

$$\sigma_* = \frac{\sigma_\beta}{\beta_+} = \frac{\pi}{4,8} m_u \sqrt{1-R}. \quad (9)$$

Как видно из (9), если флуктуации оптического излучения сильно коррелированы в поперечной плоскости на расстояниях порядка радиуса входной апертуры ($R \approx 1$), то при моноимпульсном способе определения углового положения источника излучения эти флуктуации не влияют на точность определения угла. При некоррелированности флуктуаций ($R = 0$) относительная среднеквадратичная ошибка определения угла определяется полностью глубиной хаотической амплитудной модуляции.

При этом следует иметь в виду, что в случае апертуры, достаточно большой по сравнению с радиусом корреляции флуктуаций интенсивности, глубина хаотической модуляции выходного сигнала m_u (в соотношениях (7), (8)) из-за усредняющего действия апертуры будет меньше, чем на входе апертуры. Следуя [5], можно показать, что уменьшение квадрата глубины хаотической модуляции m_u^2 выходного сигнала из-за усредняющего действия всей входной круглой апертуры с радиусом ρ_0 описывается соотношением

$$Q_m^2 = \frac{2}{\rho_0^2} \int_0^{2\rho_0} R_u(\rho) R_g(\rho) \rho d\rho.$$

В этом соотношении $R_g(\rho)$ — коэффициент корреляции круглой апертуры с радиусом ρ_0 (свертка двух кругов), который записывается в виде

$$R_g(\rho) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos \frac{\rho}{2\rho_0} - \frac{\rho}{2\rho_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{2\rho_0} \right)^2} \right] & (\rho \leq 2\rho_0) \\ 0 & (\rho > 2\rho_0) \end{cases}$$

Коэффициент корреляции $R_u(\rho)$ задается соотношением (6). В работе [5] приведены результаты численных расчетов Q_m^2 для различных значений σ_1^2 и соотношения $2\rho_0/\sqrt{\lambda L}$.

Из теории распространения волн оптического диапазона в турбулентной атмосфере [5] следует, что глубина амплитудной хаотической модуляции может быть найдена [7] по соотношению

$$\ln(1 + m_u^2) = a C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}, \quad (9)$$

где a — коэффициент, зависящий от формы фронта волны излучения [8], C_n^2 — коэффициент пропорциональности в структурной функции двух третей показателя преломления [5], $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, соответствующее длине волны излучения λ , L — расстояние от источника излучения до приемной системы.

В приземном слое атмосферы диапазон изменений C_n значителен настолько, что для $L = 2$ км величина m_u может достигать значения, равного единице. Как следует из теоретического рассмотрения, подтвержденного экспериментальными результатами [7], коэффициент корреляции $R_u(\rho)$ обращается в нуль при значениях аргумента $\rho \sim \sqrt{\lambda L}$; однако из-за наличия близко расположенных площадок фотопреобразователя (разрезы между площадками $\ll \sqrt{\lambda L}$) возможна корреляция сигналов от накрест лежащих квадрантов.

Для получения экспериментальных данных о коэффициенте пространственной поперечной корреляции и глубине амплитудной хаотической модуляции при моноимпульсном методе определения углового положения источника в приземном слое атмосферы были проведены наблюдения и регистрации флуктуаций по схеме, приведенной на рис. 1.

Источником излучения служила импульсная лампа ИСШ-100 с формирующей оптической системой с диаметром выходного зрачка, равного 3 см. Длительность импульса излучения составляла $\tau_u = 0,5$ мксек с частотой повторения $F_n = 400$ гц. Излучающая и приемная система располагались на высоте 1,5 м над поверхностью земли. Расстояние между источником и приемником излучения $L = 2000$ м.

В приемной оптической системе использовался объектив типа МТО-500 и четырехплощадочный кремниевый фотодиод, смещенный относительно фокальной плоскости к объективу на $\xi = 15$ мм. Флуктуации огибающей импульсных сигналов, преобразованных площадками фотоприемника, выделялись инерционным пиковым детектором и записывались на двухканальный шлейфный осциллограф.

В результате статистической обработки экспериментальных данных флуктуаций, зарегистрированных в дневное время в различные сентябрьские дни, были получены усредненные значения $m_u = 0,5$ и $R_u \approx 0,4$. Для этих значений, как следует из соотношения (9), величина среднеквадратичной ошибки составляет $\sigma_* = 0,25$, т. е. является весьма существенной. Таким образом, частично коррелированные амплитудные флуктуации существенно ограничивают возможности моноимпульсного метода оперативного определения углового положения источника излучения.

Авторы благодарят В. А. Осовалюка и С. А. Шилина за помощь в подготовке и проведении экспериментов, а также в обработке данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Якушенков, Основы теории и расчета оптико-электронных приборов, изд. Сов. радио, М., 1971.
2. Л. З. Криксунов, И. Ф. Усольцев, Инфракрасные системы, изд. Сов. радио, М., 1968.
3. Е. С. Вентцель, Теория вероятностей, изд. Наука, М., 1969.

4. Г. А. Андреев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 6, 1198 (1964).
5. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
6. М. Сколник, Введение в технику радиолокационных систем, изд. Мир, М., 1965.
7. Г. А. Андреев, Э. И. Гельфер, В. А. Зверев, В. Э. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 2, 276 (1971).
8. А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 1, 147 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
2 ноября 1970 г.

INFLUENCE OF INTENSITY FLUCTUATIONS ON THE MEASUREMENT OF
ANGULAR POSITION OF RADIATION SOURCE BY OPTICAL-ELECTRON
MONOPULSE METHOD

G. A. Andreev, R. M. Magid

An expression is obtained for the measurement error for the angular position of the remote radiation source caused by random amplitude fluctuations due to the atmosphere turbulence. The theoretical and experimental data permit to estimate the possibilities of the monopulse method of measuring the angular position of the optical radiation source in the medium with random inhomogeneities.

УДК 538.56

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАИБОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ В РЕАЛИЗАЦИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Я. А. Фомин

Определяется приближенное выражение интегральной функции распределения наибольших значений. Приведены результаты вычислений для нормальной и рэлеевской случайных стационарных последовательностей.

Для решения ряда задач, возникающих в статистической радиотехнике, статистической радиотехнике, теории надежности радиоэлектронных систем и т. д., необходимо знание интегральных функций распределения $P(x)$ наибольших значений в конечных реализациях случайных процессов с дискретным временем (случайных последовательностей).

Настоящая работа посвящена определению приближенных выражений для указанной функции на основе полученной в [1] плотности вероятности $W(x)$ наибольших значений в конечных реализациях стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с дискретным временем

$$W(x) = \frac{d}{dx} F_n(x, \dots, x; t_1, \dots, t_n), \quad (1)$$

где $F_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ — n -мерная интегральная функция распределения процесса $\xi(t)$, и приближенного метода вычисления многомерных интегральных функций распределения случайных процессов [2].

Общее выражение интегральной функции распределения $P(x)$ наибольших значений стационарного случайного процесса $\xi(t)$ с дискретным временем (случайной последовательности) находится непосредственно из формулы (1):

$$P(x) = F_n(x, \dots, x; t_1, \dots, t_n). \quad (2)$$

Поскольку представление n -мерной интегральной функции распределения $F_n(x, \dots, x; t_1, \dots, t_n)$ в аналитическом виде сопряжено в подавляющем большинстве случаев со значительными трудностями, целесообразно воспользоваться приближенными методами вычисления этой функции. В работе [2] получено следующее выражение ν -связного марковского приближения $F_n^{(\nu)}(x_1, \dots, x_n)$ n -мерной интегральной функции распределения:

$$F_n^{(\nu)}(x_1, \dots, x_n) = F_{\nu+1}(x_1, \dots, x_{\nu+1}) \prod_{i=2}^{n-\nu} \frac{F_{\nu+1}(x_i, \dots, x_{i+\nu})}{F_{\nu}(x_i, \dots, x_{i+\nu-1})} \quad (n > \nu + 1). \quad (3)$$

Сопоставление формул (2) и (3) позволяет записать ν -связное марковское приближение $P^{(\nu)}(x)$ интегральной функции распределения наибольших значений в реализациях стационарных случайных последовательностей, состоящих из n членов, в виде

$$P^{(\nu)}(x) = \frac{F_{\nu+1}^{n-\nu}(x, \dots, x)}{F_{\nu}^{n-\nu-1}(x, \dots, x)} \quad (n > \nu + 1). \quad (4)$$

Рассмотрим важные для практических приложений случаи нормальной и рэлеевской случайных стационарных последовательностей. Для нормальной случайной последовательности целесообразно использовать интеграл вероятности $F(x)$ [3], табулированный двойной интеграл $K_2(x, x)$ [4], равный

$$K_2(x, x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \int_x^\infty \int_x^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} [y_1^2 - 2ry_1y_2 + y_2^2]\right\} dy_1 dy_2,$$

и тройной интеграл $K_3(x, x, x)$:

$$K_3(x, x, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{1-2r_1^2-r_2^2+2r_1^2r_2}} \times \\ \times \int_x^\infty \int_x^\infty \int_x^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2(1-2r_1^2-r_2^2+2r_1^2r_2)} [(1-r_1^2)(y_1^2+y_3^2) + (1-r_2^2)y_2^2 + \right. \\ \left. + 2r_1(r_2-1)(y_1y_2+y_2y_3) + 2(r_1^2-r_2)y_3y_1]\right\} dy_1 dy_2 dy_3,$$

значения которого, вычисленные на ЭВМ, приведены в работе [2]. При помощи функций $F(x)$, $K_2(x, x)$ и $K_3(x, x, x)$ можно вычислить независимое, односвязное и двухсвязное приближения интегральной функции распределения наибольших значений нормальной стационарной случайной последовательности:

$$P^{(0)}(x) = F^n(x); \quad (5)$$

$$P^{(1)}(x) = F(x) \{F^{-1}(x) [K_2(x, x) + 2F(x) - 1]\}^{n-1}; \quad (6)$$

$$P^{(2)}(x) = [K_2(x, x) + 2F(x) - 1] \{ [K_2(x, x) + 2F(x) - 1]^{-1} \times \\ \times [3F(x) - 2 + 2K_2(x, x) + K_2^*(x, x) - K_3(x, x, x)]\}^{n-2} \quad (n \geq 3), \quad (7)$$

где $K_2(x, x)$ — двойной интеграл, вычисленный для значений односвязной и двухсвязной случайных последовательностей, отстоящих друг от друга на один шаг, а $K_2^*(x, x)$ — двойной интеграл, вычисленный для значений двухсвязной случайной последовательности, отстоящих друг от друга на два шага.

На рис. 1 приведены результаты вычисления независимого, односвязного и двухсвязного приближений интегральной функции распределения наибольших значений нормальной стационарной случайной последовательности для $n=5$, а на рис. 2 — результаты вычисления односвязного приближения для $n=5; 10; 20$ и 50 . Анализ приведенных интегральных функций распределения показывает, что увеличение связности используемого приближения проявляется, главным образом, в том, что кривые интегральных функций распределения становятся более пологими. Увеличение числа членов реализации n приводит к смещению кривых интегральной функции распределения в область больших значений аргумента и к увеличению крутизны.

Для рэлеевской стационарной случайной последовательности можно вычислить независимое и односвязное приближения интегральной функции распределения наибольших значений на основе использования известных выражений одномерной и двумерной интегральной функции распределения этой последовательности через элементарные и табулированные функции [3, 5, 6]

$$P^{(0)}(x) = \left[1 - \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} \right]^n \quad (x > 0); \quad (8)$$

$$P^{(1)}(x) = \left[1 - \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} \right]^{2-n} \left\{ 1 - \exp \left\{ \frac{x^2}{1-r^2} \right\} I_0 \left(\frac{rx^2}{1-r^2} \right) - \right. \\ \left. - 2 \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} \left[1 - Q \left(\frac{x}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{rx}{\sqrt{1-r^2}} \right) \right] \right\}^{n-1} \quad (x > 0), \quad (9)$$

где

$$Q(u, v) = \int_u^\infty \rho \exp \left\{ -\frac{v^2 + \rho^2}{2} \right\} I_0(v\rho) d\rho$$

— табулированный интеграл вероятностей распределения Рэлея — Райса [7].

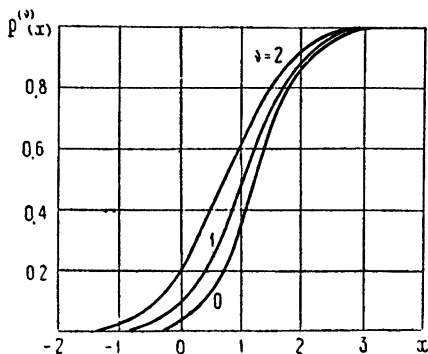


Рис. 1.

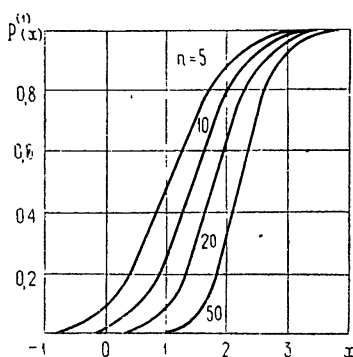


Рис. 2.

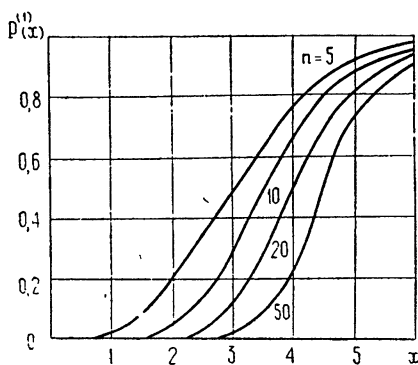


Рис. 3.

Анализируя результаты вычисления односвязного приближения интегральных функций распределения наибольших значений рэлеевской стационарной случайной последовательности для $n = 5; 10; 20; 50$, приведенные на рис. 3, можно отметить, что, как и для нормальной последовательности, увеличение числа n членов реализации приводит к смещению кривых интегральных функций распределения в область больших значений аргумента и некоторому увеличению их крутизны.

В качестве примера использования полученных результатов проанализируем пороговую систему, запускаемую полезным импульсным сигналом, получаемым на выходе детектора радиоприемного устройства. Пусть период следования импульсов является достаточно большим, а их амплитуда x_0 существенно превосходит среднеквадратичное значение рэлеевского шума, воздействующего на пороговую систему в отсутствие полезного сигнала. При проектировании указанной системы, как правило, требуется обеспечить заданный уровень вероятности отсутствия ложного срабатывания порогового устройства, обусловленного превышением выбросами рэлеевского шума порогового уровня x_n .

В результате временной дискретизации рэлеевского случайного процесса (см., например, [5]) можно получить рэлеевскую случайную последовательность, вероятностные характеристики которой могут рассматриваться как приближения к характеристикам исходного рэлеевского случайного процесса. В частности, независимое $P_{\text{отс}}^{(0)}$ и односвязное $P_{\text{отс}}^{(1)}$ приближения вероятности отсутствия ложных срабатываний пороговой системы от выбросов рэлеевского шума в заданном интервале ожидания T в соответствии с (8) и (9) запишутся следующим образом:

$$P_{\text{отс}}^{(0)} = \left[1 - \exp \left\{ -\frac{x_n^2}{2} \right\} \right]^n \quad (x_n > 0),$$

$$P_{\text{отс}}^{(1)} = \left[1 - \exp \left\{ -\frac{x_n^2}{2} \right\} \right]^{2-n} \left\{ 1 - \exp \left\{ -\frac{x_n^2}{1-r^2} \right\} I_0 \left(\frac{rx_n^2}{1-r^2} \right) - 2 \exp \left\{ -\frac{x_n^2}{2} \right\} \left[1 - Q \left(\frac{x_n}{\sqrt{1-r^2}}, \frac{rx_n}{\sqrt{1-r^2}} \right) \right] \right\}^{n-1} \quad (x_n > 0),$$

где $n = T/\tau_0$, τ_0 — интервал дискретизации рэлеевского случайного процесса.

Так, при десятикратном превышении амплитудой сигнала среднеквадратичного значения шума и при пороговом уровне, равном половине значения амплитуды сигнала, получаются следующие значения односвязного приближения вероятности отсутствия ложных срабатываний для различных значений интервала ожидания $T = n\tau_0$, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

T/τ_0	5	10	20	50
$P_{\text{отс}}^{(1)}$	0,905	0,88	0,841	0,727

Как и следовало ожидать, вероятность отсутствия ложных срабатываний уменьшается с увеличением длительности интервала ожидания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. А. Фомин, Проблемы передачи информации, 6, № 1, 99 (1970).
2. Б. Р. Левин, Я. А. Фомин, Проблемы передачи информации, 6, № 4, 102 (1970).
3. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд. Сов. радио, М., 1966.
4. A. Lee, Biometrika (London), 19, № 3, 4 (1927).
5. Б. Р. Левин, Я. А. Фомин, Радиотехника, 22, № 3, 103 (1967).
6. Mark William, Proc. IEEE, 52, № 6, 741 (1964).
7. Л. С. Барк, Таблицы распределения Рэлея—Райса, изд. ВЦ АН СССР, М., 1964.

Поступила в редакцию
27 января 1971 г.

APPROXIMATIVE DETERMINATION OF THE INTEGRAL DISTRIBUTION
FUNCTION OF THE GREATEST VALUES IN RANDOM SUCCESSION
REALIZATIONS

Ya. A. Fomin

An approximate expression of the integral function of the greatest value distribution is determined. The calculation results are given for normal and Rayleigh random stationary successions.

УДК 538.56 : 519.25

О ПРЕОБРАЗАННОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Ю. Н. Барабаненков

Рассматривается линейное стохастическое уравнение. В результате преобразования, применяемого в теории интегральных уравнений для улучшения сходимости последовательных приближений, получаются преобразованные стохастические уравнения. Последние являются точными и эквивалентны исходному уравнению. Путем решения преобразованных стохастических уравнений методом малых возмущений выводятся условия применимости приближенных уравнений Келлера для среднего по ансамблю значения поля, удовлетворяющего исходному стохастическому уравнению. В качестве приложения оцениваются границы применимости уравнения Дайсона в приближениях Фолди и Бурре. В первом случае предполагается, что среда состоит из рэлеевских рассеивателей, во втором, — что флуктуации проницаемости среды являются мелкокомасштабными. Если среда ограничена и имеет вид шара, то условия применимости уравнений Дайсона накладывают ограничение сверху на радиус шара, который тем не менее может принимать значения, превышающие длину экстинкции.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе Келлера [1] рассматривается линейное стохастическое уравнение вида

$$(A - B)u = g, \quad (1)$$

где A — неслучайный и B — случайный операторы, u — искомое поле, g — плотность источников поля. Полагая

$$A = L, \quad B = \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots, \quad (2)$$

где ε — малый параметр, и применяя предложенную им теорию возмущений, Келлер получает следующее приближенное уравнение для среднего значения искомого поля u :

$$[\Delta - \varepsilon \bar{L}_1 - \varepsilon^2 (\bar{L}_2 + \overline{\tilde{L}_1 L^{-1} \tilde{L}_1})] \bar{u}_2 = g. \quad (3)$$

Здесь черта сверху означает усреднение по ансамблю, волна сверху — флуктуационную часть, равную разности между случайным и средним значениями оператора, $\tilde{L}_1 = L_1 - \bar{L}_1$; нижний индекс у поля \bar{u}_2 указывает на то, что уравнение (3) получается из точного уравнения* [2] для среднего поля u путем отбрасывания членов порядка ε^3 .

Уравнение (3) можно назвать уравнением второго порядка. Отбрасывая в нем члены порядка ε^2 , получаем уравнение первого порядка

$$(L - \varepsilon \bar{L}_1) \bar{u}_1 = g. \quad (4)$$

Уравнения Келлера (3) и (4) имеют весьма общий характер. Представляет интерес выяснить границы их применимости. С этой целью

* В отличие от приближенного уравнения (3), в левой части точного уравнения [2] стоит оператор в виде бесконечного ряда.

в данной работе выводятся преобразованные стохастические уравнения, эквивалентные исходному уравнению (1). Решение преобразованных уравнений методом малых возмущений с последующим усреднением результата приводит к разложению для среднего поля, первые члены которых совпадают с решениями уравнений Келлера.

2. ВЫВОД ПРЕОБРАЗОВАННОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Обозначим через u_0 частное решение уравнения

$$Au_0 = g. \quad (5)$$

Тогда исходное стохастическое уравнение (1) можно переписать в квазиинтегральной форме

$$u = u_0 + A^{-1} Bu. \quad (6)$$

Для преобразования уравнения (6) воспользуемся методом, который применяется в теории интегральных уравнений [3] для улучшения сходимости последовательных приближений. Метод заключается в следующем.

Рассмотрим уравнение

$$x = f + Qx, \quad (7)$$

где Q — оператор, действующий в некотором функциональном пространстве, x и f — искомый и заданный элементы этого пространства. Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение (7) эквивалентно

$$x = (1 - S)^{-1} f + (1 - S)^{-1} (Q - S)x, \quad (8)$$

где S — произвольный и 1 — единичный операторы. Если норма разности операторов $Q - S$ достаточно мала, а обратный оператор $(1 - S)^{-1}$ существует, то решение преобразованного уравнения (8) можно искать с удовлетворительной точностью последовательными приближениями, или методом малых возмущений по его ядру.

Переход от уравнения (7) к уравнению (8) будем называть преобразованием с помощью резольвенты ядра S .

Вернемся к уравнению (6). Полагаем оператор S равным $S = S_1$, где

$$S_1 = A^{-1} b_1, \quad b_1 = \bar{B}. \quad (9)$$

Тогда преобразованное уравнение (8) принимает вид

$$u = u_1 + A_1^{-1} B_1 u. \quad (10)$$

Здесь неоднородный член u_1 и оператор A_1^{-1} удовлетворяют уравнениям

$$u_1 = u_0 + A^{-1} b_1 u_1, \quad A_1^{-1} = A^{-1} + A^{-1} b_1 A_1^{-1}. \quad (11)$$

Оператор B_1 равен флуктуационной части оператора B :

$$B_1 = \tilde{B}. \quad (12)$$

Уравнение (10) назовем преобразованным стохастическим уравнением первого порядка.

Для получения преобразованного стохастического уравнения второго порядка проинтегрируем уравнение (10) один раз:

$$u = u_1 + A_1^{-1} B_1 u_1 + A_1^{-1} B_1 A_1^{-1} B_1 u. \quad (13)$$

Принимаем уравнение (13) за уравнение (7) и полагаем оператор S равным $S = S_2$, где

$$S_2 = A_1^{-1} b_2, \quad b_2 = \overline{B_1 A_1^{-1} B_1}. \quad (14)$$

При этом из уравнения (8) получаем

$$u = u_{02} + A_2^{-1} B_2 u. \quad (15)$$

Неоднородный член u_{02} равен

$$u_{02} = u_2 + A_2^{-1} B_1 u_1. \quad (16)$$

Поле u_2 и оператор A_2^{-1} удовлетворяют уравнениям

$$u_2 = u_0 + A^{-1} (b_1 + b_2) u_2, \quad A_2^{-1} = A^{-1} + A^{-1} (b_1 + b_2) A_2^{-1}. \quad (17)$$

Оператор B_2 равен флуктуационной части оператора $B_1 A_1^{-1} B_1$:

$$B_2 = \widetilde{B_1 A_1^{-1} B_1}. \quad (18)$$

Характерным признаком полученных преобразованных стохастических уравнений (10) и (15) является то, что их ядра имеют вид произведения неслучайного оператора на флуктуационный оператор. Неоднородные члены и ядра уравнений (10) и (15) известны, что существенно отличает эти уравнения от преобразованного стохастического уравнения [4].

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕСЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ u_1 , u_2 И ОПЕРАТОРОВ A_1^{-1} , A_2^{-1} С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ КЕЛЛЕРА

Неслучайные уравнения (11) и (17), если на них подействовать оператором A , вообще говоря, не совпадают с уравнениями Келлера (4) и (3), однако мало отличаются от них в том случае, когда оператор B представлен в виде разложения (2) по малому параметру ϵ . Это позволяет выразить решения уравнений (11) и (17) через решения уравнений Келлера следующими разложениями:

$$u_1 = \bar{u}_1 + \epsilon^2 (\bar{A}_1)^{-1} \bar{L}_2 \bar{u}_1 + \tilde{O}(\epsilon^4), \quad (19)$$

$$A_1^{-1} = (\bar{A}_1)^{-1} + \epsilon^2 (\bar{A}_1)^{-1} \bar{L}_2 (\bar{A}_1)^{-1} + \tilde{O}(\epsilon^4);$$

$$u_2 = \bar{u}_2 + \epsilon^3 (\bar{A}_2)^{-1} [\bar{L}_3 + \overline{\bar{L}_1 (\bar{A}_1)^{-1} \bar{L}_2} + \overline{\bar{L}_2 (\bar{A}_1)^{-1} \bar{L}_1}] \bar{u}_2 + \tilde{O}(\epsilon^6), \quad (20)$$

$$A_2^{-1} = (\bar{A}_2)^{-1} + \epsilon^3 (\bar{A}_2)^{-1} [\dots] (\bar{A}_2)^{-1} + \tilde{O}(\epsilon^6).$$

Многоточие в квадратной скобке разложения для A_2^{-1} означает оператор, стоящий в квадратной скобке разложения для u_2 .

В разложениях (19) через $(\bar{A}_1)^{-1}$ обозначено решение уравнения Келлера первого порядка (4) с единичным источником $g = 1$. Эти разложения получены путем преобразования уравнений (11) с помощью резольвенты ядра соответствующих квазиинтегральных уравнений Келлера первого порядка, следующих из уравнения (4), и решения преоб-

разованных уравнений методом малых возмущений по их ядрам. В разложениях (20) \bar{u}_2 есть решение модифицированного уравнения Келлера второго порядка, которое отличается от уравнения (3) тем, что в операторе $\bar{L}_1 \bar{\Delta}^{-1} \bar{L}_1$ вместо $\bar{\Delta}^{-1}$ стоит решение $(\bar{A}_1)^{-1}$ уравнения Келлера первого порядка с единичным источником. Через $(\bar{A}_2)^{-1}$ обозначено решение модифицированного уравнения Келлера второго порядка с единичным источником. L_3 — член третьего порядка в разложении (2).

Символ $\tilde{O}(\varepsilon^\alpha)$ ($\alpha = 4, 6$) в разложениях (19) и (20) обозначает величину, пропорциональную ε^α и принимаемую при решении уравнений (11) и (17), а также, далее, и при решении преобразованных стохастических уравнений (10) и (15), за малую порядка ε^α .

4. МЕТОД МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАННОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Воспользуемся для решения преобразованных стохастических уравнений (10) и (15) методом малых возмущений по их ядрам. При этом получаем ряды

$$\begin{aligned} u &= u_1 + A_1^{-1} B_1 u_1 + A_1^{-1} B_1 A_1^{-1} B_1 u_1 + \dots, \\ u &= u_{0,2} + A_2^{-1} B_2 u_{0,2} + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Полученные ряды усредняем по ансамблю, после чего подставляем в них разложение (2) для оператора B и разложения (19) и (20) для u_1 , A_1^{-1} и u_2 , A_2^{-1} . В результате приходим к следующим разложениям для среднего поля:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \varepsilon^2 (\bar{A}_1)^{-1} [\bar{L}_2 + \overline{\bar{L}_1 (\bar{A}_1)^{-1} \bar{L}_1}] \bar{u}_1 + \tilde{O}(\varepsilon^3); \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}_2 + \varepsilon^3 (\bar{A}_2)^{-1} [\bar{L}_3 + \overline{\bar{L}_1 (\bar{A}_1)^{-1} \bar{L}_2} + \overline{\bar{L}_2 (\bar{A}_1)^{-1} \bar{L}_1}] \bar{u}_2 + \\ &+ \varepsilon^3 (\bar{A}_2)^{-1} \overline{\bar{L}_1 (\bar{A}_1)^{-1} \bar{L}_1 (\bar{A}_2)^{-1} \bar{L}_1} \bar{u}_1 + \tilde{O}(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (23)$$

Разложения (22) и (23) позволяют оценить границы применимости уравнений Келлера (4) и (3). Чтобы сначала записать в общем виде условия применимости этих уравнений, нужно задать некоторым функциональным пространством и в нем — нормой, которую, как обычно, обозначим через $\| \cdot \|$. Тогда условия применимости уравнений (4) и (3) сводятся к неравенствам

$$\| \bar{u} - \bar{u}_1 \| / \| \bar{u}_1 \| \ll 1; \quad (24)$$

$$\| \bar{u} - \bar{u}_2 \| / \| \bar{u}_2 \| \ll 1. \quad (25)$$

Их смысл заключается в том, что относительные отклонения среднего поля \bar{u} от решений уравнений Келлера \bar{u}_1 и \bar{u}_2 должны быть малы по сравнению с единицей.

Подставляя в левые части неравенств (24) и (25) разложения (22) и (23), получаем условия применимости уравнений Келлера (4) и (3) с точностью до членов $\tilde{O}(\varepsilon^3)$ и $\tilde{O}(\varepsilon^4)$. Эти условия равносильны требованию, чтобы разложения (22) и (23) имели асимптотический характер.

5. УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ДАЙСОНА В ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФОЛДИ И БУРРЕ

Возьмем за входное стохастическое уравнение (1) уравнение Гельмгольца

$$(\Delta + k_0^2 - V) \psi = j \quad (26)$$

для скалярного волнового поля ψ в среде с эффективным рассеивающим потенциалом V и источником j . Будем считать, что рассеивающая среда ограничена и имеет вид шара радиуса R_0 с началом координат \mathbf{r} в его центре. Пусть на шар падает плоская волна $\psi_0(\mathbf{r}) = \exp i k_0 \mathbf{s}_0 \mathbf{r}$ в направлении единичного вектора \mathbf{s}_0 . Зададимся функциональным пространством неслучайных функций $\Phi(\mathbf{r})$, каждая из которых может быть представлена в виде суммы $\Phi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \varphi(\mathbf{r})$, где $\varphi(\mathbf{r})$ убывает при $r \rightarrow \infty$, как $1/r$, $\varphi(\mathbf{r}) = O(1/r)$.

Определим норму $\|\Phi\|$ в заданном функциональном пространстве равенством

$$\|\Phi\| = \|\varphi\| = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{4\pi r}{k_0 R_0^2} |\varphi(\mathbf{r})|_{s=\mathbf{s}_0}, \quad (27)$$

где предел вычисляется для направления рассеяния вперед, $\mathbf{s} = \mathbf{r}/r = \mathbf{s}_0$. Если $\Phi(\mathbf{r})$ есть среднее значение рассеянного шаром поля, то норма (27) равна с точностью до постоянного множителя модулю средней амплитуды рассеяния вперед.

Оценим с помощью нормы (27), разложения (22) и неравенства (24) границы применимости уравнения Дайсона (\mathcal{D}) в приближении Фолди (об уравнении \mathcal{D} см., например, обзор [5]). Оно имеет массовый оператор M_1 , равный

$$M_1 = \int t(\mathbf{r}_1) g_1(\mathbf{r}_1) d^3 r_1 \equiv t_1 g_1(1), \quad (28)$$

где $t(\mathbf{r}_1)$ — оператор рассеяния изолированного рассеивателя с центром в точке \mathbf{r}_1 , $g_1(\mathbf{r}_1)$ — одночастичная функция распределения центров рассеивателей, после знака тождества использованы цифровые символические обозначения. Предположим, что среда состоит из слабых рассеивателей. Тогда, согласно [1], потенциал V представляется разложением

$$V = \sum_i \varepsilon t_i (1 + \varepsilon G_0 t_i)^{-1} = \sum_i (\varepsilon t_i - \varepsilon^2 t_i G_0 t_i) + \tilde{O}(\varepsilon^3), \quad (29)$$

где суммирование производится по всем рассеивателям и G_0 — функция Грина уравнения Гельмгольца в свободном пространстве. Полагая $B = V$, приводим разложение (22) для среднего поля $\bar{u} = \bar{\psi}$ к виду

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_1 + \bar{G}_1 t_1 (\bar{G}_1 - G_0) t_1 g_1(1) \bar{\psi}_1 + \bar{G}_1 t_1 \bar{G}_1 t_2 g_2(12) \bar{\psi}_1 + \tilde{O}(\varepsilon^3), \quad (22a)$$

где $\bar{\psi}_1$ и \bar{G}_1 — волновое поле и функция Грина, удовлетворяющие уравнению \mathcal{D} в приближении Фолди, $g_2(12)$ — двухчастичная корреляционная функция центров рассеивателей.

Пусть среда состоит из сферических рассеивателей радиуса r_0 , удовлетворяющих условиям рэлеевского рассеяния [6] (рэлеевские рассеиватели). Поле, рассеянное рэлеевским рассеивателем, определяется оператором рассеяния t , ядро которого $t(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ приближенно равно

$$t(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx -4\pi a \delta^3(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{r}'), \quad (30)$$

где a — амплитуда рассеяния. Приближенное значение преломленного поля $\psi_{\text{вн}}$ внутри рассеивателя равно

$$\psi_{\text{вн}} \approx 1 + (\text{Re } a/r_0). \quad (31)$$

Уравнение D заменяем на уравнение Гельмгольца с эффективным волновым числом. Это уравнение решаем, следуя [6], в приближении геометрической оптики, пренебрегая отражением и преломлением волн на поверхности шара, что допустимо при выполнении условий

$$k_0 R_0 \gg 1, \quad |M_1(k_0)|/k_0^2 \sim n|a|/k_0^2 \ll 1, \quad (32)$$

где $M_1(k_0)$ — значение фурье-образа ядра $M_1(r)$, n — плотность рассеивателей.

Описанный способ решения уравнения D позволяет свести неравенство (24) после подстановки в него разложения (22 а) к виду

$$\max(n|a|/k_0^2, nl^2/k_0) R_0/d_1 \ll 1, \quad (24a)$$

где l — радиус корреляции рассеивателей, d_1 — длина экстинкции в приближении Фолди, $1/d_1 \sim n|a|^2$.

Неравенство (24 а) накладывает ограничение сверху на радиус шара R_0 . Чтобы оно допускало значения R_0 , превышающие длину экстинкции d_1 , потребуем выполнения условия

$$nl_2/k_0 \ll 1, \quad (33)$$

которое ограничивает сверху радиус корреляции l .

Мы оценили границы применимости уравнения D в приближении Фолди. С помощью разложения (23), если в нем явно выписать члены $O(\epsilon^4)$, и неравенства (25) можно оценить также границы применимости уравнения D в приближении Бурре. Для этого уравнения в случае мелкомасштабных флуктуаций потенциала V , $k_0 l \ll 1$ (l — масштаб неоднородности), второе неравенство (32) заменяется на

$$|M_2(k_0)|/k_0^2 \sim \sigma^2(k_0 l)^2 \ll 1, \quad (34)$$

где $M_2(k_0)$ — значение фурье-образа ядра массового оператора в приближении Бурре, $\sigma^2 = \overline{V^2}/k_0^2$, а неравенство (25) сводится к виду

$$\sigma^2(k_0 l)^2 R_0/d_2 \ll 1, \quad (25a)$$

где d_2 — длина экстинкции в приближении Бурре, $1/d_2 \sim \sigma^2 k_0(k_0 l)^3$. В силу (34) неравенство (25 а) допускает значения радиуса шара R_0 , превосходящие длину экстинкции d_2 .

Методом преобразованного стохастического уравнения мы сформулировали условия применимости приближенных уравнений Келлера для среднего поля. Эти условия получены из требования того, чтобы ряды для среднего поля, найденные путем применения метода малых возмущений к преобразованным стохастическим уравнениям, имели асимптотический характер. Аналогичное требование к ряду для среднего поля, который возникает в результате применения метода малых возмущений к непреобразованному стохастическому уравнению, приводит к условиям применимости первого борновского приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. B. Keller, Proceedings of a symposium in applied mathematics of the American Mathematical Society, **16**, 145 (1964).
2. J. B. Keller, Proceedings of a symposium on turbulence of fluids and plasmas, Brooklyn Polytechnic Institute, Brooklyn, New York, 1968, p. 131.
3. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соколовский, Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, изд. Наука, М., 1966.
4. В. Н. Алексеев, В. М. Комиссаров, Тезисы докладов VI Всесоюзной акуст. конф., М., 1968; Труды Акуст. ин-та, № 4, 27 (1968).
5. Ю. Н. Барabanenkov, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, УФН, **102**, вып. 1, 3 (1970).
6. F. van de Hulst, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию
1 февраля 1971 г.

ON TRANSFORMED STOCHASTIC EQUATION

Yu. N. Barabanenkov

A linear stochastic equation is considered. The transformed stochastic equations are obtained as a result of transformation applied in the theory of the integral equations to improve the convergence of successive approximations. These equations are exact and equivalent to the original equation. The applicability conditions of approximative Keller's equations for the averaged over the assembly field value satisfying the initial stochastic equation are deduced by solving the transformed stochastic equations by a small perturbation method. The applicability limits of Dyson's equations in Foldi and Burre's approximations are estimated as applications. In the first case the medium is assumed to consist of Rayleigh scatters, in the second case the fluctuations of the medium permittivity to be small scale. If the medium is confined and has the form of the sphere, the applicability conditions of Dyson's equations impose the limitation from above on the sphere radius which may nevertheless take the values exceeding the extinction length.

УДК 621.372.8

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ СО СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. Г. Безродный, И. М. Фукс

Методом теории возмущений в борновском приближении решена задача о пространственно-временной корреляции амплитуды и фазы поля в плоском волноводе со статистически неровной стенкой. Относительно неровностей границы предполагается, что их высота мала по сравнению с длиной волны и $|\chi_n l_{x,y}| \gg 1$, $|\Delta x l_x| \gg 1$, $l_y \gg \sqrt{D} |\chi_n|$ (l_x и l_y — радиусы корреляции неровностей вдоль и поперек трассы распространения соответственно, D — длина трассы, χ_n — продольное волновое число n -й нормальной волны, $\Delta x \sim |\chi_n - \chi_{n-1}|$) и изменение формы границы со временем происходит значительно медленнее периода электромагнитных колебаний. Показано, что коэффициент пространственно-временной корреляции имеет одинаковый вид для амплитуды и для фазы поля, не зависит от конкретной модели волновода и определяется только статистическими характеристиками неровностей границы. Анализируются выражения для дисперсий флуктуаций амплитуды и фазы, их пространственных корреляционных функций и временных спектров в ряде предельных случаев.

