

СОДЕРЖАНИЕ

Алексеев В. А., Антонец М. А., Виткевич В. В., Гатэлюк Э. Д., Живора П. С., Кротиков В. Д., Крюков А. Е., Троицкий В. С., Чикин А. И., Шемагин В. А., Янкавцев М. В., Фатеев Б. П. Радионтерферометр независимого приема на 86 МГц	1303
Резов А. В. Квазистатические поверхностные волны на границе максвелловской плазмы с диффузным отражением электронов	1315
Демченко В. В., Долгополов В. В., Омельченко А. Я. О генерации и излучении второй гармоники при нормальном падении электромагнитной волны на неоднородный слой магноактивной плазмы	1321
Кольчугина И. А., Литвак А. Г. О вынужденном комбинационном рассеянии поперечной волны в слое плазмы	1326
Денисов Н. Г., Тамойкин В. В. О корреляционной теории обратного рассеяния радиоволн	1331
Алексеева Л. Л., Седельников В. А., Тучин В. В. Модуляция частоты излучения газового ОКГ при модуляции относительного возбуждения	1336
Ананын О. Б., Быковский Ю. А., Маныкин Э. А., Петровский А. Н. О влиянии вынужденного комбинационного рассеяния на двухквантовое поглощение в радиочастотном диапазоне	1343
Степанов Д. П. Дисперсионная характеристика лазера на $\lambda = 0,63 \text{ мк}$ в магнитном поле и стабилизация его частоты	1348
Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов)	1353
Буишвили Л. Л. Влияние насыщения магнитного резонанса ядер Cr^{53} на магнитный резонанс ядер Al^{27} в рубине	1364
Дьяконов В. П., Циганков В. А. Исследование вольтамперных характеристик оптически управляемого лавинного транзистора	1367
Пелиновский Е. Н., Рабинович М. И. Об асимптотическом методе для слабонелинейных распределенных систем с переменными параметрами	1373
Волошин В. И. Флуктуации частоты в изохронных автогенераторах при периодически нестационарных случайных воздействиях	1383
Каневский М. Б. О флуктуациях параметров нормальной волны при сверхрефракции	1392
Кляцкин В. И., Татарский В. И. Новый метод последовательных приближений в задаче о распространении волн в среде со случайными крупномасштабными неоднородностями	1400
Петрищев В. А. О применении метода моментов к некоторым задачам распространения частично-когерентных световых пучков	1416
Тамойкин В. В., Фрайман А. А. О флуктуациях интенсивности волны за хаотическим фазовым экраном	1427
Весницкий А. И. Одномерный резонатор с подвижными границами	1432
Касьянюк С. А. Об одном классе задач теории синтеза линейных антенн	1440
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Миронов В. А. О нелинейном просветлении плоского плазменного слоя	1450
Бенедиктов Е. А., Гришкевич Л. В., Иванов В. А., Комраков Г. П. Корреляционный метод определения электронной концентрации в D-области ионосферы	1452
Буишвили Л. Л., Халваши Э. Х. О теории нестационарной динамической поляризации ядер	1454
Андреев Г. А., Гельфер Э. И. Об угловых блужданиях центра тяжести сечения расходящегося пучка света	1455
Рамм А. Г. Вычисление характеристики рассеяния электромагнитных волн на малых телах произвольной формы II	1458
Кузнецов М. И. О роли прикатодной области в механизме флуктуаций в магнетронном диоде	1460
Хроника	
Семинар «Применение наземной радиотеплолокации в метеорологии»	1463

УДК 523.164

РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТР НЕЗАВИСИМОГО ПРИЕМА НА 86 Мгц

*В. А. Алексеев, М. А. Антонец, В. В. Виткович, Э. Д. Гатэлюк,
П. С. Живора, В. Д. Кротиков, А. Е. Крюков, В. С. Троицкий,
А. И. Чикин, В. А. Шемагин, М. В. Янкавцев, Б. П. Фатеев*

Дается описание интерферометра с независимым приемом на частоте 86 Мгц. Приводятся методика и результаты измерений с базой 230 км угловых размеров некоторых источников. Получено, что угловые размеры источников ЗС 298 и ЗС 380 на частоте 86 Мгц меньше трех секунд дуги.

В последние годы в различных странах весьма интенсивно проводятся работы по созданию радиоинтерферометров независимого приема и их применению для исследования компактных источников космического радиоизлучения [1, 2].

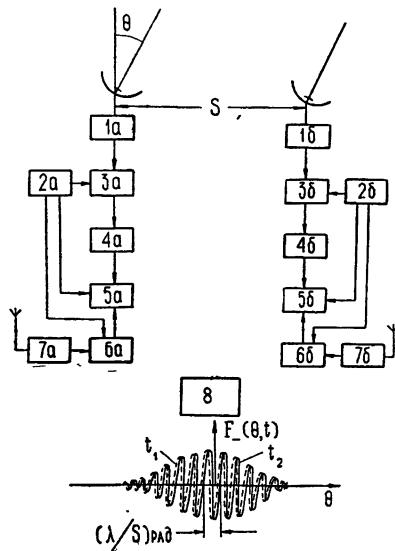
Ниже дается анализ систем автономных радиоинтерферометров, приводятся результаты лабораторного исследования технических характеристик отдельных систем интерферометра и всего комплекса в целом, а также методика измерений и результаты эксперимента по определению угловых размеров источников космического радиоизлучения.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Согласно общей схеме построения радиоинтерферометров с применением систем независимого приема (рис. 1), основными ее элементами являются: 1—система когерентного преобразования частот сигналов принимаемого радиоизлучения и временной синхронизации разнесенных пунктов приема радиоинтерферометра; 2—система памяти для записи и последующего воспроизведения преобразованных по частоте интерференционных сигналов; 3—система обработки воспроизводимых интерференционных сигналов.

Рис. 1. Блок-схема радиоинтерферометра с независимым приемом:

1—УВЧ, 2—квантовый генератор, 3—смеситель 4—УПЧ,
5—память, 6—электронные часы, 7—приемник СЕВ,
8—пункт обработки.



Вопросы когерентности преобразования частот и временной синхронизации пунктов приема радиоинтерферометра взаимно связаны между собой и зависят, главным образом, от вида стандартов частоты, используемых в качестве задающих генераторов для формирования гетеродин-

ных сигналов и в качестве хранителей шкал времени. В табл. 1 приведены основные технические характеристики типовых промышленных стандартов частоты по данным [3]. Анализ этих данных показывает, что существующая в настоящее время техника стандартов частоты позволяет формировать квазикогерентные сигналы для приема даже в коротковолновой части радиоастрономического диапазона длин волн; так, на основе водородного генератора можно получить гетеродинные сигналы на частоте 10^{10} Гц ($\lambda = 3$ см) с интервалом когерентности $\tau_{\text{ког}} \approx 100$ сек.

Таблица 1

Основные технические параметры типовых промышленных стандартов частоты

	Рубидиевые стандарты	Цезиевые стандарты	Квантовые генераторы на водороде
Относительная стабильность:			
за 1 ^m	$5 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-14}$
за 1 ^h	$5 \cdot 10^{-12}$	$8 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-14}$
за 1 ^d	$5 \cdot 10^{-14}$	$5 \cdot 10^{-14}$	$2 \cdot 10^{-14}$
Систематический уход	$3 \cdot 10^{-11}$ за месяц	$3 \cdot 10^{-12}$ за год	10^{-12} за год

В свою очередь, электронные часы, синхронизованные от стандарта частоты, позволяют хранить шкалу времени с уходом: для рубидиевого стандарта 1 мксек/сутки, для цезиевого—0,1 мксек/сутки, для водородного—0,01 мксек/сутки.

Средством привязки шкал времени, расположенных в различных местах, являются сигналы единого времени (СЕВ) КВ, ДВ и СДВ диапазонов радиоволн.

Существенным недостатком передач точного времени СДВ-радиоизлучением является то, что при манипуляции несущей частоты передний фронт очень пологий, что создает большую погрешность регистрации.

Тракт ДВ специальных станций обеспечивает передачу сигналов времени с малыми погрешностями регистрации. Однако прием сигналов СЕВ ДВ ограничивается расстоянием до передатчика не больше 1500—2000 км. Приемо-передающая аппаратура КВ диапазона обладает относительно более широкой полосой пропускания и малой погрешностью регистрации момента прихода сигналов времени, но за счет непостоянства условий распространения—многолучевости прохождения сигналов и перемещения отражающих слоев—погрешность по определению времени распространения сигнала достигает 100—300 мксек [4].

Среди перспективных методов нужно отметить привязку шкал времени с применением ИСЗ (ретранслятора) и с использованием телевизионных каналов по радио-релейным линиям. Первый обеспечивает привязку шкал времени на расстоянии более 10000 км с точностью не хуже 0,5 мксек [5]. На втором методе, как нам кажется, целесообразно остановиться более подробно, так как широкая сеть телевизионных линий позволяет использовать этот метод практически на всей территории СССР, а с помощью интервидения—и на межконтинентальных расстояниях. Как известно, для обеспечения неподвижности изображения на экране телевизионной трубки наряду с сигналами изображения излуча-

ются сигналы кадровой и строчной синхронизации, которые могут быть использованы для привязки шкал времени.

Основным достоинством синхронизаций по телевизионным сигналам является широкая полоса занимаемых ими частот, что обеспечивает малую погрешность регистрации момента прихода сигнала; кроме того, достаточно высокая долговременная стабильность ($\delta t \approx 10^{-5} \div 10^{-6}$) электрической длины телевизионных радиорелейных линий дает даже на расстоянии 10000 км незначительную ошибку $\Delta t_0 < (0,3 \div 1) \text{ мксек}$.

Первая серия экспериментов по использованию телевизионного канала для передачи сигналов времени с целью синхронизации разнесенных часов [6] подтвердила возможность такой синхронизации и доказала стабильность прохождения импульсов и совпадение их (в пределах 1 мксек) с вычисленными по географическим координатам.

Наконец, самое универсальное средство для синхронизации шкал времени — использование перевозимых часов; при затрате времени на перевозку часов ~ 10 час и применении в качестве задающего цезиевого стандарта частоты может быть достигнута точность синхронизации выше 0,1 мксек. На основании сказанного в табл. 2 сведены данные о достижимой в настоящее время точности синхронизации по различным сигналам; анализ этих данных показывает, что наиболее совершенные методы синхронизации позволяют при обработке совместить интерференционные сигналы, имеющие полосу частот $\Delta F = 10^5 \div 10^6$ Гц без существенной потери корреляции.

Таблица 2

Достижимые точности синхронизации разнесенных пунктов приема с использованием существующих систем передачи сигнала точного времени

Система	Точность синхронизации	Причина ошибок	Примечание
СЕВ СДВ	1 мксек	Малая полоса частот передачи	
СЕВ ДВ	$10 \div 100$ мксек	то же	Дальность действия (1,5 \div 2) тыс. км
СЕВ КВ	$10 \div 300$ мксек	Непостоянство условий распространения	
СЕВ ВТ по каналам телепередачи	1 \div 3 мксек	Флуктуации задержек в каналах ретрансляции	
СЕВ ВТ с применением ИСЗ (ретранслятора), перевозимые часы	0,5 \div 1 мксек	Неопределенность параметров орбиты	

В принципе возможна и автосинхронизация пунктов приема радиоинтерферометра. Наблюдая интенсивный точечный источник и определяя по нему ошибку синхронизации приема в данный момент наблюдений путем последовательного смещения интерференционных сигналов до получения максимальной корреляции, можно скорректировать (в процессе обработки) положение синхронизирующих меток на записях сигналов для других источников. При долговременной стабильности стандартов частоты $\delta f = 10^{-12}$ такая коррекция может осуществляться раз в сутки, обеспечивая возможность обработки интерференционных сигналов с полосой до 10 Мгц, если координаты пунктов приема и исследуемых источников априорно известны.

Системы памяти для записи интерференционных сигналов должны обладать соответствующим быстродействием и объемом для хранения информации, принимаемой в полосе частот ΔF в течение времени наблюдения T_n .

Наиболее удовлетворительными как по техническим, так и по эксплуатационным параметрам в настоящее время являются системы памяти с накопителями на магнитной ленте или фотоматериалах.

Соответствующие скорости ввода информации могут быть определены следующими цифрами: для магнитной записи $V_{\max} \approx 10^7$ бит/сек, для фотозаписи $V_{\max} \approx (10^8 \div 10^{10})$ бит/сек. Существенным недостатком таких систем является довольно высокая нестабильность скоростей ввода и вывода информации, однако влияние этих нестабильностей может быть учтено и скомпенсировано в процессе обработки, для чего необходимо записать одновременно с информативным сигналом (и. с.) опорный сигнал (о. с.) от стандарта частоты. Сравнивая воспроизведимый опорный сигнал с эталонным (э. с.), можно путем управления скоростью воспроизведения скомпенсировать все низкочастотные флуктуации скоростей вплоть до частот $1/T_{oc}$, где T_{oc} — период опорного сигнала [7].

В существующих в настоящее время радиоинтерферометрах независимого приема используется запись интерференционных сигналов на магнитную ленту. Так, в канадском варианте интерферометра запись ведется в аналоговой форме на видеомагнитофонах с полосой записи $\Delta F = 4$ Мгц [8]. Здесь для компенсации нестабильности скоростей магнитофонов, имеющей место при записи, используется управление скоростью воспроизведения по сигналу ошибки, вырабатываемому путем сравнения опорных сигналов с эталонным.

В американском варианте автономного интерферометра [9] используется дискретная знаковая запись интерференционных сигналов на магнитофоны для электронно-вычислительной машины IBM 360/50. Полоса частот записи в американской системе составляет величину $\Delta F = 320$ кгц с частотой квантования $f_{kv} = 750$ кгц. Различие систем записи привело и к различию систем обработки интерференционных сигналов в существующих интерферометрах независимого приема. В канадском варианте обработка ведется на аналоговых элементах, в американском — в дискретной форме на ЭЦВМ. В процессе обработки на ЭЦВМ блок оперативной памяти выполняет роль блока управляемых задержек, остальные операции обеспечиваются с помощью арифметического устройства и соответствующей программы.

РАДИОИНТЕРФЕРОМЕТР НА 86 Мгц

В Научно-исследовательском радиофизическом институте (НИРФИ) измерялись угловые размеры источников космического радиоизлучения радиоинтерферометром независимого приема на частоте 86 Мгц. В схеме интерферометра использовалась аналоговая запись на магнитную ленту и обработка в дискретной форме на ЭЦВМ.

Применение комбинированной схемы позволило в некоторой степени объединить достоинства аналоговой и дискретной схем: высокую информативность аналоговых систем, а также высокую точность и удобство обработки информации по заданной программе на ЭЦВМ. Ниже приводятся результаты лабораторного исследования технических параметров входящих в радиоинтерферометр устройств, а также результаты комплексной лабораторной проверки системы в целом.

Блок-схема приемного пункта интерферометра представлена на рис. 2. В качестве задающих генераторов для формирования гетеродинных сигналов и для задания шкалы времени в радиоинтерферометре использованы рубидиевые стандарты частоты Ч1-43. Для применения

в системе радиоинтерферометра существенную роль играет величина взаимной нестабильности задающих генераторов, поэтому были проведены измерения ее по блок-схеме рис. 3.

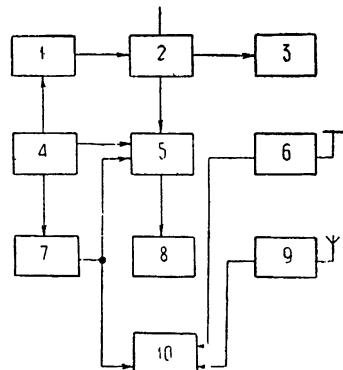


Рис. 2. Блок-схема приемного пункта радиоинтерферометра:

1—синтезатор Ч1-51, 2—приемник, 3—самописец, 4—стандарт частоты Ч1-43, 5—блок записи, 6—телевизор, 7—электронные часы, 8—магнитофон МУЗ-25, 9—приемник СЕВ, 10—осциллограф

По результатам измерений дисперсия взаимных расхождений частот двух рубидиевых стандартов составляет величину $\sigma_f = 5,6 \cdot 10^{-4}$ гц, а соответствующая нестабильность частоты каждого стандарта при усреднении за 2 сек $\delta f = \sigma_f / \sqrt{2} f_0 = 8 \cdot 10^{-11}$. Были также проведены измерения флюктуаций разностной фазы сигналов стандартов на частоте $f_0 = 10$ Мгц при времени усреднения фазометра

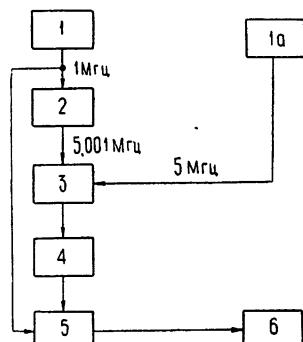


Рис. 3. Блок-схема установки для измерения взаимной нестабильности частоты задающего генератора:

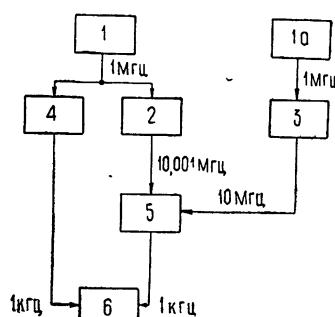
1—стандарт частоты Ч1-43, 1a—стандарт частоты Ч1-43, 2—синтезатор Ч1-4, 3—смеситель Ч1-19, 4—умножитель на 10^4 Ч1-14, 5—частотомер Ч1-9, 6—цифро-печатывающий механизм ЦПМ-3

$T_\phi = 10$ сек. Схема измерений приведена на рис. 4. В результате измерений получено $\sqrt{\Delta\varphi^2} = 1,66^\circ$, что соответствует разности частот стандартов $\Delta f_0 = \sqrt{\Delta\varphi^2} / 2\pi T_\phi f_0 = 4,6 \cdot 10^{-11}$ и нестабильности частот стандартов за то же время $\delta f_0 = 2,5 \cdot 10^{-11}$.