1. К задаче о распространении волн в волноводе со статистически нерегулярными границами приводит исследование широкого круга физических явлений. Сюда относятся вопросы передачи сигналов по длинным волноводным линиям связи, распространение радиоволн в тропосферном волноводе или волноводе Земля—ионосфера, распространение звука в подводном звуковом канале или приповерхностном волноводе и т. д. При распространении волн в таких природных волноводах флуктуации параметров среды, в которой происходит распространение, оказывают существенное влияние на статистические характеристики волнового поля. В ряде случаев это влияние можно рассматривать как результат флуктуаций параметров волновода и, в частности, его эффективной (приведенной) ширины. Таким образом, мы приходим к задаче о распространении волн в волноводе со статистически неровными стенками.

Средние характеристики волнового поля в таких волноводах — среднее (когерентное) поле, распределение средней интенсивности по модам и т. д. — достаточно подробно были изучены в ряде работ [1–7]. В настоящей работе исследуются флуктуационные характеристики сигнала, распространяющегося в волноводе со случайной, изменяющейся во времени границей. Установление связи между пространственно-временными корреляционными функциями флуктуаций амплитуды и фазы волнового поля и статистическими параметрами «шероховатостей» границы указывает путь и для решения обратной задачи, представляющей в ряде случаев не меньший интерес.

2. Рассмотрим волновод, образованный двумя бесконечными поверхностями S и S' (рис. 1), нижняя граница которого $z = 0$ гладкая, верхняя — статистически неровная. Уравнение верхней границы $z = a +$

+ $\zeta(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r} = \{x, y\}$, $\zeta(\mathbf{r}, t)$ — случайная, статистически однородная и стационарная функция координат и времени, относительно которой будем предполагать следующие: $\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$, $\langle \zeta^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \sigma^2$, $\langle \zeta(\mathbf{r}, t) \zeta(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) \rangle = \sigma^2 W(\boldsymbol{\rho}, \tau)$, косые скобки означают статистическое усреднение.

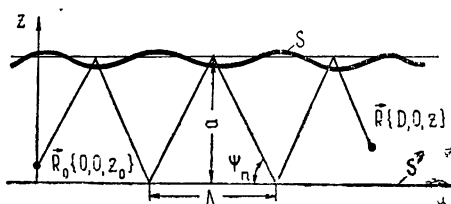


Рис. 1.

Будем считать, что верхняя граница слабо возмущена относительно своего среднего положения $z = a$, так что

$$(k \sigma \sin \psi_n)^2 \ll 1, \quad (1)$$

где $k = \omega_0/c$, c — скорость света, ψ_n — угол скольжения n -й моды (рис. 1). Кроме того, будем рассматривать только такие неровности границ, характерная длина которых $l_{x,y}$ в направлениях осей x и y значительно превосходит длины нормальных волн в соответствующем невозмущенном волноводе:

$$|x_n l_{x,y}| \gg 1. \quad (2)$$

Здесь x_n — продольное волновое число n -й нормальной волны, радиусы корреляции будем вводить либо соотношениями

$$l_x = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_x W(\rho_x, 0, 0), \quad l_y = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_y W(0, \rho_y, 0),$$

либо соотношениями

$$L_x^{-2} = \left. \frac{\partial^2 W(\rho_x, \rho_y, \tau)}{\partial \rho_x^2} \right|_{\substack{\rho_{x,y}=0 \\ \tau=0}}, \quad L_y^{-2} = \left. \frac{\partial^2 W(\rho_x, \rho_y, \tau)}{\partial \rho_y^2} \right|_{\substack{\rho_{x,y}=0 \\ \tau=0}}.$$

Будем различать их между собой, но при оценках считать $l_x \sim L_x$, $l_y \sim L_y$. Более подробное обсуждение условия (2) проводится в дальнейшем.

Пусть волновод возбуждается точечным монохроматическим электрическим диполем частоты ω_0 с единичным моментом \mathbf{P}_0 , расположенным в точке \mathbf{R}_0 . Если изменение неровной поверхности происходит медленно по сравнению с периодом электромагнитных колебаний, то поле в волноводе можно представить в виде произведения медленно изменяющейся со временем части на $\exp(-i\omega_0 t)$. При этом «медленная» часть электрического вектора Герца будет удовлетворять уравнению

$$\Delta \Pi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, t) + k^2 \Pi(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, t) = -4\pi \mathbf{P}_0 \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0).$$

Граничные условия выберем следующим образом:

$$[NE] = 0 \quad (z = 0),$$

$$[NE] = -\eta [N[NH]] \quad (z = a + \zeta(\mathbf{r}, t)),$$

η — поверхностный импеданс, N — внешняя нормаль к границе. На границе $z = a + \zeta(\mathbf{r}, t)$ вектор нормали имеет вид $N = (e_z^0 - \gamma)/\sqrt{1 - \gamma^2}$, где e_z^0 — орт оси z , $\gamma = \nabla\zeta$. В силу неравенств (1) и (2) характерные наклоны поверхности $|\gamma| \sim \sigma/l$ являются величинами второго порядка малости по параметрам $k\sigma$ и $(kl)^{-1}$, и ими можно всюду пренебречь. При этом отсутствует деполяризация поля на границе, и вектор Герца можно представить в виде $\Pi = G\mathbf{P}_0$, где G — функция Грина уравнения

$$\Delta G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, t) + k^2 G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, t) = -4\pi\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial z} &= 0 & (z = 0), \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= ik\eta G & (z = a + \zeta(\mathbf{r}, t)) \end{aligned} \quad (4)$$

для вертикально поляризованного диполя и

$$\begin{aligned} G &= 0 & (z = 0), \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= \frac{ik}{\eta} G & (z = a + \zeta(\mathbf{r}, t)) \end{aligned} \quad (5)$$

для горизонтально поляризованного диполя.

Рассмотрим уравнение (3) с граничными условиями (4). В акустической задаче это соответствует уравнению для звукового потенциала, в электромагнитной — уравнению для вертикальной составляющей вектора Герца. Так как граница волновода является случайной, то и поле в волноводе будет являться случайной функцией координат и времени. Поэтому его можно представить в виде суммы средней и флуктуационной частей:

$$G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, t) = \langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle + g(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, t). \quad (6)$$

Поведение среднего поля $\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle$ в волноводе со статистически нерегулярными границами достаточно хорошо изучено [2-7]. Мы же займемся исследованием флуктуационной части поля $g(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0, t)$, изучая флуктуации амплитуды и фазы на уровне вторых моментов. При выполнении условия (1) с помощью стандартной методики [8] из (4) получим граничное условие для флуктуационной части поля на невозмущенных границах $z = 0$ и $z = a$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} g &= 0 & (z = 0), \\ \frac{\partial}{\partial z} g - ik\eta g &= -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \langle G \rangle - ik\eta \langle G \rangle \right\} \zeta & (z = a). \end{aligned} \quad (7)$$

Если расстояние D между источником \mathbf{R}_0 и точкой наблюдения \mathbf{R} меньше, чем длина экстинкции (оценки величины последней в различных предельных случаях приведены в [5]), среднее поле $\langle G(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0) \rangle$ в выражениях (6) и (7) можно заменить функцией Грина невозмущенного волновода $G_0(\mathbf{R}, \mathbf{R}_0)$, что соответствует борновскому приближению. При этом для расчета пространственно-временных корреляционных функций амплитуды и фазы имеют место следующие формулы (см., например, [9]):

$$\left\langle \left(\frac{\delta A}{A} \right)_1 \left(\frac{\delta A}{A} \right)_2 \right\rangle_{\langle \delta \varphi_1 \delta \varphi_2 \rangle} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left\langle \left(\frac{g}{G_0} \right)_1 \left(\frac{g}{G_0} \right)_2^* \right\rangle \pm \left\langle \left(\frac{g}{G_0} \right)_1 \left(\frac{g}{G_0} \right)_2 \right\rangle \right\}, \quad (8)$$

$$\left\langle \left(\frac{\delta A}{A} \right)_1 \delta \varphi_2 \right\rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \left\langle \left(\frac{g}{G_0} \right)_1 \left(\frac{g}{G_0} \right)_2 \right\rangle - \left\langle \left(\frac{g}{G_0} \right)_1 \left(\frac{g}{G_0} \right)_2^* \right\rangle \right\}.$$

Здесь индексом «1» обозначены функции с аргументами R, t ; индексом «2» — функции с аргументами $R', t + \tau$; $R = \{D, z\}$; $R' = \{D', z'\}$; A — амплитуда полного поля, δA и $\delta \varphi$ — флуктуации амплитуды и фазы; значок * означает комплексное сопряжение.

Флуктуационная часть поля $g(R, R_0, t)$ может быть получена с помощью формулы Грина из граничных условий (7):

$$g(R, R_0, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{z_1=a} d r_1 G_0(R, r_1) \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} G_0(r_1, R_0) - ik \eta G_0(r_1, R_0) \right\} \zeta(r_1, t). \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем интегралы, у которых не указаны пределы, условимся понимать как интегралы в бесконечных пределах.

Функция Грина невозмущенного волновода с граничными условиями (4) имеет вид

$$G_0(R, R_0) = 2\pi i \sum_n \frac{q_n^2 - k^2 \eta^2}{(q_n^2 - k^2 \eta^2) a - ik \eta} \cos q_n z \cos q_n z_0 H_0^{(1)}(x_n D), \quad (10)$$

где a — ширина волновода, $x_n = \sqrt{k^2 - q_n^2}$ — продольное волновое число n -й нормальной волны, $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля 1-го рода, q_n — поперечные волновые числа, удовлетворяющие уравнению

$$q_n \operatorname{tg} q_n a = -ik \eta. \quad (11)$$

Подставляя (10) в (9), умножая на аналогичное выражение для $g^*(R', R_0, t)$ и усредняя по ансамблю реализаций $\zeta(r, t)$, получим

$$\langle g_1 g_2^* \rangle = \pi^2 \sigma^2 \sum_{n, m, p, s} c_n(z) c_m(z_0) c_p^*(z') c_s^*(z_0) \times \\ \times (q_m^2 - k^2 \eta^2) (q_s^2 - k^2 \eta^2) I_{nmps}(D, D', \tau), \quad (12)$$

где

$$c_n(z) = \frac{q_n (q_n^2 - k^2 \eta^2)^{1/2} \cos q_n z}{(q_n^2 - k^2 \eta^2) a - ik \eta}; \quad (13)$$

$$I_{nmps}(D, D', \tau) = \frac{16}{\pi^4} \int d\chi \widetilde{W}(\chi, \tau) J(x_n, x_m, \chi, D) J^*(x_p, x_s, \chi, D'); \quad (14)$$

$$J(x_n, x_m, \chi, D) = \iint \frac{dx dy e^{i\chi D}}{(x_n^2 - x^2 - y^2) [x_m^2 - (\chi x + x)^2 - (\chi y + y)^2]}. \quad (15)$$

При выводе (12) мы воспользовались разложением функции $H_0^{(1)}$ по плоским волнам и ввели пространственный спектр неровностей

$$\widetilde{W}(\chi, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\rho W(\rho, \tau) \exp(-i\chi\rho).$$

После интегрирования по dy (15) может быть преобразовано к виду

$$J(x_n, x_m, \chi, D) = \pi i P \{ Q(x_{1,2}^{nm}, D) - Q(x_m^{nm}, D) \}; \quad (16a)$$

$$Q(x_{1,2}^{nm}, D) = \int \frac{dx e^{ixD}}{x - x_{1,2}^{nm}} \left\{ \frac{\alpha_{nm} + 2\chi_x x_{1,2}^{nm}}{\sqrt{x_n^2 - x^2}} - \frac{\beta_{nm} + 2\chi_x x_{1,2}^{nm}}{\sqrt{x_m^2 - (\chi_x + x)^2}} \right\}; \quad (16b)$$

$$x_{1,2}^{nm} = \frac{-\alpha_{nm} \chi_x \pm |\chi_y| \sqrt{4x_n^2(\chi_x^2 + \chi_y^2) - \alpha_{nm}^2}}{2(\chi_x^2 + \chi_y^2)}, \quad (16b)$$

$$P = 1/4(\chi_x^2 + \chi_y^2)(x_{1,2}^{nm} - x_m^{nm}),$$

$$\alpha_{nm} = x_n^2 - x_m^2 + \chi_x^2 + \chi_y^2, \quad \beta_{nm} = x_n^2 - x_m^2 + \chi_x^2 - \chi_y^2.$$

Для упрощения дальнейших вычислений наложим на длину неровностей дополнительное ограничение

$$|\Delta x l_x| \gg 1. \quad (17)$$

Здесь $|\Delta x| \sim |x_{n-1} - x_n|$ — «расстояние» между двумя соседними продольными волновыми числами.

Неравенство (17) означает отсутствие рассеяния из моды в моду. Так, например, вероятность такого рассеяния для гауссовой функции корреляции при выполнении (17) оказывается экспоненциально малой [5] $\sim \exp\{- (\Delta x l_x)^2\}$. Отметим, что в случае волновода с идеально отражающими границами условие (17) выполняется автоматически при выполнении условия (2), так как в этом случае $|\Delta x/x_{\min}| \gg 1$, где x_{\min} — продольное волновое число ближайшей к критической (наиболее крутой) моды. Условие $|x_{\min} l_{x,y}| \gg 1$ означает при этом отсутствие рассеяния из прямой моды в обратную. Если границы волновода не являются идеально отражающими, то за счет высвечивания крутых мод $|\Delta x/x_{\min}| \leq 1$ и основным становится неравенство (17). Вычисляя интеграл (16 б) методом перевала по параметру $|x_n, m D| \gg 1$ при условии

$$l_y \gg \sqrt{D/|x_n, m|}, \quad (18)$$

приходим к следующему результату:

$$Q(x_{1,2}^{nm}, D) = \sqrt{2\pi} \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \left\{ \frac{\alpha_{nm} + 2\chi_x x_{1,2}^{nm}}{x_n - x_{1,2}^{nm}} \frac{\exp(i x_n D)}{\sqrt{x_n D}} - \frac{\beta_{nm} + 2\chi_x x_{1,2}^{nm}}{x_m - \chi_x - x_{1,2}^{nm}} \frac{\exp[i(x_m - \chi_x) D]}{\sqrt{x_m D}} \right\}. \quad (19)$$

Подставляя (19), (16 а), (14) в (12), получим выражение для $\langle g_1 g_2^* \rangle$. При этом в формуле (12) суммирование можно проводить только до членов с номером N_0 , где N_0 — номер последней не затухающей на расстоянии D моды. Кроме того, в меру выполнения указанных выше неравенств, имеет место соотношение.

$$\sum_{\substack{n=m \\ p=s}} I_{nmps}(D, D', \tau) \gg \left(\sum_{\substack{n=m \\ p \neq s}} + \sum_{\substack{n \neq m \\ p, s}} \right) I_{nmps}(D, D', \tau), \quad (20)$$

что позволяет для $\langle g_1 g_2^* \rangle$ получить следующее простое выражение:

$$\langle g_1 g_2^* \rangle = \sigma^2 \left(\frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_1 \left(\frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_2^* F(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \tau), \quad (21)$$

где

$$F(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \tau) = 4 \int d\chi \widetilde{W}(\chi, \tau) \exp \left[\frac{i}{2} (\chi, \mathbf{D} - \mathbf{D}') \right] \frac{\sin(\chi \mathbf{D}/2)}{\chi \mathbf{D}} \frac{\sin(\chi \mathbf{D}'/2)}{\chi \mathbf{D}'}. \quad (22)$$

Продельвая аналогичные вычисления, для $\langle g_1 g_2 \rangle$ получим

$$\langle g_1 g_2 \rangle = \sigma^2 \left(\frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_1 \left(\frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_2 F(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \tau). \quad (23)$$

Подстановка (21) и (23) в (8) дает

$$\left\langle \left\langle \left(\frac{\delta A}{A} \right)_1 \left(\frac{\delta A}{A} \right)_2 \right\rangle' \right\rangle_{\langle \delta \varphi_1 \delta \varphi_2 \rangle} = F(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \tau) \frac{\sigma^2}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_1 \left(\frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_2^* \pm \left(\frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_1 \left(\frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_2 \right\} = \begin{cases} F(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \tau) \left\langle \left(\frac{\delta A}{A} \right)_1 \left(\frac{\delta A}{A} \right)_2 \right\rangle^{(0)}, \\ F(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \tau) \langle \delta \varphi_1 \delta \varphi_2 \rangle^{(0)} \end{cases}, \quad (24)$$

$$\left\langle \left(\frac{\delta A}{A} \right)_1 \delta \varphi_2 \right\rangle = F(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \tau) \frac{\sigma^2}{2} \operatorname{Im} \left\{ \left(\frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_1 \left(\frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_2 - \left(\frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_1 \left(\frac{1}{G_0} \frac{\partial G_0}{\partial a} \right)_2^* \right\} = F(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \tau) \left\langle \left(\frac{\delta A}{A} \right)_1 \delta \varphi_2 \right\rangle^{(0)}.$$

Здесь индексом (0) обозначены соответствующие корреляционные функции флуктуаций, возникающих в гладком (плоском) волноводе за счет флуктуаций его ширины с дисперсией σ^2 . Из (24) следует, что корреляционные функции амплитуды и фазы в волноводе, неровности границ которого удовлетворяют условиям (1), (2), (17), (18), могут быть представлены в виде произведения соответствующих корреляционных функций для гладкого волновода с флуктуирующей шириной на множитель $F(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \tau)$, учитывающий конечную длину неровностей границ. Вводя среднюю вдоль трассы \mathbf{D} высоту неровностей $\bar{\zeta}_{\mathbf{D}}(t)$ соотношением

$$\bar{\zeta}_{\mathbf{D}}(t) = \frac{1}{D} \int_0^D \zeta(\mathbf{r}, t) ds \quad (25)$$

($ds^2 = dx^2 + dy^2$, интегрирование проводится по прямой, соединяющей точки 0 и \mathbf{D}), нетрудно видеть, что

$$F(\mathbf{D}, \mathbf{D}', \tau) = \langle \bar{\zeta}_{\mathbf{D}}(t) \bar{\zeta}_{\mathbf{D}'}(t + \tau) \rangle / \sigma^2 \quad (26)$$

является коэффициентом временной корреляции средних высот неровностей на трассах \mathbf{D} и \mathbf{D}' .

В заключение этого раздела отметим, что, поскольку учет конкретного вида граничных условий происходит в формулах (24) автоматически через функцию Грина невозмущенного волновода G_0 , выражения

для корреляторов поля будут иметь тот же вид (24) и в случае произвольных границ раздела трех сред, если можно пренебречь боковыми волнами в средах, ограничивающих волновод.

3. Рассмотрим дисперсии флуктуаций амплитуды и фазы. Для этого в формулах (22) и (24) положим $R' = R$, $\tau = 0$. Выражение для $F(D, D, 0)$ в системе координат с осью x , направленной вдоль D , может быть преобразовано к виду

$$F(D) \equiv F(D, D, 0) = \frac{2}{D^2} \int_0^D (D - \rho_x) W(\rho_x, 0, 0) d\rho_x. \quad (27)$$

Как можно видеть из определения (27) функции $F(D)$, ее величина не зависит от корреляции неровностей вдоль y , а определяется только значением корреляционной функции $W(\rho_x, 0, 0)$ вдоль направления распространения волны. В предельных случаях $l_x/D \ll 1$ и $l_x/D \gg 1$ $F(D)$ принимает значения

$$F(D) = \begin{cases} l_x/D, & l_x/D \ll 1 \\ 1, & l_x/D \gg 1 \end{cases}. \quad (28)$$

Как уже отмечалось выше, наклоны рассматриваемой нами неровной границы $\gamma \rightarrow 0$ и каждое отражение происходит так же, как и от плоской поверхности. При этом рассеяния из моды в моду не происходит постольку, поскольку выполняются неравенства (2) и (17). Поэтому флуктуации могут возникать только за счет геометрического изменения длины пути каждой моды невозмущенного волновода и последующей интерференции мод. Так, в одномодовом волноводе с абсолютно мягкими стенками ($G|_{z=0} = 0$, $G|_{z=a+\zeta(r,t)} = 0$, $[\frac{ak}{\pi}] = 1$, $[\frac{ak}{\pi}]$ — целая часть $\frac{ak}{\pi}$ — число распространяющихся мод в невозмущенном волноводе) распространяется только одна мода. В результате отсутствия интерференции отсутствуют и флуктуации амплитуды. Флуктуации фазы при этом определяются выражением

$$\langle (\delta\varphi)^2 \rangle = (2k\sigma N \sin\psi)^2 F(D), \quad (29)$$

где $\cos\psi = x/k$, $D/\Lambda = N$ — число отражений, $\Lambda = 2a \operatorname{ctg}\psi$ — длина одного цикла отражения (рис. 1). В жестком волноводе той же ширины ($\frac{\partial}{\partial z} G|_{z=0} = 0$, $G|_{z=a+\zeta(r,t)} = 0$, $[\frac{ak}{\pi}] = 1$) могут распространяться уже две моды — нулевая и первая. Флуктуации амплитуды и фазы, возникающие за счет их интерференции, рассматривались в работе [10], где исследовалась зависимость дисперсий $\langle (\delta A/A)^2 \rangle$, $\langle (\delta\varphi)^2 \rangle$ и функции взаимной корреляции амплитуды и фазы $\langle (\delta A/A) \delta\varphi \rangle$ от расстояния.

4. Введем коэффициенты пространственно-временной корреляции, нормируя корреляционные функции (24) на дисперсии соответствующих флуктуаций. При этом легко видеть, что коэффициенты корреляции амплитуды K_A , фазы K_φ и коэффициент их взаимной корреляции $K_{A\varphi}$ равны между собой и определяются выражением

$$K_A = K_\varphi = K_{A\varphi} \equiv K = \frac{F(D, D', \tau)}{\sqrt{F(D, D, 0) F(D', D', 0)}}. \quad (30)$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае коэффициенты пространственно-временной корреляции всех флуктуаций равны между собой, не зависят от конкретной модели волновода и определяются только статистическими параметрами неровностей границ.

В этом разделе будем рассматривать только пространственную корреляцию амплитуды и фазы, т. е. положим в (30) $\tau = 0$. Для удобства анализа перейдем от расстояний D и D' к приведенному расстоянию D и относительному разнесу d , которые определим соотношениями $D = (D' + D)/2$, $d = (D' - D)/2$. При этом будем рассматривать в отдельности случаи продольного и поперечного по отношению к D разнесений.

В случае продольного разнесения для коэффициента продольной корреляции K_{\parallel}^d в системе координат с осью x , направленной вдоль D , могут быть получены следующие асимптотики:

$$K_{\parallel}^d = \begin{cases} 1 - \frac{d^2}{2D^2} \frac{D^2}{L_x^2} & (d \ll D \ll L_x) \\ 1 - \frac{2d^2}{l_x^2} \frac{l_x}{D} & (d \ll l_x \ll D) \\ 1 - \frac{d}{D} & (l_x \ll d \ll D) \\ \sqrt{\frac{D-d}{D+d}} & (D, d, D-d \gg l_x) \end{cases} \quad (31)$$

Из формул (31) видно, что в случае продольного разнесения декорреляция поля происходит на расстояниях $\sim D$ и практически не зависит от длины неровностей. Такой результат можно объяснить тем, что при малых по сравнению с D разнесах в точки R и R' приходит поле, рассеянное фактически на одной и той же реализации случайной поверхности, и поэтому для его существенной декорреляции точки приема необходимо разнести на расстояние $\sim D$.

Для коэффициента поперечной корреляции K_{\perp}^d могут быть получены следующие асимптотики:

$$K_{\perp}^d = \begin{cases} 1 - \frac{7}{12} \frac{d^2}{D^2} \frac{D^2}{\Delta_y^2} + \frac{d^2}{12D^2} \frac{D^2}{L_x^2} & (d \ll D \ll L_{x,y}) \\ 1 - \frac{2}{3} \frac{d^2}{\Delta_y^2} & (d \ll L_{x,y} \ll D) \\ l_y/4d & (l_{x,y} \ll d \ll D) \end{cases} \quad (32)$$

Из (32) следует, что в случае поперечного разнесения декорреляция поля наступает на расстояниях $\sim l_y$, и при $l_y \ll d$ корреляция мала в меру малости l_y/d . Это связано с тем, что поле, приходящее в точки R и R' , рассеивается на разных сечениях неровной поверхности, корреляция между которыми определяется соотношением между l_y и d .

5. Введем коэффициент временной корреляции K^{τ} , положив в (30) $D' = D$. Определим спектр флуктуаций как фурье-преобразование от коэффициента временной корреляции:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\int d\tau e^{i\omega\tau} F(\mathbf{D}, \mathbf{D}, \tau)}{F(\mathbf{D}, \mathbf{D}, 0)}. \quad (33)$$

Такое введение спектра соответствует нормировке определенных обычным образом (как фурье-преобразование от корреляционной функции) спектров на полную энергию соответствующих флуктуаций. Если изменение случайной поверхности со временем является результатом ее собственных колебаний, корреляционная функция $W(\rho, \tau)$ может быть представлена в виде суперпозиции распространяющихся плоских волн с волновыми векторами χ и частотами $\Omega(\chi)$:

$$W(\rho, \tau) = \sum_{\pm} \int d\chi \widetilde{W}_{\pm}(\chi) \exp(i\chi\rho \mp i\Omega(\chi)\tau). \quad (34)$$

Здесь $\widetilde{W}_{+}(\chi)$ и $\widetilde{W}_{-}(\chi)$ — спектральные плотности волн, распространяющихся соответственно под острым и тупым углом к оси x , уравнение $\Omega = \Omega(\chi)$ задает закон дисперсии этих волн, $\widetilde{W}_{+}(\chi) = \widetilde{W}_{-}(-\chi)$, $\Omega(\chi) = -\Omega(-\chi)$. Подставляя (34) в (22), получим

$$F(\mathbf{D}, \mathbf{D}, \tau) = 4 \sum_{\pm} \int d\chi \widetilde{W}_{\pm}(\chi) \exp(-i\Omega(\chi)\tau) \frac{\sin^2(\chi D/2)}{(\chi D)^2}. \quad (35)$$

В качестве иллюстрации рассчитаем спектр флуктуаций в волноводе, изменение границы которого со временем представляет собой движение ее как целого со скоростью V . Дисперсионное уравнение имеет при этом вид $\Omega(\chi) = \chi_x V_x + \chi_y V_y$. Пусть для определенности $V_{x,y} \geq 0$. Тогда $\widetilde{W}_{-}(\chi) \equiv 0$, $\widetilde{W}_{+}(\chi) \equiv \widetilde{W}(\chi)$. Выбирая ось x вдоль \mathbf{D} , после несложных преобразований получим

$$S(\omega) = \frac{1}{F(D)} \frac{4}{D^2 V_y} \int d\chi_x \widetilde{W}\left(\chi_x, \frac{\omega - \chi_x V_x}{V_y}\right) \frac{\sin^2(\chi_x D/2)}{\chi_x^2}, \quad (36)$$

где $F(D)$ определяется формулой (27). Когда $V_y/V_x \ll \min\{l_y/D, l_y/l_x\}$, т. е. когда неровная поверхность движется почти параллельно оси x , (36) дает

$$S(\omega) = \frac{1}{V_x F(D)} \widetilde{W}_x\left(\frac{\omega}{V_x}\right) \frac{\sin^2(\omega D/2V_x)}{(\omega D/2V_x)^2}. \quad (37)$$

При выводе (37) предполагалось для простоты, что спектр корреляционной функции неровностей может быть представлен в виде $\widetilde{W}(\chi_x, \chi_y) \equiv \widetilde{W}_x(\chi_x) \widetilde{W}_y(\chi_y)$. Из (37) видно, что спектр флуктуаций определяется двумя сомножителями с характерными масштабами $\Delta\omega_1 \sim \sim V_x/l_x$ и $\Delta\omega_2 \sim V_x/D$. При этом ширина спектра $\Delta\omega \sim \min\{\Delta\omega_1, \Delta\omega_2\}$ оказывается порядка величины, обратной времени смены реализаций случайной поверхности на трассе $\Delta\tau \sim \max\{l_x/V_x, D/V_x\}$ за счет продольного по отношению к \mathbf{D} движения поверхности. В другом случае, $V_y/V_x \gg \gg \min\{l_y/D, l_y/l_x\}$, который может реализоваться, если скорость движения случайной поверхности имеет хотя бы малую составляющую вдоль y , (36) дает

$$S(\omega) = \frac{1}{V_y} \widetilde{W}_y\left(\frac{\omega}{V_y}\right). \quad (38)$$

Ширина спектра $\Delta\omega \sim V_y/l_y$, и в этом случае оказывается порядка величины, обратной времени смены реализаций случайной поверхности $\Delta\tau \sim l_y/V_y$, происходящей, однако, уже не за счет продольного, а за счет поперечного относительно D движения поверхности.

В заключение считаем своим приятным долгом поблагодарить П. В. Блюха и Г. И. Макарова за обсуждение результатов работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Исакович, Акуст. ж., 3, № 1, 37 (1957).
2. С. S. Clay, J. Acoust. Soc. Amer., 36, № 5, 833 (1964).
3. Ю. П. Лысанов, Акуст. ж., 12, № 4, 489 (1966).
4. А. Д. Лапин, Труды VI Всесоюзной акуст. конф., А I-4, М., 1968.
5. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1521 (1969).
6. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Укр. физ. ж., 14, № 9, 1548 (1969).
7. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Доклады IX Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, ч. 1, Харьков, 1969, стр 198.
8. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
9. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
10. В. Г. Безродный, И. М. Фукс, Акуст. ж., 17, № 4, 52 (1971).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
12 апреля 1971 г.

SPACE-AND-TIME CORRELATION OF THE FIELD AMPLITUDE AND PHASE IN A WAVEGUIDE WITH A STATISTICALLY ROUGH BOUNDARY

V. G. Bezrodnyi, I. M. Fuks

The problem of the space-and-time correlation of the field amplitude and phase in a plane waveguide with a statistically rough wall is solved by the perturbation theory method. The height of the boundary roughnesses is assumed to be smaller than the wavelength and $|\kappa_n l_{x,y}| \gg 1$, $|\Delta\kappa l_x| \gg 1$, $l_y \gg \sqrt{D/|\kappa_n|}$ (l_x and l_y are the roughness correlation radii along and across the propagation line, respectively; here D is the path length, κ_n the longitudinal wave number of the n normal wave, $\Delta\kappa \sim |\kappa_n - \kappa_{n-1}|$). The change of the boundary shape with time occurs more slowly than the period of electromagnetic oscillations. The spatial-time correlation coefficient is shown to have the same form both for the amplitude and phase of the field, does not depend on the concrete model of the waveguide and determines only the statistical characteristics of the boundary roughnesses. The expressions are analysed for the dispersion of amplitude and phase fluctuations, their spatial correlation functions and temporal spectra in a number of limiting cases.

УДК 621.372.8

ДИФРАКЦИЯ H -ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ВОЛН НА ЛЕНТОЧНОЙ РЕШЕТКЕ ТИПА «ЖАЛЮЗИ»

А. А. Кириленко, С. А. Масалов

С помощью метода полуобращения решена задача о дифракции плоских волн на ленточной решетке типа «жалюзи». Проведено детальное аналитическое и численное исследование особенностей рассеянного поля, особое внимание уделено резонансным свойствам решетки.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассмотрена задача о дифракции плоских волн на периодической структуре, составленной из бесконечно тонких, идеально проводящих лент, плоскости которых составляют некоторый произвольный угол ψ с нормалью к плоскости решетки (рис. 1). Интерес к такой структуре вызван различными ее применениями в СВЧ технике.

Известен ряд работ, например, [1-4], в которых изучались свойства этой решетки в предположении, что угол $\psi = 0$. В общем случае несимметричной структуры данная задача впервые была рассмотрена в [5, 6]. В [5] получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений первого рода, которая, как было показано позже в [7], оказалась мало пригодной для непосредственных численных расчетов. Там же предложен метод сведения с экспоненциальной точностью этой системы уравнений к конечной системе. Иной подход был использован в [6], где с помощью обобщенных матриц рассеяния волн на решетке из наклонных полуплоскостей задача также с экспоненциальной точностью сведена к решению конечной системы уравнений. В [5, 6] приведены и некоторые численные результаты для случая, когда вектор E падающего поля параллелен лентам решетки.

Метод, используемый в настоящей работе, существенно опирается на результаты работ [4, 8] и приводит к системам, аналогичным системам работы [6]. В данной работе исследован случай H -поляризации, при этом с оценкой погрешности получено решение задачи в виде простых аналитических формул, найдена длинноволновая асимптотика решения, обнаружены и обоснованы резонансные явления, имеющие место в такой структуре.

2. СВЕДЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К РЕШЕНИЮ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть на решетку со стороны $z > 0$ под углом φ падает плоская H -поляризованная электромагнитная волна $H_x = \exp[ik(y \sin \varphi - z \cos \varphi)]$.

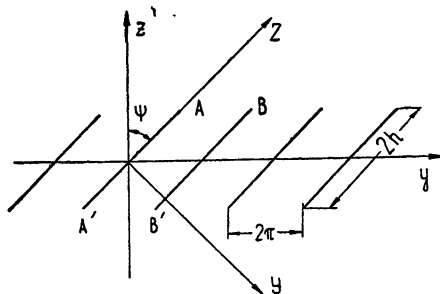


Рис. 1. Решетка типа „жалюзи“.

Выберем период решетки равным 2π , ширину лент $2h$, а зависимость от времени возьмем в виде $\exp(-i\omega t)$. Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны на решетке.

Искомое поле над и под решеткой представим в виде

$$H_x^+ = \exp[i(\Phi_0 y - \Gamma_0 z)] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp[i\Phi_n(y - h \sin \psi) + i\Gamma_n(z - h \cos \psi)] \quad (1)$$

$$(z \geq h \cos \psi);$$

$$H_x^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp[i\Phi_n(y + h \sin \psi) - i\Gamma_n(z + h \cos \psi)] \quad (2)$$

$$(z \leq -h \cos \psi),$$

где a_n и b_n — неизвестные амплитуды волн рассеянного поля, а

$$\Phi_n = n + k \sin \varphi, \quad \Gamma_n = \sqrt{k^2 - \Phi_n^2}, \quad k = 2\pi/\lambda.$$

Здесь выбраны те ветви корней \sqrt{A} , для которых $\text{Im} \sqrt{A} > 0$ при $A < 0$. Представления (1), (2) для H_x удовлетворяют уравнению Гельмгольца, условию периодичности и условию излучения на бесконечности. Коэффициенты a_n и b_n должны быть такими, чтобы полное поле было непрерывным всюду вне лент и чтобы энергия рассеянного поля была конечной в любой ограниченной области пространства. Из последнего условия следует, что a_n и b_n надо искать в пространстве последовательностей, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 (1 + |n|) < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 (1 + |n|) < \infty. \quad (3)$$

Используя для связи полей над и под решеткой вторую формулу Грина и применяя ее к контуру $ABB'A'$, сведем исходную электродинамическую задачу к нахождению решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений первого рода:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{a}_n \exp(2i\omega_q h)}{\Gamma_n^+ + \omega_q} + \frac{\tilde{b}_n}{\Gamma_n^- - \omega_q} \right\} = \frac{\exp(2i\omega_q h)}{\Gamma_0^- - \omega_q} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\tilde{a}_n}{\Gamma_n^+ - \omega_q} + \frac{\tilde{b}_n \exp(2i\omega_q h)}{\Gamma_n^- + \omega_q} \right\} = \frac{1}{\Gamma_0^- + \omega_q} \end{cases} \quad (4)$$

$$(q = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Здесь введены обозначения $\tilde{a}_n = a_n \frac{\Phi_n^+}{\Phi_0^+} \exp(ih\Gamma_0^-)$; $\tilde{b}_n = b_n \frac{\Phi_n^-}{\Phi_0^-} \times \times \exp(ih\Gamma_0^-)$; $\Phi_n^\pm = \Gamma_n \sin \psi \mp \Phi_n \cos \psi$; $\Gamma_n^\pm = \Gamma_n \cos \psi \pm \Phi_n \sin \psi$; $\omega_q = \sqrt{k^2 - (q/2 \cos \psi)^2}$. В качестве вспомогательных функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца и условию $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ на лентах, использовались функции

$$G_q^\pm = \cos \frac{qY}{2 \cos \psi} \exp(\pm i\omega_q Z) \quad (q = 0, 1, 2, \dots).$$

В [7] найдено, что системы типа (4) непосредственно не пригодны для численных расчетов, так как к ним чрезвычайно трудно применять метод усечения. Они малоэффективны и при аналитическом исследовании задачи.

Тем не менее система (4) может быть приведена к виду, который допускает эффективное аналитическое и численное решение. Такое сведение осуществлено на основе регуляризации этой системы, т. е. обращения главной части матричных операторов, элементы которых медленно убывают с ростом индексов. При этом существенным образом используется то обстоятельство, что геометрия решетки типа «жалюзи» тесным образом связана с геометрией решетки из наклонных полуплоскостей, а главной частью операторов каждой из подсистем является оператор, соответствующий задаче дифракции на решетке из полуплоскостей.

Рассмотрим сначала следующие бесконечные системы уравнений относительно неизвестных a_n^0 и S_{nr}^\pm :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^0}{\Gamma_n^+ - \omega_q} = \frac{1}{\Gamma_0^+ + \omega_q} \quad (q = 0, 1, 2, \dots); \quad (5)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S_{nr}^\pm}{\Gamma_n^\pm - \omega_q} = \delta_q^r, \quad \delta_q^r = \begin{cases} 1, & q = r \\ 0, & q \neq r \end{cases} \quad (6)$$

$$(r, q = 0, 1, 2, \dots).$$

Эти системы возникают в задачах о возбуждении решетки из полуплоскостей плоской волной (первая) или системой волноводных волн (вторая). Их аналитическое решение было найдено методами теории функций в работе [8], а подробное исследование проведено в [9].