Формирование гетеродинных сигналов в системе радиоинтерферометра (рис. 2) осуществляется с помощью синтезатора Ч1-51 и умножителя частоты в 3 раза для одного приемного пункта и с помощью синтезатора Ч1-10 — для второго. Синтезатор Ч1-51 позволяет получать сиг-

Рис. 4. Блок-схема установки для измерения взаимных флюктуаций стандартов частоты:

1—стандарт частоты Ч1-43, 1a—стандарт частоты Ч1-43, 2—синтезатор Ч1-9, 3—смеситель Ч1-10, 4—делитель на 1000, 5—смеситель Ч1-19, 6—фазометр Ф2-4.



налы частотой $f_0 \leqslant 50 \text{ МГц}$ с возможностью перестройки частоты через $0,01 \text{ кГц}$. Синтезатор Ч1-10 позволяет получать сигналы частоты $30 \text{ МГц} \leqslant f_0 \leqslant 300 \text{ МГц}$ с перестройкой частоты через 100 кГц . Измерения величины фазового сдвига между гетеродинными сигналами на частоте 86 МГц при работе от одного рубидиевого стандарта показали, что данные синтезаторы и умножитель не вносят дополнительной фазовой модуляции гетеродинных сигналов. Уровень гармоник для синтезатора Ч1-51 составлял — 50 дБ , для синтезатора Ч1-10 — 30 дБ , при этом усиление в приемнике на высокой частоте обеспечивало превышение входных шумов приемника над шумами гетеродина (с учетом коэффициента преобразования) на 15 дБ .

Для формирования и хранения шкалы времени в системе интерферометра применены электронные часы Ч6-37, задающим сигналом для которых является сигнал частоты 100 кГц , формируемый в стандарте частоты Ч1-43. Измерения расхождений моментов появления секундных импульсов с двух электронных часов при работе от одного задающего генератора дали величину $\sim 0,2 \text{ мксек}$. Были проведены также измерения расхождения двух часов, синхронизированных сигналами различных рубидиевых стандартов за длительное время, что позволило установить величину взаимного расхождения часов за сутки $\Delta t = 1,4 \text{ мксек}$ и определить разность номиналов частот двух рубидиевых стандартов с временем усреднения одна сутки $\Delta f_{\text{рет}} = 1,6 \cdot 10^{-11} f_0$.

Для предварительной синхронизации часов использованы всеволновые приемники РFT для приема сигналов СЕВ и телевизоры «Радий-Б» для приема телевизионных сигналов. По измерениям, проводимым в Горьком, получена точность регистрации момента прихода импульса времени СЕВ КВ порядка 50 мксек , а точность регистрации момента прихода кадрового импульса телевизионного сигнала составляла приблизительно $0,1 \text{ мксек}$. Совмещение секундных импульсов часов с сигналами точного времени регистрировалось визуально на двухлучевом осциллографе ОКД-505А (грубо) и счетчиковым измерителем временных интервалов (точно).

В рассматриваемой схеме радиоинтерферометра запись интерференционных сигналов осуществляется на магнитной ленте магнитофоном МУЗ-25, имеющим полосу частот записи $10 \text{ кГц} \leqslant F_z \leqslant 100 \text{ кГц}$. Запись сигналов ведется в аналоговой форме, что позволяет практически полностью использовать полосу частот записи магнитофона. Информативный сигнал записывается в полосе частот $10 \text{ кГц} \leqslant F_{\text{зп}} \leqslant 80 \text{ кГц}$. Частота опорного сигнала была выбрана равной $f_{\text{oc}} = 100 \text{ кГц}$.

Обработка сигналов радиоинтерферометра производится на ЭЦВМ БЭСМ-4. Для этого считанные с МУЗ-25 сигналы преобразуются в цифровой код [10, 11] и вводятся в оперативную память ЭЦВМ.

Математическое описание процесса обработки имеет вид

$$(Ve^{j\varphi(t)})_{n \Delta\tau, m \Delta\Omega} = [z_1(t) z_2^*(t \pm n \Delta\tau)] \exp [j(\Omega \pm m \Delta\Omega)t]^{\tau},$$

где $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — интерференционные сигналы; $\Delta\tau$ — единичный временной сдвиг одного из сигналов; $n = 0, 1, 2, \dots, N$; $2N\Delta\tau$ — интервал, определяемый суммарной ошибкой синхронизации; $m = 0, 1, 2, \dots, M$; $2M\Delta\Omega$ — интервал, определяемый суммарной ошибкой априорного определения частоты интерференции; $\Delta\Omega = 2\pi/T$ — разрешение по частоте при фурье-анализе.

Значение $(Ve^{j\varphi(t)})_{\text{max}}/\sqrt{\bar{V}_1 \bar{V}_2}$ определяет комплексный коэффициент когерентности принятых сигналов. Здесь \bar{V}_1 и \bar{V}_2 — средние интенсивности принятого в пунктах 1 и 2 излучения.

В результате лабораторной проверки системы радиоинтерферометра

на рабочей частоте $f_0 = 86 \text{ МГц}$ установлено, что стабильность использованных гетеродинов позволяет осуществлять когерентное накопление сигналов в течение ~ 30 сек, при этом корреляционный выигрыш Q системы обработки для $\Delta F = 75 \text{ кГц}$ и $T = 30 \text{ сек}$ равен 1000. В качестве

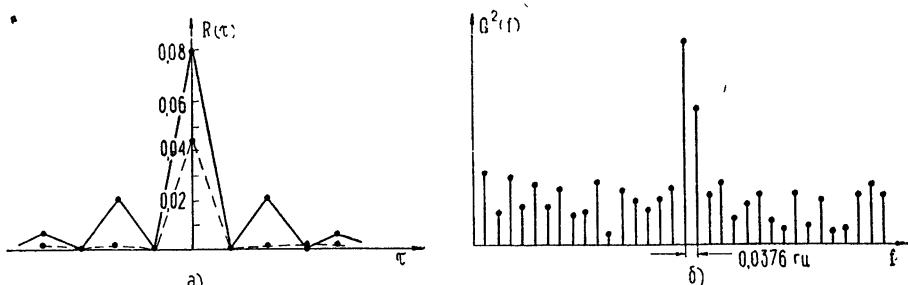


Рис. 5. а) Функция корреляции $R(\tau)$,

$\left(\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}} \right)_{\text{вх}} = -10 \text{ дБ}, T = 15 \text{ сек},$

$\left(\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}} \right)_{\text{вх}} = -13 \text{ дБ}, T = 30 \text{ сек},$

T —время интегрирования коррелометра;

б) Спектр интерференции по искусственному сигналу при времени интегрирования коррелометра $T = 30 \text{ сек}$.

примера на рис. 5 представлена функция корреляции и спектр интерференции от искусственного точечного источника (шумового генератора) при соотношении $(\text{сигнал}/\text{шум})_{\text{вх}} = -13 \text{ дБ}$ и времени интегрирования коррелометра $T = 30 \text{ сек}$.

МЕТОДИКА И РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ УГЛОВЫХ РАЗМЕРОВ НЕКОТОРЫХ РАДИОИСТОЧНИКОВ

Первый эксперимент по исследованию угловых размеров источников космического радиоизлучения с помощью рассмотренного выше радиоинтерферометра был проведен в августе — сентябре 1969 г. Эксперимент проводился в два этапа: 1 — на базе 500 м, 2 — на базе 230 км с использованием антенн радиоастрономической станции ФИАН. В эксперименте использовались приемники ФИАН на рабочую частоту $f_0 = 86 \text{ МГц}$ с одним преобразованием сигналов принимаемого излучения на видеочастоту для записи и с компенсационным измерителем интенсивности принимаемого излучения для контроля. Полоса частот по каналу компенсации составляла $\Delta f_k = 500 \text{ кГц}$ с временем интегрирования компенсатора $T_k = 5 \text{ сек}$; полоса частот по каналу записи $\Delta f_z = 75 \text{ кГц}$. Шумовая температура приемников $T_{\text{шум}}^{1,2} \approx 1500^\circ\text{K}$, эффективная площадь эквивалентной антенны $A_{\text{эфф}} \approx 400 \text{ м}^2$.

На рис. 6 представлен результат интерферометрии с базой 500 м по источнику 3С144 (Крабовидная туманность). На графике по оси τ отложены значения коэффициентов Фурье для сдвига одного из интерференционных сигналов на время $n\Delta t_b$, по оси F — значения коэффициента Фурье $(C_m)_z$ частоты разложения $F = m \Omega$ для различных временных сдвигов. Максимальное значение этой двумерной функции соответствует наибольшей корреляции записанных сигналов, а положение максимума определяет частоту интерференции и величину временного сдвига интерференционных сигналов из-за пространственной задержки $\tau_{\text{пп}} = S \sin \theta / C$ и ошибок синхронизации. Для источника 3С 144 $T_a = \frac{A_{\text{эфф}} S_{86}}{2k} \approx$

$\approx \frac{1840 \cdot 10^{-26} \cdot 400}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-28}} = 270^{\circ}\text{K}$, значение максимума нормированной функции корреляции (по графику) $R_{\max} \approx 0,2$ соответствует тому, что при-

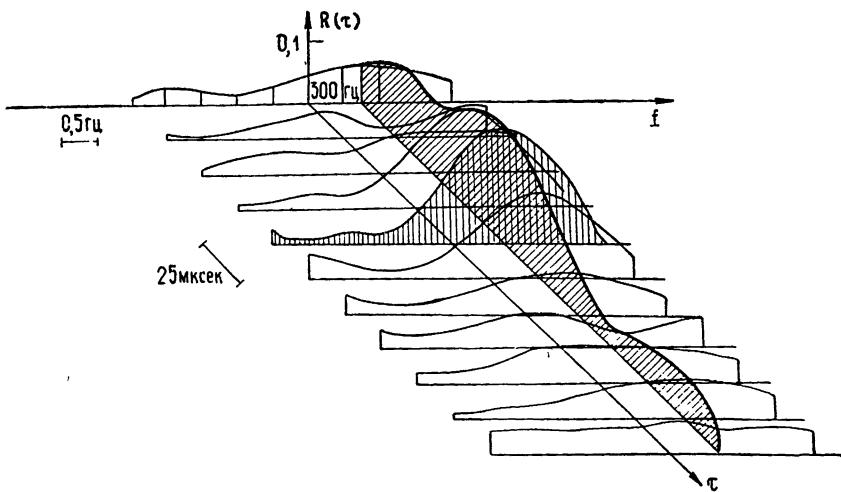


Рис. 6. Экспериментальная зависимость $R(t)$ для источника 3С144.

нимаемое излучение коррелировано полностью и что источник 3С144 неразрешен. Неразрешенным оказался и источник 3С 461 (Кассиопея). Разрешение интерферометра составляло величину $\lambda/S = 3,5/500 = 7 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \approx 25'$. Обработка информации велась на машине БЭСМ-2 с непосредственным вводом сигналов [10] в оперативную память. Наблюдались также максимумы двумерной корреляционной функции $R(\tau)$ при интерферометрии источников 3С 273 и 3С 144 на базе 230 км. Мы не останавливаемся более подробно на обсуждении этого эксперимента в силу того, что он носил в большей степени проверочный характер, и в этом смысле был получен положительный результат.

Второй эксперимент, в котором использовалась описанная выше система радиоинтерферометра, был проведен в мае 1970 г. на базе $S = 230 \text{ км}$ (Пущино—Переславль) и $\lambda = 3,5 \text{ м}$ с угловым разрешением $\lambda/S = 3''$. Частоты гетеродинов были для приемного пункта в г. Пущино $f_{r_1} = 86 \text{ Мгц}$ и для приемного пункта в Переславль-Залесском $f_{r_2} = 86 \text{ Мгц} + 1,8 \text{ гц}$.

В качестве опорного сигнала при сведении часов использовались кадровые импульсы сигналов центрального телевидения. Перед началом передачи за $30 \div 40$ минут синхроимпульсы 1-го канала 1-й ТВ-программы Москвы привязываются к кварцевому генератору с относительной стабильностью частоты несколько единиц десятого знака. В это время производится передача сигналов точного времени, так называемая СЕВ ВТ*. Ввиду того, что кадровые импульсы имеют периодическую последовательность с частотой 50 гц без указания номера импульса, перед синхронизацией двух шкал времени местные часы нужно предварительно свести с точностью до 1 мсек. В нашем случае предварительная синхронизация производилась по осциллографу (ОКД 505А) с помощью сигналов времени радиостанции РАТ ($f = 5 \text{ Мгц}$). Разворотка осциллографа

* Использование СЕВ ВТ для синхронизации пунктов приема интерферометра было рекомендовано Г. Н. Палием.

запускалась секундным импульсом часов; положение импульса РАТ определялось по развертке с точностью до $(200 \div 400)$ мксек.

На второй луч осциллографа поступал со схемы выделения кадровый импульс.

Если синхронизация генераторов кадровых импульсов (обычный режим) шла от сети, то кадровый импульс перемещался вдоль развертки осциллографа со скоростью около $1 \text{ мксек} \cdot \text{сек}^{-1}$, в случае синхронизации от кварца (режим передачи СЕВ ВТ) он практически не изменял своего положения. Скорость сползания за счет разности номиналов рубидиевого стандарта и кварцевого генератора на телекомплексе составляла меньше $0,1 \text{ мксек} \cdot \text{сек}^{-1}$. «Неподвижный» кадровый импульс ото дня ко дню мог занять любое положение по отношению к сигналу РАТ.

С помощью фазовращателя, находящегося в часах, последние выставлялись по одному из импульсов. По договоренности брался импульс, предыдущий относительно сигнала РАТ. Расстояние между передатчиком РАТ и обеими точками приема было определено с точностью, достаточной для устранения неоднозначности в выборе опорного импульса.

После предварительной синхронизации интервал между секундным импульсом часов и кадровым импульсом замерялся на счетчике с точностью до 1 мксек.

По известным показаниям счетчиков в обоих пунктах и по разнице моментов прихода ТВ-сигнала Останкинского телекомплекса в каждый из них определялось расхождение шкал времени.

Регистрация временного интервала между синхроимпульсами телевидения и секундным импульсом часов осуществлялась путем непосредственной записи показаний счетчика. С помощью «неподвижного» синхроимпульса синхронизация осуществлялась легко — менялась лишь последняя цифра на табло счетчика. В случае приема нормальной ТВ-программы менялись 4—5 цифр. Это вызывало известные трудности при ежесекундной регистрации. В ходе эксперимента была применена иная методика записи. Осуществляя внешний запуск счетчика в определенные моменты (каждые 10 секунд), мы могли сравнить расхождение часов в любое время ТВ-передачи.

Измеряя периодически в двух приемных пунктах расхождения показаний счетчиков, которые могут быть вызваны лишь разностью частот местных стандартов, используемых в качестве хранителей шкал времени, можно за длительное время усреднения определить разность номинальных частот этих стандартов.

В нашем эксперименте отсутствовала возможность сопровождения источника, что ограничивало время нахождения источника в диаграмме направленности интерферометра $T_n \approx 1,5$ мин. Поэтому запись исследуемых источников проводилась в два интервала по 32 сек с паузой между ними в 32 сек. Это позволило выбрать интервал записи, для которого коэффициент направленного действия эффективной антенны $G_{\text{эфф}}(\Theta)^T_{\text{зап}}$ был наибольшим.

В процессе записи при помощи компенсационного измерителя на лентах самописцев в каждом пункте приема регистрировались шумовая температура приемников, шумовая температура фона, эффективная площадь антенн и прохождение источников по диаграмме направленности антенн. Программа записей на магнитофоны МУЗ-25 была составлена заранее с учетом времени прохождения источников через диаграмму направленности антенн обоих приемных пунктов и в процессе наблюдений корректировалась по двухсторонней радиосвязи между обоими пунктами.