Имеем: $a_n^0 = \text{Res } f(\omega) \Big|_{\omega = \Gamma_n^+}$, $S_{nr}^\pm = \text{Res } f_r^\pm(\omega) \Big|_{\omega = \Gamma_n^\pm}$, где $f(\omega)$ и $f_r^\pm(\omega)$ — следующие аналитические функции комплексного переменного ω :

$$f(\omega) = \exp[i(\omega + \Gamma_0^-)t(\psi)] \frac{(\Gamma_0^+ + \Gamma_0^-)(k - \omega)}{(\Gamma_0^- + \omega)(\Gamma_0^+ - \omega)(k + \Gamma_0^-)} \times \\ \times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(\Gamma_m^+ + \Gamma_0^-)(\Gamma_{-m}^+ + \Gamma_0^-)(\omega_m - \omega)}{(\Gamma_m^+ - \omega)(\Gamma_{-m}^+ - \omega)(\omega_m + \Gamma_0^-)}, \\ f_r^\pm(\omega) = \exp[i(\omega - \omega_r)t(\psi)] \frac{\omega_r - \Gamma_0^\pm}{\Gamma_0^\pm - \omega} \times \\ \times \left\{ \frac{k - \omega}{k - \omega_r} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(\Gamma_m^\pm - \omega_r)(\Gamma_{-m}^\pm - \omega_r)(\omega_m - \omega)}{(\Gamma_m^\pm - \omega)(\Gamma_{-m}^\pm - \omega)(\omega_m - \omega_r)} \right\}^{(r)}.$$

Здесь $t(\psi) = 2[\cos \psi \ln(2 \cos \psi) + \psi \sin \psi]$, а индекс (r) означает, что множитель $\frac{\omega_m - \omega}{\omega_m - \omega_r}$ с $m = r$ из произведения в фигурных скобках опущен. Учитывая (5) и (6), мы можем с помощью метода полуобращения свести систему (4) к виду

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{a}_n &= - \sum_{q=0}^{\infty} S_{nq}^+ \exp(2i\omega_q h) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{b}_p}{\Gamma_p^- + \omega_q} \quad (n = 0, \pm 1, \dots) \\ \tilde{b}_n &= - \sum_{q=0}^{\infty} S_{nq}^- \exp(2i\omega_q h) \left[\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{a}_p}{\Gamma_p^+ + \omega_q} - f(-\omega_q) \right] \end{aligned} \right. ,$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

причем $\tilde{a}_n = \hat{a}_n + a_n^0$. Такое эквивалентное преобразование справедливо только при $h \geq \pi \sin \psi$, так как в противоположном случае $h < \pi \sin \psi$ из оценки

$$S_{nq}^{\pm} = O \left(\frac{\sqrt{q} \exp(\pi q \operatorname{tg} \psi)}{\sqrt{|n|} |\omega_q - \Gamma_n^{\pm}|} \right)$$

следует, что соответствующие ряды по индексу q будут расходящимися.

Произведем теперь разделение неизвестных, подставив \hat{a}_n из первой подсистемы во вторую, и наоборот для \tilde{b}_n . Поменяв затем местами знаки суммирования, что возможно на основании (3) и приведенной выше оценки для S_{nq}^{\pm} , после некоторых преобразований получаем две независимые системы линейных алгебраических уравнений второго рода:

$$\hat{a}_n + \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{ns} \hat{a}_s = \mu_n, \quad \tilde{b}_n + \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q_{ns} \tilde{b}_s = \gamma_n,$$

где

$$P_{ns} = \sum_{v=0}^{\infty} S_{nv}^+ \exp(2i\omega_v h) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_r^-(-\omega_v) \exp(2i\omega_r h)}{\Gamma_s^+ + \omega_r},$$

$$\mu_n = \sum_{v=0}^{\infty} S_{nv}^+ \exp(2i\omega_v h) \sum_{r=0}^{\infty} f_r^-(-\omega_v) f(-\omega_r) \exp(2i\omega_r h),$$

$$Q_{ns} = \sum_{v=0}^{\infty} S_{nv}^- \exp(2i\omega_v h) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f_r^+(-\omega_v) \exp(2i\omega_r h)}{\Gamma_s^- + \omega_r},$$

$$\gamma_n = \sum_{v=0}^{\infty} S_{nv}^- f(-\omega_v) \exp(2i\omega_v h).$$

При выводе этих уравнений были использованы следующие свойства a_n^0 и S_{nr}^{\pm} :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n^0}{\Gamma_n^+ + \omega_q} - \frac{1}{\Gamma_0^- - \omega_q} = -f(-\omega_q);$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S_{nr}^{\pm}}{\Gamma_n^{\pm} + \omega_q} = -f_r^{\pm}(-\omega_q) \quad (q = 0, 1, 2, \dots);$$

$$|f_r^{\pm}(-\omega_q)| = O \left(\frac{\sqrt{r} \exp(\pi r \operatorname{tg} \psi)}{\sqrt{q} (q+r)} \right); \quad |f(-\omega_q)| = O \left(\frac{1}{q \sqrt{q}} \right).$$

Так как матричные элементы P_{ns} и Q_{ns} вырожденного типа, то мы можем привести полученные системы уравнений к эквивалентным системам относительно новых неизвестных η_q и ζ_q :

$$\eta_q = \sum_{t=0}^{\infty} \eta_t \sum_{r=0}^{\infty} f_r^- (-\omega_q) f_t^+ (-\omega_r) \exp [2i(\omega_r + \omega_t) h] + \sum_{r=0}^{\infty} f_r^- (-\omega_q) f (-\omega_r) \exp (2i\omega_r h) \quad (q = 0, 1, 2, \dots); \quad (7)$$

$$\zeta_q = \sum_{t=0}^{\infty} \zeta_t \sum_{r=0}^{\infty} f_r^+ (-\omega_q) f_t^- (-\omega_r) \exp [2i(\omega_r + \omega_t) h] + f (-\omega_q) \quad (q = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

при этом старые и новые неизвестные связаны соотношениями

$$\hat{a}_n = \sum_{q=0}^{\infty} S_{nq}^+ \eta_q \exp (2i\omega_q h), \quad \tilde{b}_n = \sum_{q=0}^{\infty} S_{nq}^- \zeta_q \exp (2i\omega_q h). \quad (9)$$

Как легко видеть из (7) и (8), между η_q и ζ_q существует непосредственная связь вида

$$\eta_q = \sum_{t=0}^{\infty} \zeta_t f_t^- (-\omega_q) \exp (2i\omega_t h). \quad (10)$$

В итоге задача свелась к нахождению решения одной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода (8) и последующему вычислению рядов (9) и (10).

Используя приведенные выше оценки, можно показать, что матричный оператор системы (8) при $h > \pi \sin \psi$ будет фредгольмовым в гильбертовом пространстве последовательностей l_2 , а величины a_n , b_n будут принадлежать классу (3).

Основываясь на свойствах матричного оператора системы (8), решение ее можно получить методом усечения. Так как матричные элементы в (8) экспоненциально убывают вдоль строки, то при решении усеченной системы порядка N возникающая погрешность в определении

$$\zeta_q (q = 0, 1, 2, \dots) \text{ имеет порядок } O \left(\exp \left[-2(h - \pi \sin \psi) \sqrt{\left(\frac{N}{2 \cos \psi} \right)^2 - k^2} \right] \right).$$

Из экспоненциальной сходимости рядов (9) и (10) следует, что погрешность определения a_n и b_n будет иметь тот же порядок. Экспоненциальное убывание погрешности с ростом N и h или $\psi \rightarrow \pi/2$ позволяет получить достаточную точность в описании электромагнитного поля, решая системы уравнений сравнительно невысокого порядка. При этом необходимым условием является $N > 2k \cos \psi$, что эквивалентно требованию учета в щелях решетки всех распространяющихся волноводных волн.

Необходимо отметить, что к этому же решению (8)–(10) можно прийти, пользуясь методом обобщенных матриц рассеяния, разбивая при этом «жалюзи» на две элементарные неоднородности, представляющие собой поверхности раздела решетка из полуплоскостей—свободное пространство [8]. При этом \hat{a}_n^0 соответствует первичному отражению, а \hat{a}_n есть член, учитывающий многократное перерассеяние поля на раскрытых щелях.

Как в изложенном здесь методе, так и в методе обобщенных матриц рассеяния, решение задачи в виде (8)–(10) справедливо только при наличии области взаимодействия, т. е. при $h \geq \pi \sin \psi$. Если же

$h < \pi \sin \psi$, то, по-видимому, при решении задачи дифракции на рассматриваемой структуре в качестве главной следует выделять статическую часть.

В заключение укажем, что метод решения, использованный здесь, полностью переносится и на случай E -поляризации.

3. ДИФРАКЦИОННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕТКИ ТИПА «ЖАЛЮЗИ»

Исследование свойств решетки типа «жалюзи» проводилось как с помощью аналитических выражений, получаемых из (8)—(10), так и численно. Расчеты на ЭВМ производились с целью изучения тех частотных диапазонов, где аналитическое исследование затруднительно, а также для иллюстрации полученных аналитических зависимостей. Изложение будем вести от наиболее общих свойств к тем свойствам, которые проявляются в ограниченных диапазонах частот, но могут быть исследованы более подробно.

1) Все решетки типа «жалюзи» с разными φ и ψ имеет смысл разбить на три группы: первую ($\varphi + 2\psi < 90^\circ$), состоящую из структур, прозрачных при $k \rightarrow \infty$; вторую ($\varphi + 2\psi \geq 90^\circ$, но $\varphi + \psi < 90^\circ$) — из полупрозрачных при $k \rightarrow \infty$ структур и, наконец, третью — из решеток, полностью отражающих энергию в оптическом случае. Как выяснилось, свойства решеток внутри каждой группы весьма похожи.

2) С помощью леммы Лоренца в [9] показано, что амплитуда нулевой гармоники отраженного спектра a_0 для любой, пусть даже несимметричной, периодической структуры инвариантна относительно знака угла падения φ . Так как для решетки «жалюзи» замена φ на $-\varphi$ эквивалентна замене ψ на $-\psi$, то a_0 не будет зависеть и от знака угла наклона лент решетки ψ . При $k \leq 1/(1 \pm \sin \varphi)$ из закона сохранения энергии следует, что от знаков φ и ψ не будет зависеть и $|b_0|$.

3) Из п. 2) следует, что коэффициент отражения a_0 будет равен нулю не только в тривиальном случае $\varphi = -\psi$, когда вектор E падающего поля перпендикулярен плоскостям лент решетки, но и в симметричном случае $\varphi = \psi$. Если над и под решеткой существуют высшие распространяющиеся волны, то энергия падающего поля при $\varphi = \psi$ перераспределится между прошедшими и высшими отраженными гармониками. Если же над и под решеткой нет распространяющихся высших гармоник, т. е. когда $k \leq 1/(1 \pm \sin \varphi)$, то при $\varphi = \psi$ наблюдается полное прохождение энергии под решетку. Однако в отличие от случая $\varphi = -\psi$, при $\varphi = \psi$ и $k \leq 1/(1 \pm \sin \varphi)$ фаза прошедшей волны будет зависеть от λ и от ширины лент решетки.

Кроме того, с помощью леммы Лоренца можно показать, что если при некоторых φ и ψ над или под решеткой какая-либо из волн распространяется вдоль оси Z (см. рис. 1), то ее амплитуда равна нулю, т. е. $a_n = 0$, если $\Phi_n/k = \sin \psi$; $b_n = 0$, если $\Phi_n/k = -\sin \psi$ ($n \neq 0$).

4) При $k = k_{\text{рез}} = l/2 \cos^2 \psi$ ($l=1, 2, 3, \dots$) и $2\psi + \varphi = 90^\circ$ в системе (4) возникают неопределенности, раскрывая которые, получаем

$$b_0 = \exp(ih\Gamma_0^-), \quad a_{-l} = \exp(-ih\Gamma_0^-), \quad b_{-l} = \exp(ih\Gamma_0^-), \\ a_n = 0 \quad (n \neq -l); \quad b_n = 0 \quad (n \neq 0, -l).$$

Из записи поля (1), (2) видно, что во всем пространстве при этом существуют две плоские волны, наложение которых дает пучности магнитного поля на плоскостях $Y = 2m\pi \cos \psi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Таким образом, при $k = l/2 \cos^2 \psi$ и $2\psi + \varphi = 90^\circ$ наблюдается полное прохождение падающей волны через решетку даже без изменения фазы; волна как бы «не замечает» решетку. Отметим, что из инвариантности амплитуды нулевой отраженной гармоники относительно знака φ следует уже

неочевидный факт, что $a_0 = 0$ и при $2\psi - \varphi = 90^\circ$. В этом случае коэффициент отражения a_0 равен нулю, а энергия падающей волны перераспределится между остальными распространяющимися гармониками. Если $k_{\text{рез}} \leq 1/(1 \pm \sin \varphi)$, то полное прохождение будет наблюдаться и при $2\psi - \varphi = 90^\circ$, однако в этом случае фаза прошедшей волны будет зависеть от ширины лент решетки.

5) При стремлении угла падения φ к скользящему всюду, кроме точек $\psi = 0$, $k = l/2$ ($l = 1, 2, \dots$), из (4) получаем, что коэффициент отражения стремится к единице. Если же $\psi = 0$ и $k = l/2$, то приходим к

$$a_0 \rightarrow -\frac{1+i}{2}; \quad a_{-l} \rightarrow \frac{1-i}{2}; \quad b_0 \rightarrow b_{-l} \rightarrow \frac{1-i}{2}; \quad a_n \rightarrow 0; \quad b_n \rightarrow 0$$

$$(n \neq 0, -l) \text{ при } \varphi \rightarrow 90^\circ.$$

Таким образом, энергия отраженного поля здесь стремится при скользящих углах падения уже не к единице, а к 0,5. Последние соотношения получаются при рассмотрении неопределенностей в системе (4), возникающих в случае, когда $\Gamma_{-l} = \Gamma_0 = \omega_l = 0$.

6) Пусть длина волны падающего поля, угол наклона лент решетки и их ширина таковы, что первая волноводная волна в щелях решетки оказывает ничтожно малое влияние на взаимодействие полей при $z \geq h \cos \psi$ и $z \leq -h \cos \psi$, т. е. $\exp(2i\omega_l h) \ll 1$ (очевидно $k < 1/2 \cos \psi$). Оставляя в рядах системы (8) и в (9), (10) по одному слагаемому, соответствующему волне ТЕМ в щелях, после несложных преобразований получаем

$$a_0 = \exp(-ih\Gamma_0^-) \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} \frac{f^+(\Gamma_0^+)}{f^+(-\Gamma_0^-)} \times$$

$$\left[1 - \exp(4ikh) \frac{f^+(-k) f^-(-k)}{f^+(k) f^-(k)} \right] \quad (11)$$

$$\times \frac{1}{\left[1 - \exp(4ikh) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right) \frac{f^+(-k) f^-(-k)}{f^+(k) f^-(k)} \right]};$$

$$b_0 = \exp(-ih\Gamma_0^-) \frac{f^-(\Gamma_0^-) f^+(-k)}{f^+(-\Gamma_0^-) f^-(k)} \times$$

$$\left[1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right) \right] \quad (12)$$

$$\times \frac{1}{\left[1 - \exp(4ikh) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right) \frac{f^+(-k) f^-(-k)}{f^+(k) f^-(k)} \right]},$$

где

$$f^\pm(\omega) = \exp[i\omega t(\psi)] \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(\omega_m - \omega) 2im \cos \psi}{(\Gamma_m^\pm - \omega)(\Gamma_{-m}^\pm - \omega)}.$$

Погрешность решения задачи, определяемого этими выражениями, порядка $O(\exp[-2(h - \pi \sin \psi) \sqrt{1/4 \cos^2 \psi - k^2}])$. С этой же точностью в виде, аналогичном (11), (12), можно выписать и амплитуды высших гармоник рассеянного поля.

7) Если длина волны и угол падения таковы, что $k < \min\{1/2 \cos \psi, 1/(1 \pm \sin \varphi)\}$, т. е. над и под решеткой нет высших распространяющихся гармоник, а первая волноводная волна в щелях является затухающей, то

$$\frac{f^-(\Gamma_0^-)}{f^+(-\Gamma_0^-)} = \exp(i\alpha_1),$$

где

$$\operatorname{Im} \alpha_1 = 0$$

и

$$\alpha_1 = 2\Gamma_0^- t(\psi) - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\Gamma_0^-}{|\omega_m|} - \operatorname{arctg} \frac{\Phi_m \sin \psi + \Gamma_0^-}{|\Gamma_m| \cos \psi} - \operatorname{arctg} \frac{\Phi_{-m} \sin \psi + \Gamma_0^-}{|\Gamma_{-m}| \cos \psi} \right\}. \quad (13)$$

Вследствие того, что при $k < \min \left\{ \frac{n}{2 \cos \psi}, \frac{n}{1 \pm \sin \varphi} \right\}$

$$|(\Gamma_m^+ - \Gamma_0^+) (\Gamma_{-m}^+ - \Gamma_0^+)| = |(\omega_m - \Gamma_0^+) 2m \cos \psi| \quad (m > n),$$

имеем $\frac{f^+(\Gamma_0^+)}{f^+(-\Gamma_0^+)} = \exp(i\alpha_2)$. Кроме того,

$$\frac{f^+(-k)}{f^-(k)} = \exp(i\beta^+); \quad \frac{f^+(-k) f^-(-k)}{f^+(k) f^-(k)} = \exp(i\beta),$$

где

$$\begin{aligned} \beta &= \beta^+(\psi) + \beta^+(-\psi), \\ \beta^+ &= -2kt(\psi) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{|\omega_m|}{k} - \operatorname{arctg} \frac{|\Gamma_m| \cos \psi}{\Phi_m \sin \psi + k} - \operatorname{arctg} \frac{|\Gamma_{-m}| \cos \psi}{\Phi_{-m} \sin \psi + k} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что общие члены в рядах (13), (14) с ростом номера убывают, как $1/m^2$.

Учитывая сделанные замечания, упростим полученные выражения (11), (12):

$$\begin{aligned} a_0 &= \exp [i(-h\Gamma_0^- + \alpha_2)] \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} \times \\ &\times \frac{1 - \exp [i(4kh + \beta)]}{1 - \exp [i(4kh + \beta)] \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right)}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= \exp [i(-h\Gamma_0^- + \alpha_1 + \beta^+)] \times \\ &\times \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right)}{1 - \exp [i(4kh + \beta)] \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Видно, что a_0 и b_0 точно удовлетворяют закону сохранения энергии.

Выписанные формулы подтверждают тот факт, что решетка (при данных ограничениях на длину волны и угол падения) полностью про-

пускает энергию не только при $\varphi = -\psi$, но и при $\varphi = \psi$. Отличие случая $\varphi = \psi$ заключается в том, что коэффициент прохождения будет равен не единице, а $\exp [i(-h\Gamma_0^- + \alpha_1 + \beta^+)]$, т. е. прошедшая сквозь решетку волна получит некоторый фазовый сдвиг, определяемый при фиксированных φ и ψ длиной волны и шириной лент решетки. Если $\varphi = -\psi$, то нетрудно показать, что $\alpha_1 + \beta^+ = 0$ и, следовательно, $b_0 = \exp(-ih\Gamma_0^-)$ (набег фазы здесь обусловлен только видом представления искомого поля). Из (15), (16) видно, что с изменением h будет наблюдаться периодическое изменение модулей коэффициентов прохождения и отражения с периодом, равным $\Delta h = \pi/2k = \lambda/4$. С увеличением длины волны период колебаний будет пропорционально увеличиваться. В рассматриваемом приближении ($\exp(2i\omega_1 h) \ll 1$) из (15), (16) находим, что в точках, удовлетворяющих условию

$$4kh + \beta = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (17)$$

наступает полное прохождение энергии через решетку, а в точках

$$4kh + \beta = (2n + 1)\pi$$

— максимальное отражение энергии от структуры. Из выражения для величины прошедшей энергии в точках минимума

$$E_{b_0, \min} = |b_0|_{\min}^2 = \left| \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi + \psi}{2}\right) \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi - \psi}{2}\right)} \right| \quad (18)$$

следует, что наименьших значений минимумы прошедшей мощности достигают при углах падения, близких к скользящим ($\varphi \rightarrow 90^\circ$), или при углах наклона лент решетки, близких к 90° («чешуеобразная» поверхность).

Из условия $E_{b_0, \min} < 0,5$ необходимо следует

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} \right| > \sqrt{2} - 1. \quad (19)$$

В противоположном случае, т. е. $\left| \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} \right| < \sqrt{2} - 1$, величина прошедшей энергии ни при каких k и h ($k < \min \left\{ \frac{1}{2 \cos \varphi}, \frac{1}{1 \pm \sin \varphi} \right\}$) не опускается ниже уровня 0,5. Интересно отметить, что углы φ и ψ входят в (18) и (19) симметричным образом. В простейших случаях $\varphi = 0$ ($\psi = 0$) получаем вместо (19) условие $\psi(\varphi) > 65,5^\circ$.

8) Рассмотрим теперь тот случай, когда длина волны падающего поля намного больше периода решетки, т. е. $k \ll 1$. Так как при этом

$$f^+(w) = \exp [i\omega t(\psi)] \frac{\Gamma(i\omega \exp(i\psi) + \Phi + 1) \Gamma(i\omega \exp(-i\psi) - \Phi + 1)}{\Gamma(2i\omega \cos \psi + 1)} \times \\ \times [1 + O(k^2)],$$

то $\beta = -4kt(\psi) + O(k^3)$ при $k \ll 1$. Следовательно, в длинноволновом приближении

$$|a_0| = \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2}}{1 - \exp [4ik(h - t(\psi))] \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right)} \frac{1 - \exp [4ik(h - t(\psi))]}{1 - \exp [4ik(h - t(\psi))] \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right)} \right| \times [1 + O(k^2)]; \quad (20)$$

$$|b_0| = \left| \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right)}{1 - \exp [4ik(h - t(\psi))] \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right)} \right| [1 + O(k^2)]. \quad (21)$$

Отсюда следует, что с точностью до членов порядка k^2 полное прохождение наступает при $2h = 2t(\psi) + n\lambda/2$ ($n = 1, 2, \dots$), т. е. в приближении $k^2 \ll 1$ точки полного прохождения не зависят от угла падения, а $2(h - t(\psi))$ можно рассматривать как некоторую эффективную ширину лент решетки. Если вдоль этой эффективной ширины укладывается целое число полуволн, то наблюдается полное прохождение энергии через решетку. Заметим, что во всем диапазоне $k \leq 1/(1 \pm \sin \varphi)$ решение уравнения (17) проще всего получить графическим способом.

Найденные свойства подтверждаются рис. 2а, где представлена

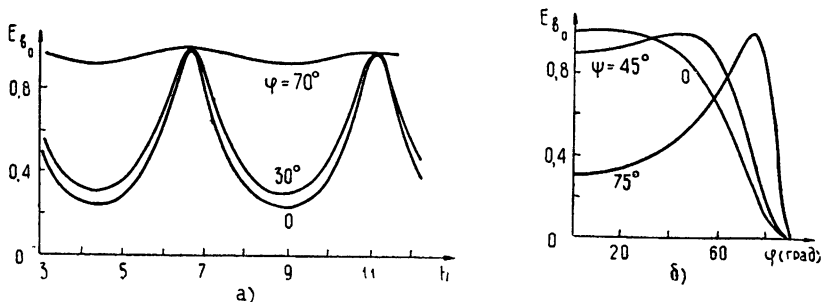


Рис. 2. а) Зависимость энергии основной прошедшей волны E_{b_0} от ширины лент при $k = 0,35$, $\psi = 75^\circ$, H -поляризации. б) Зависимость E_{b_0} от угла падения при $k = 0,35$, $h = 4\pi$, H -поляризации и различных углах наклона лент.

энергия нулевой прошедшей гармоники в зависимости от h для $k = 0,35$, $\psi = 75^\circ$ и разных углов падения. Здесь и далее энергиями дифракционных гармоник будем называть величины $E_{a_n} = |a_n|^2 \frac{\operatorname{Re}\Gamma_n}{\Gamma_0}$, $E_{b_n} = |b_n|^2 \frac{\operatorname{Re}\Gamma_n}{\Gamma_0}$. Из рисунка видно хорошее совпадение периода кривых

с величиной $\lambda/4 \approx 4,48$. Точки полного прохождения практически не зависят от угла падения, а минимумы прохождения увеличиваются при стремлении φ к 75° , где $E_{b_0} = 1$ при любом h .

На рис. 2б представлены зависимости E_{b_0} от угла падения. Как и следовало предполагать, во всех трех случаях наблюдаем полное прохождение при $\varphi = \psi$. При малых углах падения графики слабо зависят от φ , а при $\varphi \rightarrow 90^\circ$ энергия, прошедшая через решетку, стремится к нулю. Точки минимальных по h значений E_{b_0} , так же как и точки $E_{b_0} = 1$, слабо зависят от угла падения (рис. 2а). Следовательно, точка $h = 4\pi$ будет находиться вблизи минимума не только при углах падения, представленных на рис. 2а, но и при других φ . Отсюда ясно, что кривая с $\psi = 75^\circ$ на рис. 2б иллюстрирует зависимость $E_{b_0, \min}$

от угла падения, т. е. практически это график функции, определяемой (18). Как уже указывалось и как следует из графика, наименьшее значение $E_{b_0, \min}$ достигается при φ , близких к 90° .

При $k^2 \ll 1$ из (20), (21) следует, что $|a_0|$ и $|b_0|$ будут периодическими функциями волнового числа k с периодом

$$\Delta k = \frac{\pi}{2[h - t(\psi)]},$$

уменьшающимся с ростом h . На частотах

$$\omega_n = c \frac{n\pi}{2[h - t(\psi)]} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где c — скорость света в свободном пространстве, падающая энергия будет полностью проходить через решетку. В некотором фиксированном диапазоне частот $\omega_K - \omega_H$ находятся n_0 частот, на которых решетка полностью прозрачна, где

$$n_0 = E \left\{ \frac{2[h - t(\psi)] (\omega_K - \omega_H)}{c\pi} \right\}$$

($E(A)$ — целая часть A). Разумеется, ω_K и ω_H таковы, что выполняются предположения, при которых получены (20) и (21).

Если удовлетворяется неравенство (19) и, следовательно, при некоторых частотах через решетку проходит менее половины падающей мощности, то имеет смысл говорить о ширине полосы пропускания. Исходя из (21), для некоторой частоты прозрачности ω_n получаем следующую полосу пропускания по уровню половинной мощности:

$$\Delta\omega_{0,5} = \frac{c}{2(h - t(\psi))} \arcsin \left| \frac{2 \cos \varphi \cos \psi}{\cos^2 \varphi - \cos^2 \psi} \right|.$$

Она стремится к нулю с ростом h , а также при $\varphi \rightarrow 90^\circ$ или $\psi \rightarrow 90^\circ$ и не зависит от конкретного значения основной частоты ω_n .

9) На рис. 3 изображены зависимости энергий нулевой прошедшей гармоники от k . При больших h наблюдается периодическая зависимость E_{b_0} от k не только при малых k , но практически во всем диапазоне $k \leq (1 \pm \sin \varphi)^{-1}$. Обращает на себя внимание резонанс полного прохождения энергии через решетку вблизи точки скольжения $\Gamma_{-1} = 0$, наблюдающийся и при $h = 4\pi$, и при $h = \pi$. Аналогичные резонансы были обнару-

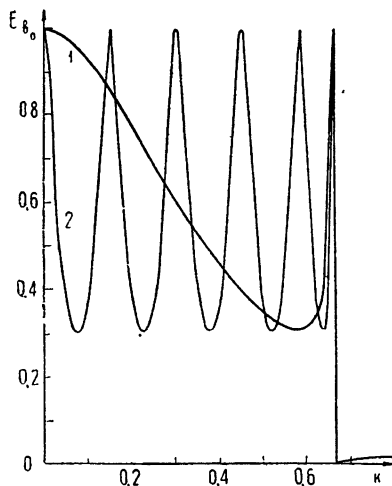


Рис. 3. Зависимость энергии основной прошедшей волны от $k = 2\pi/\lambda$ ($h = \pi$ (1), $h = 4\pi$ (2), $\varphi = 30^\circ$, $\psi = 75^\circ$, H -поляризации).

жены и при других параметрах задачи вблизи тех точек, где над и под решеткой возникают первые высшие распространяющиеся гармоники, а внутри щелей распространяется только волна ТЕМ.

Объяснение этим фактам полного прохождения можно найти, рассматривая поведение величины β , входящей в условие полного прохождения (17). Как видно, плавный характер зависимости β от k будет нарушаться разрывами в тех точках, где выражения, стоящие под знаками арктангенсов, обращаются в бесконечность. В частности, $\arctg \frac{|\Gamma_{-1}| \cos \psi}{\Phi_{-1} \sin \psi + k}$ имеет скачок, равный π в точке $k = -\Phi_{-1} \sin \psi$,

т. е. $k = k_1 = \frac{\sin \psi}{1 + \sin \varphi \sin \psi}$. С другой стороны, $\arctg \frac{|\Gamma_{-1}| \cos \psi}{\Phi_{-1} \sin \psi + k} = 0$

при $\Gamma_{-1} = 0$, т. е. при $k = k_2 = (1 + \sin \varphi)^{-1}$. Таким образом, $\beta(k)$ содержит слагаемое, которое непрерывно изменяется от π до нуля на интервале от k_1 до k_2 , тем более узком, чем ближе $\sin \psi$ к 1, т. е. чем уже щели решетки. Так как остальные слагаемые в β мало изменяются на этом узком интервале $k_2 - k_1$, то и β изменится на величину порядка π . Анализируя формулы (11), (12), (17), приходим к следующим выводам.

а) Величины прошедшей и отраженной энергии в узком интервале (k_1, k_2) будут резко изменяться.

б) Так как в этом интервале $\beta(k)$ непрерывным образом изменяется на величину порядка π , то вблизи $k = k_2$ будет находиться либо точка полного прохождения, либо точка максимального отражения.

в) Сразу за точкой скольжения $\Gamma_{-1} = 0$ модуль основной прошедшей волны пропорционален $\cos \psi$ при $\cos \psi \ll 1$.

Суммируя, видим, что вся числовая ось h разобьется на некоторые чередующиеся полосы ширины порядка $\pi/4k$. Одна группа полос будет характеризоваться резкими резонансами полного прохождения вблизи точек возникновения первой высшей гармоники вне решетки; при h , принадлежащих второй группе, полное прохождение вблизи $k = k_2$ наблюдаться не будет.

Подчеркнем тот факт, что и в точке $\Gamma_{-1} = 0$ ($k = 1/(1 + |\sin \varphi|)$) при h , удовлетворяющих (17), решетка будет полностью прозрачна.

10) Теперь обратимся к той области частот и углов падения, когда внутри щелей распространяется только волна ТЕМ, а вне решетки выполняются условия распространения одной или нескольких высших дифракционных гармоник. В общем случае при $k < 1/2 \cos \psi$

$$\frac{f^+(-k) f^-(-k)}{f^+(k) f^-(k)} = \exp(i\beta_1) \prod_{\tilde{\Gamma}}^{(0)} \frac{(\Gamma_m - k \cos \psi)^2}{(\Gamma_m + k \cos \psi)^2},$$

где $\prod_{\tilde{\Gamma}}^{(0)}$ означает, что в произведении учитываются все Γ_m (кроме $m = 0$), для которых $\text{Re } \Gamma_m > 0$.

Обращаясь к (12), видим, что максимальных значений модуль коэффициента прохождения будет достигать при

$$\beta_1 + 4kh = 2n\pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Как и в предыдущем случае ($k \leq 1/(1 \pm \sin \varphi)$), имеет место периодическая зависимость энергий дифракционных гармоник от h , однако в точках максимумов энергия нулевой прошедшей гармоники уже не будет достигать единицы.

Следует отметить, что при малых значениях Γ_n , т. е. сразу за точками скольжения наблюдается слабая зависимость амплитуд гармоник от h . Например, на рис. 4 представлены энергии гармоник поля в зависимости от h вблизи точки скольжения ($\Gamma_{-1} \approx 0,05$, рис. 4а)

и на некотором удалении от нее (рис. 4 б). Заметна разница в амплитудах колебаний графиков по h в одном и другом случаях.

Рис. 5 иллюстрирует изменение энергий дифракционных гармоник

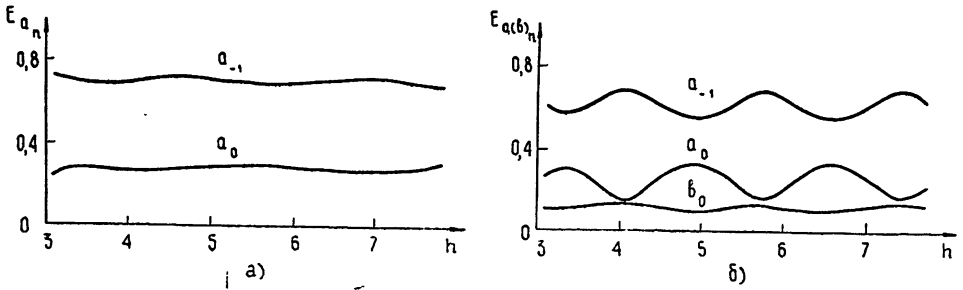


Рис. 4. Зависимость энергий дифрагированных гармоник от ширины лент вблизи точки скольжения $\Gamma_{-1} = 0$ ($k=0,667$).

- а) $k = 0,7, \varphi = 30^\circ, \psi = 75^\circ, H$ -поляризация;
- б) $k = 0,95, \varphi = 30^\circ, \psi = 75^\circ, H$ -поляризации.

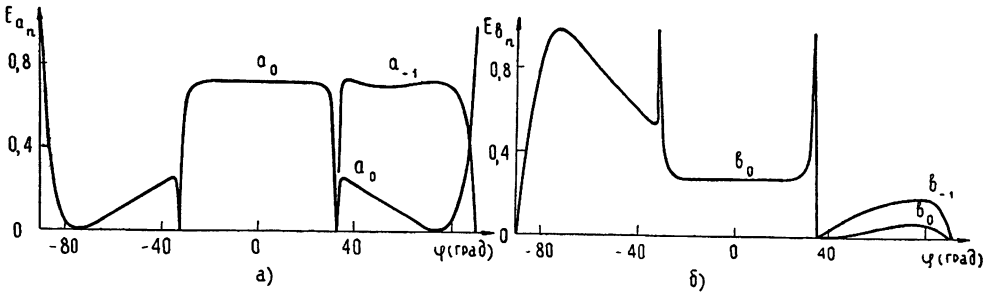


Рис. 5. Зависимость E_{a_n} и E_{b_n} от угла падения ($k = 0,65, h = 4\pi, \psi = 75^\circ, H$ -поляризация).

в зависимости от угла падения φ , когда внутри щелей распространяется только волна ТЕМ. Здесь при $\varphi = \psi$, в отличие от случая, когда в области вне решетки нет распространяющихся высших гармоник (рис. 2 б), уже не наблюдается полного прохождения. Падающая на решетку энергия распределяется при $\varphi = \psi$ между основной прошедшей и высшими дифракционными гармониками. Следует также обратить внимание на слабую зависимость E_{a_0} и E_{b_0} от угла падения вблизи $\varphi = 0$ и резкие всплески E_{b_0} вблизи точек пространственных резонансов (последнее обсуждалось выше в п. 9)).

Наиболее сильно асимметрия и дифракционные свойства решетки сказываются при $\varphi > 33^\circ$, здесь почти вся энергия уходит в высшие дифракционные гармоники. В области $35^\circ < \varphi < 80^\circ$ минус первая отраженная волна переносит не менее 70% падающей энергии. При $\varphi \rightarrow \pm 90^\circ$ $E_{a_0} \rightarrow 1$, как и следует из аналитических выражений.

11) Рассмотрим рис. 6, где представлены зависимости E_{a_n} и E_{b_n} от k для φ и ψ , относящихся к третьей (рис. 6 а), второй (рис. 6 б) и первой (рис. 6 в) группам. На рис. 6 а минус первая гармоника над решеткой начинает распространяться раньше, чем в щелях появится первая волноводная волна. Видно, что появление новых распространяющихся волн в отраженном поле приводит к резкому возрастанию отражения энергии от решетки и сглаживанию графиков. Обратим внима-

ние на то, что высшие гармоники являются доминирующими в отраженном поле, причем сначала основную часть энергии переносит минус первая гармоника (в некоторых точках до 95%), затем минус вторая

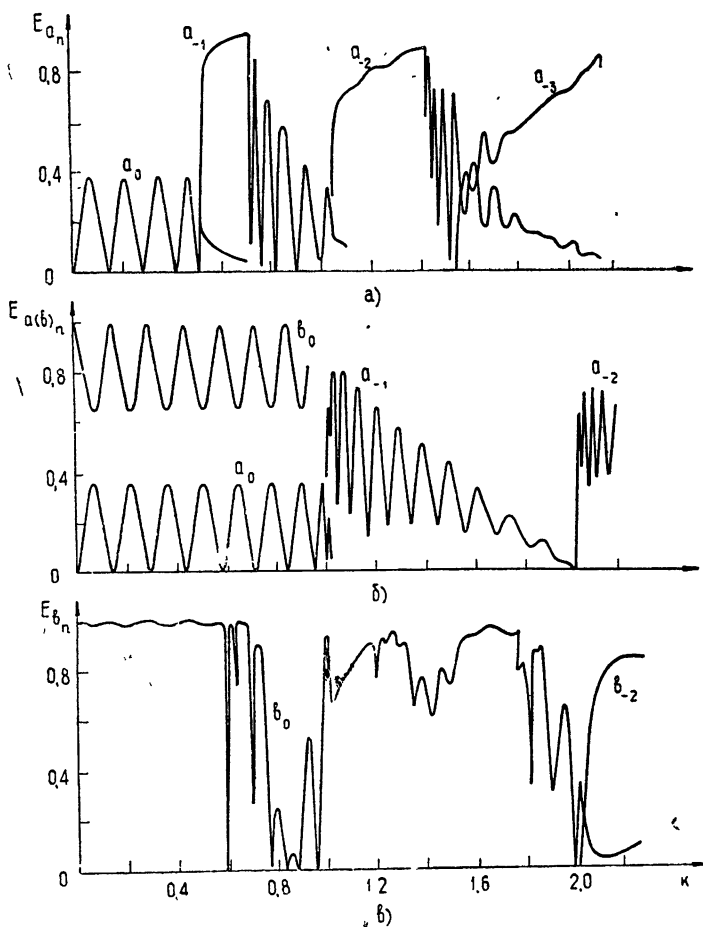


Рис. 6. Зависимость E_{a_n} и E_{b_n} от k для решетки третьей (а), второй (б) и первой (в) групп.

- а) $h = 4\pi$, $\varphi = 70^\circ$, $\psi = 45^\circ$, H -поляризация;
 б) $h = 4\pi$, $\varphi = 0$, $\psi = 60^\circ$, H -поляризация;
 в) $h = 4\pi$, $\varphi = 0$, $\psi = 30^\circ$, H -поляризация.

и т. д. Последнее объясняется тем, что направления распространения гармоник с ростом k изменяются, и они поочередно проходят мимо некоторого оптимального направления. Это оптимальное направление близко к направлению распространения луча, зеркально отраженного от лент решетки.

12) С появлением в щелях структуры новой распространяющейся волны свойства решетки типа «жалюзи» резко изменяются. Если ранее наблюдалась периодическая зависимость энергий гармоник от h , то теперь в некоторых областях E_{a_n} и E_{b_n} весьма слабо зависят от ширины лент решетки, а в других подвергаются резким изменениям на узком интервале изменения h . Интерференция волны ТЕМ и первой волноводной волны в щелях приводит при $h \sim 3,75$ к резонансному полному отражению энергии (рис. 7). Этим же объясняются и точки резонансного отражения энергии в диапазоне $0,5 < k < 1$ на рис. 6 в.

Наилучшим образом резонансные явления, связанные со взаимодействием в щелях двух и более волноводных волн, иллюстрирует рис. 6. За точками $k = l/2 \cos \psi$ ($l = 1, 2, \dots$) графики имеют очень изрезанный характер, на узких интервалах изменения k наблюдаются резкие переходы от полного прохождения к полному или значительному отражению. Наиболее «хаотично» изрезаны графики первой группы (рис. 6в); для второй и третьей групп (рис. 6б, 6а) графики имеют хотя и изрезанный, но более упорядоченный характер. Здесь интерференционные явления в щелях сказываются более слабо, так как внутри щелей проходит небольшая часть энергии падающего поля.

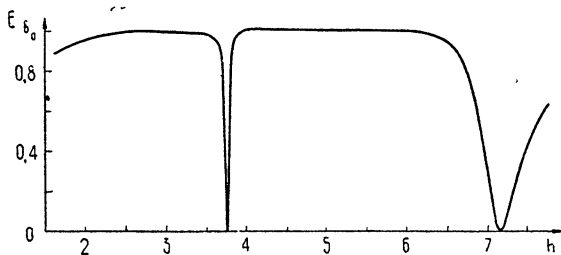


Рис. 7. Зависимость E_0 от h в области существования двух волн внутри щелей решетки ($k=0,7$, $\varphi = 0$, $\psi = 30^\circ$, H -поляризация).

Общим для всех трех групп решеток является исчезновение изрезанности графиков после появления новых распространяющихся гармоник над и под решеткой. Пространственные резонансы и здесь «сглаживают» кривые. (К рис. 6б сказанное не относится, так как здесь одновременно $\omega_1 = \Gamma_{-1} = 0$.) Таким образом, можно сделать вывод, что появление в щелях решетки новой распространяющейся волноводной волны вызывает резкие изменения хода дифракционных зависимостей, продолжающиеся до тех пор, пока новая волна не появится и вне решетки.

Как и следовало ожидать, для решеток первой группы с ростом k стремится к единице общая прошедшая энергия, а для решеток третьей группы — общая отраженная.

Авторы искренне признательны В. П. Шестоपालову за полезные замечания в процессе выполнения этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. J. Brady, M. D. Pearson, S. R. Peoples, J. Appl. Phys., **23**, № 9, 964 (1952).
2. П. Л. Капица, сб. Электроника больших мощностей, изд. АН СССР, М., вып. 4, 7 (1965).
3. Е. В. Авдеев, Г. В. Воскресенский, Радиотехника и электроника, **14**, № 5, 839 (1969).
4. С. А. Масалов, В. Г. Сологуб, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **9**, № 4, 693 (1970).
5. А. А. Кириленко Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 8, 1268 (1968).
6. А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Межвед. сб. Радиотехника, изд. ХГУ, Харьков, вып. 13, 15 (1970).
7. А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **9**, № 4, 934 (1969).
8. E. A. Whitehead, Proc. IEE, **98**, № 3, 133 (1951).
9. А. А. Кириленко, Кандидатская диссертация, ХГУ, 1970.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
26 апреля 1971 г.

DIFFRACTION OF H -POLARIZED WAVES ON A TAPE ARRAY OF THE „JALOUSIE“ TYPE

A. A. Kirilenko, S. A. Masalov

The diffraction of plane waves on a „jalousie“ — type array has been considered by means of the half-rotation method. A detailed analytical and numerical investigation of the scattered field properties has been made. Special consideration is given to the resonance properties of the array.

УДК 538.574.6

КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ВЫПУКЛОМ ТЕЛЕ. III

Е. А. Леонтьев

На основе ранее найденного интегрального представления для коротковолновой асимптотики решения задачи дифракции на гладком выпуклом цилиндре получены асимптотические оценки для дифракционного поля в освещенной области и в области тени.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] была получена коротковолновая асимптотика решения задачи дифракции на произвольном выпуклом цилиндре. Она выражается в виде довольно сложного интеграла, оценка которого и является целью настоящей работы. Мы будем рассматривать асимптотическое решение, соответствующее граничным условиям Дирихле ($u(x, k)|_{S_0} = 0$), поскольку оценка интеграла в случае условий Неймана совершенно аналогична.

Решение интересующей нас задачи имеет вид [1]

$$u(x, k) = k \int_{p_1}^{p_2} dp e^{ik\theta(x, p)} \left[J(x, p; k) - H^{(1)}(x, p; k) \frac{v(k^{2/3} p)}{\omega_1(k^{2/3} p)} \right], \quad (1.1)$$

где

$$J(x, p; k) = \frac{k^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} [v(-k^{2/3} \rho(x, p))g(x, p; k) + ik^{-1/3} v'(-k^{2/3} \rho(x, p))h(x, p; k)]; \quad (1.2)$$

$$H^{(1)}(x, p; k) = \frac{k^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} [\omega_1(-k^{2/3} \rho(x, p))g(x, p; k) + ik^{-1/3} \omega_1' \times \\ \times (-k^{2/3} \rho(x, p))h(x, p; k)]. \quad (1.3)$$

Аргументы подынтегральных функций $\theta(x, p)$ и $\rho(x, p)$ найдены в работе [2] в виде разложения по степеням параметра интегрирования p . Для нулевых членов разложения по обратным степеням k амплитудных функций $g_0(x, p)$ и $h_0(x, p)$ в работе [1] получены явные выражения. Соответствующая сводка формул приведена в Приложении.

Асимптотическое поведение частных решений, стоящих под знаком интеграла (1.1), определяется их лучевой структурой. При фиксированном p огибающей лучей является каустическая кривая S_p . Формулы (1.20) — (1.22) работы [2] позволяют найти в явном виде кривые семейства S_p , лежащие в окрестности границы тела S_0 . Значения параметра p , при которых справедливы указанные формулы, определяются из условия, чтобы поправочный член в (1.22) был много меньше главного члена. Отсюда следует

$$|p| \ll p_{\max} = 60 \left[\frac{R_0(s_0)}{2} \right]^{2/3} \frac{1}{|1 - (14/9)R_0'^2(s_0) + (7/3)R_0''(s_0)R_0(s_0)|}. \quad (1.4)$$

Для этих же значений p справедливы формулы, определяющие аргументы $\theta(x, p)$ и $\rho(x, p)$ и амплитуды $g_0(x, p)$ и $h_0(x, p)$. Верхний и нижний пределы в (1.1) должны удовлетворять условию $|p_{1,2}| \ll p_{\max}$.

Чтобы не учитывать вклады концевых точек интегрирования в (1.1), мы будем предполагать, что функции $g_0(x, \rho)$ и $h_0(x, \rho)$ умножены на нейтрализующий фактор, т. е. функцию класса C_∞ , равную единице в интервале $\rho_1 < \rho < \rho_2$ и образующуюся в нуль вместе со всеми своими производными вне этого интервала.

Из указанного ограничения на область интегрирования по ρ следует ограничение на область применимости интеграла (1.1) для вычисления дифракционного поля. В частности, разложение для падающего поля, получаемое из интеграла (первый член в (1.1)), будет совпадать с заданным разложением в области, лежащей между лучами 1 и 2 на рис. 1. Рассеянное поле $u_s(x, k)$ будет правильно определяться из (1.1) в области, которая лежит справа от луча 3. Лучи 1 и 3 касаются кривой S_{ρ_1} , а луч 2 — кривой S_{ρ_2} .

Для дальнейшего удобно перейти к новой переменной интегрирования $\nu = k^{2/3} \rho$. Вводя, кроме того, обозначения

$$k^{2/3} \rho(x, \nu) = P(x, \nu; k); \quad (1.5)$$

$$k \theta(x, \rho) = Q(x, \nu; k); \quad (1.6)$$

$$J(x, \nu; k) = \frac{k^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} V(x, \nu; k); \quad (1.7)$$

$$H^{(1)}(x, \rho; k) = \frac{k^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} \times W^{(1)}(x, \nu; k), \quad (1.8)$$

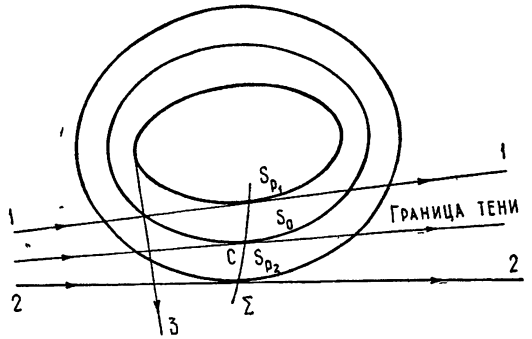


Рис. 1.

перепишем (1.1) в виде

$$u(x, k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\nu_1}^{\nu_2} e^{iQ(x, \nu; k)} \left[V(x, \nu; k) - W^{(1)}(x, \nu; k) \frac{v(\nu)}{\omega_1(\nu)} \right] d\nu, \quad (1.9)$$

где $\nu_{1,2} = k^{2/3} \rho_{1,2}$. Пределы интегрирования по ν в (1.9) при больших k ($kR_0(s) \gg 1$) достаточно велики, и в тех случаях, когда это можно будет делать, мы будем формально полагать их бесконечными.

Если учесть тождество $\omega_{1,2}(t) = \omega(t) \pm i\nu(t)$, то формулу (1.9) можно представить в виде

$$u(x, k) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_{\nu_1}^{\nu_2} e^{iQ(x, \nu; k)} \left[W^{(2)}(x, \nu; k) - W^{(1)}(x, \nu; k) \frac{\omega_2(\nu)}{\omega_1(\nu)} \right] d\nu, \quad (1.10)$$

где функция $W^{(2)}(x, \nu; k)$ получается из (1.3) и (1.8) заменой ω_1 на ω_2 . При действительных ν фактор $\omega_2(\nu)/\omega_1(\nu)$ в (1.10) представляет собой фазовый множитель. Так как $\omega_1(\nu) = \omega_2^*(\nu) = |\omega_1(\nu)| e^{i\varphi(\nu)}$, мы можем написать

$$\frac{\omega_2(\nu)}{\omega_1(\nu)} = e^{-2i\varphi(\nu)}. \quad (1.11)$$

Из асимптотического поведения функций Эйри при $-\nu \gg 1$ следует

$$\varphi(\nu) \approx \frac{2}{3} (-\nu)^{3/2} + \frac{\pi}{4}. \quad (1.12)$$

При $\nu \gg 1$ фаза $\varphi(\nu)$ стремится к нулю, как

$$\varphi(\nu) \sim \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{4}{3} \nu^{3/2}\right). \quad (1.13)$$

При умеренных и малых значениях $|v|$ φ может быть найдена из таблиц функций Эйри (см. [2]). На интервале $-\infty < t \leq -1$ можно определить функции $A_{1,2}(t)$ посредством

$$w_{1,2}(t) = A_{1,2}(t) \exp \left\{ \pm i \left[\frac{2}{3} (-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] \right\}, \quad (1.14)$$

при этом $A_{1,2}(t)$ будут медленно меняющимися функциями на всем интервале $-\infty < t \leq -1$ в том смысле, что $A_{1,2}(t)$ и все их производные будут ограничены. Представление (1.14) необходимо нам для последовательного проведения оценок интегралов в следующем разделе.

Из (1.3) и (1.8) с учетом (1.14) следует, что при $1 \leq P(x, v; k) < \infty$ функции $W^{(1,2)}(x, v; k)$ можно представить в виде

$$W^{(1,2)}(x, v; k) = B_{1,2}(x, v; k) \exp \left\{ \pm i \left[\frac{2}{3} P^{3/2}(x, v; k) + \frac{\pi}{4} \right] \right\}. \quad (1.15)$$

Тогда $B_{1,2}(x, v; k)$ будут медленно меняющимися функциями v , в указанном выше смысле, на всем интервале, определяемом из неравенства $P(x, v; k) \geq 1$. При $P(x, v; k) \gg 1$ из асимптотических формул для функций Эйри и их производных следует

$$B_{1,2}(x, v; k) \sim \frac{g_0 \left(x, \frac{v}{k^{2/3}} \right) \pm \sqrt{\rho \left(x, \frac{v}{k^{2/3}} \right) h_0 \left(x, \frac{v}{k^{2/3}} \right)}}{k^{1/6} \rho^{1/4} \left(x, \frac{v}{k^{2/3}} \right)} \equiv k^{-1/6} z_{\pm} \left(x, \frac{v}{k^{2/3}} \right). \quad (1.16)$$

2. ОСВЕЩЕННАЯ ОБЛАСТЬ

В этом разделе мы будем исследовать поведение поля в освещенной области, исходя из (1.9) и (1.10). Фактически полученные ниже формулы имеют более широкую область применимости, так как они позволяют рассмотреть область, примыкающую к границе свет—тьнь, со стороны тени.

Когда точка x лежит в освещенной области, интегралы (1.9) и (1.10) имеют точки стационарной фазы, и основной вклад дает окрестность этих точек. Чтобы выделить основной вклад, разобьем интеграл на части. С этой целью введем в рассмотрение функцию класса C_{∞} , такую, что

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 1) \\ 1 & (t \geq 1 + \Delta, \Delta > 0) \end{cases}. \quad (2.1)$$

Представим решение $u(x, k)$ в виде

$$u(x, k) = u_1(x, k) + u_2(x, k) + u_3(x, k), \quad (2.2)$$

где

$$u_1(x, k) = -\frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_{v_1}^{v_2} e^{iQ(x, v; k)} W^{(1)}(x, v; k) \frac{w_2(v)}{w_1(v)} \Psi(P(x, v; k)) dv; \quad (2.3)$$

$$u_2(x, k) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_{v_1}^{v_2} e^{iQ(x, v; k)} W^{(2)}(x, v; k) \Psi(P(x, v; k)) dv; \quad (2.4)$$

$$u_3(x, k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{v_1}^{v_2} e^{iQ(x, v; k)} \left[V(x, v; k) - W^{(1)}(x, v; k) \frac{v(v)}{w_1(v)} \right] [1 - \Psi(P(x, v; k))] dv. \quad (2.5)$$

Принимая во внимание (1.11) и (1.15), мы можем представить (2.3) и (2.4) следующим образом:

$$u_1(x, k) = \frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi}} \int_{\nu_1}^{\nu_2} B_1(x, \nu; k) \exp \left\{ i \left[Q(x, \nu; k) + \frac{2}{3} P^{3/2}(x, \nu; k) - 2\varphi(\nu) \right] \right\} \Psi(P(x, \nu; k)) d\nu; \quad (2.6)$$

$$u_2(x, k) = \frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{\pi}} \int_{\nu_1}^{\nu_2} B_2(x, \nu; k) \exp \left\{ i \left[Q(x, \nu; k) - \frac{2}{3} P^{3/2}(x, \nu; k) \right] \right\} \Psi(P(x, \nu; k)) d\nu. \quad (2.7)$$

Интегралы (2.6), (2.7) имеют точки стационарной фазы, которые находятся из условия

$$Q_\nu(x, \nu; k) + \sqrt{P(x, \nu; k)} P_\nu(x, \nu; k) - 2\varphi'(\nu) = 0 \quad (2.8)$$

для интеграла (2.6) и из условия

$$Q_\nu(x, \nu; k) - \sqrt{P(x, \nu; k)} P_\nu(x, \nu; k) = 0 \quad (2.9)$$

для интеграла (2.7).

Из (1.5), (1.6) и формул (4.1), (4.2) работы [1] имеем

$$Q_\nu(x, \nu; k) \pm \sqrt{P(x, \nu; k)} P_\nu(x, \nu; k) = k^{1/3} \Phi_\pm^\pm(x, \nu/k^{2/3}), \quad (2.10)$$

где

$$\Phi_\pm^\pm(x, \rho) = -\frac{1}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma_\pm} \rho_p(\sigma, \rho) \left[\frac{2}{R(\sigma, \rho)} \right]^{2/3} d\sigma, \quad (2.11)$$

σ_\pm — длина дуги кривой S_p в точках касания лучами, проходящими через точку x , σ_0 — длина дуги кривой S_p в точке касания ее лучом падающего поля. $\Phi_\pm^\pm(x, 0)$ есть постоянная величина на лучах, касательных к кривой S_p . Отсюда можно заключить, что точки стационарной фазы, определяемые из (2.8), (2.9), сохраняют постоянные значения на лучах, проходящих через данную точку x касательно к кривым S_p , соответствующим стационарным (для этой точки x) значениям $\rho = \nu/k^{2/3}$. Так как подынтегральное выражение в (2.11) в нуль не обращается, поскольку кривые S_p вложены друг в друга, из (2.11) следует, что (2.9) выполняется при $\nu = \nu_+$ для которого $\sigma_- = \sigma_0$. Этому значению ν соответствует кривая S_{ρ_-} , которой касается падающий луч, проходящий через данную точку x . Отсюда следует, что (2.9) имеет решение, если точка x лежит слева от кривой Σ на рис. 1. Эта кривая является геометрическим местом точек касания кривых S_p лучами падающего поля. При действительных ν справа от Σ (2.9) не имеет решения.

Рассмотрим теперь уравнение (2.8). Из (1.11) при учете выражения для вронскиана функций Эйри w_1 и w_2 следует

$$\varphi'(\nu) = -\frac{1}{u^2(\nu) + v^2(\nu)}. \quad (2.12)$$

График этой функции показан на рис. 2. Если точка x лежит справа от Σ , то (2.8) имеет два решения \tilde{v} и \bar{v} , и слева от Σ — только одно решение \tilde{v} . Если точка x лежит достаточно далеко от границы свет—тьень (справа от Σ), так что

$$-M(x, k) \equiv -\frac{k^{1/3}}{2} \int_{s_0}^{s_+} \left(\frac{2}{R_0(s)} \right)^{2/3} ds \gg 1, \quad (2.13)$$

то \bar{v} положительно и соответствует падающему полю, а \tilde{v} отрицательно и соответствует отраженному полю. Величина $M(x, k)$ является мерой удаления точки наблюдения от границы свет—тьень. В освещенной области $M(x, k)$ отрицательно, в области тени — положительно. По мере приближения точки x к границе свет—тьень \tilde{v} и \bar{v} сближаются и, наконец, в малой окрестности этой границы совпадают. В этом случае при некотором положительном v имеет место точка стационарной фазы второго порядка. При переходе через границу свет—тьень точки \tilde{v} и \bar{v} уходят в комплексную плоскость.

Мы будем рассматривать область справа от кривой Σ^* . Эта область физически наиболее интересна, так как в ней находится граница свет—тьень. Оценим интегралы u_1, u_2, u_3 . Рассмотрим сначала u_2 . Повторное интегрирование по частям в (2.7) показывает, что u_2 экспоненциально мал, если производная $Q_v(x, v; k) - \sqrt{P(x, v; k)} P_v(x, v; k)$ велика для всех v , допустимых в (2.7). При этом, как мы договорились выше, вклад конечных точек мы не учитываем. Если точка x лежит справа от Σ , то производная $Q_v - \sqrt{P} P_v$ в нуль не обращается и ее минимальное значение достигается при максимально допустимом значении $v = v_3$, определяемом из уравнения $P(x, v_3; k) = 1$. Таким образом, мы можем указать малую окрестность кривой Σ , такую, что для всех точек x , лежащих вне ее (справа от Σ), будет выполнено

$$\min \{ Q_v(x, v; k) - \sqrt{P(x, v; k)} P_v(x, v; k) \} = k^{1/3} \Phi_p^-(x, \frac{v_3}{k^{2/3}}) \gg 1. \quad (2.14)$$

Повторное интегрирование по частям в (2.7) показывает, что u_2 меньше любой обратной степени величины $k^{1/3} \Phi_p^-(x, \frac{v_3}{k^{2/3}})$. Это означает, что в освещенной области интегралом u_2 можно пренебречь.

Рассмотрим теперь интеграл u_3 . Ввиду свойств функции Ψ величина $P(x, v; k)$ в интеграле (2.5) может принимать значения $-\infty < P(x, v; k) \leq 1 + \Delta$, а интегрирование по v ограничено областью $v_4 \leq v < \infty$, где $P(x, v_4; k) = 1 + \Delta$. В этой области изменения величин $P(x, v; k)$ и v отношение $W^{(1)}(x, v; k)/\omega_1(v)$ ограничено. Заметим также, что функции $V(x, v; k)$ и $v(v)$ экспоненциально малы при $-P(x, v; k) \gg 1$ и $v \gg 1$. Повторно интегрируя по частям в (2.5), легко видеть, что u_3 экспоненциально мал, если производная $Q_v(x, v; k)$ велика при малых значениях $|P(x, v; k)|$ и соответствующих им значениях v . Достаточно поэтому оценить производную $Q_v(x, v; k)$ при $v = v_4$. Из (2.10) и (2.11) имеем

$$Q_v(x, v; k) = -\frac{k^{1/3}}{2} \left[\int_{\sigma_0}^{\sigma_+} \rho_p(\sigma, p) \left(\frac{2}{R(\sigma, p)} \right)^{2/3} d\sigma + \int_{\sigma_0}^{\sigma_-} \rho_p(\sigma, p) \left(\frac{2}{R(\sigma, p)} \right)^{2/3} d\sigma \right], \quad (2.15)$$

* Выделение кривой Σ не связано с какими-либо особенностями решения в окрестности этой кривой, а обусловлено способом оценки исходного интеграла.

откуда следует, что Q , при малых $P(x, \nu; k)$ обращается в нуль только на кривой Σ . Таким образом, можно указать такую окрестность кривой Σ , что для всех точек x , лежащих вне ее (по обе стороны от Σ), $|Q(x, \nu; k)| \gg 1$, и интегралом u_3 можно пренебречь.

Основной вклад в дифракционное поле в освещенной области справа от Σ дает интеграл u_1 . Чтобы получить равномерное асимптотическое разложение u_1 , воспользуемся методом, предложенным в работе [4]. В интеграле (2.6) перейдем к новой переменной интегрирования t с помощью регулярного преобразования

$$f(x, \nu; k) \equiv Q(x, \nu; k) + \frac{2}{3} P^{3/2}(x, \nu; k) - 2\varphi(\nu) = k \left[\alpha(x, k) - \beta(x, k)t + \frac{t^3}{3} \right]. \quad (2.16)$$

Потребуем, чтобы $\frac{d\nu}{dt}$ не обращалась в нуль или бесконечность. Дифференцируя (2.16) по t , имеем

$$[Q(x, \nu; k) + \sqrt{P(x, \nu; k)} P_\nu(x, \nu; k) - 2\varphi'(\nu)] \frac{d\nu}{dt} = k [t^2 - \beta(x, k)]. \quad (2.17)$$

В точках $\tilde{\nu}$ и $\bar{\nu}$ квадратная скобка в левой части (2.17) обращается в нуль, следовательно, точкам $\tilde{\nu}$ и $\bar{\nu}$ мы должны сопоставить значения $t = \pm \sqrt{\beta(x, k)}$. Пусть $\tilde{\nu}$ соответствует $t_1 = -\sqrt{\beta(x, k)}$, а $\bar{\nu}$ соответствует $t_2 = \sqrt{\beta(x, k)}$. Полагая в (2.16) $t = t_1$ и $t = t_2$, мы можем найти $\alpha(x, k)$ и $\beta(x, k)$:

$$k\alpha(x, k) = \frac{1}{2} [f(x, \tilde{\nu}; k) + f(x, \bar{\nu}; k)]; \quad (2.18)$$

$$k^{2/3}\beta(x, k) = \left\{ \frac{3}{4} [f(x, \tilde{\nu}; k) - f(x, \bar{\nu}; k)] \right\}^{2/3}. \quad (2.19)$$

Остальные величины в интеграле (2.6) выразим через t . Для этого положим

$$B_1(x, \nu; k) \Psi(P(x, \nu; k)) \frac{d\nu}{dt} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(x, k) [t^2 - \beta(x, k)]^m + t \sum_{m=0}^{\infty} D_m(x, k) [t^2 - \beta(x, k)]^m. \quad (2.20)$$

Коэффициенты C_m и D_m этого разложения можно найти, повторно дифференцируя (2.20) по t и полагая $t = t_1$ и $t = t_2$. Мы получаем при этом систему рекуррентных уравнений, которая шаг за шагом может быть разрешена. В частности, для $C_0(x, k)$ и $D_0(x, k)$ получаем

$$B_1(x, \tilde{\nu}; k) \Psi(P(x, \tilde{\nu}; k)) \left(\frac{d\nu}{dt} \right)_{t=t_1} = C_0(x, k) - \sqrt{\beta(x, k)} D_0(x, k); \quad (2.21)$$

$$B_1(x, \bar{\nu}; k) \Psi(P(x, \bar{\nu}; k)) \left(\frac{d\nu}{dt} \right)_{t=t_2} = C_0(x, k) + \sqrt{\beta(x, k)} D_0(x, k). \quad (2.22)$$

Оценивая интегралы u_2 и u_3 , мы исключили из рассмотрения окрестность кривой Σ . Можно показать, что для всех точек x вне этой окрестности величины $P(x, \tilde{\nu}; k)$ и $P(x, \bar{\nu}; k)$ велики. Учитывая это, мы мо-

жем в (2.21) и (2.22) заменить $\Psi(P)$ единицей, а функцию B_1 — ее асимптотическим выражением (1.16). Дифференцируя (2.17) по t и полагая $t = t_1$ и $t = t_2$, получим

$$\left(\frac{d\nu}{dt}\right)_{t=t_1} = k^{1/2} \beta^{1/4}(x, k) [\varphi''(\tilde{\nu}) - T(x, \tilde{\nu}; k)]^{-1/2}; \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{d\nu}{dt}\right)_{t=t_2} = k^{1/2} \beta^{1/4}(x, k) [T(x, \bar{\nu}; k) - \varphi''(\bar{\nu})]^{-1/2}; \quad (2.24)$$

где

$$T(x, \nu; k) = \frac{1}{2} \left[Q_{\nu\nu}(x, \nu; k) + \frac{P_\nu^2(x, \nu; k)}{2\sqrt{P(x, \nu; k)}} + \sqrt{P(x, \nu; k)} P_{\nu\nu}(x, \nu; k) \right] = \frac{k^{-1/3}}{2} \Phi_{pp}^+ \left(x, \frac{\nu}{k^{2/3}} \right). \quad (2.25)$$

Подставляя (2.23), (2.24) и (1.16) в (2.21) и (2.22), найдем

$$C_0(x, k) = \frac{k^{1/3} \beta^{1/4}(x, k)}{2} \left\{ \frac{z_+(x, \bar{\nu}/k^{2/3})}{\sqrt{T(x, \bar{\nu}; k) - \varphi''(\bar{\nu})}} + \frac{z_+(x, \tilde{\nu}/k^{2/3})}{\sqrt{\varphi''(\tilde{\nu}) - T(x, \tilde{\nu}; k)}} \right\}; \quad (2.26)$$

$$D_0(x, k) = \frac{k^{1/3}}{2\beta^{1/4}(x, k)} \left\{ \frac{z_+(x, \bar{\nu}/k^{2/3})}{\sqrt{T(x, \bar{\nu}; k) - \varphi''(\bar{\nu})}} - \frac{z_+(x, \tilde{\nu}/k^{2/3})}{\sqrt{\varphi''(\tilde{\nu}) - T(x, \tilde{\nu}; k)}} \right\}. \quad (2.27)$$

Выражения для последующих коэффициентов разложения C_m и D_m ввиду их громоздкости мы не приводим.

Выбирая ту ветвь преобразования (2.16), которая соответствует изменению t от $-\infty$ до $+\infty$, и подставляя (2.16) и (2.20) в (2.6), получим

$$u_1(x, k) = \exp \{ i[k\alpha(x, k) - \pi/4] \} \{ k^{-1/3} v(-k^{2/3} \beta(x, k)) \tilde{g}(x, k) - ik^{-2/3} v'(-k^{2/3} \beta(x, k)) \tilde{h}(x, k) \}; \quad (2.28)$$

$$\tilde{g}(x, k) = C_0(x, k) + \frac{i}{k} [D_1(x, k) + 2\beta(x, k)D_2(x, k)] - \frac{4}{k^2} C_3(x, k) + \dots; \quad (2.29)$$

$$\tilde{h}(x, k) = D_0(x, k) + \frac{2i}{k} C_2(x, k) - \frac{10}{k^2} D_3(x, k) + \dots \quad (2.30)$$

Формула (2.28) есть искомое равномерное асимптотическое разложение интеграла u_1 . По своему внешнему виду выражение (2.28) весьма похоже на каустические разложения, полученные в работах [5] и [6], результаты которых были использованы нами в [1]. Однако есть и весьма существенное отличие. Оно состоит в том, что аргумент функций Эйри помимо множителя $k^{2/3}$ имеет зависимость от k через $\beta(x, k)$, а показатель экспоненты, кроме множителя k , содержит зависимость от k через $\alpha(x, k)$. Из (2.16), (2.18) и (2.19) следует

$$\beta(x, k) = \left\{ \frac{3}{4} \left[\Phi^+ \left(x, \frac{\tilde{\nu}(x, k)}{k^{2/3}} \right) - \Phi^+ \left(x, \frac{\bar{\nu}(x, k)}{k^{2/3}} \right) - \frac{2}{k} \varphi(\tilde{\nu}(x, k)) + \frac{2}{k} \varphi(\bar{\nu}(x, k)) \right] \right\}^{2/3}; \quad (2.31)$$

$$\alpha(x, k) = \frac{1}{2} \left[\Phi^+ \left(x, \frac{\tilde{v}(x, k)}{k^{2/3}} \right) + \Phi^+ \left(x, \frac{\bar{v}(x, k)}{k^{2/3}} \right) - \frac{2}{k} \varphi(\tilde{v}(x, k)) - \right. \\ \left. - \frac{2}{k} \varphi(\bar{v}(x, k)) \right]. \quad (2.32)$$

Коэффициенты разложений (2.29) и (2.30) также зависят от k . И только в сильно освещенной области ($-M(x, k) \gg 1$), когда $-\tilde{v}$ и \bar{v} велики и пропорциональны $k^{2/3}$, а $\varphi(\tilde{v}) \sim \frac{2}{3}(-\tilde{v})^{3/2}$ и $\varphi(\bar{v})$ экспоненциально мала, аргументы α и β становятся не зависящими от k . Кроме того, можно показать, что при этом зависимость от k коэффициентов C_m и D_m определяется множителем $k^{1/2}$, одинаковым для всех m . Таким образом, в области применимости геометрической оптики зависимость решения от k значительно упрощается.

Функции $\psi^\pm(x, k) = \alpha(x, k) \pm \frac{2}{3} \beta^{3/2}(x, k)$ в силу (2.8) удовлетворяют уравнению эйконала. В области применимости геометрической оптики эйконалу $\psi^+(x, k)$ соответствуют лучи отраженного поля, эйконалу $\psi^-(x, k)$ — лучи падающего поля.

Вблизи границы свет—тьень ($|M(x, k)| < 1$), когда точки \tilde{v} и \bar{v} совпадают, обращается в нуль аргумент $\beta(x, k)$, а также $T - \varphi''$. При этом можно показать, что все коэффициенты C_m и D_m остаются конечными величинами. При дальнейшем приближении к границе свет—тьень \tilde{v} и \bar{v} уходят в комплексную плоскость (при этом $\tilde{v} = \bar{v}^*$), а аргумент $\beta(x, k)$ становится отрицательным. На границе свет—тьень $\beta(x, k)$ принимает малое отрицательное значение, $-k^{2/3} \beta(x, k) < 1$. При переходе через границу свет—тьень $-k^{2/3} \beta(x, k)$ монотонно возрастает по мере углубления в область тени, и при $-k^{2/3} \beta(x, k) \gg 1$ интеграл u_1 становится экспоненциально малым, т. е. сравнимым с отброшенными членами u_2 и u_3 . Поэтому формула (2.28) не справедлива в области глубокой тени, а применима в освещенной области вне малой окрестности справа от кривой Σ , включая границу свет—тьень, и далее, в небольшой части области тени, определяемой условием $M(x, k) < 1$, пока аргумент функций Эйри не принимает больших положительных значений.

Геометрическая оптика. Выражение (2.28) упрощается при $-M(x, k) \gg 1$. В этом случае $-\tilde{v} \gg 1$ и $\bar{v} \gg 1$, а аргумент $k^{2/3} \beta(x, k) \gg 1$. Мы можем заменить функции $\varphi(\tilde{v})$ и $\varphi''(\tilde{v})$ в (2.31), (2.32) и (2.26), (2.27) их асимптотическими выражениями (1.12), положить

$$\varphi''(\tilde{v}) \sim \frac{1}{2\sqrt{-\tilde{v}}} \quad (2.33)$$

и пренебречь $\varphi(\bar{v})$ и $\varphi''(\bar{v})$ ввиду их экспоненциальной малости.

Подставляя в (2.28) вместо v и v' их асимптотические выражения и принимая во внимание только главные члены C_0 и D_0 , будем иметь

$$u(x, k) \sim - \quad (2.34)$$

$$\frac{z_+(x, \tilde{p}) \exp \left\{ ik \left[\Phi^+(x, \tilde{p}) - \frac{4}{3} (-\tilde{p})^{3/2} \right] \right\}}{\sqrt{2 \left(1/\sqrt{-\tilde{p}} - \Phi_{pp}^+(x, \tilde{p}) \right)}} + \frac{z_+(x, \bar{p}) \exp [ik \Phi^+(x, \bar{p})]}{\sqrt{2 \Phi_{pp}^+(x, \bar{p})}},$$

где $\tilde{p} = k^{-2/3} \tilde{v}$ и $\bar{p} = k^{-2/3} \bar{v}$. от k не зависят. При выводе (2.34) мы учли формулы (2.25) — (2.32).

Выражение (2.34) дает главные члены геометрооптического разложения для падающего и отраженного полей. Первый член в (2.34) соответствует отраженному полю, а второй — падающему (ср. с разд. 2 работы [1]). При конкретных вычислениях по формуле (2.34) важно помнить об ограничениях на область применимости, указанных в разд. 1. Конечно, было бы неразумным находить поле во всей сильно освещенной области согласно (2.34), пользуясь при этом приближенными формулами. Приложение. Важно, что область применимости выражения (2.28) при подстановке в него приближенно найденных величин пересекается при больших k с областью применимости геометрической оптики, где (2.28) совпадает с геометрооптическим разложением.

Окрестность границы свет — тень. Рассмотрим выражение (2.28), когда выполняется условие $|M(x, k)| \ll 1$, т. е. точка x лежит в малой окрестности границы свет — тень. В этой области можно найти такое положительное v_0 , при котором выполняется условие

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x, v_0; k) = k^{-1/3} \Phi_{pp}^+(x, \frac{v_0}{k^{2/3}}) - 2 \varphi''(v_0) = 0 \quad (2.35)$$

вне зависимости от того, выполняется при этом условие (2.8) или нет. Разложим $f(x, v; k)$ в ряд в точке $v = v_0$ с точностью до кубических членов:

$$f(x, v; k) = f(x, v_0; k) + \frac{\partial f}{\partial v}(x, v_0; k)(v - v_0) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial v^3}(x, v_0; k)(v - v_0)^3. \quad (2.36)$$

Подставляя (2.36) в (2.8) и находя \tilde{v} и \bar{v} , из (2.18) и (2.19) получим выражения для $\alpha(x, k)$ и $\beta(x, k)$, а из (2.26) и (2.27) найдем амплитуды C_0 и D_0 . В результате имеем

$$u(x, k) = \exp \left[if(x, v_0; k) - i \frac{\pi}{4} \right] \left\{ k^{-1/3} v \left(\frac{\partial f}{\partial v}(x, v_0; k) \sqrt[3]{2 \left| \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} f(x, v_0; k) \right|} \right) \times \right. \\ \left. \times C_0(x, k) - ik^{-2/3} v' \left(\frac{\partial f}{\partial v}(x, v_0; k) \sqrt[3]{2 \left| \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} f(x, v_0; k) \right|} \right) D_0(x, k) \right\}, \quad (2.37)$$

где

$$C_0(x, k) = k^{1/6} \left(2 \left| \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} f(x, v_0; k) \right| \right)^{1/3} z_+ \left(x, \frac{v_0}{k^{2/3}} \right); \quad (2.38)$$

$$D_0(x, k) = - k^{1/2} \left(2 \left| \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} f(x, v_0; k) \right| \right)^{2/3} \left[\frac{1}{4} z_+ \left(x, \frac{v_0}{k^{2/3}} \right) \frac{\partial^4 f}{\partial v^4} \left/ \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} (x, v_0; k) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{k^{2/3}} \frac{\partial z_+}{\partial p} \left(x, \frac{v_0}{k^{2/3}} \right) \right]. \quad (2.39)$$

Формула (2.37) применима, пока модуль аргумента функций Эйри порядка единицы или меньше.

3. ОБЛАСТЬ ТЕНИ

В этом разделе мы будем рассматривать поведение поля в области тени при $M(x, k) > 1$. Выражения для поля, полученные в разд. 2, не применимы в этой области, так как интеграл u_1 становится экспоненциально малым и соизмеримым с отброшенными членами u_2 и u_3 .

Рассмотрим выражение для поля в виде (1.10). Подынтегральная функция в (1.10) имеет простые полюса в комплексной плоскости v , соответствующие нулям функции $w_1(v)$. Эти нули расположены в верхней полуплоскости

$$v_n = \exp\left(i \frac{\pi}{3}\right) q_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.1)$$

где $q_n > 0$ — нули функции $v(-q)$. Смещая контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, мы можем заменить интеграл (1.10) рядом вычетов в полюсах v_n^* . В результате получаем

$$u(x, k) = \sum_{n=1}^N \frac{2\sqrt{\pi}}{i [w_1'(v_n)]^2} W_1(x, v_n; k) \exp[iQ(x, v_n; k)]. \quad (3.2)$$

Мы должны, очевидно, потребовать, чтобы $|v_N| \ll k^{2/3} \rho_{\max}$ (см. (1.4)).

Формула (3.2) описывает «ползущие» волны, которые затухают экспоненциально по мере углубления в область тени. Затуханию отвечает экспонента в (3.2), показатель которой имеет отрицательную действительную часть ($\text{Re } i v_n < 0$) и пропорционален $k^{1/3}$. Из (1.6) имеем

$$\text{Re}\{\exp[iQ(x, v_n; k)]\} = \exp\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2} \left[k^{1/3} \theta_p(x, 0) q_n + \frac{q_n^2}{2k^{1/3}} \theta_{pp}(x, 0) + \dots \right]\right\}. \quad (3.3)$$

В области тени $\theta_p(x, 0)$ — положительная величина. Формула (3.2) применима при $M(x, k) > 1$ на любых расстояниях от тела и в так называемом поверхностном пограничном слое ($k^{2/3} \rho(x, 0) \leq 1$) более не упрощается.