На рис. 7а представлен результат обработки записей источника ЗС 298 с временем интегрирования $T_1 \approx 3,5$ сек и $T_2 \approx 7$ сек. ЗС 298 —

квазар, с координатами (на 1960 г.): $\alpha = 14^{\text{h}}16^{\text{m}}38^{\text{s}},9$ и $\delta = +06^{\circ}41,5$, с потоком излучения 86 МГц на частоте $S_{86} = 91,4 \cdot 10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$. По данным измерений эффективные площади антенн составляли: для ДКР-1000 $A_{1\text{эфф}} = 850 \text{ м}^2$, для выносного пункта в г. Переславль-Залесском $A_{2\text{эфф}} = 600 \text{ м}^2$. КНД эквивалентной антенны для обрабатываемого участка записи $G_{\text{эфф}} = 0,8$. Эффективная температура для двух

пунктов приема от источника 3С 298 $T_a = \frac{S_{86} \sqrt{A_{1\text{эфф}} A_{2\text{эфф}}} G_{\text{эфф}}}{kT} = 19^\circ\text{K}$.

Температура шумов на выходах приемников, включая температуру окружающего фона, составляла по измерениям $T_{\text{ш1}} = 1500^\circ\text{K}$ и $T_{\text{ш2}} = 2800^\circ\text{K}$. По результатам обработки коэффициент корреляции записанных сигналов $\rho \approx 0,011$, т. е. температура коррелированных шумов составляет величину $T_k = \sqrt{T_{\text{ш1}} T_{\text{ш2}}} \rho \approx 18^\circ\text{K}$ и соответствующий коэффициент видимости $T_k/T_d = \mu$ (3С298) $\approx 0,94 \pm 0,25$.

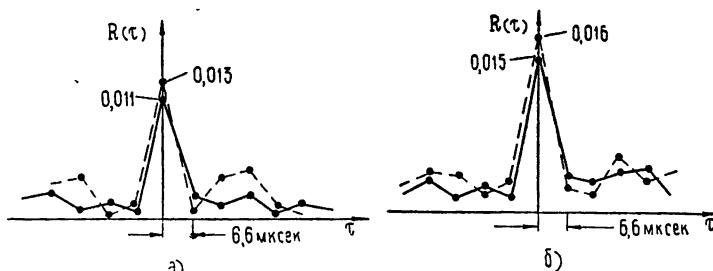


Рис. 7. Экспериментальная зависимость $R(\tau)$ для
а) источника 3С298
— $T = 7$ сек, - - - $T = 3,5$ сек;
б) источника 3С380
— $T = 7$ сек, - - - $T = 3,5$ сек.

Следует отметить одну особенность проведенного эксперимента. При обработке с временем интегрирования $T_1 = 3,5$ сек и с временем интегрирования $T_2 = 7$ сек коэффициенты корреляции записанных сигналов совпадают в пределах ошибок (см. рис. 8). Увеличение времени интегрирования ($T > 10$ сек) приводит к уменьшению коэффициента корреляции при выделении интерференционной составляющей методом фурье-анализа. Это свидетельствует о том, что ширина спектра интерференционной составляющей больше 0,1 гц. В лабораторных испытаниях систем радиоинтерферометра получена ширина спектра меньше 0,03 гц, но условия данного эксперимента не позволили определить причину расширения спектра интерференционной составляющей, которое может иметь место либо из-за нестабильности гетеродинов, либо из-за ионосферных возмущений принимаемых сигналов.

На рис. 7б представлен результат обработки записей источника 3С380 с временем интегрирования $T_1 = 3,5$ сек и $T_2 = 7$ сек. 3С380 — квазар, $\alpha = 18^{\text{h}}28^{\text{m}}14^{\text{s}},6$; $\delta = +48^\circ41',2$; $S_{86} = 121 \cdot 10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$. По данным наших измерений $A_{\text{эфф}} = 700 \text{ м}^2$, $G_{\text{эфф}} = 0,8$; $T_a = 30^\circ\text{K}$, $(T_{\text{ш}})_{\text{вх}} \approx 1800^\circ\text{K}$.

Коэффициент корреляции за время интегрирования $T_1 = 3,5$ сек $\rho \approx 0,016$ и за время интегрирования $T_2 = 7$ сек $\rho = 0,015$. Аналогично результатам наблюдений 3С298, обнаруживается уменьшение коэффициента корреляции для $T > 10$ сек.

Проводя расчет коэффициента видимости аналогично сделанному выше для 3С298, получим $|\mu| (3С298)|_{T=7 \text{ сек}} \approx 0,8 \pm 0,15$. Таким образом, оба источника оказались неразрешенными, т. е. их угловой размер на частоте 86 МГц меньше трех угловых секунд.

Сопоставляя этот результат с измерениями других авторов на различных волнах (см. табл. 3), можно сделать вывод, что размеры указанных источников остаются примерно такими же, как на дециметровых волнах.

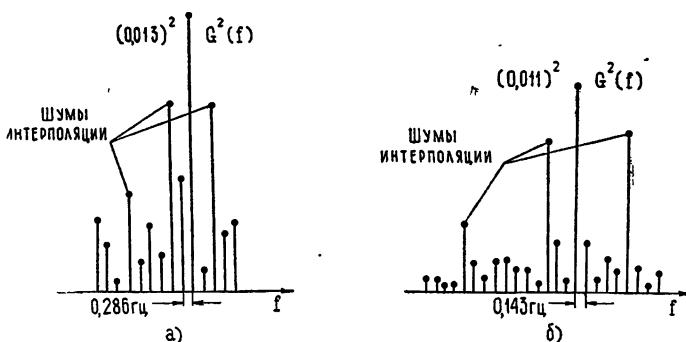


Рис. 8. Спектры выходного сигнала коррелометра для источника 3С298
а) $T = 3,5$ сек, б) $T = 7$ сек.

Таблица 3

Источник	Рабочая частота	Длина базы в длинах волн	Коэффициент видимости	Примечания
3С298	408 Мгц	$3,2 \cdot 10^6$	0,13	[12]
	1422 Мгц	$4,7 \cdot 10^6$	0,65	[13]
	86 Мгц	$6,5 \cdot 10^4$	0,94	настоящая работа
3С380	408 Мгц	$1,09 \cdot 10^6$	0,19	[12]
	2665 Мгц	$3,97 \cdot 10^6$	0,23	[14]
	2695 Мгц	$8,32 \cdot 10^4$	0,76	[15]
	86 Мгц	$6,5 \cdot 10^4$	0,8	настоящая работа

Авторы благодарны сотрудникам РАС ФИАН Н. П. Владимирову, П. Д. Цыганкову, Ю. И. Алексееву, С. Кутузову, В. Ивановой и сотруднику Тульского политехнического института Г. И. Добышу за помощь в организации и проведении интерферометрических измерений.

ЛИТЕРАТУРА

- М Коуин, Д. Джонси, К. Келлерман, Б. Кларк, УФН, 100, вып. 1, 135 (1970).
- Б. Бэрк, УФН, 101, вып. 3, 537 (1970).
- Е. А. Герберг, R. Sykes, Proc. IEEE, 55, № 6, 56 (1967).
- Г. Н. Палий, Ю. А. Федоров, Труды метрологических институтов СССР, вып. 106 (1969).
- Г. Н. Палий, Ю. Д. Иванова, Р. Г. Минуллин, А. В. Сухоцкий, Труды метрологических институтов СССР, вып. 106 (1969).
- Tolman, Ptacek, IEEE Trans. on Instrum. and Measur., 16, 3 (1967).
- В. А. Алексеев, А. П. Барabanov, Э. Д. Гатэлюк, П. С. Живора, В. Д. Кротиков, Радиотехника и электроника, 14, № 3, 539 (1969).
- N. W. Broten, T. H. Zegg, J. Z. Zoske, C. W. McZeish, R. S. Richards, R. M. Chisholm, H. D. Gush, J. Z. Yen, J. A. Galt, Science, 156, № 23, 1592 (1967).
- C. C. Vage, B. G. Clark, K. J. Kellerman, M. H. Cohen, D. Z. Jancey, Science, 157, № 14, 189 (1967).
- В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлюк, В. Д. Кротиков, Информ. бюллетень САНИ АН СССР, № 2, 1970

- 11 В. А. Алексеев, М. А. Антонец, Э. Д. Гатэлюк, П. С. Живора, Б. С. Иванов, А. Е. Крюков, Ю. А. Тихонов, М. В. Янкавцев, Радиотехника и электроника (в печати)
12. M. H. Cohen, Annual Review Astronomy and Astrophys., 7 (1969).
13. W. Donaldson, G. M. Miley, H. P. Palmer, H. Smith, Mont. Not. Roy. Astr. Soc., 146, 213 (1969).
14. B. G. Clark, K. J. Kellerman, C. C. Bare, M. H. Cohen, D. J. Jauncey, Preprint, January, 1968.
15. J. P. Basart, B. G. Clark, J. S. Kramer, Publ. Astr. Soc. Pacific, 86, 474, 273 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
11 февраля 1971 г.