Вне поверхностного пограничного слоя, при $k^{2/3} \rho(x, 0) \gg 1$, функции Эйри можно заменить их асимптотическими выражениями. В этом случае (3.2) принимает вид

$$u(x, k) = \sum_{n=1}^N \frac{2\sqrt{\pi}}{k^{1/6} [w_1'(v_n)]^2} z_+ \left(x, \frac{v_n}{k^{2/3}}\right) \exp\left[ik \Phi^+ \left(x, \frac{v_n}{k^{2/3}}\right) - i \frac{\pi}{4}\right]. \quad (3.4)$$

Это есть волны геометрической теории дифракции Келлера, которые также затухают по мере углубления в область тени. При $M(x, k) \gg 1$, т. е. в глубокой тени в формулах (3.2) и (3.4) достаточно учитывать только один член ряда. Результаты данного раздела согласуются со строгими результатами, полученными в работе [8] (см. также работу [9], результаты которой позволяют построить равномерное асимптотическое разложение для поля в области тени, когда источник находится на самом цилиндре).

4. ОКРЕСТНОСТЬ ТОЧКИ КАСАТЕЛЬНОГО ПАДЕНИЯ

Областью, которая требует самостоятельного рассмотрения, является окрестность точки касательного падения (точка С на рис. 1). Эта об-

* По поводу доказательства законности такой процедуры см. разд. 5 работы [7].

ласть есть пересечение областей $|M(x, k)| \leq 1$ и $k^{2/3} \rho(x, 0) \leq 1$. В ней не применимы оценки разд. 2, и поведение поля можно оценить непосредственным вычислением интегралов (1.9) либо (1.10). Основной вклад в интегралы (1.9), (1.10) в этой области вносят малые значения ν . В формулах (1.5) и (1.6) мы можем отбросить члены, пропорциональные ν^2 , в амплитуде $g_0(x, \nu/k^{2/3})$ — члены, пропорциональные ν , а также пренебречь $h_0(x, \nu/k^{2/3})$. В результате получаем

$$u(x, k) = \frac{i}{2\sqrt{\pi}} g_0(x, 0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[iQ(x, \nu; k)] \left[w_2(-P(x, \nu; k)) - w_1(-P(x, \nu; k)) \frac{w_2(\nu)}{w_1(\nu)} \right] d\nu, \quad (4.1)$$

где

$$P(x, \nu; k) = k^{2/3} \rho(x, 0) + \nu \rho_p(x, 0); \quad (4.2)$$

$$Q(x, \nu; k) = k \theta(x, 0) + k^{1/3} \theta_p(x, 0) \nu. \quad (4.3)$$

Функции в правой части (4.2) и (4.3) должны быть взяты из (П.13) и (П.14). Функция $g_0(x, 0)$ определяется (П.15). Выражением (4.1) необходимо пользоваться при оценке поля в окрестности точки касательного падения, хотя на самом деле оно имеет более широкую область применимости. Интеграл такого вида был рассмотрен в работах В. А. Фока, Л. А. Вайнштейна и др. (см., например, [3]). Численные результаты оценки интеграла (4.1) были получены в работе [10].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Аргументы $\theta(x, p)$ и $\rho(x, p)$ в (1.2) и (1.3) определяются согласно формулам (обозначения см. в [1] и [2])

$$\theta(x, p) = \theta(x, 0) + \theta_p(x, 0)p + \frac{1}{2} \theta_{pp}(x, 0)p^2 + \dots; \quad (П.1)$$

$$\rho(x, p) = \rho(x, 0) + \rho_p(x, 0)p + \frac{1}{2} \rho_{pp}(x, 0)p^2 + \dots, \quad (П.2)$$

где

$$\theta(x, 0) = \frac{1}{2} [\Phi^+(x, 0) + \Phi^-(x, 0)]; \quad (П.3)$$

$$\rho(x, 0) = \left[\frac{3}{4} (\Phi^+(x, 0) - \Phi^-(x, 0)) \right]^{2/3}; \quad (П.4)$$

$$\Phi^\pm(x, 0) = s_\pm - s_0 + \Phi_l(\zeta(0)) \pm l_\pm(x, 0), \quad (П.5)$$

а функции $\theta_p(x, 0)$, $\theta(x, 0)$, $\rho_p(x, 0)$ и $\rho_{pp}(x, 0)$ найдены в [2] (см. формулы (1.11)–(1.14) работы [2]). Амплитудные функции $g_0(x, p)$ и $h_0(x, p)$ определены в [1]:

$$g_0(x, p) = \frac{1}{2} [z_+(x, p) + z_-(x, p)] \rho^{1/4}(x, p); \quad (П.6)$$

$$h_0(x, p) = \frac{1}{2} [z_+(x, p) - z_-(x, p)] \rho^{-1/4}(x, p); \quad (П.7)$$

$$z_\pm(x, p) = 2^{1/6} z_0'(\zeta(p)) \frac{[R(\sigma_\pm, p) R(\sigma_0, p)]^{1/6}}{\sqrt{l_\pm(x, p)}} \sqrt{|\rho_p(\sigma_\pm, p) \rho_p(\sigma_0, p)|}. \quad (П.8)$$

Функции $z_{\pm}(\mathbf{x}, p)$ можно также представить в виде разложения по степеням p :

$$z_{\pm}(\mathbf{x}, p) = 2^{1/6} z_0^i(\zeta(0)) \frac{R_0^{1/6}(s_{\pm}) R_0^{1/6}(s_0)}{\sqrt{L_{\pm}(\mathbf{x}, 0)}} \{ 1 + p [F_1(s_{\pm}) + F_1(s_0) + F_2^{\pm}(s_{\pm}, l_{\pm}) + F_3(s_0)] + \dots \}, \quad (\text{П.9})$$

где

$$F_1(s) = \frac{1}{30} \left(\frac{R_0(s)}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{R_0(s)} + \frac{R_0'^2(s)}{9R_0(s)} + \frac{7R_0''(s)}{3} \right); \quad (\text{П.10})$$

$$F_2^{\pm}(s_{\pm}, l_{\pm}) = \left(\frac{R_0(s_{\pm})}{2} \right)^{1/3} \left(\pm \frac{R_0'(s_{\pm})}{3l_{\pm}(\mathbf{x}, 0)} + \frac{R_0(s_{\pm})}{2l_{\pm}^2(\mathbf{x}, 0)} \right); \quad (\text{П.11})$$

$$F_3(s_0) = \left(\frac{R_0(s_0)}{2} \right)^{1/3} \left[\frac{1}{z_0^i(\zeta(0))} \left(\frac{R_0'(s_0)}{3} - \frac{R_0(s_0)}{R} \right) \tau(s_0) \nabla z_0^i(\zeta(0)) - \frac{R_0'(s_0)}{6R} \right]. \quad (\text{П.12})$$

На малых по сравнению с радиусом кривизны расстояниях от тела S_0 ($\eta/R_0 \ll 1$) из (П.1) — (П.12) получаем

$$\rho(\mathbf{x}, p) = \left(\frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \eta - \frac{1}{10} \left(\frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{R_0(s)} - \frac{2R_0'^2(s)}{9R_0(s)} + \frac{R_0''(s)}{3} \right) \eta^2 - p \left[1 - \frac{4}{15} \left(\frac{1}{R_0(s)} + \frac{R_0'^2(s)}{9R_0(s)} - \frac{R_0''(s)}{6} \right) \eta \right] + \dots; \quad (\text{П.13})$$

$$\theta(\mathbf{x}, p) = s - s_0 + \Phi_i(\zeta(0)) + \frac{1}{6} \frac{R_0'(s)}{R_0(s)} \eta^2 + \frac{p}{2} \int_{s_0}^s \left(\frac{2}{R_0(s)} \right)^{2/3} ds + \frac{p^2}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{R_0(s_0)} \right)^{1/3} \left(\frac{R_0(s_0)}{R} - \frac{R_0'(s_0)}{3} \right) + \frac{1}{15} \int_{s_0}^s \left(\frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{2R_0(s)} + \frac{8R_0'^2(s)}{9R_0(s)} - \frac{4R_0''(s)}{3} \right) ds \right] + \dots; \quad (\text{П.14})$$

$$g_0(\mathbf{x}, p) = z_0^i(\zeta(0)) \left[\frac{R_0(s_0)}{R_0(s)} \right]^{1/6} \left\{ 1 - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{R_0(s)} + \frac{R_0'^2(s)}{9R_0(s)} - \frac{R_0''(s)}{6} \right) \eta + p \left[-\frac{1}{5} \left(\frac{R_0(s)}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{2R_0(s)} - \frac{2R_0'^2(s)}{9R_0(s)} + \frac{R_0''(s)}{3} \right) + F_1(s_0) + F_3(s_0) \right] + \dots \right\}; \quad (\text{П.15})$$

$$h_0(\mathbf{x}, 0) = -\frac{4z_0^i(\zeta(0))}{45} \left(\frac{R_0(s_0)}{2} \right)^{1/6} \left(\frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/2} \left(\frac{R_0'(s)}{R_0(s)} + \frac{R_0''(s)}{9R_0(s)} - \frac{R_0'(s)R_0''(s)}{4} + \frac{R_0'''(s)R_0(s)}{4} \right) \eta. \quad (\text{П.16})$$

Уравнение (2.8) для точек стационарной фазы, учитывая (1.5) и (1.6), можно представить в виде

$$k^{1/3} \theta_p(\mathbf{x}, 0) + k^{-1/3} \theta_{pp}(\mathbf{x}, 0) \nu + \sqrt{k^{2/3} \rho(\mathbf{x}, 0) + \rho_p(\mathbf{x}, 0) \nu} [\rho_p(\mathbf{x}, 0) + k^{-2/3} \rho_{pp}(\mathbf{x}, 0) \nu] = 2\varphi'(\nu). \quad (\text{П.17})$$

При $k^{2/3} \rho(x, 0) \gg 1$, разлагая корень, (П.17) можно записать следующим образом:

$$k^{1/3} \Phi_p^+(x, 0) + k^{-1/3} \Phi_{pp}^+(x, 0) \nu = 2 \varphi'(\nu), \quad (\text{П.18})$$

где

$$\Phi_p^+(x, 0) = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_+} \left(\frac{2}{R_0(s)} \right)^{2/3} ds; \quad (\text{П.19})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{pp}^+(x, 0) = & \frac{1}{2} \left(\frac{2}{R_0(s_+)} \right)^{1/3} \left(\frac{R_0(s_+)}{L_+(x, 0)} + \frac{R_0'(s_+)}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{R_0(s_0)} \right)^{1/3} \left(\frac{R_0(s_0)}{R} - \right. \\ & \left. - \frac{R_0'(s_0)}{3} \right) + \frac{1}{15} \int_{s_0}^{s_+} \left(\frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{2R_0(s)} + \frac{8R_0'^2(s)}{9R_0(s)} - \frac{4R_0''(s)}{3} \right) ds. \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Абсциссы точек пересечения прямой $k^{1/3} \Phi_p^+(x, 0) + k^{-1/3} \Phi_{pp}^+(x, 0) \nu$ с кривой $2\varphi'(\nu)$ на рис. 2 являются решениями уравнения (П.18). Различным

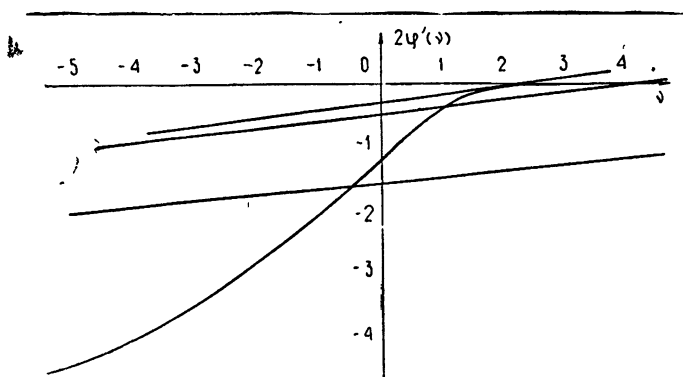


Рис. 2.

положениям точки наблюдения x соответствуют различные прямые на рис. 2. При $-k^{1/3} \Phi_p^+(x, 0) \gg 1$ из (П.18), (1.12) и (1.13) получаем

$$\bar{\nu} = k^{2/3} \frac{[2 + \Phi_p^+(x, 0) \Phi_{pp}^+(x, 0)] + 2 \sqrt{1 + \Phi_p^+(x, 0) \Phi_{pp}^+(x, 0)}}{[\Phi_{pp}^+(x, 0)]^2}; \quad (\text{П.21})$$

$$\bar{\nu} = -k^{2/3} \frac{\Phi_p^+(x, 0)}{\Phi_{pp}^+(x, 0)}. \quad (\text{П.22})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Леонтьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 10, 1574 (1971).
2. Е. А. Леонтьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 10, 1586 (1971).
3. В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, изд. Сов. радио, М., 1970
4. С. Chester, В. Friedman, F. Ursell, Proc. Camb. Phil. Soc., 53, № 3, 599 (1957).
5. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 4, 664 (1964).

6. D. L u d v i g, Comm. Pure Appl. Math., 19, 215 (1966).
7. D. L u d v i g, Comm. Pure Appl. Math., 20, 103 (1967).
8. И. В. О л и м п и е в, Кандидатская диссертация, М., 1970.
9. И. В. О л и м п и е в, ДАН СССР (в печати).
10. П. А. А з р и л я н т, М. Г. Б е л к и н а, Численные результаты теории дифракции радиоволн вокруг земной поверхности, изд. Сов. радио, М., 1957.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию
2 августа 1971 г.

SHORT-WAVE ASYMPTOTICS OF SOLVING THE DIFFRACTION PROBLEM ON A CONVEX BODY. III

E. A. Leont'ev

The asymptotic estimations are obtained for the diffraction field in illuminated and shade regions on the basis of the earlier found integral representation for the short wave asymptotics of solving the diffraction on a convex cylinder.

УДК 621.372.09

КОМПЛЕКСНЫЕ ВОЛНЫ В ДВУХСЛОЙНОМ КРУГЛОМ ЭКРАНИРОВАННОМ ВОЛНОВОДЕ

С. Б. Раевский

Рассмотрены некоторые дисперсионные свойства собственных комплексных волн в двухслойном круглом экранированном волноводе. Приведены результаты решения на ЭВМ дисперсионного уравнения для случая комплексных волн.

Возможность существования волн, имеющих комплексные постоянные распространения в отсутствие диссипации энергии, в двухслойном круглом экранированном волноводе была обнаружена при изучении различных сложных структур. Было доказано, что такие волны могут существовать, в определенной полосе частот, в связанных линиях передачи, описываемых телеграфными уравнениями [1], в периодических структурах, например, в штыревых замедляющих системах [2], в дифрагмированных волноводах [3], в цепочках связанных резонаторов [4], в волноводах с анизотропными импедансными стенками [5, 6], в гиротропной плазме [7]. В ряде работ [8-10] такие волны получили название комплексных. Существование комплексных волн предполагается также в диэлектрическом стержне [11]. В работе [12] высказывается предположение о существовании комплексных волн в двухслойном круглом экранированном волноводе, а в [8] делается попытка указать область их существования в таком волноводе. Первые результаты численного решения дисперсионного уравнения для случая комплексных волн, распространяющихся в двухслойном круглом экранированном волноводе, представлены в работе [9]. В настоящей работе делается попытка более подробно рассмотреть дисперсионные свойства комплексных волн в такой структуре.

Записывая решения уравнения Гельмгольца так же, как это сделано в [8], из условия непрерывности тангенциальных компонент поля на границе между слоями ($r = r_1$) для волны HE_{11} дисперсионное уравнение получаем в виде

$$\frac{1}{r_1^2} \left(\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\alpha_1^2} - \frac{\epsilon_2 \mu_2}{\alpha_2^2} \right) \left(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_2^2} \right) - \left[\frac{\epsilon_1}{\alpha_1^2} \frac{J_1'(\alpha_1 r_1)}{J_1(\alpha_1 r_1)} - \frac{\epsilon_2}{\alpha_2^2} \frac{\chi_{11}'(\alpha_1 r_1)}{\chi_{11}(\alpha_2 r_1)} \right] \left[\frac{\mu_1}{\alpha_1^2} \frac{J_1'(\alpha_1 r_1)}{J_1(\alpha_1 r_1)} - \frac{\mu_2}{\alpha_2^2} \frac{\chi_{21}'(\alpha_2 r_1)}{\chi_{21}(\alpha_2 r_1)} \right] = 0. \quad (1)$$

В уравнении (1) обозначено

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\epsilon_{1,2} \mu_{1,2} k^2 - \beta^2},$$

$k = \omega/c$ — постоянная распространения в свободном пространстве, β — постоянная распространения вдоль оси волновода,

$$\chi_{11} = \frac{J_1(\alpha_2 r) Y_1(\alpha_2 r_2) - J_1(\alpha_2 r_2) Y_1(\alpha_2 r)}{J_1(\alpha_2 r_1) Y_1(\alpha_2 r_2) - J_1(\alpha_2 r_2) Y_1(\alpha_2 r_1)},$$

$$\chi_{21} = \frac{J_1(\alpha_2 r) Y_1'(\alpha_2 r_2) - J_1'(\alpha_2 r_2) Y_1(\alpha_2 r)}{J_1(\alpha_2 r_1) Y_1'(\alpha_2 r_2) - J_1'(\alpha_2 r_2) Y_1(\alpha_2 r_1)},$$

J_1 и Y_1 — функция Бесселя 1-го и 2-го рода.

Интересуясь комплексными волнами, полагаем

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2.$$

Тогда α_1 и α_2 в общем случае являются комплексными величинами:

$$\alpha_{1,2} = \gamma_{1,2} + i\delta_{1,2}.$$

Таким образом, уравнение (1) определено на двух комплексных плоскостях $\alpha_1(\gamma_1, \delta_1)$ и $\alpha_2(\gamma_2, \delta_2)$.

Постоянные распространения β и k определяются из уравнений

$$\beta_1 = \pm \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1 k^2 - \gamma_1^2 + \delta_1^2}{2}} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\gamma_1^2 \delta_1^2}{\epsilon_1 \mu_1 k^2 - \gamma_1^2 + \delta_1^2}} \right],$$

$$\beta_2 = - \frac{\gamma_1 \delta_1}{\beta_1};$$

$$(\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \left(1 + \frac{\delta_2^2}{\gamma_1^2} \right) = k^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2) \quad (3)$$

по $\gamma_{1,2}$ и $\delta_{1,2}$, найденным из уравнения (1) и удовлетворяющим условию $\gamma_1 \delta_1 = \gamma_2 \delta_2$.

Как выяснилось, уравнение (1) имеет комплексно-сопряженные решения в плоскостях $\alpha_1(\gamma_1, \delta_1)$ и $\alpha_2(\gamma_2, \delta_2)$, которым соответствуют комплексно-сопряженные β . Из этого следует, что комплексные волны существуют парами: одна волна распространяется в положительном направлении и имеет затухающий характер, другая распространяется в противоположном направлении и имеет нарастающий в направлении распространения характер.

Результаты решения дисперсионного уравнения для комплексных волн типа HE_{11} приведены на рис. 1—4. Сплошными линиями обозначена действительная часть постоянной распространения, умноженная на радиус экрана ($\beta_1 r_2$), штрихованными — мнимая ($-\beta_2 r_2$).

На рис. 1 представлены дисперсионные кривые комплексных волн в волноводе с диэлектрическим стержнем для различных значений ϵ_1 . Все кривые соответствуют постоянному коэффициенту заполнения $r_1/r_2 = 0,5$ ($\epsilon_2 = 1, \mu_1 = \mu_2 = 1$). Как показывают результаты расчета, концы кривых a_i соответствуют границам областей, где существуют обычные незатухающие волны. Они располагаются на двузначных участках дисперсионных характеристик этих волн, приведенных в [12], в точках, где происходит смена знака групповой скорости. Концы b_i соответствуют границам областей существования чисто затухающих волн. Таким образом, интервалы ($b_i - a_i$) являются областями существования комплексных решений дисперсионного уравнения волны HE_{11} .

Из рис. 1 видна общая закономерность: с увеличением длины волны, при удалении от области существования незатухающих волн, фазовая скорость комплексных волн возрастает и стремится к бесконечности в точках b_i , постоянная затухания при этом увеличивается от нуля до определенного значения, соответствующего корню дисперсионного урав-

нения для чисто затухающей волны. При увеличении ϵ_1 область существования комплексных волн смещается в сторону низких частот, а значения β_1 в точках a_i возрастают. Последний факт объясняется тем, что

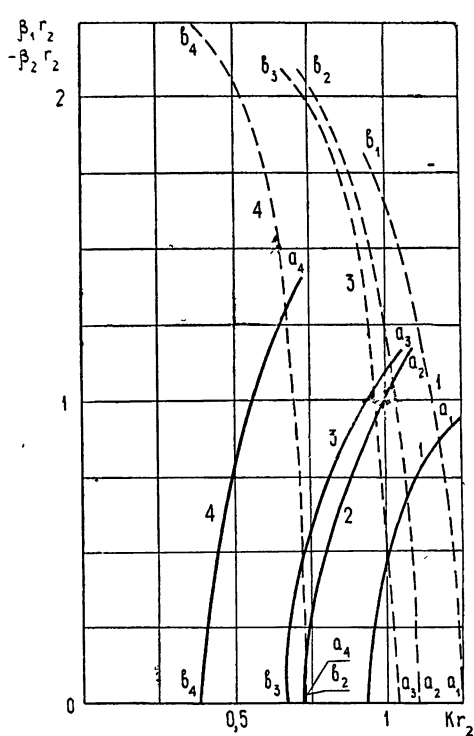


Рис. 1. Дисперсионные кривые волновода с диэлектрическим стержнем для $r_1/r_2 = 0,5$:

1— $\epsilon_1=13$; $\epsilon_2=1$; $\mu_1=\mu_2=1$; 2— $\epsilon_1=17,7$; $\epsilon_2=1$; $\mu_1=\mu_2=1$; 3— $\epsilon_1=20,3$; $\epsilon_2=1$; $\mu_1=\mu_2=1$; 4— $\epsilon_1=42,4$; $\epsilon_2=1$; $\mu_1=\mu_2=1$, ϵ_1 , μ_1 и ϵ_2 , μ_2 —параметры 1-го и 2-го слоев соответственно.

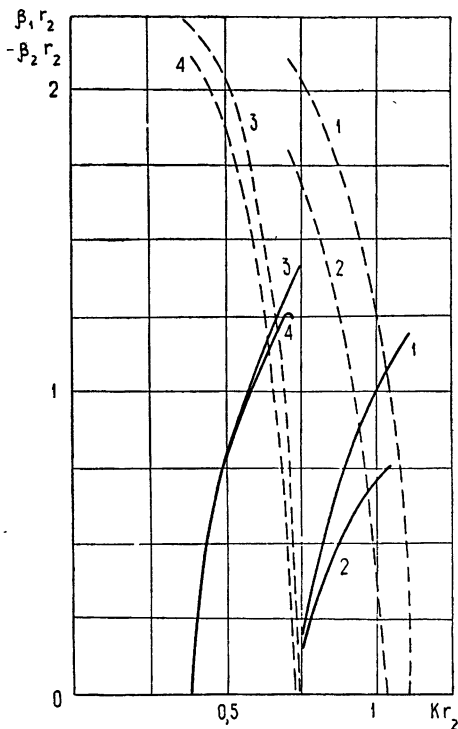


Рис. 2. Дисперсионные кривые двухслойного волновода для случая $\mu_2 > 1$: 1— $\epsilon_1=17,7$; $\epsilon_2=1$; $\mu_1=\mu_2=1$; 2— $\epsilon_1=17,7$; $\epsilon_2=1$; $\mu_1=1$; $\mu_2=1,75$; 3— $\epsilon_1=42,4$; $\epsilon_2=1$; $\mu_1=\mu_2=1$; 4— $\epsilon_1=42,4$; $\epsilon_2=1$; $\mu_1=1$; $\mu_2=1,34$.

с увеличением диэлектрической проницаемости стержня фазовая скорость незатухающих волн в точках, где происходит смена знака групповой скорости, уменьшается. Затухание, соответствующее точкам b_i , с увеличением ϵ_1 возрастает.

На рис. 2 приведены дисперсионные кривые комплексных волн двухслойного круглого экранированного волновода (кривые 2 и 4). Рядом с ними приведены дисперсионные характеристики волновода с диэлектрическим стержнем (кривые 1 и 3). Из рис. 2 видно, что фазовая скорость комплексных волн в двухслойном волноводе с $\mu_2 > 1$ выше, чем в волноводе со стержнем, а затухание меньше. При некоторых соотношениях параметров ϵ_1 и μ_1 дисперсионные характеристики комплексных волн приобретают двузначный участок (кривая 4). Подобное явление отмечалось при рассмотрении комплексных волн в диафрагмированном волноводе [3].

На рис. 3 представлены дисперсионные кривые комплексных волн в волноводе с коэффициентом заполнения $r_1/r_2 = 0,67$ (кривые 1 и 3). Рядом с ними приведены дисперсионные характеристики (кривые 2 и 4) волноводов, имеющих коэффициент заполнения $r_1/r_2 = 0,5$. Из рис. 3

видно, что с увеличением коэффициента заполнения область существования комплексных волн смещается в сторону более низких частот. Фазовая скорость комплексных волн (если сравнивать в точках, соответствующих границам областей незатухающих волн) в волноводе с меньшим коэффициентом заполнения больше. Максимальное затухание на границе области существования комплексных волн в волноводе с меньшим коэффициентом заполнения меньше.

Как показали расчеты, комплексные волны могут существовать и в двухслойных волноводах, имеющих $\mu_2 < 1$. На рис. 4 приведены результаты решения дисперсионного уравнения для трех таких случаев. Во всех трех случаях коэффициент заполнения был $r_1/r_2 = 0,5$. Из рисунка видно, что с увеличени-

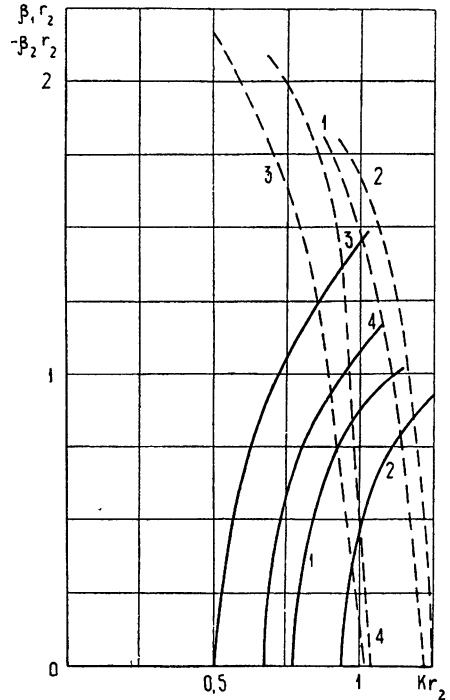


Рис. 3. Дисперсионные кривые волновода с диэлектрическим стержнем для $r_1/r_2 = 0,67$:

- | | |
|---|----------------------------------|
| 1— $\epsilon_1=13$ ($r_1/r_2=0,67$) | } $\epsilon_2=1; \mu_1=\mu_2=1.$ |
| 2— $\epsilon_1=13$ ($r_1/r_2=0,5$) | |
| 3— $\epsilon_1=20,3$ ($r_1/r_2=0,67$) | |
| 4— $\epsilon_1=20,3$ ($r_1/r_2=0,5$) | |

ем μ_2 происходит увеличение фазовой скорости комплексных волн. Это, очевидно, связано с тем, что при возрастании μ_2 происходит вытеснение электромагнитного поля из оптически более плотной среды (ϵ_1, μ_1)

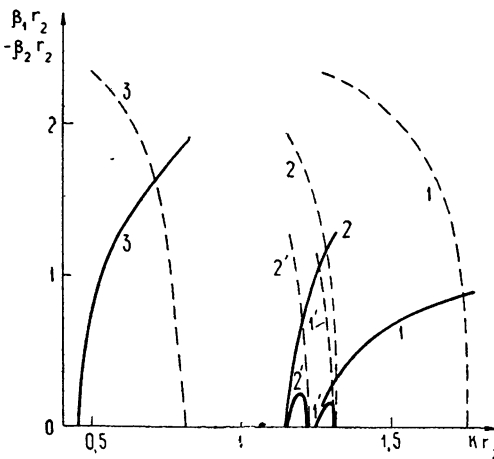


Рис. 4. Дисперсионные кривые двухслойного волновода для случая $\mu_2 < 1$:

- | | |
|------------------------------------|----------------------------|
| 1— $\epsilon_1=10,3; \mu_2=0,59$ | } $\epsilon_2=1; \mu_1=1.$ |
| 2— $\epsilon_1=6,6; \mu_2=0,375$ | |
| 3— $\epsilon_1=46,87; \mu_2=0,365$ | |

в среду менее оптически плотную (ϵ_2, μ_2). Кривые 1' и 2' показывают эволюцию дисперсионных характеристик (1) и (2) при увеличении магнитной проницаемости второго слоя (μ_2).

Как видно из рисунка, с увеличением μ_2 дисперсионные кривые приобретают двузначные участки. Области существования комплексных

волн в обоих случаях сужаются. Это связано с тем, что в области незатухающих волн аномальная дисперсия имеет место (при данном коэффициенте заполнения), лишь начиная с некоторых достаточно больших ϵ_1 [9]. В случаях (1) и (2) ϵ_1 не очень велики. Так, в первом случае ϵ_1 почти соответствует предельному значению, при котором исчезает двузначный участок дисперсионной характеристики незатухающих волн в волноводе с диэлектрическим стержнем, а во втором ϵ_1 даже не достигает этого предельного значения. Поэтому увеличение μ_2 приводит к исчезновению участка аномальной дисперсии незатухающих волн, а следовательно, и к исчезновению комплексных волн (дисперсионная кривая комплексных волн приобретает сначала двузначный характер, сужаясь при этом по оси $k r_2$, а затем, при дальнейшем увеличении μ_2 , исчезает совсем).

Из рассмотренных графиков можно сделать вывод, что комплексные волны в двухслойном экранированном волноводе существуют лишь при наличии двузначного участка на дисперсионных характеристиках незатухающих волн. Это подтверждается тем, что все дисперсионные кривые комплексных волн в волноводе с диэлектрическим стержнем начинаются на двузначных участках кривых, приведенных в [12]. В тех случаях, когда дисперсионные характеристики незатухающих волн не имеют двузначных участков, комплексных волн не обнаруживается. Этот факт хорошо иллюстрируется кривыми $1'$ и $2'$, приведенными на рис. 4. Из рисунка видно, что при значениях $\epsilon_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$, близких к предельным, дисперсионная кривая комплексных волн приобретает двузначный характер (кривые $1'$ и $2'$ рис. 4). Это связано с тем, что точка, в которой происходит смена знака групповой скорости незатухающих волн, при приближении к предельным $\epsilon_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$ смещается вниз по оси $\beta_{1,2} r_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Радиотехника и электроника, 9, № 7, 1188 (1964).
2. А. М. Белянцев, Диссертация, ГГУ, 1962.
3. И. А. Александров, В. В. Вагин, В. И. Котов, ЖТФ, 36, № 11, 1995 (1966).
4. А. В. Гапонов, Доклад на Первой Всесоюзной конференции по радиоэлектронике, Горький, 1956.
5. М. А. Миллер, ДАН СССР, 87, № 4, 571 (1952).
6. М. А. Миллер, ЖТФ, 25, № 11, 1972 (1955).
7. Б. Н. Гершман, Памяти А. А. Андропова, изд. АН СССР, М., 1955, стр. 599.
8. P. I. B. Clarricoats, B. C. Taylor, Proc. IEE, T-6, 1964 (1951).
9. M. Krohne, NTZ, Heft 11, 655 (1969).
10. T. Tamir, A. A. Oliner, Proc. IEE, T-1, 310 (1963).
11. Б. З. Каценеленбаум, Высокочастотная электродинамика, изд. Наука, М., 1966.
12. Г. И. Веселов, Л. А. Любимов, Радиотехника и электроника, 8, № 9, 1530 (1963).

Горьковский политехнический институт

Поступила в редакцию
31 марта 1971 г.

COMPLEX WAVES IN TWO-LAYER CIRCULAR SHIELDED WAVEGUIDE

S. B. Raevskii

Some dispersion properties of natural complex waves in two-layer circular shielded waveguides have been considered. The results of solving the dispersion equation on the electron computer are given for the case of complex waves.

УДК 621.372.414.2

КОАКСИАЛЬНЫЙ ОТКРЫТЫЙ РЕЗОНАТОР, ОБРАЗОВАННЫЙ БОЧКООБРАЗНЫМ ВНЕШНИМ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВНУТРЕННИМ ЗЕРКАЛАМИ

А. Т. Фиалковский, В. Е. Чайка

Произведен теоретический расчет основных параметров открытого коаксиального резонатора, образованного бочкообразным внешним и цилиндрическим внутренним зеркалами. Получены аналитические выражения для собственных частот, положения каустик, распределения полей и отношения добротностей различных видов колебаний при $2\pi d/\lambda \gg 1$ (λ — длина волны, d — характерный размер резонатора). Результаты численных расчетов позволяют выбирать геометрию резонатора для практических приложений.

Развитие техники СВЧ и ее приложений требует исследования различных модификаций открытых резонаторов. В данной работе проведены исследования коаксиального открытого резонатора, образованного бочкообразным внешним и цилиндрическим внутренним зеркалами. В последнее время такие резонаторы находят применение, например, в диагностике плазмы [1], измерительной технике и в ряде других приложений.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РЕЗОНАТОРА

Будем аппроксимировать поверхность нашего резонатора в вытянутых сфероидальных координатах (рис. 1), связанных с цилиндрическими r, φ, z соотношениями

$$r = d \operatorname{sh} \rho \cos \zeta, \quad z = d \operatorname{ch} \rho \sin \zeta,$$

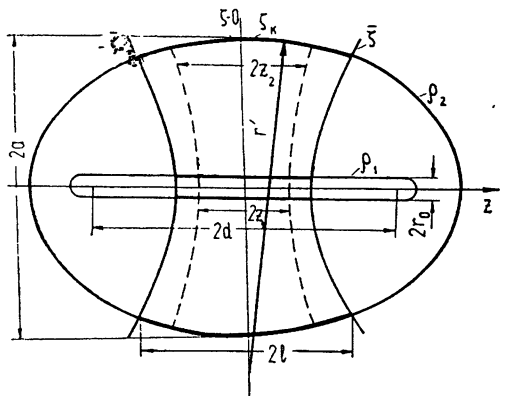
$$\varphi = \varphi \quad (0 < \rho < \infty, \quad (1)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq \zeta \leq \pi/2).$$

При этом внутренний цилиндр резонатора аппроксимируется частью сильно вытянутого эллипсоида вращения $\rho = \rho_1$, а внешняя бочка задается при

$$\rho = \rho_2, \quad -\zeta_2 < \zeta < \zeta_2,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$



(2) Рис. 1. Поверхность резонатора в вытянутых сфероидальных координатах.

Аппроксимация позволяет рассмотреть лишь высокодобротные колебания, такие, что часть поверхности внутреннего эллипсоида, расположенную между каустиками, можно считать практически цилиндрической.

Как известно, уравнения Максвелла в вытянутых сфероидальных координатах разделяются лишь в частном случае осесимметричного

электромагнитного поля. Будем предполагать наличие большого параметра задачи

$$\gamma = kd = 2\pi \frac{d}{\lambda} \quad (3)$$

и будем разделять уравнения приближенно. В книге Вайнштейна [3] решалась акустическая задача для бочкообразного резонатора в вытянутых сферических координатах. В § 31 этой книги дан способ перехода к электромагнитному случаю, а именно, решение для бочкообразного резонатора предлагается искать в виде электрического вектора $\Pi^e(\rho, \varphi, \zeta)$, имеющего единственную составляющую, — вдоль координаты ζ . Однако можно показать, что этот метод вместе с условием малой кривизны зеркал содержит ограничение на параметр ζ_2 :

$$\zeta_2 \sim \gamma^{-1}. \quad (4)$$

Мы получим более общие результаты, не ограниченные условием (4).

Для этого воспользуемся магнитным вектором Герца $\Pi^m(\rho, \varphi, \zeta)$, имеющим единственную составляющую, — вдоль координаты φ :

$$\Pi^m(\rho, \varphi, \zeta) = \Phi(\rho, \varphi, \zeta) \varphi^0. \quad (5)$$

Дифференциальное уравнение для функции Φ получим, если потребуем, чтобы совпадали составляющие магнитного поля вдоль направления φ^0 , вычисленные по формулам

$$H = \text{rot rot } \Pi^m, \quad (6)$$

$$H = (\text{grad div} + k^2) \Pi^m.$$

Можно показать, что составляющие H_ρ и H_ζ также совпадают в основных своих членах и лишь в членах порядка γ^{-1} по отношению к остальным отличаются.

Тем самым наша векторная задача свелась к скалярной, к решению скалярного уравнения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{sh} \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\text{sh} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\cos \zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\cos \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{\text{sh}^2 \rho} + \frac{1}{\cos^2 \zeta} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \left[\gamma^2 (\text{sh}^2 \rho + \cos^2 \zeta) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{\text{sh}^2 \rho} + \frac{1}{\cos^2 \zeta} \right) \right] \Phi = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

которое по существу является волновым. Отметим, что в случае осесимметричного поля наша задача в точности сводится к решению уравнения (7).

В заключение раздела подчеркнем, что использованный здесь весьма эффективный способ асимптотического перехода от векторного случая к скалярному заимствован нами из книги Вайнштейна [3], § 31.

2. СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Полагая

$$\Phi(\rho, \varphi, \zeta) = R(\rho) Z(\zeta) e^{\pm i m \varphi} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

для функции $R(\rho)$ и $Z(\zeta)$ имеем дифференциальные уравнения

$$\frac{1}{\cos \zeta} \frac{d}{d\zeta} \left(\cos \zeta \frac{dZ}{d\zeta} \right) + \left(\gamma^2 \cos^2 \zeta - \frac{1+m^2}{\cos^2 \zeta} + K \right) Z = 0; \quad (9a)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \rho} \frac{d}{d\rho} \left(\operatorname{sh} \rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\gamma^2 \operatorname{sh}^2 \rho - \frac{1+m^2}{\operatorname{sh}^2 \rho} - K \right) R = 0, \quad (9б)$$

где K — постоянная разделения. Дифференциальные уравнения (9) изучались ранее рядом авторов (см., например, [4]); решения этих уравнений выражаются через сферические волновые функции, к сожалению, мало исследованные.

При решении уравнения (9 а) воспользуемся результатами Мейкснера [5, 6], который получил асимптотическое решение этого уравнения для больших значений γ путем асимптотического разложения сферических волновых функций по функциям параболического цилиндра

$$Z(\zeta) \approx \cos^\alpha \zeta \sum_{k=-N}^{\infty} \alpha_{2k} D_{N+2k}(\sqrt{2\gamma} \sin \zeta), \quad \alpha = \sqrt{1+m^2}, \quad (10)$$

где $N = 0, 1, 2, \dots$, а для коэффициентов α_{2k} даются выражения

$$\frac{\alpha_{2k}}{\alpha_0} = \sum_{2r>k}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^{(r)}(q)}{\gamma^r}, \quad \frac{\alpha_{-2k}}{\alpha_0} = \sum_{2r>k}^{\infty} (-1)^{r+k} \frac{N!}{(N-2k)!} \frac{\alpha_{2k}^{(r)}(-q)}{\gamma^r}; \quad (11)$$

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{\alpha}{4}, \quad \alpha_2^{(2)} = -\frac{\alpha}{512} (q^2 - 52q - 93),$$

$$\alpha_2^{(3)} = \frac{\alpha}{2048} (-3q^3 + 108q^2 + 343q + 560) - \frac{\alpha^2}{512} (q^2 - 4q + 35), \quad (12)$$

$$\alpha_4^{(1)} = -\frac{1}{32}, \quad \alpha_4^{(2)} = -\frac{1}{128} (q - 4m^2), \dots$$

$$(q = 2N + 1 = 1, 3, 5, \dots).$$

Другие $\alpha_{2k}^{(r)}$ могут быть вычислены из рекуррентных соотношений [6]. В нулевом приближении имеем для функции $Z(\zeta)$ выражение

$$Z(\zeta) \sim \cos^\alpha \zeta D_N(\sqrt{2\gamma} \sin \zeta), \quad (13)$$

что согласуется с результатом, полученным в § 23 книги [3]. В работе Мейкснера [6] вычислены также собственные значения уравнения (9 а) с точностью до величин $\sim \gamma^{-6}$. Поскольку в нашем случае электромагнитное поле должно быть конечным при $\zeta = \pm \pi/2$, то мы должны воспользоваться этими собственными значениями и фиксировать постоянную разделения K так, чтобы выполнялось

$$K + \gamma^2 - \alpha^2 = (2N + 1)\gamma - \frac{1}{8} [(2N + 1)^2 + 5] - \frac{2N+1}{64\gamma} [(2N + 1)^2 + 11 - 32\alpha^2] \quad (N = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

с относительной погрешностью $\sim \gamma^{-3}$, что в нулевом приближении также согласуется с результатом Вайнштейна (§ 23, [3]).

В уравнении (9 б) положим

$$\operatorname{sh} \rho = x \quad (15)$$

и перепишем его так:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} \right) \frac{dR}{dx} + \left[\left(\beta^2 - \frac{\alpha^2}{x^2} \right) + x \frac{x^2}{x^2+1} \right] R = 0, \quad (16)$$

где

$$\beta = \gamma \sqrt{1 - x/\gamma^2}, \quad (17)$$

а через x мы обозначили выражение

$$x = (2N+1)\gamma - \frac{1}{8} [(2N+1)^2 + 5] - \frac{2N+1}{64\gamma} [(2N+1)^2 + 11 - 32\alpha^2] \\ (N=0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Будем искать решение уравнения (16) при $\beta \rightarrow \infty$ и $x \leq 1$ в виде

$$R = H_\alpha(\beta x) X(x), \quad (19)$$

где H_α — функция Ханкеля первого либо второго рода, $X(x)$ — медленно меняющаяся по сравнению с первым множителем функция. Последняя удовлетворяет уравнению

$$X''(x) + \left[2\beta\psi(\beta x) + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} \right) \right] X'(x) + \frac{\beta x\psi(x) + x x^2}{x^2+1} X(x) = 0, \\ \psi(x) = H'_\alpha(\beta x)/H_\alpha(\beta x). \quad (20)$$

Если искать решение этого уравнения в виде разложения по обратным степеням γ и при $\gamma x \gg 1$ аппроксимировать функцию $\psi(\beta x)$ постоянной $+i$ для функции Ханкеля первого рода и $-i$ для второго рода, то в нулевом приближении можно получить соответственно

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}} \exp \left[\pm i \left(N + \frac{1}{2} \right) (x - \operatorname{arctg} x) \right]. \quad (21)$$

Таким образом, в первом приближении для функции R имеем выражение

$$R = \frac{H_\alpha(\beta x)}{\sqrt[4]{x^2+1}} \exp \left[\pm i \left(N + \frac{1}{2} \right) (x - \operatorname{arctg} x) \right], \quad (22)$$

где верхний знак берется для функции Ханкеля первого рода, а нижний — для второго. В нулевом приближении, воспользовавшись асимптотикой функции Ханкеля, получаем с точностью до произвольной постоянной

$$R \approx \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} 2\rho}} \exp \left\{ \pm i \left[\beta x + \left(N + \frac{1}{2} \right) (x - \operatorname{arctg} x) \right] \right\}. \quad (23)$$

Чтобы вычислить собственные частоты системы, мы должны взять суперпозицию двух разных функций (23) и наложить на нее при $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$ граничные условия

$$E_z \sim \frac{\partial}{\partial \rho} (\operatorname{sh} \rho R) = 0 \Big|_{\rho=\rho_1, \rho_2}. \quad (24)$$

Таким образом, с учетом граничного условия при $\rho = \rho_1$ функция $R(\rho)$ равна

$$R(\rho) \approx \frac{1}{\sqrt{\text{sh } 2\rho}} \left\{ \frac{d}{d\rho_1} [\sqrt{\text{th } \rho_1} \exp(-it(\rho_1))] \exp(it(\rho)) - \right. \\ \left. - \frac{d}{d\rho_1} [\sqrt{\text{th } \rho_1} \exp(it(\rho_1))] \exp(-it(\rho)) \right\}, \quad (25)$$

где

$$t(\rho) = \beta x + \left(N + \frac{1}{2}\right)(x - \text{arctg } x). \quad (26)$$

Учитывая также граничное условие при $\rho = \rho_2$, получаем уравнение для определения собственных частот резонатора

$$\frac{d}{d\rho_1} (\sqrt{\text{th } \rho_1} e^{it}) \frac{d}{d\rho_2} (\sqrt{\text{th } \rho_2} e^{-it}) - \frac{d}{d\rho_1} (\sqrt{\text{th } \rho_1} e^{-it}) \frac{d}{d\rho_2} (\sqrt{\text{th } \rho_2} e^{it}) = 0, \quad (27)$$

либо

$$\frac{2\text{sh}\rho_2 \left[\beta \text{ch}^2 \rho_2 + \left(N + \frac{1}{2}\right) \text{sh}^2 \rho_2 \right] - 2\text{sh}\rho_1 \left[\beta \text{ch}^2 \rho_1 + \left(N + \frac{1}{2}\right) \text{sh}^2 \rho_1 \right]}{1 + 4\text{sh}\rho_2 \left[\beta \text{ch}^2 \rho_2 + \left(N + \frac{1}{2}\right) \text{sh}^2 \rho_2 \right] \text{sh}\rho_1 \left[\beta \text{ch}^2 \rho_1 + \left(N + \frac{1}{2}\right) \text{sh}^2 \rho_1 \right]} = \\ = -\text{tg} \left[\left(\beta + N + \frac{1}{2}\right) (\text{sh}\rho_2 - \text{sh}\rho_1) - \left(N + \frac{1}{2}\right) \text{arctg} \frac{\text{sh}\rho_2 - \text{sh}\rho_1}{1 + \text{sh}\rho_2 \text{sh}\rho_1} \right]. \quad (28)$$

3. ПОЛЯ ВБЛИЗИ КАУСТИК. ОЦЕНКА ОТНОШЕНИЯ ДОБРОТНОСТЕЙ СОСЕДНИХ ВИДОВ

Полагая в уравнении (9б)

$$x = \cos \zeta \quad (29)$$

и исключая по формуле (14) постоянную разделения K , приходим к дифференциальному уравнению для функции Z :

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2} \right) \frac{dZ}{dx} - \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2}{x^2} - \frac{x^2}{1-x^2} \right) Z = 0. \quad (30)$$

Решение уравнения (30) ищем в виде

$$Z = I_\alpha(z) F(z), \quad (31)$$

$z = \beta x$. Здесь $I_\alpha(z)$ — модифицированная функция Бесселя, $F(z)$ — медленно меняющаяся функция. Решение с функцией Макдональда $K_\alpha(z)$ отбрасываем, так как при $\zeta = \pm \pi/2$ оно имеет особенность.

В дальнейшем подобно тому, как мы получили выражение для функции $X(x)$, для функции F приходим к приближенному выражению

$$F \approx \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{N/2} \frac{\exp[(N+1/2)x]}{\sqrt{1+x}}. \quad (32)$$

Формулы (31), (32) определяют поля вблизи каустик. При $|\zeta| \ll 1$ они непригодны; в этом случае нужно пользоваться формулами (10), (11).

Грубую оценку отношения добротностей двух близких видов колебаний можно получить по формуле

$$\frac{Q(\beta_1, N_1)}{Q(\beta_2, N_2)} \sim \frac{f(\beta_2, N_2)}{f(\beta_1, N_1)}, \quad f(\beta, N) = \frac{Z^2(\bar{\zeta})}{Z^2(\zeta_k)}. \quad (33)$$

При этом мы предполагаем, что запасенная энергия в соседних видах колебаний примерно одинакова, а потери обратно пропорциональны квадрату напряженности поля на краю зеркала ($\zeta = \bar{\zeta}$), отнесенному к квадрату напряженности на каустике ($\zeta = \zeta_k$). Поля на краях зеркал из-за дифракции могут сильно возмущаться (см. [3], гл. 7), поэтому такая оценка дает удовлетворительную точность лишь при малых дифракционных потерях.

Подставляя в формулу (33) выражения (31), (32), получаем грубую оценку отношения добротностей соседних видов колебаний:

$$\frac{Q(\beta_1, N_1)}{Q(\beta_2, N_2)} \sim \exp \{ [2(\beta_1 + N_1) + 1] (\cos \zeta_k - \cos \bar{\zeta}_1) - [2(\beta_2 + N_2) + 1] (\cos \zeta_k - \cos \bar{\zeta}_2) \}. \quad (34)$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Нами были проведены расчеты собственных значений, положения каустик и отношения добротностей различных видов колебаний резонатора, образованного бочкообразным внешним и цилиндрическим внутренним зеркалами.

Собственные значения рассчитывались приближенно из решения уравнения (28), а затем уточнялись путем численного решения на ЭВМ уравнения (9 б). Положение каустик, определяемое точкой поворота дифференциального уравнения (9 а), рассчитывалось по формуле

$$\zeta_k = \arccos \left[\sqrt{\frac{-(K - 1/4) + \sqrt{(K + 1/4)^2 + 4\gamma^2(m^2 + 3/4)}}{2\gamma^2}} \right], \quad (35)$$

где

$$K = m^2 + \frac{1}{2} - \gamma^2 + (2q - 1) \sqrt{\gamma^2 + m^2 + \frac{3}{4}}.$$

Расчеты на ЭВМ были выполнены при нескольких значениях радиуса кривизны внешнего зеркала для ряда отношений максимального диаметра внешнего зеркала к диаметру внутреннего. Поиск величины γ производился в интервале значений, при которых поле по радиусу имело от 5 до 20 вариаций. При большем количестве вариаций поля результаты вычислений собственных частот по приближенным и точным формулам совпадают с точностью до десятых долей процента. Результаты расчетов приведены на рис. 2—7.

На рис. 2 показана зависимость обратной нормированной длины волны колебаний от количества вариаций поля между зеркалами для нулевого по азимуту типа колебаний при $r'/a = 2$.

Для зеркал другой кривизны (в пределах $1 < r'/a < 6$) аналогичные кривые с графической точностью совпадают с приведенной на рис. 2.

На рис. 3 приведена зависимость относительной расстройки между колебаниями с одной ($q = 1$) и двумя ($q = 2$) вариациями поля вдоль оси системы от количества вариаций поля между зеркалами.

На рис. 4 приведена зависимость относительной расстройки между колебаниями с азимутальными индексами $m = 0$ и $m = 1, 2$. Как видно из рисунков, расстройка между колебаниями с различными азимутальными индексами существенно меньше, чем между колебаниями с раз-

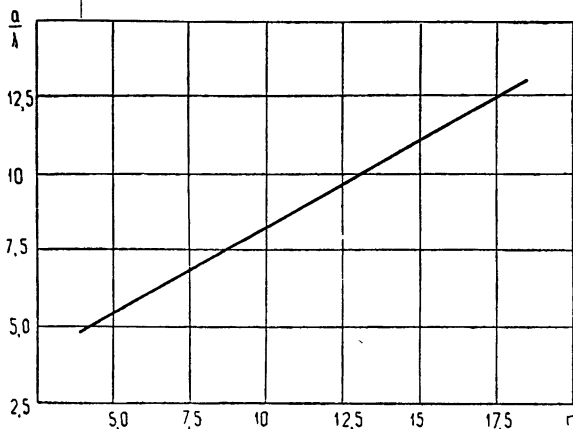


Рис. 2. Зависимость обратной нормированной длины волны колебаний от количества вариаций поля между зеркалами для нулевого по азимуту типа колебания ($r'/a = 2$).

Рис. 3. Зависимость относительной расстройки между колебаниями с одной и двумя вариациями поля вдоль оси от количества вариаций поля между зеркалами ($r_0/a = 0,125$; 1 \rightarrow $r'/a = 1,33$; 2 \rightarrow $r'/a = 2$; 3 \rightarrow $r'/a = 4$; 4 \rightarrow $r'/a = 6$).

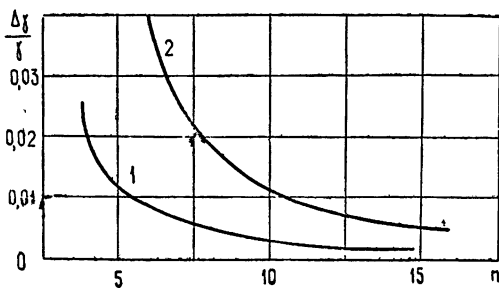
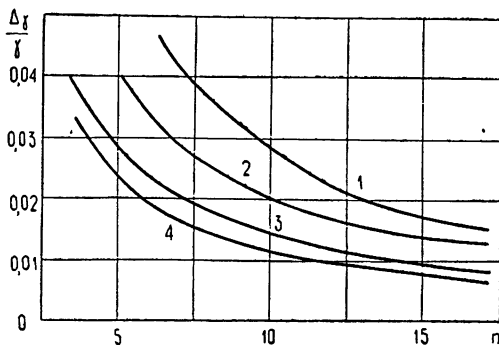
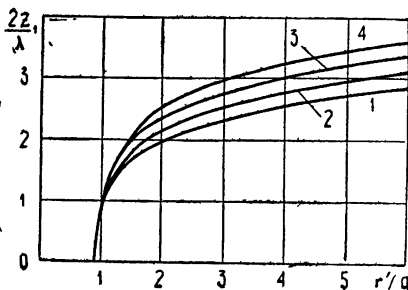


Рис. 4. Зависимость относительной расстройки между нулевым по азимуту и ближайшими высшими типами колебаний от количества вариаций поля между зеркалами ($r'/a = 2$; $r_0/a = 0,125$; 1 \rightarrow $m_1=0, m_2=1$; 2 \rightarrow $m_1=0, m_2=2$).

Рис. 5. Зависимость расстояния между каустиками на внутреннем зеркале от радиуса кривизны внешнего зеркала ($r_0/a = 0,125$; $m=0$; $q=1$; 1 \rightarrow $n = 10$; 2 \rightarrow $n = 12$; 3 \rightarrow $n = 14$; 4 \rightarrow $n = 16$).



личными продольными индексами. Величина расстройки падает с увеличением радиального индекса и кривизны внешнего зеркала. Отметим также, что рис. 4 позволяет оценить точность асимптотических формул для расчета собственных частот, поскольку в этих формулах зависимость собственной частоты от азимутального индекса не учтена.

На рис. 5, 6 приведены зависимости расстояния между каустиками на внутреннем и внешнем зеркалах от радиуса кривизны внешнего зеркала. Как видно из рис. 6, расстояние между каустиками на внеш-

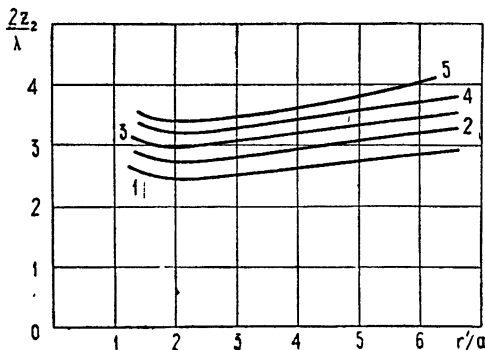


Рис. 6. Зависимость расстояния между каустиками на внешнем зеркале от радиуса кривизны внешнего зеркала ($r_0/a=0,125$; $m=0$; $q=1$; $1 \rightarrow n=8$; $2 \rightarrow n=10$; $3 \rightarrow n=12$; $4 \rightarrow n=14$; $5 \rightarrow n=16$).

нем зеркале имеет слабый минимум при $r'/a \sim 2$. Расстояние между каустиками по внутреннему цилиндру монотонно увеличивается при уменьшении кривизны внешнего зеркала (рис. 5). Отношение добротностей различных видов колебаний оценивалось по формуле (34). Результаты расчетов приведены на рис. 7 (для колебаний с $m=0$, $n=14$, $q=1$

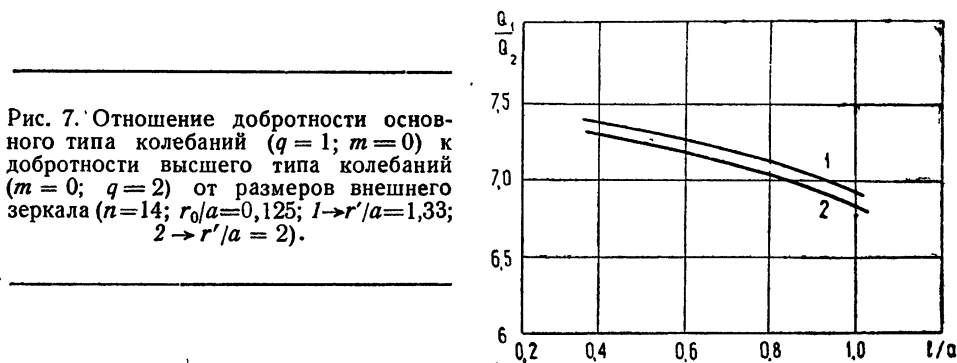


Рис. 7. Отношение добротности основного типа колебаний ($q=1$; $m=0$) к добротности высшего типа колебаний ($m=0$; $q=2$) от размеров внешнего зеркала ($n=14$; $r_0/a=0,125$; $1 \rightarrow r'/a=1,33$; $2 \rightarrow r'/a=2$).

и $q=2$). Добротность основного типа колебаний ($q=1$) превышает добротность первого высшего типа колебаний ($q=2$) примерно в 7 раз, и это отношение медленно падает с увеличением ширины зеркал.

В работе получены аналитические выражения и проведены численные расчеты основных параметров коаксиального открытого резонатора, образованного бочкообразным внешним и цилиндрическим внутренним зеркалом. Результаты численных расчетов позволяют выбрать геометрию резонатора для различных применений и позволили оценить точность асимптотических формул.

Из проведенного анализа видно, что селекция азимутальных видов как по частоте, так и по добротности недостаточна, и в практических устройствах необходимо принимать дополнительные меры для выделения рабочего вида колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Москалев, В. П. Петров, А. М. Стефановский, ЖТФ, 40, № 8, 1962 (1970).
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
3. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы; изд. Сов. радио, М., 1966.
4. Г. Бейтмен, Э. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 2, изд. Наука, М., 1965.
5. J. Meixner, Z. Angew. Math. Mech., 28, 304 (1948).
6. J. Meixner, Math. Nachr., 5, 1 (1951).

Поступила в редакцию
11 мая 1971 года.

COAXIAL OPEN RESONATOR CONSISTED OF RING-SHAPED OUTER
AND CYLINDRICAL INNER REFLECTOR STRIPS

A. T. Fialkovskii, V. E. Chayka

The basic parameters of the open resonator consisted of ring-shaped outer and cylindrical inner reflector strips are theoretically calculated. The analytical expressions are obtained for the natural frequencies, the caustic position, the field distribution and the ratio of the Q -qualities of different modes at $2\pi d/\lambda \gg 1$ (λ is the wavelength, d is the typical size of the resonator). The numerical results enable one to choose the resonator geometry for practical applications.

УДК 538.56

ПОЛЯ НЕКОТОРЫХ СПИРАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Н. И. Троцюк

Исследуется возможность создания спиральных полей, потенциал которых при разложении в ряд описывается одним или двумя членами. Найдены коэффициенты разложения и уравнения сечений внутренних поверхностей электродов плоскостью, перпендикулярной оси системы. Установлено соотношение между коэффициентами разложения потенциала спиральных систем с различным шагом.

Спиральные системы применяются на практике для формирования длинных малорасходящихся пучков заряженных частиц. Для расчетов траекторий частиц в таких системах необходимо знать распределение потенциала. Однако точно это распределение найдено только для спиральных систем, электроды которых представляют спирально-ленточные части разрезных круговых цилиндров [1, 2]. Кроме того, в [3, 4] при упрощающих предположениях на границе найдено распределение потенциала в биспирали. Вместе с тем нахождение распределения потенциала в других спиральных системах имеет важное значение для практики.

Решение задачи Дирихле для спиральных систем с электродами, не представляющими спиральные части разрезного кругового цилиндра, встречает значительные трудности. В случае, когда распределение потенциала выражается рядом с малым числом членов, более удобно решать обратную задачу — по заданному распределению находить форму внутренних поверхностей электродов. В настоящей работе будут рассмотрены поля спиральных систем, у которых потенциал может быть представлен в виде ряда с одним членом и с двумя членами.

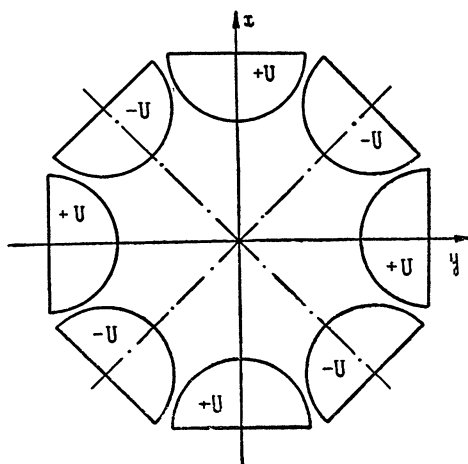


Рис. 1. Сечение восьмипольной спиральной системы ($N=4$) плоскостью, перпендикулярной оси.

Спиральная система представляет многополюсную систему, электроды которой закручены по винтовой линии и на них подаются чередующиеся потенциалы $+U$, $-U$. Поле такой системы обладает спиральной симметрией. Это значит, что в каждой плоскости, перпендикулярной оси системы, потенциал имеет N прямых симметрии и N прямых антисимметрии (общее число электродов равно $2N$). Соответствующие прямые симметрии (или антисимметрии) в двух плоскостях повернуты на угол, пропорциональный расстоянию между плоскостями (сечение системы с $N=4$ представлено на рис. 1).

Если выбрать систему координат x, y, z таким образом, чтобы ось z совпадала с осью системы, а ось x проходила через середину положительного электрода, то выражение для потенциала поля спиральной системы имеет вид [5]

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{[N(2n-1)]! [N(2n-1)\alpha]^{2\nu}}{4^{\nu} \nu! [N(2n-1) + \nu]!} \Phi_{N(2n-1)}(\alpha) \times \\ \times r^{N(2n-1)+2\nu} \cos [N(2n-1)(\psi - \alpha z)], \quad (1)$$

где r, ψ, z — цилиндрические координаты, α — постоянная величина, связанная с шагом спиральной системы h соотношением $\alpha = \pm 2\pi/h$ (знак плюс соответствует правой спирали, минус — левой), $\Phi_{N(2n-1)}(\alpha)$ — коэффициенты разложения потенциала.

Выражение (1) можно также записать в виде

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[N(2n-1)]! 2^{N(2n-1)}}{[N(2n-1)\alpha]^{N(2n-1)}} \Phi_{N(2n-1)}(\alpha) \times \\ \times I_{N(2n-1)}[N(2n-1)\alpha r] \cos [N(2n-1)(\psi - \alpha z)], \quad (2)$$

где I — модифицированная цилиндрическая функция.

Так как распределение потенциала в каждой плоскости $z = \text{const}$ одинаково, но картины распределения в разных плоскостях повернуты друг относительно друга, то достаточно рассматривать распределение в одной какой-либо плоскости, например, в плоскости $z = 0$. Для этого случая имеем

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[N(2n-1)]! 2^{N(2n-1)}}{[N(2n-1)\alpha]^{N(2n-1)}} \Phi_{N(2n-1)}(\alpha) \times \\ \times I_{N(2n-1)}[N(2n-1)\alpha r] \cos [N(2n-1)\psi]. \quad (3)$$

Рассмотрим кривую сечения поверхности электрода плоскостью $z = 0$. Достаточно рассматривать один электрод, например, тот, через который проходит ось x (ψ изменяется от $-\pi/2N$ до $\pi/2N$), поскольку сечения всех электродов одинаковы. Пусть уравнение этой кривой, которую будем называть граничной, имеет вид $r_r = f(\psi)$. Здесь $f(\psi)$ — четная функция, так как любая кривая равного потенциала в плоскости $z = 0$ симметрична относительно прямых $\psi = \pi k/N$ (k — произвольное целое число). Коэффициенты $\Phi_{N(2n-1)}(\alpha)$ определяются видом граничной кривой и величиной потенциала, которая этой кривой соответствует.

Пусть граничная кривая будет такой, что в правой части выражения (3) имеется всего лишь n -й член. Поскольку на граничной кривой при изменении ψ от $-\pi/2N$ до $\pi/2N$ потенциал постоянный и равен U , то из (3) получим

$$\frac{[N(2n-1)]! 2^{N(2n-1)}}{[N(2n-1)\alpha]^{N(2n-1)}} \Phi_{N(2n-1)}(\alpha) \times \\ \times I_{N(2n-1)}[N(2n-1)\alpha r_r] \cos [N(2n-1)\psi] = U. \quad (4)$$

Равенство (4) может выполняться только при $n = 1$ (для первого члена разложения потенциала в (3)), так как при больших n и изменении ψ от $-\pi/2N$ до $\pi/2N$ левая часть (4) изменяет знак и, следовательно, потенциал на граничной кривой не может быть постоянным.

Для $n = 1$ (4) запишется в виде

$$\frac{N! 2^N}{(N\alpha)^N} \Phi_N(\alpha) I_N(N\alpha r_r) \cos(N\psi) = U. \quad (5)$$

Вследствие четности $r_r = f(\psi)$ эта функция при $\psi = 0$ имеет экстремум. Экстремальное значение r_r обозначим через R . Тогда при $\psi = 0$ соотношение (5) будет иметь вид

$$\frac{N! 2^N}{(N\alpha)^N} \Phi_N(\alpha) I_N(N\alpha R) = U. \quad (6)$$

Из (6) найдем

$$\Phi_N(\alpha) = \frac{U(N\alpha)^N}{N! 2^N I_N(N\alpha R)}. \quad (7)$$

Таким образом, получен коэффициент разложения в ряд потенциала спиральной системы, когда в этом ряде имеется один первый член.

Подставляя (7) в (5), найдем уравнение граничной кривой, которая соответствует полю.

$$I_N(N\alpha r_r) \cos(N\psi) = I_N(N\alpha R). \quad (8)$$

Уравнение (8) позволяет при заданных N, α, R построить граничную кривую с помощью таблиц модифицированных цилиндрических функций.

Выражения (1) и (2) могут описывать также распределение потенциала в неспиральных многополюсных системах, поля которых двумерны и имеют N плоскостей симметрии и N плоскостей антисимметрии. Для этого в данных выражения необходимо сделать предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$. В результате находим

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{N(2n-1)} r^{N(2n-1)} \cos[N(2n-1)\psi], \quad (9)$$

где $\Phi_{N(2n-1)} = \Phi_{N(2n-1)}(0)$, т. е. коэффициенты разложения в ряд потенциала неспиральной системы получаются из коэффициентов разложения потенциала спиральной системы при $\alpha \rightarrow 0$. Формула (9) совпадает с формулой, приведенной в [6], если последнюю применить для частного случая двумерного поля.

Осуществим предельный переход при $\alpha \rightarrow 0$ от поля спиральной системы, для которого в правой части выражения (3) имеется лишь первый член, к двумерному полю неспиральной системы с одним первым членом в правой части выражения (9). Φ_N и уравнение граничной кривой для такой неспиральной системы можно получить соответственно из (7) и (8). Разлагая модифицированные цилиндрические функции в (7) и (8) в ряд по степеням аргумента и ограничиваясь первыми членами разложения, имеем

$$\Phi_N = \frac{U}{R^N}, \quad r_r^N = \frac{R^N}{\cos(N\psi)}. \quad (10)$$

Рассмотрим несколько конкретных спиральных и неспиральных многополюсных систем, в выражениях для потенциалов которых (3) и (9) имеется один первый член.

Для спиральных квадрупольных систем ($N = 2$) получаем

$$\Phi_2(\alpha) = \frac{U\alpha^2}{2I_2(2\alpha R)} \quad (11)$$

и уравнение граничной кривой в виде

$$I_2(2\alpha r_r) \cos(2\psi) = I_2(2\alpha R). \quad (12)$$

Для неспиральной системы из (10) при $N = 2$ следует

$$\Phi_2 = \frac{U}{R^2}, \quad r_r^2 = \frac{R^2}{\cos(2\psi)}. \quad (13)$$

Для неспиральной квадрупольной системы второе соотношение (13) дает гиперболу, а первое — коэффициент разложения потенциала системы с гиперболическими электродами. Этот результат совпадает с результатом, приведенным в [7].

Для биспиральной системы ($N = 1$) из (8) находим уравнение граничной кривой

$$I_1(\alpha r_r) \cos \psi = I_1(\alpha R). \quad (14)$$

Введем обозначение $\alpha R = a$. Тогда (14) запишется в виде

$$I_1\left(\alpha \frac{r_r}{R}\right) \cos \psi = I_1(a). \quad (15)$$

Если считать R постоянным, то величина a пропорциональна α . Следовательно, неспиральным системам соответствует $a = 0$. Для этого случая уравнение (15) будет иметь вид

$$r_r = \frac{R}{\cos \psi} \quad (16)$$

или $x = R = \text{const}$, т. е. в координатах x, y (16) дает уравнение прямой, параллельной оси y . На рис. 2 изображены эта граничная прямая (16) для неспиральной системы и граничная кривая для биспиральной системы (15) при $a = 1$ и значениях ψ от 0 до $\pi/2$ при условии, что в разложении потенциалов рассматриваемых систем имеется по одному члену.

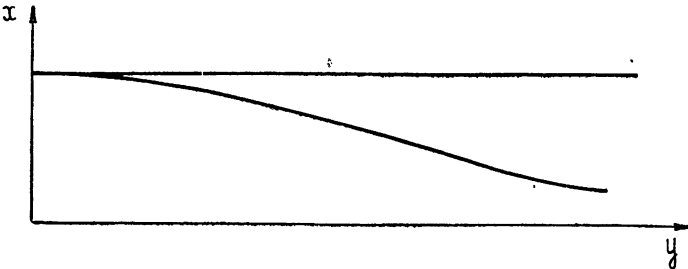


Рис. 2.

Рассмотрим далее спиральное поле, для которого потенциал (3) выражается в виде суммы двух членов (первого и n -го). Тогда для потенциала на поверхности положительного электрода (ψ изменяется от $-\pi/2N$ до $\pi/2N$) получим

$$\frac{N! 2^N}{(N\alpha)^N} \Phi_N(\alpha) I_N(N\alpha r_r) \cos(N\psi) + \frac{[N(2n-1)]! 2^{N(2n-1)}}{[N(2n-1)\alpha]^{N(2n-1)}} \Phi_{N(2n-1)}(\alpha) \times \\ \times I_{N(2n-1)}[N(2n-1)\alpha r_r] \cos[N(2n-1)\psi] = U. \quad (17)$$

При изменении ψ от 0 до $\pi/2N$ (рассматриваем только половину промежутка $-\pi/2N, \pi/2N$, поскольку граничная кривая симметрична относительно прямой $\psi = 0$) $\cos(N\psi)$ изменяется от 1 до 0. При этом

$\cos[N(2n-1)\psi]$ может несколько раз принимать значение нуль. Для выполнения равенства (17) необходимо подобрать такое n , чтобы $\cos[N(2n-1)\psi]$ при изменении ψ от 0 до $\pi/2N$ только один раз принимал значение нуль (в противном случае коэффициент $\Phi_N(\alpha)$ был бы неоднозначным). Это условие будет выполняться при $n=2$. Тогда равенство (17) запишется в виде

$$\frac{N!2^N}{(N\alpha)^N} \Phi_N(\alpha) I_N(N\alpha r_r) \cos(N\psi) + \frac{(3N)!2^{3N}}{(3N\alpha)^{3N}} \times \\ \times \Phi_{3N}(\alpha) I_{3N}(3N\alpha r_r) \cos(3N\psi) = U. \quad (18)$$

Для определения коэффициентов $\Phi_N(\alpha)$ и $\Phi_{3N}(\alpha)$ из (18) уже недостаточно задания величины r_r при $\psi=0$. Пусть при $\psi=0$ $r_r=R_1$. В качестве второго параметра удобно задать $r_r=R_2$ при $\psi=\pi/6N$. В этом случае уравнение, которое получается из (18), имеет наиболее простой вид.

При $\psi=0$ и $\psi=\pi/6N$ из (18) получаем соответственно

$$\frac{N!2^N}{(N\alpha)^N} \Phi_N(\alpha) I_N(N\alpha R_1) + \frac{(3N)!2^{3N}}{(3N\alpha)^{3N}} \Phi_{3N}(\alpha) I_{3N}(3N\alpha R_1) = U, \\ \frac{N!2^N}{(N\alpha)^N} \Phi_N(\alpha) I_N(N\alpha R_2) \frac{\sqrt{3}}{2} = U. \quad (19)$$

Из (19) находим

$$\Phi_N(\alpha) = \frac{U(N\alpha)^N(1-b)}{N!2^N I_N(N\alpha R_1)}, \quad (20)$$

$$\Phi_{3N}(\alpha) = \frac{U(3N\alpha)^{3N}b}{(3N)!2^{3N} I_{3N}(3N\alpha R_1)}, \quad (21)$$

где

$$b = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{I_N(N\alpha R_1)}{I_N(N\alpha R_2)}. \quad (22)$$

Из (22) следует, что величина b при изменении R_1 и R_2 может принимать значения от $-\infty$ до $+1$.

При подстановке (20), (21) в (18) уравнение граничной кривой запишется в виде

$$(1-b) \frac{I_N(N\alpha r_r)}{I_N(N\alpha R_1)} \cos(N\psi) + \frac{I_{3N}(3N\alpha r_r)}{I_{3N}(3N\alpha R_1)} b \cos(3N\psi) = 1. \quad (23)$$

Решить уравнение (23) аналитически относительно r_r не представляется возможным. Поскольку в (23) входят модифицированные цилиндрические функции различных порядков и аргументов, то в этом случае построить граничную кривую значительно труднее, чем прежде, когда потенциал поля спиральной системы выражался одним первым членом (3).

Для нахождения условий, при выполнении которых уравнение (23) будет иметь физически интересные решения, воспользуемся графическим решением. Запишем (23) в виде

$$\xi = c\eta + d, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= I_N \left(Na \frac{r_r}{R_1} \right), \quad \eta = I_{3N} \left(3Na \frac{r_r}{R_1} \right), \\ c &= - \frac{b}{1-b} \frac{I_N(Na)}{I_{3N}(3Na)} \frac{\cos(3N\psi)}{\cos(N\psi)}, \\ d &= \frac{I_N(Na)}{(1-b)\cos(N\psi)} \quad (a = \alpha R_1). \end{aligned} \quad (25)$$

С другой стороны, величины ξ , η связаны между собой некоторой зависимостью:

$$\xi = f_1(\eta), \quad (26)$$

поскольку обе они являются функциями $a \frac{r_r}{R_1}$; $I_{3N} \left(3Na \frac{r_r}{R_1} \right)$ с увеличением $a \frac{r_r}{R_1}$ растет при малых $a \frac{r_r}{R_1}$ медленнее и при больших быстрее, чем $I_N \left(Na \frac{r_r}{R_1} \right)$. Зависимость (26) имеет вид, представленный на рис. 3 кривой 0 (для определенности принимаем $N = 1$). В тех же координатах ξ , η уравнение (24) представляет уравнение прямой. Значения $I_N \left(Na \frac{r_r}{R_1} \right)$ для любого ψ могут быть найдены как значения ξ , соответствующие точке пересечения кривой (26) и прямой (24), а отсюда, пользуясь таблицами модифицированных цилиндрических функций, можно найти r_r/R_1 . Для существования спирально-симметричного поля, потенциал которого выражается двумя первыми членами (3), необходимо пересечение кривой (26) и прямой (24) при любом ψ от 0 до $\pi/2N$ (от ψ зависят параметры прямой c и d).

Из рассмотрения коэффициентов c и d (25) следует, что прямая (24) и кривая (26) могут пересекаться при любом ψ в пределах от 0 до $\pi/2N$ в случае отрицательных b . При отрицательных b и изменении ψ от 0 до $\pi/6N$ ($c > 0$) может быть две точки пересечения, при изменении ψ от $\pi/6N$ до $\pi/2N$ ($c < 0$) будет только одна точка пересечения. Поэтому следует обсудить, какую из двух точек пересечения кривой 0 и прямых, соответствующих значениям ψ от 0 до $\pi/6N$, можно использовать для расчетов r_r/R_1 .