RADIO INTERFEROMETER WITH INDEPENDENT RECEPTION AT THE FREQUENCY 86 Mc/s

V. A. Alekseev, M. A. Antonets, V. V. Vitkevich, E. D. Gatelyuk, P. S. Zhivora, V. D. Krotikov, A. E. Kryukov, V. S. Troitskii, A. I. Chikin, V. A. Shemagin, M. V. Yankavtsev, B. P. Fateev

The interferometer with independent reception at the frequency 86 Mc/s is described. For the base distance of 230 km the methods and observational results of the angular dimensions of some sources are given. The angular dimensions of the sources 3C298 and 3C380 obtained at the frequency 86 Mc/s are less than three seconds of arc.

УДК 533.9.01

КВАЗИСТАТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦЕ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ПЛАЗМЫ С ДИФФУЗНЫМ ОТРАЖЕНИЕМ ЭЛЕКТРОНОВ

A. B. Реззев

Рассматриваются слабозатухающие квазистатические поверхности волны в рамках кинетической теории электромагнитных колебаний полуограниченной плазмы с чисто диффузным рассеянием частиц поверхностью. Указанные типы колебаний существуют в интервале частот $\omega_p/\sqrt{2} < \omega < \omega_p$, где ω_p — плазменная частота, существенно большая, чем эффективная частота соударений частиц плазмы.

Рассмотрение ведется на примере максвелловского распределения частиц по скоростям, но все приведенные соотношения справедливы для любой системы с фермьевской статистикой.

Для описания электромагнитных колебаний полуограниченной плазмы будем использовать совместное решение системы уравнений Максвелла и линеаризованного кинетического уравнения с нулевой правой частью, как это сделано в работах [1-3]. Тогда дисперсионное уравнение поверхностных типов колебаний имеет вид [1,2]

$$-\sqrt{k_1^2 - \tilde{\omega}^2/c^2} = \frac{k_1^2 \tau_-^2 (-ik_1) - (\tilde{\omega}^2/c^2) \eta_-^2 (ik_1)}{(k_1 - i\lambda) \eta_-^2 (-ik_1) + (ck_1/\omega)^2 \tau_-^2 (-ik_1)(k_1 + i\lambda)}, \quad (1)$$

если механизм рассеяния электронов плоской границей плазмы принимается чисто диффузным.

Все обозначения уравнения (1) соответствуют формулам работ [2,3], входящие в него функции имеют аргументами волновой вектор k_1 и комплексную частоту $\tilde{\omega} = \omega' + i\omega''$ поверхности волны. Мнимая часть частоты ω'' является отрицательной величиной, соответствующей затухающей волне.

Дисперсионное уравнение (1) описывает поверхностные колебания на всех частотах, удовлетворяющих неравенству $\omega' \gg v_{\text{эфф}}$ — эффективной частоты соударений частиц плазмы. Области $\omega \leq \omega_p/\sqrt{2}$ соответствуют быстрые поверхностные волны [3] с фазовой скоростью порядка скорости света: $v_{\text{фаз}} \leq c$. Эта часть спектра подробно проанализирована в работах [1-3].

В интересующем нас квазистатическом случае, когда фазовая скорость поверхностных волн значительно меньше скорости света, в уравнении (1) можно сделать предельный переход $c \rightarrow \infty$, получив в результате гораздо более простое соотношение:

$$\eta_-^2(\tilde{\omega}, k_1) + J(\tilde{\omega}, k_1) + 2 = 0. \quad (2)$$

Если ограничиться слабозатухающими ($\gamma \equiv \omega''/\omega' \ll 1$) квазистатическими колебаниями, уравнение (2) можно еще более упростить, разложив функции $\eta_-^2(\tilde{\omega}, k_1)$, $J(\tilde{\omega}, k_1)$ в ряд Тэйлора по переменной $\tilde{\omega}$ в окрестности вещественной части частоты $\omega' \equiv \omega$:

$$\eta^2(\omega, k_1) + J(\omega, k_1) + i\gamma(2A\eta^2 + \frac{\partial J}{\partial \omega}) + 2 = 0. \quad (2a)$$

В последнее уравнение входят уже функции действительной части частоты ω :

$$\begin{aligned} \eta^2(\omega, k_1) &\equiv \eta_-^2(-ik_1) = \exp \left\{ \frac{2k_1}{\pi} \int_{k_1}^{\infty} \frac{\ln \epsilon^l(\omega, k) dk}{k \sqrt{k^2 - k_1^2}} \right\}, \\ J(\omega, k_1) &= \frac{2k_1}{\pi} \int_{k_1}^{\infty} \frac{\epsilon^l(\omega, k) dk}{k \sqrt{k^2 - k_1^2}}, \\ A(\omega, k_1) &= \frac{\omega k_1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{k_1}^{\infty} \frac{\ln \epsilon^l dk}{k \sqrt{k^2 - k_1^2}}. \end{aligned} \quad (2b)$$

Таким образом, уравнение (2a) описывает слабозатухающие ($\gamma \ll 1$) квазистатические $v_{\text{фаз}} \ll c$ поверхностные колебания на границе плазмы с диффузным рассеянием электронов в области частот, значительно превышающих частоту столкновений. Как мы увидим ниже, такие колебания существуют в интервале $\omega_p/\sqrt{2} < \omega < \omega_p$.

Трудность отыскания решения дисперсионного уравнения (2a) обусловлена сложным видом функциональных зависимостей $\eta^2(\omega, k_1)$, $J(\omega, k_1)$, $A(\omega, k_1)$, которые до сих пор были найдены только в предельном случае $k_1 \rightarrow 0$ [1, 2].

В работе [4] описан метод вычисления интегралов (2b), основанный на использовании аналитических свойств функций продольной диэлектрической проницаемости $\epsilon^l(\omega, k)$ в комплексной плоскости k и теоремы Коши. Пользуясь этим методом, указанные интегралы можно представить в виде суммы двух частей, одна из которых, представляющая основную часть интеграла, выражается через элементарные функции от аргументов k_1 , ω , другая часть является малой по сравнению с первой и всегда может быть учтена последовательными приближениями.

В соответствии с этим, действуя аналогично [4], получаем представление

$$\frac{2k_1}{\pi} \int_{k_1}^{\infty} \frac{\ln \epsilon^l dk}{k \sqrt{k^2 - k_1^2}} = \ln \left[\epsilon \left(\frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 + y^2}}{y} \right)^2 \right] - 2 \arcsin \frac{s_1}{s_3} + \beta s_1 + 2is_1 \Gamma_{\eta}, \quad (3a)$$

$$\frac{k_1}{\pi} \int_{k_1}^{\infty} \frac{\omega \partial}{\partial \omega} \frac{\ln \epsilon^l dk}{k \sqrt{k^2 - k_1^2}} = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} - \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + y^2}} \frac{\epsilon + y^2/2}{\epsilon + 3y^2/2} + i\alpha s_1,$$

в котором малые (при $\omega < \omega_p$) слагаемые α , β , Γ_{η} имеют вид

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} \operatorname{Im} \left(\frac{\omega \partial \epsilon^l}{\partial \omega} \Big| \epsilon^l \right) \frac{ds}{s \sqrt{s^2 - s_1^2}},$$

$$\beta = \frac{2}{\pi} \int_0^{s_1} \operatorname{arctg} (\epsilon^{l''}/\epsilon^{l'}) \frac{ds}{s \sqrt{s^2 - s_1^2}}, \quad (3b)$$

$$\Gamma_\eta = \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} \operatorname{arctg} (\varepsilon^{l''} / \varepsilon^{l'}) \frac{ds}{s \sqrt{s^2 - s_1^2}}.$$

В квазистатической области частот интеграл $J(\omega, k_1)$ можно считать равным [2]

$$J = \varepsilon + i s_1 (1 - \varepsilon) / \sqrt{\pi}. \quad (4)$$

В формулах (3) и в дальнейшем используются безразмерные переменные $s = k v_T / \omega$, $s_1 = k_1 v_T / \omega$, $t = \omega / \omega_p$, $\varepsilon = \lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon^l(k, \omega)$; величина y связана с корнем k_0 уравнения $\varepsilon^l(k, \omega) = 0$ в нижней полуплоскости k (лежащим на мнимой оси) соотношением $y = |k_0| v_T / \omega$; численное значение y в зависимости от частоты определяется равенством

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 = \frac{2}{y^2} \left[1 - \frac{1}{y} Z''(i/y) \right], \quad (5)$$

в котором $Z''(i/y)$ —мнимая часть плазменной дисперсионной функции [6] от аргумента i/y . Аналогично s_3 обозначает корень уравнения $\operatorname{Re} \varepsilon^l(s, t) = 0$ на действительной оси, численно определяемый равенством

$$\left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 = - \frac{2}{s_3^2} \left[1 + \frac{1}{s_3} Z'(1/s_3) \right] \quad (s_3 > 0), \quad (6)$$

в которое входит уже действительная часть упомянутой плазменной дисперсионной функции. Графики зависимостей $y(t)$, $s_3(t)$ приведены на рис. 1.