Исходя из вышеизложенного, прямая, для которой $\psi = 0$ (прямая 1 на рис. 3), должна пересекаться с кривой 0 или, по крайней мере, ее касаться. Будем полагать, что эти линии пересекаются в точках a и b . Так как при $\psi = 0$ $r_r = R_1$, то для одной из этих точек $r_r/R_1 = 1$. При увеличении ψ прямая будет проходить несколько выше из-за увеличения d и наклон ее к оси η

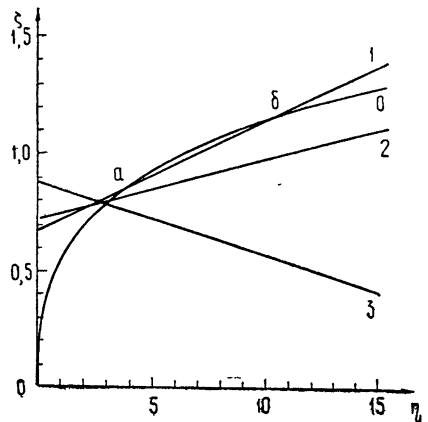


Рис. 3. Иллюстрация графического метода решения уравнения (23).

будет уменьшаться вследствие уменьшения c (прямая 2). Но так как c уменьшается быстрее, чем растет d (см. (25)), то можно ожидать, что при любом ψ прямая пересекает кривую.

С увеличением ψ обе точки пересечения удаляются друг от друга. При $\psi = \pi/6N$ точка пересечения, которой соответствует большее значение η , удаляется на бесконечность, и для $\psi > \pi/6N$ существует только одна точка пересечения (см. прямую 3) с конечным значением η . Если определять r_r/R_1 по той точке пересечения, которой соответствуют большие η , то граничная кривая будет иметь разрыв при $\psi = \pi/6N$. Чтобы граничная кривая не имела разрыва, необходимо определять r_r/R_1 по точке пересечения с меньшим η . Тогда точке a прямой 1 ($\psi = 0$) должно соответствовать значение η , при котором $r_r/R_1 = 1$.

Из рис. 3 видно, что в точке a угол между касательной к кривой 0 и осью η больше угла между прямой 1 и той же осью. Для случая, когда прямая 1 касается кривой 0, эти углы равны. Таким образом, для отсутствия разрывов граничной кривой при $\psi = \pi/6N$ необходимо выполнение указанного выше соотношения между углами наклона прямой 1 и касательной к кривой 0 в точке, для которой $r_r/R_1 = 1$. Из этих соображений найдем условие существования граничной кривой без разрывов:

$$\frac{df_1}{d\eta} \geq c. \quad (27)$$

Знак равенства в (27) соответствует тому случаю, когда прямая 1 касается кривой 0 в точке a .

Для нахождения $\frac{df_1}{d\eta}$ продифференцируем (26) по r_r/R_1 . Получим

$$I'_N \left(Na \frac{r_r}{R_1} \right) = 3 \frac{df_1}{d\eta} I'_{3N} \left(3Na \frac{r_r}{R_1} \right) \quad (28)$$

(штрихом обозначена производная от модифицированной цилиндрической функции по аргументу).

Используя выражения для производных модифицированных цилиндрических функций [8], из (27), (28), (25) при $r_r/R_1 = 1$ получим окончательно условие неразрывности граничной кривой:

$$|b| \leq f_2, \quad f_2 = \frac{e}{1-e}, \quad (29)$$

$$e = \frac{1}{3} \frac{I_{3N}(3Na) [I_{N+1}(Na) + (1/a) I_N(Na)]}{I_N(Na) [I_{3N-1}(3Na) - (1/a) I_{3N}(3Na)]}$$

Анализ показывает, что независимо от N при $a \rightarrow 0$ и $a \rightarrow \infty$ $f_2 \rightarrow 0,5$. Зависимость f_2 от a для биспиральной системы ($N = 1$) при небольших значениях a представлена на рис. 4.

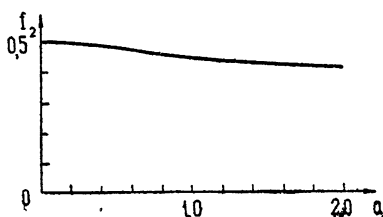


Рис. 4.



Рис. 5.

Выше предполагалось, что при $b < 0$ все прямые (24) для значений ψ от 0 до $\pi/6N$ пересекаются с кривой (26). Однако это предположение до сих пор не было обосновано. Найти в общем виде условие, при выполнении которого эти линии пересекаются, затруднительно. Поэтому попытаемся найти какое-либо не необходимое, но достаточное условие.

Потребуем, чтобы прямые для всех значений ψ от 0 до $\pi/6N$ пересекались с начальной прямой l в точке, координата η которой не больше определенного значения η_0 . Получим

$$|b| > \frac{I_{3N}(3Na)}{4 \eta_0 \cos(N\psi) [1 + \cos(N\psi)]} \quad (30)$$

Правая часть (30) имеет максимум при $N\psi = \pi/6$. Для этого случая

$$|b| > \frac{I_{3N}(3Na)}{\eta_0 2(2 + \sqrt{3})} \approx \frac{I_{3N}(3Na)}{\eta_0} 0,15. \quad (31)$$

Возьмем в качестве η_0 координату η точки a . Тогда $\eta_0 = I_{3N}(3Na)$, и из (31) получим

$$|b| > \frac{1}{2(2 + \sqrt{3})} \approx 0,15. \quad (32)$$

Таким образом, неравенство (32) представляет условие того, что координата η точки пересечения прямой, которой соответствует любое ψ от 0 до $\pi/6N$, с начальной прямой l ($\psi = 0$) меньше координаты η точки a и является достаточным условием (но может не являться необходимым) пересечения всех прямых с кривой 0.

Можно указать и другой метод нахождения граничной кривой. Запишем ее уравнение (23) в виде

$$\begin{aligned} \cos(N\psi) \left[(1-b) \frac{I_N \left(Na \frac{r_r}{R_1} \right)}{I_N(Na)} - 3b \frac{I_{3N} \left(3Na \frac{r_r}{R_1} \right)}{I_{3N}(3Na)} \right] + \\ + \cos^3(N\psi) 4b \frac{I_{3N} \left(3Na \frac{r_r}{R_1} \right)}{I_{3N}(3Na)} = 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Если задаваться определенными значениями r_r/R_1 , то $\cos(N\psi)$, а, следовательно, и ψ можно определить из кубического уравнения (33). При этом можно пользоваться условием неразрывности граничной кривой (29) и условием (32), которое является достаточным условием существования имеющих физический смысл решений (33).

На рис. 5 построена граничная кривая для биспиральной системы, в разложении потенциала которой имеются лишь два члена, при $b = -0,3$, $a = 1,4$.

Рассмотрим неспиральное двумерное поле с N плоскостями симметрии и N плоскостями антисимметрии, потенциал которого выражается в виде двух первых членов (9). Коэффициенты разложения потенциала Φ_N , Φ_{3N} и уравнение граничной кривой для такого поля получаем из соответствующих выражений для спиральных полей путем предельного перехода $\alpha \rightarrow 0$:

$$\Phi_N = \frac{U(1-b)}{R_1^N}, \quad \Phi_{3N} = \frac{Ub}{R_1^{3N}},$$

$$b = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^N; \quad (34)$$

$$(1 - b) \left(\frac{r_r}{R_1} \right)^N \cos(N\psi) + \left(\frac{r_r}{R_1} \right)^{3N} \cos(3N\psi) = 1. \quad (35)$$

Равенство (35) представляет уравнение третьей степени относительно $(r_r/R_1)^N$. Из (35) можно найти r_r/R_1 для любого ψ и, таким образом, определить граничную кривую.

Условие неразрывности граничной кривой для неспиральной системы с двумерным полем можно получить из (29) при $a \rightarrow 0$. Имеем

$$|b| \leq 0,5. \quad (36)$$

Неравенство (32) при значениях b , определяемых (34), является достаточным условием существования имеющих физический смысл решений (35).

Найдем соотношение между коэффициентами разложения потенциала спиральных систем с различными α . Вместо r введем новую переменную $\beta = \alpha r$. Из анализа выражения, полученного подстановкой в (3) β вместо αr , следует, что независимо от α величины $\Phi_{N(2n-1)}(\alpha)/\alpha^{N(2n-1)}$ имеют одинаковые значения для таких спиральных систем, для которых граничные кривые выражаются одинаковым уравнением $\beta_r = f(\psi)$ и для которых потенциал на граничной кривой одинаков.

Рассмотрим две спиральные системы со значениями величины α , равными α и α_0 . Если для первой системы в координатах r, ψ граничная кривая выражается уравнением $r_r = (1/\alpha)f(\psi)$, а для второй — $r_r = (1/\alpha_0)f(\psi)$, то при одинаковых потенциалах на электродах должно выполняться соотношение

$$\Phi_{N(2n-1)}(\alpha) = \Phi_{N(2n-1)}(\alpha_0) \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^{N(2n-1)}. \quad (37)$$

Из рассмотрения коэффициентов разложения потенциала систем со спирально-ленточными электродами в виде разрезных круговых цилиндров, приведенных в [2], а также выражений (7), (20) — (22) для коэффициентов разложения потенциала систем, у которых в (3) имеются один первый и два первых члена, следует, что для таких спиральных систем справедливо соотношение (37).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Страшкевич, Радиотехника и электроника, **10**, 341 (1965).
2. А. М. Страшкевич, Н. И. Троцюк, ЖТФ, **38**, 520 (1968).
3. А. Л. Игрицкий, Радиотехника и электроника, **6**, 613 (1961).
4. Р. К. Тіен, J. Appl., Phys., **25**, № 10, 1281 (1954).
5. Н. И. Троцюк, ЖТФ, **38**, 1140 (1968).
6. С. Я. Явор, А. Д. Дымников, ДАН СССР, **154**, № 4, 821 (1964).
7. M. L. Bullock, Amer. J. Phys., **23**, № 5, 264 (1955).
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.

FIELDS OF SOME SPIRAL SYSTEMS

N. I. Trotsyuk

We investigate the possibility of creating the spiral fields the potential of which at its series expansion is described by one or two terms. The expansion coefficients and the equations of the internal electrode surface sections by a plane perpendicular to the system axis are found. The relation between the expansion coefficients of the potential of spiral systems with a different step is established.

УДК 538.56

О «ПОВЕРХНОСТНЫХ ТОКАХ» ТРУБЧАТОГО ПУЧКА С ВИНТОВЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПОЛЕ БЫСТРОЙ ВОЛНЫ

Г. Н. Рапопорт, Н. Я. Коцаренко

Исследуются причины несовпадения результатов «гидродинамического» и «корпускулярного» методов анализа взаимодействия вращающегося электронного пучка в быстрой волной, приведенного в опубликованных работах.

Учет пульсаций границ пучка в «гидродинамическом» анализе введением эквивалентных поверхностных токов приводит, в случае малой толщины стенки пучка, к релятивистскому дисперсионному уравнению, полученному Гапоновым [1].

Рассматривается трубчатый пучок электронов, направляемых однородным магнитным полем по соосным винтовым траекториям в круглом волноводе.

Постоянная составляющая поля пространственного заряда считается скомпенсированной и предполагается выполненным условие синхронизма пучка с одной из собственных волн волновода*:

$$\left| \frac{\omega - n\omega_H - v_{\parallel} h_0}{v_{\parallel} h_0} \right| \ll 1, \quad (1)$$

где ω_H — циклотронная частота электронов, ω — частота сигнала и h_0 — коэффициент распространения волны TE_{nq} в отсутствие электронов, v_{\parallel} — продольная скорость электрона.

Ток пучка считается небольшим, что позволяет пренебречь возбуждением несинхронных волн и эффектами взаимодействия M -типа [1].

«Корпускулярный» метод [1], включающий релятивистские уравнения движения электронов в лагранжевых переменных и соответствующую модификацию [2] (или [3]) теории возбуждения волноводов [4], приводит в случае достаточно малой толщины δ «стенки» трубчатого пучка к уже известному дисперсионному уравнению (16) работы [1]** для волны TE в волноводе с нитевидным винтовым пучком. Следовательно, взаимодействие трубчатого вращающегося (как и винтового) потока с TE -волной определяется в основном азимутальной (фазовой) группировкой пучка, связанной с релятивистской зависимостью циклотронной частоты электрона от его энергии [1]. Продольная группировка электронов, связанная с поперечным магнитным полем волны, менее существенна, она уменьшает коэффициент связи пучка с быстрой волной.

Формальное решение той же задачи в эйлеровых переменных методом гидродинамической линейной теории [5, 6] (без специального рассмотрения процессов в пограничных слоях трубчатого пучка) приводит

* Поскольку методы анализа TM_{nq} -и TE_{nq} -волн аналогичны, мы ограничились здесь последними.

** В соответствии с указанным выше, предполагается, что из [1], (16) исключены слагаемые, связанные с взаимодействием M -типа.

к дисперсионному уравнению, практически совпадающему при $v_{\parallel} \ll c^2 h_0 \omega^{-1}$ с уравнением, полученным ранее в [7] «корпускулярным» методом, но без учета релятивистских эффектов. Правая часть (коэффициент связи) этого уравнения не содержит слагаемого, учитывающего фазовую группировку* в [1], и поэтому отличается от уравнения (16) работы [1] знаком.

В отличие от «корпускулярного» (лагранжевого) анализа, в рамках «формального гидродинамического» рассмотрения учет релятивистских эффектов сводится лишь к введению в коэффициент связи множителя $(1 - \omega v_{\parallel} / c^2 h_0)^2$, что не приводит к формуле (16) [1].

Ниже приводится анализ распределения тока в поверхностных слоях пучка, позволяющий устранить расхождение результатов «корпускулярного» и «гидродинамического» методов.

1. СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ ПУЧКА

В скомпенсированном трубчатом пучке ($a \leq r \leq b$) с малой толщиной стенки $b - a = \delta \ll \bar{r} = \frac{1}{2}(a + b)$ возможны различные стационарные распределения по радиусу r продольной $v_{\parallel} = c\beta_{\parallel}$ и поперечной $v_{\perp} = c\beta_{\perp} = r\omega_H$ скоростей электронов, а также угловой (циклотронной) частоты ω_H и плотности заряда ρ_0 .

В моноэнергетическом пучке $v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 = \text{const}$ и ω_H не зависит от r , а

$$v_{\parallel} = \bar{v}_{\parallel} - \frac{\bar{v}_{\perp}^2}{\bar{v}_{\parallel}} \frac{r - \bar{r}}{\bar{r}}. \quad (2a)$$

В случае $v_{\parallel} = \text{const}$ кинетическая энергия, а следовательно, и ω_H зависит от r . В слаборелятивистском приближении

$$\omega_H = \bar{\omega}_H \left[1 - \frac{\beta_{\perp}^2}{1 - \beta_{\parallel}^2} \frac{r - \bar{r}}{\bar{r}} \right]. \quad (2б)$$

(Для реализации такого пучка требуется небольшой перепад потенциала по радиусу эммитера.) Чертой в (2) обозначены величины, соответствующие $r = \bar{r}$.

В достаточно тонкостенных пучках небольшие вариации v_{\parallel} или ω_H , соответствующие (2), не оказывают влияния на дисперсионное уравнение и могут вообще не учитываться при выводе последнего в лагранжевых переменных. Окончательные результаты анализа в эйлеровых переменных также не зависят от δ , если эта величина достаточно мала. Однако в промежуточных выкладках оказывается необходимым учитывать влияние (2) на условия синхронизма различных слоев пучка с волной, которые определяются величиной D (см. ниже (9)), поскольку анализ в эйлеровых переменных проводится в предположении конечной толщины δ пучка. В случае (2а) можно пренебречь влиянием вариации v_{\parallel} на плотность продольного тока j_{0z} , считая последнюю постоянной при $\rho_0 = \text{const}$, а плотность азимутального тока равной

$$j_{0\theta} = j_{0z} \frac{\bar{v}_{\perp}}{\bar{v}_{\parallel}}. \quad (3)$$

* Имеется в виду слагаемое, пропорциональное G_0 (см. (15) ниже).

Ниже мы будем исходить из предположения, что $v_1 = \text{const}$, и считать выполненным (2б), поскольку это несколько упрощает решение уравнений движения.

2. ОБЪЕМНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ТОКИ В ПУЧКЕ

На рис. 1 показано продольное осевое сечение возмущенного труб-

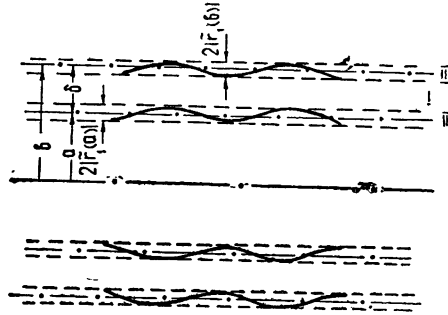


Рис. 1.

чатого пучка, a и b —радиусы границ невозмущенного пучка, $|\tilde{r}(a)|$ и $|\tilde{r}(b)|$ — амплитуды колебаний внутренней и внешней границ, причем $|\tilde{r}(a)| \ll \delta$, $|\tilde{r}(b)| \ll \delta$, поскольку рассматривается случай слабых сигналов.

В средней части пучка I, где $a + |\tilde{r}(a)| \leq r \leq b - |\tilde{r}(b)|$, справедливы все положения гидродинамической линейной теории. Так, переменные составляющие плотности заряда ρ_1 и плотности тока j_1 малы по сравнению с постоянными составляющими ρ_0 и j_0 , причем

$$j_1 = \rho_0 v_1 + \rho_1 v_0, \quad (4)$$

где $v = v_0 + v_1$ — скорость электронов.

Это не имеет места в пограничных слоях пучка II и III, где плотность тока периодически изменяется от 0 до j_0 и переменная составляющая j соизмерима с постоянной*. Поэтому «поверхностные» переменные токи** в пограничных слоях, несмотря на весьма малую толщину последних, должны учитываться наряду с объемными токами (4) в средней части пучка.

Представим переменные составляющие скорости, плотности тока и напряженностей поля в виде

$$v_1 = \tilde{v}(r) e^{i\Phi}, \quad j_1 = \tilde{j}(r) e^{i\Phi}, \quad (5)$$

$$E = \tilde{E}(r) e^{i\Phi}, \quad H = \tilde{H}(r) e^{i\Phi}, \quad (6)$$

где $\Phi = \omega t - n\theta - hz$, причем z, r, θ —цилиндрические координаты, h —искомый параметр распространения волны E_{nq} при наличии пучка.

Введем также величину

$$r_1 = \tilde{r}(r) e^{i\Phi} \quad (7)$$

* Речь идет о плотности тока в фиксированной точке, например, $r = b + \frac{1}{2} |\tilde{r}(b)|$.

** Необходимость учета поверхностных зарядов, обусловленных поперечным движением электронов, отмечалась еще в [8, 9].

радиального смещения электрона, находящегося в точке z, r, θ , относительно невозмущенной траектории. Учитывая, что радиальная скорость v_{1r} равна полной производной по времени от (7), легко показать, что

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{v}_r(r)}{iD(r)}, \quad (8)$$

где

$$D(r) = \omega - n\omega_H(r) - \hbar v_{\parallel}. \quad (9)$$

Очевидно, что уравнения границ возмущенного пучка могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} r &= a + \operatorname{Re} \{ \tilde{r}(a) e^{i\Phi} \}, \\ r &= b + \operatorname{Re} \{ \tilde{r}(b) e^{i\Phi} \}^*. \end{aligned} \quad (10)$$

Амплитуда первой гармоники плотности тока $\tilde{j}(r)$ определяется преобразованием Фурье

$$\tilde{j} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} j e^{-i\Phi} d\Phi. \quad (11)$$

Применяя (11) к пограничным слоям, следует положить $j = j_0$ на интервале $\Delta\Phi$, в котором поток проходит через рассматриваемую точку, и $j = 0$ вне этого интервала. Учитывая весьма малую толщину пограничных слоев, можно заменить распределенные в них токи эквивалентными поверхностными токами, локализованными на границах невозмущенного пучка**.

Амплитуды плотности этих поверхностных токов $\tilde{S}(a)$ и $\tilde{S}(b)$ равны интегралам от \tilde{j} по толщине соответствующих пограничных слоев. Опуская элементарные промежуточные выкладки, из (8)–(11) получим

$$\begin{aligned} \tilde{S}(a) &= ij_0 \frac{\tilde{v}_r(a)}{D(a)}, \\ \tilde{S}(b) &= -ij_0 \frac{\tilde{v}_r(b)}{D(b)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно «гидродинамической» линейной теории, амплитуды скорости \tilde{v} в любой точке и плотности тока \tilde{j} в средней части (I) пучка определяются из релятивистских уравнений движения. В соответствии с [6] имеем

$$\begin{aligned} \tilde{j} &= \frac{j_{0z}}{v_{\parallel}} \left\{ \tilde{v} + \frac{v_0}{D} \left[\hbar \tilde{v}_z + \frac{n}{r} \tilde{v}_b + \frac{i}{r} \frac{d}{dr} (r \tilde{v}_r) \right] \right\}, \\ v_z &= i \frac{G_z}{D}; \end{aligned} \quad (13)$$

* В формулах (4), (6) оператор Re был опущен.

** Радиальные составляющие токов пограничных слоев пренебрежимо малы по сравнению с тангенциальными.

$$\begin{aligned} \tilde{v}_r &= - \frac{iDG_r + x^2 \omega_H \beta_{\parallel} \beta_{\perp} G_z + x^2 \omega_H (1 - \beta_{\parallel}^2) G_{\theta}}{\omega_H^2 - D^2}, \\ \tilde{v}_{\theta} &= \frac{\omega_H x^{-2} (1 - \beta_{\parallel}^2)^{-1} G_r - i\omega_H^2 (1 - \beta_{\parallel}^2)^{-1} D^{-1} \beta_{\parallel} \beta_{\perp} G_z - iDG_{\theta}}{\omega_H^2 - D^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_0^{-1} \times G_z &= (1 - \beta_{\parallel}^2) \tilde{E}_z - \beta_{\parallel} \beta_{\perp} \tilde{E}_{\theta} - \zeta \beta_{\perp} \tilde{H}_r, \\ \eta_0^{-1} \times G_r &= \tilde{E}_r + \zeta \beta_{\perp} \tilde{H}_z - \zeta \beta_{\parallel} \tilde{H}_{\theta}, \\ \eta_0^{-1} \times G_{\theta} &= (1 - \beta_{\perp}^2) \tilde{E}_{\theta} - \beta_{\parallel} \beta_{\perp} \tilde{E}_z + \zeta \beta_{\parallel} \tilde{H}_r, \end{aligned} \quad (15)$$

η_0 — удельный заряд электрона, $\zeta = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ (ом).

Пренебрегая в правой части (13) малой величиной $(h - h_0)/h_0$ по сравнению с единицей и величинами порядка ωD^{-1} , 1 по сравнению с $\omega^2 D^{-2}$ (т. е. группировкой *M*-типа), получим из (13)

$$\tilde{j} \approx j_0 \frac{h_0 G_z}{D^2} \frac{1 - \beta_{\parallel} \beta_{\Phi}}{1 - \beta_{\parallel}^2}, \quad (16)$$

где $\beta_{\Phi} = \omega/ch_0$ — отношение фазовой скорости волны к скорости света.

Из (16) следует, что переменные токи в средней части пучка связаны, в основном, с продольной группировкой. Релятивистские эффекты учитываются в (16) лишь в виде малой поправки. В связи с зависимостью ω_H от r (см. (2)), резонансный знаменатель D может существенно изменяться на толщине трубки пучка, равной δ . Поэтому распределение плотности тока (16) по радиусу на интервале $a + |\tilde{r}(a)| \leq r \leq b - |\tilde{r}(b)|$ можно считать приближенно равномерным только при условии

$$\left| \frac{\Delta D}{D} \right| \ll 1, \quad (17)$$

где

$$\Delta D = \delta \left(\frac{dD}{dr} \right)_{r=\tilde{r}}. \quad (18)$$

Для сравнительной оценки величин «объемных» токов с плотностью (16) и «поверхностных» токов (12) интеграл от (16) по толщине средней части пучка обозначим σ . Учитывая (1), (2), (12), (14)–(16), (18), а также известные соотношения между составляющими поля TE_{nq} -волны, можно получить следующую оценку:

$$\left| \frac{\sigma}{S(a)} \right| \approx \left| \frac{\sigma}{S(b)} \right| \approx \frac{|1 - \beta_{\parallel} \beta_{\Phi}|}{(1 - \beta_{\parallel} / \beta_{\Phi})^2} \frac{1}{\beta_{\Phi}^2} \left| \frac{\Delta D}{D} \right|. \quad (19)$$

Из (19) следует, что «поверхностные» переменные токи значительно больше «объемных». Это тем более справедливо для пучков, удовлетворяющих условию (17), в которых распределение плотности «объемного» тока по толщине достаточно равномерно.

3. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ТОНКОСТЕННОГО ТРУБЧАТОГО ПУЧКА В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

Согласно [4] (см. (80.09), в «одноволновом приближении» получим

$$\tilde{E}(r) = AF e_{nq}, \quad (20)$$

$$\tilde{H}(r) = AF h_{nq},$$

где

$$A = - \frac{2ik\zeta}{h^2 - h_0^2} \frac{k_0^2}{[(k_0R)^2 - n^2] J_n^2(k_0R)}; \quad (21)$$

$$F = \int \tilde{j}(r') e^*(r') r' dr', \quad (22)$$

k_0R — q -й корень $J'_n(x)$, где J_n — функция Бесселя, R — радиус волновода, $k = \omega/c$, $e_{nq}(r) e^{-in\theta}$ и $h_{nq}(r) e^{-in\theta}$ — амплитуды полей собственной TE_{nq} -волны, нормированные так, что $e_\theta = J'_n(k_0r)$ (далее индексы n, q опускаем). Интегрирование в (22) распространяется как на средний слой, где \tilde{j} определяется формулой (13), так и на пограничные слои, в которых используется (11). Очевидно, что сумма интегралов по пограничным слоям равна

$$be^*(b)S(b) + ae^*(a)S(a). \quad (23)$$

После некоторых преобразований (23) с учетом (12) — (15), а также (2), (9), пренебрегая величинами порядка ωD^{-1} и 1 по сравнению с $\omega^2 D^{-2}$, получим из (22)

$$F = \frac{i\omega z}{v_\parallel} \int_a^b v_\perp e_\theta^*(F_1 + F_2) r' dr', \quad (24)$$

где

$$F_1 = \frac{\tilde{h}v_z + (n/r)v_\theta}{D} = i\eta_0 \frac{k\beta_\perp}{x(1 - \beta_\parallel^2)} \left(\frac{1}{\beta_\Phi} - \beta_\parallel \right)^2 \frac{\tilde{E}_\theta}{D^2}, \quad (25)$$

$$F_2 = i \frac{\tilde{v}_r}{D^2} D' = -i\eta_0 \frac{k\beta_\perp}{x(1 - \beta_\parallel^2)} \left(1 - \frac{\beta_\parallel}{\beta_\Phi} \right)^2 \frac{\tilde{E}_\theta}{D^2}.$$

Из (20) — (22) и (24), (25) на основании (17) приходим к следующему дисперсионному уравнению, заменяя D в (25) средним значением \bar{D} этой величины:

$$(h^2 - h_0^2) \left(\frac{\bar{D}}{v_\parallel} \right)^2 = KT, \quad (26)$$

где

$$K = \frac{\zeta I_0 \beta_\perp}{2\pi V_\parallel} \frac{v_\perp}{v_\parallel} k^2 k_0^2 \frac{[J'_n(k_0\bar{r})]^2}{[(k_0R)^2 - n^2] J_n^2(k_0R)}, \quad (27)$$

$$T = \frac{(1 - \beta_\parallel/\beta_\Phi)^2 - (1/\beta_\Phi - \beta_\parallel)^2}{x(1 - \beta_\parallel^2)}.$$

$U_{\parallel} = v_{\parallel}^2 / 2\gamma_0$ — «продольное» напряжение пучка. Легко видеть также, что

$$T \equiv \frac{k_0^2}{k^2} x^{-1}. \quad (28)$$

Следовательно, (26) с учетом (28) совпадает с [1], (16). (без учета M -эффектов). В этом легко убедиться, преобразовав (26) к уравнению 3-й степени.

Таким образом, «гидродинамический» метод с учетом поверхностных токов приводит к результату, совпадающему с полученным в [1] «корпускулярным» методом, при использовании релятивистских уравнений движения и идентичных приближений в обоих методах. Отметим, что объемным токам соответствует F_1 в (25) и второе слагаемое в числителе (27), а поверхностным — F_2 и первое слагаемое в (27). Поэтому «гидродинамический» метод без учета поверхностных токов приводит к уравнению (26), в котором

$$T = - \frac{(1/\beta_0 - \beta_{\parallel})^2}{x(1 - \beta_{\parallel}^2)}. \quad (29a)$$

Пренебрежение релятивистскими эффектами в (29 а) дает

$$T = - \frac{1}{\beta_0^2} = - \frac{h^2}{k^2}. \quad (29b)$$

Формула (26) с учетом (29 б) практически идентична дисперсионному уравнению [7], полученному «корпускулярным» методом в нерелятивистском приближении.

Из сказанного можно было бы сделать вывод, что в нерелятивистском приближении влияние поверхностных токов несущественно. Однако это имеет место только для частного случая стационарного пучка с неизменной продольной скоростью $v_{\parallel} = \text{const}$, что приводит к независимости D от r (при $\omega_H = \text{const}$) и к компенсации поверхностных токов внешней и внутренней границ пучка. В общем случае поверхностные токи следует учитывать и в нерелятивистском приближении. Так, в моноэнергетическом пучке вследствие (2 а) $D(b) \neq D(a)$ и поверхностные токи не компенсируются*.

В заключение отметим следующее.

1) При малой толщине δ стенки пучка коэффициенты дисперсионного уравнения не зависят от δ , а следовательно, от вида функций $v_{\parallel}(r)$ или $\omega_H(r)$, если вариации этих величин пропорциональны δ , как это имеет место в случаях (2 а) или (2 б).

2) Гидродинамическое рассмотрение с учетом поверхностных токов в пучке приводит к правильному (в одноволновом приближении) дисперсионному уравнению как для ТЕ-, так и для ТМ-волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 3, 547 (1961).
2. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 3, 441 (1959).
3. Г. Н. Рапопорт, Радиотехника и электроника, 5, 144 (1960); 5, 649 (1960).
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
5. Н. Я. Коцаренко, В. Н. Семик, А. М. Федорченко, Радиотехника и электроника, 14, № 7, 1277 (1969).

* Авторы пользуются случаем выразить благодарность В. К. Юдатову за ценные замечания по данному вопросу.

6. Н. Я. Коцаренко, В. Н. Семик, А. М. Федорченко, Радиотехника и электроника, 15, № 12 (1970).
7. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 3, 450 (1959).
8. S. Ramo, Phys. Rev, 56, 276 (1939),
9. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями (перев. под ред. М. М. Федорова), М., 1961, стр. 361.

Поступила в редакцию
23 февраля 1971 г.

ON SURFACE CURRENTS OF TUBE BEAM WITH SCREW ELECTRON TRAJECTORIES IN THE FIELD OF A FAST WAVE

G. N. Rapoport, N. Ya. Kotsarenko

The authors investigate the causes of disagreement between the results of „hydrodynamic“ and „corpuscular“ methods to analyze the interaction of a rotating electron beam with a fast wave given in papers referenced. The account of pulsations of the beam boundaries in hydrodynamic analysis by introducing the equivalent surface currents leads, in the case of small thickness of the beam wall, to the relativistic dispersion equation obtained by Gaponov [1].

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И
ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 533.9.01

**ВОЗБУЖДЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ
ПОЧТИ-МОНОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ПУЧКОМ**

В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов

В настоящей работе показано, что наряду с хорошо известным [1] когерентным механизмом возбуждения колебаний плазмы почти-моноэнергетическим пучком электронов, для которого распределение частиц по скоростям несущественно, существует столь же эффективный механизм возбуждения колебаний резонансными частицами пучка.

Дисперсионное уравнение колебаний системы плазма—пучок имеет вид [1]

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{k^2 v_b^2} [1 + i \sqrt{\pi} z w(z)] = 0, \tag{1}$$

где

$$\omega_{p,b}^2 = \frac{4\pi e^2 n_{p,b}}{m}, \quad v_{p,b}^2 = \frac{T_{p,b}}{m}, \quad z = \frac{\omega - ku}{\sqrt{2} kv_b},$$

$w(z)$ — функция Крампа, $n_{p,b}$ — плотность, $T_{p,b}$ — температура электронов плазмы пучка, u — направленная скорость пучка. Предполагается, что $|\omega|/k \gg v_p$ и $u \gg v_{p,b}$.

Если $(n_p/n_b)^{1/3} \ll u/v_b$, то колебания, распространяющиеся под углом θ , не близким к $\pi/2$, возбуждаются когерентно, и для них $\gamma = \text{Im } \omega \gg kv_b$ и $|z| \gg 1$ (θ — угол между векторами k и u).

Рассмотрим возбуждение колебаний при $\theta \approx \pi/2$. Если ku не близко к ω_p , то, полагая $\omega = ku + i\gamma$, получим

$$1 - \sqrt{\pi} x e^{x^2} + 2x e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{k^2 v_b^2}{\omega_b^2} \left[\left(\frac{\omega_p}{ku} \right)^2 - 1 \right], \tag{2}$$

где $x = \gamma/\sqrt{2} kv_b$. Левая часть уравнения (2) монотонно убывает при увеличении x от единицы (при $x = 0$) до нуля (при $x \rightarrow \infty$). Поэтому уравнение (2) всегда имеет неустойчивое ($x > 0$) решение при $|ku| < \omega_p$ и достаточно малых k . По порядку величины инкремент равен

$$\gamma \sim |ku| (n_b/n_p)^{1/2} \sim kv_b. \tag{3}$$

В случае резонанса $ku = \omega_p$, полагая $\omega = ku + \Delta\omega$, получим из (1) при $|\Delta\omega| \ll |ku|$, что

$$z + \eta [1 + i \sqrt{\pi} z w(z)] = 0, \quad \eta = \frac{\omega_b^2 \omega_p}{(\sqrt{2} kv_b)^3}. \tag{4}$$

При $\eta \ll 1$ из (4) следует, что $z = -\eta + i \sqrt{\pi} \eta^2$ (этот случай соответствует некогерентному возбуждению колебаний). Инкремент нарастания увеличивается с ростом η , и при $\eta \sim 1$ имеем $\text{Re } z \sim \text{Im } z \sim 1$, т. е.

$$\gamma \sim \omega_p (n_b/n_p)^{1/3} \sim kv_b. \tag{5}$$

Например, при $\eta = 1$ $z = -0,46 + i 0,36$. Таким образом, инкремент нарастания колебаний, имеющих фазовую скорость в системе отсчета пучка порядка тепловой скорости

частиц пучка ($|z| \sim 1$), равен по порядку величины инкременту нарастания колебаний, возбуждаемых моноэнергетическим пучком ($|z| \gg 1$).

Так как $ku = kv_b \cos \theta \approx \omega_D$ и $kv_b \sim \gamma$, то, учитывая (5), получим

$$\cos \theta \sim (v_b/u)(n_p/n_b)^{1/3} \ll 1, \quad (6)$$

т. е. угол θ действительно близок к $\pi/2$.

Полученные выражения применимы, если магнитное поле достаточно мало, так что $\gamma \gg \omega_H$.

При когерентном возбуждении колебаний на начальной стадии развития нагрев пучка практически отсутствует: температура пучка остается по порядку величины равной начальной температуре до тех пор, пока колебания не выйдут в сильно нелинейный режим, в котором станет возможным самопересечение траекторий частиц пучка. Противоположное заключение [2, 3] о наличии сильного нагрева электронов почти-моноэнергетического пучка даже на начальной стадии развития колебаний связано, как показано в [4, 5], с отождествлением средней плотности кинетической энергии пучка с его температурой. Оценку приращения температуры пучка при развитии гидродинамической неустойчивости можно также получить из цепочки квазигидродинамических уравнений для моментов функции распределения, которую можно оборвать из-за наличия малого параметра $kv_b/\gamma \ll 1$ [6, 7].

Отметим, что в работе [9] экспериментально показано, что «размытие» функции распределения почти-моноэнергетического пучка действительно связано с его «болтанкой» в поле колебаний. Самопересечение траекторий частиц пучка экспериментально обнаружено в работе [9], при этом каждый из образующихся пучков в многопоточковом движении остается моноэнергетическим. Результаты работ [8, 9] получены в условиях, когда развиваются только гидродинамические неустойчивости, а рассмотренные выше кинетические неустойчивости развиваться не могли из-за наличия достаточно сильного магнитного поля.

Естественно ожидать, что развитие рассмотренных кинетических неустойчивостей приведет, в соответствии с квазилинейной теорией, к размытию функции распределения частиц пучка в направлении распространения этих колебаний, т. е. к увеличению «поперечной» температуры пучка T_{\perp} . Следует, однако, отметить, что квазилинейное приближение применимо для описания увеличения только по порядку величины, так как $\gamma \sim kv_b$ и, кроме того, на этой стадии необходимо учитывать нелинейные эффекты, связанные с когерентным возбуждением колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
2. В. Д. Шапиро, УФЖ, 6, 426 (1963).
3. В. Д. Шапиро, ЖЭТФ, 44, 613 (1963).
4. В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов, Препринт, ХФТИ, Харьков, 1970.
5. W. E. Drummond, J. H. Malmberg, T. M. O'Neil, J. R. Thompson, Phys. Fluids, 13, 2422 (1970).
6. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, сб. Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза, вып. 3, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр. 3.
7. V. Ogaevskii, R. Chodura, W. Feneberg, Plasma Phys, 10, 819 (1968).
8. V. D. Fedorchenko, B. N. Rutkevich, V. I. Muratov, Nuclear Fusion, 11, 43 (1971).
9. М. Д. Габович, В. П. Коваленко, УФЖ, 15, 1890 (1970).

Поступила в редакцию
11 января 1971 г.

УДК 539.28

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДВУХЧАСТОТНОЕ КВАДРУПОЛЬНОЕ СПИНОВОЕ ЭХО

В. С. Гречишкин, Е. М. Шишкин

Двухчастотный метод в ядерном квадрупольном резонансе предложен в работах [1, 2]. В этом методе радиочастотные импульсы одновременно возбуждают два соседних перехода с частотами ω_1 и ω_2 . При этом, кроме основного сигнала спинового эха при

* Например, переходы $\pm 1/2 \rightarrow \pm 3/2(\omega_1)$ и $\pm 3/2 \rightarrow \pm 5/2(\omega_2)$ для спина $J = 5/2$.

$t \approx 2\tau$, где τ — интервал времени между импульсами, могут возникать дополнительные сигналы эха при $t \neq 2\tau$.

В работах [3, 4] отмечалось, что введение примесей в образец приводит к подавлению дополнительных сигналов эха в двухчастотном методе, поскольку дополнительные сигналы эха на частоте ω_1 можно наблюдать в моменты времени $t = (1 + \omega_2/\omega_1)\tau$ и $t = (2 + \omega_2/\omega_1)\tau$, а на частоте ω_2 — в моменты $t = (1 + \omega_1/\omega_2)\tau$ и $t = (2 + \omega_1/\omega_2)\tau$. Введение же примесей вызывает сдвиг частот ω_1 и ω_2 в разных точках образца, что может приводить к расширению дополнительных сигналов эха.

Положение основных сигналов эха при $t = 2\tau$ не зависит от отношения частот ω_1/ω_2 , поэтому введение квадрупольной неоднородности не влияет в первом приближении на интенсивность этих сигналов.

Представляет интерес исследовать, как воздействует внешнее магнитное поле на двухчастотное квадрупольное спиновое эхо в поликристаллическом образце.

Эксперимент был выполнен нами при 77°K на ядрах Bi^{209} ($J = 9/2$) в BiCl_3 . Два радиочастотных импульса (90 и 180°) с частотой заполнения $\omega_1 = 37,9 \text{ Мгц}$ и два импульса с частотой заполнения $\omega_2 = 52,7 \text{ Мгц}$ с помощью системы скрещенных катушек возбуждали двухчастотное квадрупольное эхо*.

Сигналы спинового эха с выхода двух импульсных приемников, настроенных на частоты ω_1 и ω_2 , подавались на вход двулучевого осциллографа. Такой метод очень удобен, так как позволяет легко находить сигналы от двух соседних переходов одновременно. Как только частоты заполнения импульсов попадали в резонанс с частотами

соответствующих переходов, то, кроме сигналов эха при $t \approx 2\tau$, возникали дополнительные сигналы, положение которых определялось отношением частот ω_1/ω_2 и ω_2/ω_1 (см. рис. 1). Если наложить внешнее поле H_0 , то дополнительные сигналы исчезают (см. рис. 2), тогда как сигналы эха при $t \approx 2\tau$ остаются.

Таким образом, магнитная неоднородность действует аналогично квадрупольной. Увеличение H_0 позволяло наблюдать постепенное расширение дополнительных сигналов эха и уменьшение их интенсивности

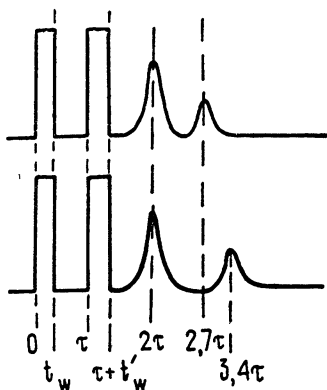
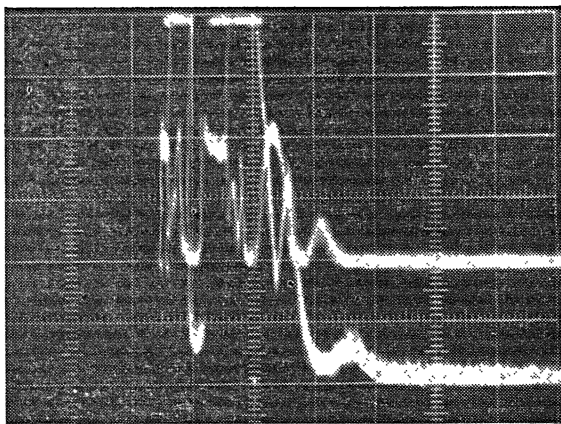


Рис. 1. Сигналы двухчастотного квадрупольного спинового эха ядер Bi^{209} в BiCl_3 при 77°K. На верхнем луче видны сигналы на частоте ω_2 , а на нижнем — на частоте ω_1 . Внешнее магнитное поле отсутствует. Хорошо заметен эхо на частотах ω_1 и ω_2 . $t'_w =$

$$= 10 \text{ мксек}; t_w = \frac{3}{2} t'_w.$$

Введение магнитной неоднородности можно описать с помощью дополнительного члена в гамильтониане [9]

$$H_{\text{д}} = b \tilde{\mu} J_z \cos \theta, \quad (1)$$

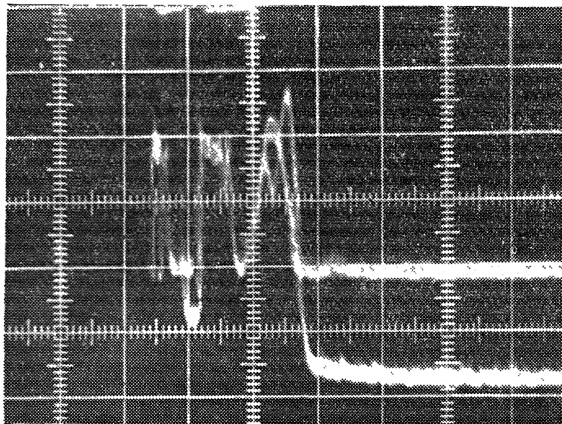
* Для этого импульсы должны действовать одновременно на нижний и верхний переход ($\pm 5/2 \rightarrow \pm 7/2$ и $\pm 7/2 \rightarrow \pm 9/2$).

где b — константа, J_z — оператор спинового момента ядра, θ — угол между направлением оси z — градиента электрического поля — и направлением H_0 . Для поликристалла наложение внешнего поля $H_0 \sim 1$ гс означает введение дополнительной магнитной неоднородности, достаточной для устранения дополнительных эхо. Внешнее поле H_0 вызывает расщепление частот ω_1 и ω_2 , причем это расщепление неодинаково для разных порошкообразных частиц в образце. В силу этого следует ожидать уширения дополнительных сигналов двухчастотного квадрупольного эха, поскольку дополнительные сигналы от разных «поросенок» будут возникать в разные моменты времени, что и было обнаружено экспериментально.

Рис. 2. Сигналы двухчастотного квадрупольного эха ядер Bi^{209} при $H_0 = 1$ гс. Основные сигналы эха на обоих переходах возникают в один и тот же момент времени

$$t \approx 2\tau; \tau > t_w; t'_w.$$

Масштаб — 50 мксек·см $^{-1}$.



Данный эффект может быть использован для идентификации дополнительных сигналов эха в двухчастотном методе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Гречишкин, А. Д. Гордеев, Н. Е. Айнбиндер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 507 (1966).
2. В. С. Гречишкин, Н. Е. Айнбиндер, Письма в ЖЭТФ, 5, № 3, 87 (1967).
3. V. S. Grechishkin, 16 Colloque AMPERE, Bucharest, 1970, p. 94.
4. В. С. Гречишкин, сб. Радиоспектроскопия, № 6, Труды Естественно-научного института при Пермском ун-те, 12, 3 (1969).
5. J. Butterworth, Proc. Phys. Soc., 86, 297 (1965).

Пермский государственный университет

Поступила в редакцию
11 января 1971 г.

УДК 538 56

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ СИГНАЛОВ

Я. А. Фомин, А. М. Рембовский

Многие задачи обнаружения сигналов на фоне помех приводят к необходимости применения методов последовательного анализа, позволяющего значительно сократить длительность процедуры обнаружения. Для практического использования последовательной процедуры обнаружения требуется знать распределение вероятностей ее длительности. В частности, представляет интерес исследование последовательной процедуры обнаружения флуктуирующего сигнала на фоне помехи с произвольной формой энергетического спектра после совместного их прохождения через частотные дискриминаторы. Приближенные выражения распределения длительности последовательной процедуры можно получить, воспользовавшись методами анализа вероятностных характеристик выбросов случайных последовательностей [1].

Распределение вероятностей амплитуд на выходе частотного дискриминатора при действии флуктуирующего сигнала и помехи с произвольной формой энергетического спектра при точной настройке на сигнал определяется следующим выражением [2]:

$$W(u) = \frac{1}{\sqrt{2D}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|u|}{\sqrt{D}}\right). \quad (1)$$

Здесь $D = \int_0^{\infty} g(\omega) d\omega$, а $g(\omega)$ определяется из выражений для спектральных плотностей процессов на выходе дискриминатора, обусловленных биениями компонент помехи $g_{пн}(\omega)$, сигнала $g_{сс}(\omega)$ и помехи с сигналом $g_{сн}(\omega)$ [3]

Пусть гипотеза H_1 соответствует предположению о том, что на вход частотного дискриминатора поступает случайный процесс, представляющий собой помеху с произвольной формой энергетического спектра $G_{пн}(\omega)$, а гипотеза H_0 — сумма этой помехи с флуктуирующим сигналом, имеющим энергетический спектр $G_{сс}(\omega)$. Задачей последовательного обнаружителя, стоящего на выходе частотного дискриминатора, является вынесение решения о принятии гипотезы H_0 или H_1 . Для вынесения такого решения более удобным оказывается оперировать с однополярным процессом, который может быть получен, например, линейным двухполупериодным детектированием случайного процесса, получаемого на выходе частотного дискриминатора. Математически указанная операция описывается модулем входного случайного процесса $\eta(t)$:

$$\xi(t) = |\eta(t)|,$$

в результате чего исходное распределение вероятностей (1) переходит в одностороннее экспоненциальное распределение

$$W(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \quad (x > 0), \quad (2)$$

где $\lambda = \sqrt{2/D}$.

Случайные процессы, соответствующие гипотезам H_1 и H_0 , отличаются параметром λ ; последовательный обнаружитель путем анализа выборочных значений x_1, x_2, \dots, x_n , принадлежащих распределению (2), должен вынести решение γ_1 (параметр распределения равен λ_1) или γ_0 (параметр равен λ_0). Логарифм отношения правдоподобия при независимых x_1, x_2, \dots, x_n равен [4]

$$\ln l(x_1, x_2, \dots, x_n) = n \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - (\lambda_1 - \lambda_0) \sum_{i=1}^n x_i.$$

При заданных ошибках первого и второго рода α и β последовательное правило решения формулируется следующим образом: принимается гипотеза H_1 , если для n -го наблюдения

$$K_m^1 < \sum_{i=1}^m x_i < K_m^0 \quad (m=1, 2, \dots, n-1),$$

$$K_n^1 \geq \sum_{i=1}^n x_i,$$

и принимается гипотеза H_0 , если для n -го наблюдения

$$K_m^1 < \sum_{i=1}^m x_i < K_m^0 \quad (m=1, 2, \dots, n-1),$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq K_n^0,$$

где

$$K_m^1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \left[m \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} \right],$$

$$K_m^0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \left[m \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} \right].$$

В данном случае процедура последовательного анализа заключается в сравнении значений случайной последовательности сумм независимых случайных величин с двумя переменными порогами K_m^1 и K_m^0 .

Независимые приближения распределения длительностей последовательных процедур в случае гипотез H_0 и H_1 $P(n/H_0)$ и $P(n/H_1)$ выражаются через табулированную [5] неполную гамма-функцию $I(x, m)$:

$$P(n/H_0) = [1 - I(\lambda_0 K_n^0, n) + I(\lambda_0 K_n^1, n)] \prod_{l=1}^{n-1} [I(\lambda_0 K_l^0, l) - I(\lambda_0 K_l^1, l)]; \quad (3)$$

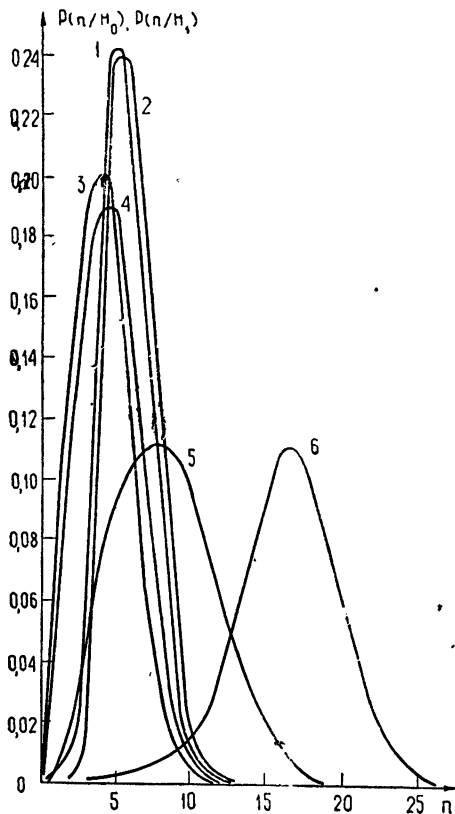
$$P(n/H_1) = [1 - I(\lambda_1 K_n^0, n) + I(\lambda_1 K_n^1, n)] \prod_{l=1}^{n-1} [I(\lambda_1 K_l^0, l) - I(\lambda_1 K_l^1, l)]. \quad (4)$$

Для иллюстрации полученных результатов рассчитаны распределения длительности последовательных процедур на выходе частотного дискриминатора в предположении, что на его входе имеется либо квазидетерминированный процесс с дисперсией σ_c^2 и энергетическим спектром $G_c(\omega)$ [6] на фоне стационарного нормального шума с нулевым средним, дисперсией σ_n^2 и энергетическим спектром $G_n(\omega)$, равномерным в полосе Δ (гипотеза H_0), либо один шум (гипотеза H_1). Частота сигнала, как отмечалось ранее, предполагается равной переходной частоте дискриминатора.

На рис. 1 приведены результаты расчетов $P(n/H_0)$ и $P(n/H_1)$ для отношения $\sigma_c/\sigma_n = \sqrt{10}$ и вероятностей ошибок $\alpha = \beta = 0,1$; $\alpha = 0,001$; $\beta = 0,1$ и $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,001$. Анализируя результаты вычислений, можно отметить, что при больших значениях допустимых вероятностей ошибок первого и второго рода $\alpha = \beta = 0,1$, распределения $P(n/H_0)$ и $P(n/H_1)$ наиболее компактны. Меньшей компактностью отличаются распределения $P(n/H_0)$ при $\alpha = 0,001$; $\beta = 0,1$ и $P(n/H_1)$ при $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,001$.

Вычисление математического ожидания распределений (3), (4) дает результаты, согласующиеся со значениями математических ожиданий, вычисленных по известным формулам [4].

1— $P(n/H_1)$ $\alpha = \beta = 0,1$; 2— $P(n/H_1)$ $\alpha = 0,001$, $\beta = 0,1$; 3— $P(n/H_0)$ $\alpha = \beta = 0,1$; 4— $P(n/H_0)$ $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,001$; 5— $P(n/H_0)$ $\alpha = 0,001$, $\beta = 0,1$; 6— $P(n/H_1)$ $\alpha = 0,1$, $\beta = 0,001$.



ЛИТЕРАТУРА

1. Я. А. Фомин, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 2, № 1, 54 (1969).
2. Ю. А. Евсиков, Е. И. Потапкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 14, № 12 (1971).
3. Ю. А. Евсиков, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 13, № 5, 607 (1970).
4. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 2, изд. Сов. радио, М., 1968.
5. В. И. Пагурова, Таблицы неполной гамма-функции, изд. ВЦ АН СССР, М., 1963.
6. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, кн. 1, изд. Сов. радио, М., 1966.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ АНТЕНН СВЧ ДИАПАЗОНА

Н. В. Котосонов, Я. Л. Хлявич, О. В. Базарский

В последнее время значительный интерес исследователей вызывает распространение голографических методов на исследования в радиочастотном диапазоне электромагнитного спектра. Однако несмотря на то, что ряду исследователей удалось экспериментально подтвердить возможность записи микроволновых голограмм, в литературе не определены требования к излучателям СВЧ диапазона, которые обычно используются при записи радиоголограмм.

Как известно, существующие СВЧ генераторы являются источниками квазимонохроматического излучения, когда $\Delta\nu/\nu_0 \ll 1$ ($\Delta\nu$ — ширина спектра излучения, ν_0 — основная частота генератора). С другой стороны, время анализа микроволновых колебаний в каждой точке ограничивается инерционностью детектора или индикаторного прибора и составляет величину, много большую длительности непрерывных пучков $\tau = 4\pi/\Delta\nu$, определяющих время когерентности. Тогда колебания, приходящие от двух точек СВЧ источника, некогерентированы и складываются некогерентно [1]. Если разность хода между опорным и предметным пучками много меньше длины когерентности излучения $l = c/\Delta\nu$ (c — скорость света), то возможна запись радиоголограмм с высоким контрастом.

Однако при этом возможны случаи (например, в радиоинтроскопии), когда угловые размеры источника будут соизмеримы с угловыми размерами исследуемого объекта. Следовательно, благодаря освещению объекта квазимонохроматическим излучением протяженного источника, возможно облучение различных точек объекта колебаниями с различной степенью когерентности. Вследствие этого представляется интересным исследовать пространственную когерентность основных излучателей СВЧ колебаний, применяемых для записи радиоголограмм, рупорных и линзовых антенн.

Степень пространственной когерентности колебаний в двух точках γ_{12} , облученных протяженным источником квазимонохроматического излучения, выражается через нормированное преобразование Фурье от распределения энергии $F(x, y)$ в раскрыве источника [1]:

$$\gamma_{12} = \frac{\int_{-a}^a \int_{-b}^b F(x, y) \exp[-i(\omega_x x + \omega_y y)] dx dy}{\int_{-a}^a \int_{-b}^b F(x, y) dx dy}, \quad (1)$$

где $\omega_x = 2\pi i/\lambda f$, λ — длина волны излучения, f — расстояние от источника до объекта, $2a$ — апертура источника радиоизлучения. Следует подчеркнуть, что данная формула применима лишь в случае квазимонохроматических источников, когда время анализа излучения в каждой точке много больше времени когерентности.

В табл. 1 для различных излучателей приведены распределение энергии $F(x, y)$ в раскрыве, и степень пространственной когерентности γ_{12} , рассчитанная теоретически.

Экспериментально степень пространственной когерентности излучателей измерялась по контрасту интерференционных полос в опыте Юнга:

$$\gamma_{12} = \frac{\gamma}{2 - \gamma},$$

где γ — контраст полос.

В качестве генератора СВЧ излучения служила лампа обратной волны с рабочей частотой 125 ГГц и шириной спектра излучения $\Delta\nu = 0,6$ ГГц, что соответствует времени когерентности излучения $2 \cdot 10^{-8}$ сек. Контраст интерференционных полос определялся по показаниям индикаторного прибора, включенного в цепь детектора. Инерционность индикаторного прибора составляла 1,8 сек.

Теоретические и экспериментальные кривые зависимости степени пространственной когерентности от текущей координаты приведены на рис. 1, 2. Кривые на рис. 1 характеризуют пространственную когерентность пирамидального рупора в E - и H -плоскостях. Кривые на рис. 2 определяют пространственную когерентность линзовой антенны с цилиндрическим и колоколообразным распределением поля в раскрыве. Координата u_1 табл. 1 соответствует расстоянию, на котором степень пространственной когерентности $\gamma_{12} = 0,88$ при контрасте изображения $\gamma = 0,93$. Аналогично для координаты u_2 $\gamma_{12} = 0,053$ при контрасте изображения $\gamma = 0,1$. Таким образом, если размер

объекта $2d$ не превышает расстояния когерентности излучения на заданном уровне, т. е. $2d < 2u_1$ для $\gamma_{12} = 0,88$, то объект облучается когерентно. Если $2d > 2u_2$ для $\gamma_{12} = 0,053$, то часть объекта облучается некогерентно.

Таблица 1

	$F(x)$	γ_{12}	u_1	u_2
Пирамидальный рупор	$E_{пл} \begin{cases} 1 & (x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$	$\frac{\sin \omega_x a}{\omega_x a}$	$0,13 \frac{\lambda f}{a}$	$0,47 \frac{\lambda f}{a}$
	$H_{пл} \cos \frac{\pi}{2} \frac{y}{b}$	$\frac{\cos \omega_y b}{1 - [(2/\pi) \omega_y b]^2}$	$0,19 \frac{\lambda f}{b}$	$0,69 \frac{\lambda f}{b}$
Линзовая антенна	$\begin{cases} 1 & (x^2 + y^2 < a^2) \\ 0 & (x^2 + y^2 > a^2) \end{cases}$	$\frac{2J_1(\omega_x a)}{\omega_x a}$	$0,16 \frac{\lambda f}{a}$	$0,57 \frac{\lambda f}{a}$
	$\begin{cases} \exp[-\beta^2(x^2+y^2)] \\ \beta^2 a^2 \geq 2 \end{cases}$	$\begin{aligned} & \left[\exp\left(-\frac{\omega_x^2}{4\beta^2}\right) \Phi \sqrt{\beta^2 a^2 + \frac{\omega_x^2}{4\beta^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{\omega_x}{2\beta}\right) \right] \left[\exp\left(\frac{\omega_y^2}{4\beta^2}\right) \times \right. \\ & \left. \times \Phi \sqrt{\beta^2 a^2 + \frac{\omega_y^2}{4\beta^2}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{\omega_y}{2\beta}\right) \right] \end{aligned}$	$\begin{cases} \beta=1 & 0,07 \frac{\lambda f}{a} \\ \beta=2 & 0,16 \frac{\lambda f}{a} \end{cases}$	$\begin{cases} 0,44 \frac{\lambda f}{a} \\ 0,91 \frac{\lambda f}{a} \end{cases}$

В таблице приняты следующие обозначения:

$$\Phi\left(\sqrt{\beta^2 a^2 + \frac{\omega_x^2}{4\beta^2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\beta^2 a^2 + \frac{\omega_x^2}{4\beta^2}}} e^{-t^2} dt,$$

$$F\left(\frac{\omega_x}{2\beta}\right) = \exp\left(-\frac{\omega_x^2}{4\beta^2}\right) \int_0^{\omega_x/2\beta} e^{t^2} dt.$$

Хорошее совпадение теоретических и экспериментальных кривых подтверждает, что для квазимонохроматических СВЧ источников падение контраста интерференционной картины определяется в основном степенью пространственной когерентности излучателя, а не шириной спектра излучения, так как разность хода, при которой контраст полос в данном эксперименте стал бы равным нулю, равна 50 см, а максимальная разность хода, существовавшая при измерениях, составляла 1 см и практически не должна была сказываться на контрасте полос.

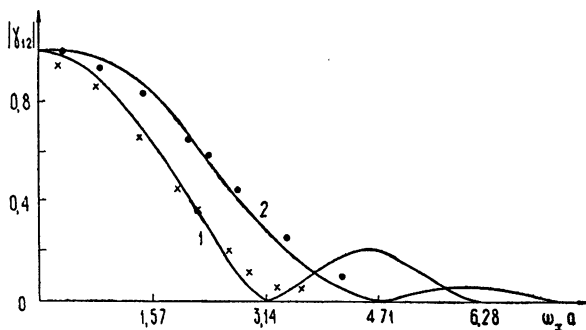


Рис. 1. Пространственная когерентность пирамидального рупора. Кривая 1 — E-плоскость, кривая 2 — H-плоскость. Крестиками и точками обозначены экспериментально измеренные значения γ_{12} .

Анализ, проведенный для квазимонохроматических СВЧ источников с временем когерентности, много меньшим времени наблюдения в каждой точке, позволяет сделать следующие выводы.

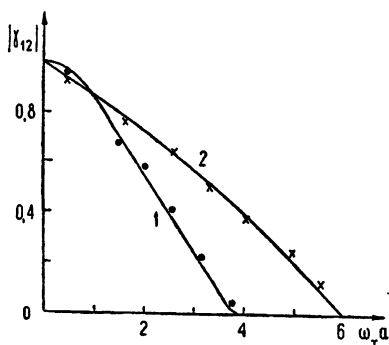


Рис. 2. Пространственная когерентность линзовой антенны. Кривая 1 соответствует цилиндрическому распределению поля в раскрыве антенны. Кривая 2 соответствует колоколообразному распределению поля в раскрыве с $\beta=2$. Крестиками и точками обозначены экспериментально измеренные значения γ_{12} .

1) Применение в качестве излучателей для записи радиоголограмм рупорных антенн нецелесообразно из-за различной степени пространственной когерентности в E - и H -плоскостях.

2) Наиболее высокая степень пространственной когерентности отмечается у линзовых антенн с колоколообразным распределением поля в раскрыве при достаточно больших значениях β . Однако из-за значительного градиента интенсивности облучения объекта может возникнуть искажение изображения при восстановлении.

3) Линзовая антенна с цилиндрическим распределением поля в раскрыве [2], обладая высокой степенью пространственной когерентности, формирует равномерное распределение интенсивности на объекте. Следовательно, применение указанного излучателя наиболее целесообразно при записи микроволновых голограмм.

Следует отметить, что приведенные рассуждения и формула (1) справедливы лишь для случая расположения области анализа во френелевской зоне, когда источник излучения является протяженным относительно точек измерения пространственной когерентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Франсон, С. Сланский, Когерентность в оптике, изд. Наука, М., 1967.
2. Н. В. Котосонов, Я. Л. Хлявич, О. В. Базарский, А. М. Шевченко, Труды XXV Всесоюзной сессии НТО РЭС, Москва, 1969 г.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
26 октября 1970 г.

УДК 621.385.6

ПЕРЕХОДНЫЕ ТОКИ, ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ЗАРЯДОМ, В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ С УЧЕТОМ ЗАХВАТА НА ЛОВУШКИ

А. И. Руденко

Некоторые вопросы теории переходных токов, ограниченных пространственным зарядом (ТОПЗ), рассмотрены в работе [1], в которой получено аналитическое решение системы уравнений ТОПЗ в отсутствие ловушек и даны примеры численного решения при наличии ловушек для определенного типа начальных и граничных условий (установление стационарного тока после включения напряжения). Поскольку изучение переходных ТОПЗ дает ценную информацию о твердых телах, интересно рассмотреть другие типы начальных и граничных условий (например, релаксацию неравновесного распределения заряда).

Системы нелинейных уравнений с частными производными (а система ТОПЗ является таковой) не имеют общих методов решения, способ решения с одним типом начальных и граничных условий не распространяется на условия другого типа, система ТОПЗ с новыми условиями представляет самостоятельную задачу. Важно

отметить, что для выбранных в настоящей работе условий получено аналитическое решение и при наличии ловушек

Рассматриваются материалы и напряжения, при которых число инжектированных носителей значительно превышает число носителей собственных, а плотность захваченных носителей мала по сравнению с плотностью незанятых уровней захвата. Образец — плоскопараллельная пластина толщиной L с монополярным механизмом проводимости (q — заряд носителя, μ — подвижность носителя) В момент времени $t' = 0$ на одной плоскости образца ($x' = 0$) инжектируются носители поверхностной плотности σ_0 ; на противоположной стороне $x' = L$ находятся неподвижные заряды такой же поверхностной плотности σ_0 , но иного (по отношению к носителям) знака заряда. Ось x' перпендикулярна плоскости образца. В последующие после инжекции времена ($t' > 0$) носители движутся с плоскости $x' = 0$ в глубь образца и, достигая плоскости $x' = L$, компенсируют находящиеся здесь неподвижные заряды противоположного знака. Часть носителей «по пути» захватываются на ловушки

Получены объемные плотности свободных $n(x', t')$ и захваченных $n_t(x', t')$ носителей, напряженность электрического поля $E(x', t')$, напряжение между поверхностями

образца $V(t') = \int_0^L dx' E(x', t')$, поверхностная плотность избыточных носителей $\sigma(t') =$

$$= \int_0^L dx' [n(x', t') + n_t(x', t')], \text{ совпадающая по величине с поверхностной плотностью}$$

неподвижного заряда противоположного (по отношению к носителям) знака, находящегося на плоскости $x' = L$.

Система уравнений ТОПЗ имеет вид:

закон Ома

$$J_c(x', t') = q\mu n(x', t') E(x', t')$$

(J_c — плотность тока проводимости);

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial x'} J_c(x', t') + q \frac{\partial}{\partial t'} [n(x', t') + n_t(x', t')] = 0;$$

уравнение Пуассона

$$\frac{\partial}{\partial x'} E(x', t') = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon} [n(x', t') + n_t(x', t')]$$

(ϵ_0 — электрическая постоянная, ϵ — диэлектрическая проницаемость);

уравнение захвата

$$\frac{\partial}{\partial t'} n_t(x', t') = \frac{1}{T_t} n(x', t')$$

(T_t — время захвата, освобождением из ловушек пренебрегается). Начальные условия:

$$n(x', 0) = \sigma_0 \delta(x'), \quad n_t(x', 0) = 0, \quad 0 \leq x' \leq L; \quad E(x', 0) = E_0 = \frac{q\sigma_0}{\epsilon_0 \epsilon}, \quad 0 < x' \leq L.$$

Наличие на плоскости $x' = L$ неподвижного заряда противоположного (по отношению к носителям) знака обеспечивает граничное условие $E(0, t') = 0$.

Введем безразмерные переменные $x = x'/L$; $t = t'/t_0$; $t_0 = L/\mu E_0$; $\tau = T_t/t_0$; $\epsilon = E/E_0$; $\rho = nL/\sigma_0$; $\rho_t = n_t L/\sigma_0$; $s = \sigma/\sigma_0$; $v = V/E_0 L$. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, t) \epsilon(x, t)] + \frac{\partial}{\partial t} [\rho(x, t) + \rho_t(x, t)] = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon(x, t) = \rho(x, t) + \rho_t(x, t); \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_t(x, t) = \frac{1}{\tau} \rho(x, t); \quad (3)$$

$$\rho(x, 0) = \delta(x), \quad \rho_t(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1); \quad \epsilon(x, 0) = 1 \quad (0 < x < 1); \quad \epsilon(0, t) = 0. \quad (4)$$

Для системы (1)—(4) удается получить аналитическое решение, используя метод характеристик. Дифференцируя по x , на основании (1), (2) можно убедиться, что величина $j = \rho \epsilon + \frac{\partial}{\partial t} \epsilon$ (полный ток) не зависит от x . Взяв j в точке $x = 0$ и используя

(4), находим

$$\rho(0, t) \varepsilon(0, t) + \frac{d}{dt} \varepsilon(0, t) = 0, \quad (5)$$

$$\rho(x, t) \varepsilon(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(x, t) = 0;$$

(3), (5) совместно с (4) дают

$$\rho_t(x, t) = -\frac{1}{\tau} \ln \varepsilon(x, t). \quad (6)$$

Характеристики системы (1)–(4) — интегральные кривые уравнения $\frac{dx}{dt} = \varepsilon(x, t)$ (линии тока), начинающиеся в точке $x=0, t=0$, где в начальный момент сосредоточены все носители. Эти линии отличаются величиной $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{\substack{x=0 \\ t=0}} = \varepsilon(0, 0) = \varepsilon_0$, т. е. напряженностью, которую «чувствует» носитель, входя в образец ($0 \leq \varepsilon_0 \leq 1$). Линии тока — функции двух переменных $x = x(t, \varepsilon_0)$, причём

$$x(0, \varepsilon_0) = 0. \quad (7)$$

Можно осуществить замену переменных $\varepsilon^*(t, \varepsilon_0) = \varepsilon(x(t, \varepsilon_0), t)$; $\rho^*(t, \varepsilon_0) = \rho(x(t, \varepsilon_0), t)$; $\rho_t^*(t, \varepsilon_0) = \rho_t(x(t, \varepsilon_0), t)$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} x(t, \varepsilon_0) = \varepsilon^*(t, \varepsilon_0); \quad (8)$$

$$\varepsilon^*(0, \varepsilon_0) = \varepsilon_0. \quad (9)$$

Используя (2), (5), (8), можно убедиться, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^* = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} x = \rho_t^* \varepsilon^*, \quad (10)$$

а из (6), (9), (10) следует

$$\varepsilon^*(t, \varepsilon_0) = \varepsilon_0 \exp(-t/\tau). \quad (11)$$

Интегрирование (8) с учетом (7), (11) дает линии тока:

$$x = x(t, \varepsilon_0) = \tau [\text{Ei}(\ln \varepsilon_0) - \text{Ei}(\exp(-t/\tau) \ln \varepsilon_0)]. \quad (12)$$

При $\varepsilon_0 = 1$ (12) определяет «лидирующую» линию тока $x(t, 1) = t$. В точки $x > t$ носители попасть «не успевают»: $\rho(x, t) = \rho_t(x, t) = 0$, $\varepsilon(x, t) = 1$ для $x > t$.

В случае отсутствия ловушек ($\tau = \infty$) (12) упрощается:

$$x = x(t, \varepsilon_0) = \varepsilon_0 t; \quad (13)$$

$\varepsilon(x, t)$ получается обратной заменой $\varepsilon^*(t, \varepsilon_0(x, t)) = \varepsilon(x, t)$ в (11), где $\varepsilon_0(x, t)$ определяется (12), после чего (5) дает $\rho(x, t)$, а (6) — $\rho_t(x, t)$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\tau} &= \text{Ei}(\exp(t/\tau) \ln \varepsilon) - \text{Ei}(\ln \varepsilon) \\ \rho &= \frac{\ln \varepsilon}{\tau} (1 - \exp\{\ln \varepsilon [1 - \exp(t/\tau)]\})^{-1} \\ \frac{x}{\tau} &= \text{Ei}(-\exp(t/\tau) \tau \rho_t) - \text{Ei}(-\tau \rho_t) \\ \varepsilon &= 1; \quad \rho = 0; \quad \rho_t = 0; \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &0 < x \leq t \\ &0 < t \leq 1 \\ &t < x \leq 1 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\tau} &= \text{Ei}(\exp(t/\tau) \ln \varepsilon) - \text{Ei}(\ln \varepsilon) \\ \rho &= \frac{\ln \varepsilon}{\tau} (1 - \exp\{\ln \varepsilon [1 - \exp(t/\tau)]\})^{-1} \\ \frac{x}{\tau} &= \text{Ei}(-\exp(t/\tau) \tau \rho_t) - \text{Ei}(-\tau \rho_t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &0 < x \leq 1; \quad 1 < t < \infty \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} s &= 1, v = 1 - t + \tau \ln(\exp(t/\tau) + 1) - \tau \ln 2; & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{\tau} &= \text{Ei}(\exp(t/\tau) \ln s) - \text{Ei}(\ln s); v = \tau [\text{Ei}([\exp(t/\tau) + 1] \ln s) - \text{Ei}(2 \ln s)]; & 1 < t < \infty \end{aligned} \right\} (15)$$

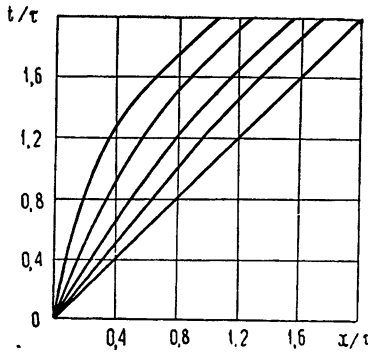


Рис. 1.

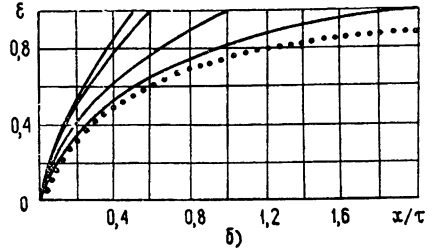
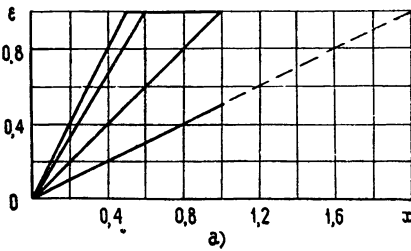


Рис. 2.

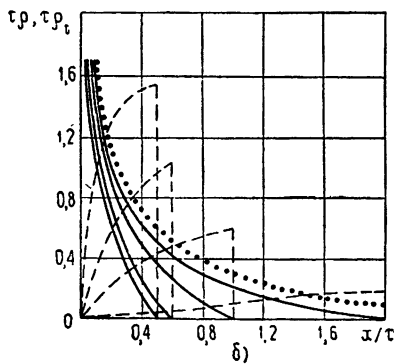
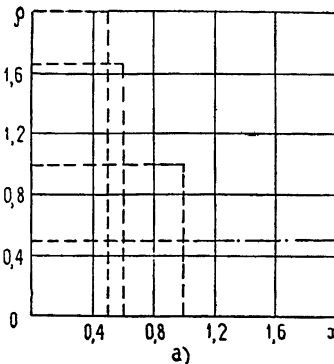


Рис. 3.

При $t \rightarrow \infty$ (14), (15) дают объемную плотность «застрявших» на ловушках носителей $\rho_{\infty}(x) \equiv \rho_t(x, \infty)$, созданные этими носителями напряженность $\epsilon_{\infty}(x) \equiv \epsilon(x, \infty)$, напряжение $v_{\infty} \equiv v(\infty)$, «остаточную» поверхностную плотность $s_{\infty} \equiv s(\infty)$:

$$\frac{x}{\tau} = -\text{Ei}(\ln \epsilon_{\infty}); \quad \frac{x}{\tau} = -\text{Ei}(-\tau \rho_{\infty}); \quad \frac{1}{\tau} = -\text{Ei}(\ln s_{\infty}); \quad v_{\infty} = -\tau \text{Ei}(2 \ln s_{\infty}). \quad (16)$$

В случае отсутствия ловушек ($\tau = \infty$) (14), (15) упрощаются;

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{x}{t}, \quad \rho = \frac{1}{t} \quad (0 < x < t) \\ \varepsilon = 1, \quad \rho = 0 \quad (t < x < 1) \\ \varepsilon = \frac{x}{t}, \quad \rho = \frac{1}{t} \quad (0 < x < 1), \quad s = \frac{1}{t}, \quad v = \frac{1}{2t} \quad (1 < t < \infty) \end{array} \right\} \begin{array}{l} s=1, \quad v=1-\frac{1}{2}t \quad (0 < t < 1) \\ s=1, \quad v=1-\frac{1}{2}t \quad (0 < t < 1) \\ s=1, \quad v=1-\frac{1}{2}t \quad (0 < t < 1) \end{array} \quad (17)$$

Результаты иллюстрируются графиками. На рис. 1 представлены линии тока (слева направо $v_0 = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0$), на рис. 2 приведено распределение ε по x для четырех моментов t (2а — $\tau = \infty$: слева направо $t_1 = 0,5; t_2 = 0,6; t_3 = 1,0; t_4 = 2,0$; 2б — конечные τ : слева направо $t_1 = 0,5\tau; t_2 = 0,6\tau; t_3 = 1,0\tau; t_4 = 2,0\tau$; точками отмечены $\varepsilon_\infty(x)$). Рис. 3 дает распределение ρ (пунктирные линии) и ρ_t (сплошные линии) по x для четырех элементов t (3а — $\tau = \infty$: $t_1 = 0,5; t_2 = 0,6; t_3 = 1,0; t_4 = 2,0$; 3б — конечные τ : $t_1 = 0,5\tau; t_2 = 0,6\tau; t_3 = 1,0\tau; t_4 = 2,0\tau$, точки соответствуют $\rho_\infty(x)$).

Автор благодарит М. И. Рязансва.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ману, G. Ракаву, Phys. Rev., 126, 1980 (1962).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
3 апреля 1971 г.