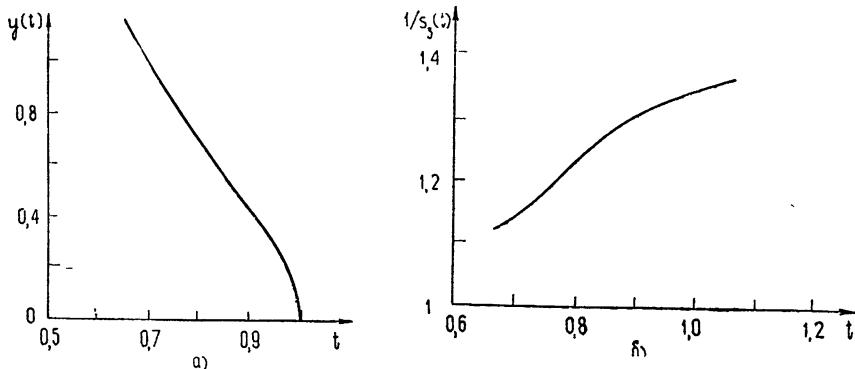


Рис. 1. а — зависимость от частоты функции $y(t)$;
б — зависимость от частоты функции $1/s_3(t)$.

Подставляя функции (3) в дисперсионное уравнение (2 а) и разделяя действительную и мнимую части, получаем систему уравнений для определения волнового вектора $s_1(t)$ и затухания $\gamma(t)$:

$$\operatorname{Re} \eta^2 + \varepsilon + 2 = 2 \gamma \{ \operatorname{Re} A \operatorname{Im} \eta^2 + \operatorname{Im} A \operatorname{Re} \eta^2 - 3 s_1 / (2 \sqrt{\pi} t^2) \}; \quad (7)$$

$$\gamma = - \frac{\operatorname{Im} \eta^2 + s_1 / (t^2 \sqrt{\pi})}{2 t^{-2} + 2 \operatorname{Re} \eta^2 \operatorname{Re} A - 2 \operatorname{Im} \eta^2 \operatorname{Im} A}. \quad (8)$$

Функция $\eta^2(\omega, k_1)$ в развернутом виде выглядит довольно громоздко:

$$\operatorname{Re} \eta^2 = \varepsilon [\exp(\beta s_1)] \left(\frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 + y^2}}{y} \right)^2 \left\{ \left(1 - \frac{2s_1^2}{s_3^2} \right) \cos 2s_1 \Gamma_\eta + \right.$$

$$+ \frac{2s_1}{s_3} \sqrt{1 - \frac{s_1^2}{s_3^2}} \sin 2s_1 \Gamma_\eta \Big\}, \quad (9)$$

$$\operatorname{Im} \eta^2 = \varepsilon [\exp(\beta s_1)] \left(\frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 + y^2}}{y} \right)^2 \left\{ \left(1 - \frac{2s_1^2}{s_3^2} \right) \sin 2s_1 \Gamma_\eta - \right.$$

$$\left. - \frac{2s_1}{s_3} \sqrt{1 - \frac{s_1^2}{s_3^2}} \cos 2s_1 \Gamma_\eta \right\}.$$

Пока затухание γ является малым, безразмерный волновой вектор s_1 остается также величиной, меньшей единицы, в связи с чем можно использовать разложения по степеням s_1 и упростить выражения (9):

$$\operatorname{Re} \eta^2 \approx \varepsilon \left(\frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 + y^2}}{y} \right)^2 (1 - bs_1^2), \quad b(t) = \frac{2}{s_3^2} - 4 \Gamma_{\eta 0}/s_3, \quad (10)$$

$$\operatorname{Im} \eta^2 \approx -2\varepsilon h \left(\frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 + y^2}}{y} \right)^2, \quad h(t) = \frac{1}{s_3} - \Gamma_{\eta 0}, \quad \Gamma_{\eta 0} \equiv \Gamma_\eta(s_1=0).$$

Введя новую искомую функцию

$$z = (s_1 + \sqrt{s_1^2 + y^2})^2/y^2 - 1 \quad (11)$$

и считая z малой величиной, можно свести уравнение (7) к квадратному с коэффициентами, зависящими только от частоты:

$$\varepsilon (1 + z - by^2 z^2/4) + \varepsilon + 2 = -p z^2, \quad (12)$$

где

$$p(t) = \frac{1}{8}(1-\varepsilon)y^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2h(1-t^2) \right] \left[\alpha_0(t^2-1) - \frac{3}{2\sqrt{\pi}} - 2h \right] (\alpha_0 \equiv \alpha(t, s_1=0)).$$

В правой части уравнения (12) учтена зависимость затухания γ от частоты и волнового вектора в соответствии с равенством (8).

В окрестности частоты $\omega_p/\sqrt{2}$ квадратичными членами уравнения (12) можно пренебречь и для функции $z(t)$ получить выражение

$$z = -2(1+\varepsilon)/\varepsilon, \quad (13)$$

откуда

$$s_1(t) = \frac{yz}{2\sqrt{1+z}} \approx -\frac{y(1+\varepsilon)}{\varepsilon}; \quad (14)$$

$$\gamma(t) = -\frac{s_1}{4} \left[1/s_3 - \Gamma_{\eta 0} + \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \right]. \quad (15)$$

Два последних соотношения эквивалентны равенству (22) работы [2] и одновременно позволяют установить связь между введенными там функциями α'_d , α''_d и нулями продольной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^l(\omega, k)$:

$$\begin{aligned} \alpha'_d &= 1/y, \\ \alpha''_d &= 1/s_3 - \Gamma_{\eta 0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Решение квадратного уравнения (12)

$$z(t) = \frac{\epsilon}{2(p - \epsilon by^2/4)} \left(\sqrt{1 - \frac{8(1+\epsilon)}{\epsilon^2} (p - \frac{\epsilon by^2}{4})} - 1 \right) \quad (17)$$

аппроксимирует исходную функцию $s_1(t)$, пока z остается величиной, меньшей единицы, т. е. в нашем случае до частоты $\omega \sim 0,85 \omega_p$. На частотах, превышающих $0,85 \omega_p$, необходимо решать каким-либо способом полное уравнение (7), не используя разложение по степеням s_1 . Интегральные члены α , β , Γ , могут быть учтены последовательными приближениями; в качестве нулевого значения функции $s_1(t)$ с успехом может быть использована экстраполяция решения (14) или (17) на частоты $\omega > 0,85 \omega_p$.

Найденные графически последовательными приближениями решения системы (7), (8) представлены на рис. 2 а, 2 б. Как видно из рис. 2 б,

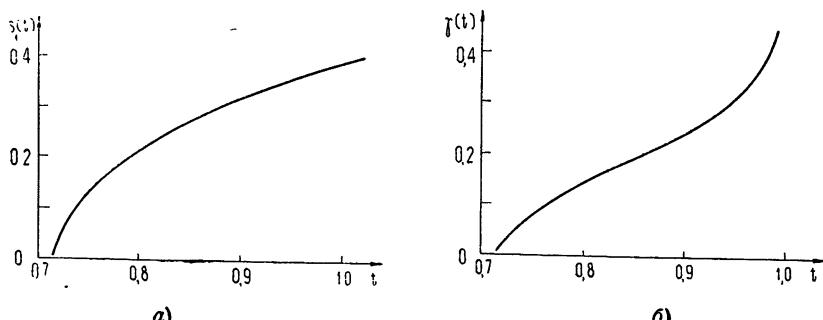


Рис. 2. а — безразмерный „волновой вектор“ $s_1(t)$ как функция частоты;
б — зависимость затухания поверхностной волны от частоты.

на частоте ω_p затухание достигает величины 0,5, что уже близко к пределу применимости исходного уравнения (2 а), полученного в предположении $\gamma \ll 1$.

Поэтому мы ограничиваемся найденными решениями на частотах $\omega < \omega_p$, для которых $\gamma < 0,5$.

В заключение отметим, что все полученные соотношения справедливы для систем с произвольным фермиевским распределением частиц по скоростям, если под величинами y и s_3 понимать нули продольной диэлектрической проницаемости, соответствующей рассматриваемой системе [4]. Кроме этого необходимо также в выражении (3) для функций $A(t, s_1)$ произвести замену

$$\frac{\epsilon + y^2/2}{\epsilon + 3y^2/2} \rightarrow \frac{\frac{\omega}{\partial \omega}(\mathbf{k}_0)}{\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{k}}(\mathbf{k}_0)}.$$

Вырожденный электронный газ и максвелловская плазма являются предельными случаями фермиевской системы, в соответствии с этим приведенные формулы, так же как и результаты, полученные для максвелловской плазмы, качественно идентичны соответствующим результатам для систем с температурой, равной нулю [5].

Приведенная на рис. 2 б зависимость $\gamma(t)$ показывает, что в рассмотренной модели диффузного отражения электронов на границе плазмы затухание квазистатических поверхностных волн примерно на порядок выше, чем при условии зеркального отражения [4], а слабозатухающие поверхностные колебания существуют в гораздо более узком интервале частот $\omega_p > \omega > \omega_p/\sqrt{2}$. Физические причины этого подробно рассмотрены в работах [1-3].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Мирошниченко, ЖТФ, 36, 1008 (1966).
2. Ю. А. Романов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 10, 1533 (1968).
3. А. В. Резцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 5, 688 (1970).
4. А. В. Резцов, ЖТФ, 41, 465, 475 (1971).
5. А. В. Резцов, ЖТФ, 40, 916 (1970).
6. B. D. Fried, S. D. Conte, The Plasma Dispersion Function, N. Y., 1961.

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 июня 1970 г.,
после доработки
11 февраля 1971 г.

**QUASI-STATIC SURFACE WAVES AT THE BOUNDARY OF MAXWELL'S
PLASMA WITH DIFFUSION ELECTRON REFLECTION**

A. V. Reznov

Weakly attenuating quasi-static surface waves are considered in the frame of the kinetic theory of electromagnetic oscillations of the semi-bounded plasma with a pure diffuse reflection of particles by the surface. The given types of oscillations exist in the frequency interval $\omega_p/\sqrt{2} < \omega < \omega_p$ where ω_p is the plasma frequency which is considerably more than the effective frequency of plasma particle collisions. Consideration is made on the example of Maxwell's distribution of particle velocities but all the given relations are valid for any system with the Fermi statistics.

УДК 533.9.01

О ГЕНЕРАЦИИ И ИЗЛУЧЕНИИ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА НЕОДНОРОДНЫЙ СЛОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

B. V. Демченко, B. V. Долгополов, A. Я. Омельченко

Исследуется излучение второй гармоники из области плазменного (гибридного) резонанса при нормальном падении электромагнитной волны на слой неоднородной магнитоактивной плазмы в случае, когда доля энергии на частоте падающей волны, проникающая в область гибридного резонанса для основной частоты, не является экспоненциально малой.

Получены выражения для полей и плотности потока энергии второй гармоники. Показано, что, как и в случае изотропной среды, вторая гармоника присутствует лишь в отраженной волне, причем поле второй гармоники пропорционально первой степени напряженности внешнего магнитного поля.

Как известно, при падении необыкновенной электромагнитной волны на слой неоднородной плазмы в точке плазменного резонанса имеет место резкое возрастание амплитуды электромагнитного поля волны. Поэтому в области плазменного резонанса в первую очередь скажутся нелинейные эффекты среды. Одним из таких эффектов является генерация электромагнитной волны с частотой, равной удвоенной частоте падающей волны. Генерация такой волны в случае изотропной плазмы рассматривалась в работах [1, 2].

В настоящей работе исследуется излучение второй гармоники из области плазменного резонанса при нормальном падении электромагнитной волны на слой неоднородной магнитоактивной плазмы.

Пусть невозмущенная полем волны плотность плазмы n_0 является функцией пространственной координаты x , причем в области, где поле волны отлично от нуля, $\frac{dn_0}{dx} \gg 0$, а постоянное магнитное поле H_0 направлено вдоль оси z . Тогда электромагнитное поле волны на основной частоте ω удобно представить в виде

$$[E_1(x, t), H_1(x, t)] = 2 \operatorname{Re} \{ [E_1(x), H_1(x)] e^{-i\omega t} \}, \quad (1)$$

где $E_1(x)$ и $H_1(x)$ — комплексные величины. Для необыкновенной волны отличными от нуля составляющими электромагнитного поля являются E_x , E_y и H_z . Составляющая поля E_y удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 E_{1y}}{dx^2} + K^2(x) E_{1y} = 0, \quad (2)$$

где

$$K(x) = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{v(1-v)}{1-u-v} \right]^{1/2}, \quad (3)$$

$v = \Omega^2/\omega^2$, $u = \omega_H^2/\omega^2$, Ω — плазменная частота электронов, $\omega_H = eH_0/mc$ —

гироскорость электронов ($e = -|e|$), а составляющая поля E_{1x} связана с E_{1y} следующим соотношением:

$$E_{1x} = -i \frac{v \sqrt{u}}{1-u-v} E_{1y}. \quad (4)$$

Будем считать, что вне окрестностей точек поворота ($v \approx 1 \pm \sqrt{u}$) выполняется неравенство

$$l |K(x)| \gg 1, \quad (5)$$

где $\frac{1}{l} = \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}$ — характерное расстояние, на котором изменяется плотность плазмы. Тогда вдали от точек поворота и точки плазменного (гибридного) резонанса, где $1-u-v \approx 0$, решение уравнения (2) можно искать методом ВКБ. В случае, когда точки поворота лежат вблизи точки плазменного резонанса, что соответствует выполнению неравенства

$$\sqrt{u} (l/c)^{2/3} \ll 1, \quad (6)$$

задача об отражении необыкновенной волны от слоя магнитоактивной плазмы в линейном приближении рассматривалась в работе [3]. Так как при выполнении последнего неравенства доля энергии, проникающей в область плазменного резонанса, не является экспоненциально малой, при исследовании генерации второй гармоники условие (6) будем считать выполненным.

Если амплитуду электрического поля падающей волны в вакууме (волна падает слева направо) представить в виде

$$E_{1y}^{\text{пад}}(x) = E_a \exp\left(i \int_0^x K(x) dx\right), \quad (7)$$

то, как следует из работы [3], в окрестности точек поворота и точки плазменного резонанса составляющую поля $E_{1y}(x)$ приближенно можно представить следующим образом:

$$E_{1y}(x) = A \tau + B [\tau \ln \tau - 1/\alpha], \quad (8)$$

где $x = 0$ — точка плазменного резонанса ($v|_{x=0} = 1 = -u$),

$$\xi = \frac{\omega}{c} x - i \delta, \quad \delta = \frac{\gamma}{\omega} \frac{1}{\beta} \ll 1, \quad \beta = \left. \frac{dv}{d\xi} \right|_{\xi=0} \ll 1,$$

$$\tau = \beta^{1/3} \xi, \quad \sigma = \frac{u(1-u)}{\beta^{4/3}} \ll 1, \quad (9)$$

$$A = \frac{3^{1/3} \Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{B}{\alpha}, \quad B = i 2 \alpha \frac{\pi^{1/2} E_a}{3^{2/3} \Gamma(2/3) \beta^{1/6}} i e^{i\pi/4},$$

γ — эффективная частота столкновений электронов с остальными частицами плазмы, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Следует отметить, что полученные выражения справедливы, если в области, включающей точки поворота и точку плазменного резонанса, зависимость плотности плазмы от координаты можно считать линейной.

Для того, чтобы получить уравнения для составляющих электромагнитного поля на второй гармонике, представим v — скорость электронов плазмы, обусловленную полем волны, составляющие поля волны E и H ,

а также плотность электронов плазмы $n(x)$ в виде рядов по степеням амплитуды поля:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots, \quad \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} = \{\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots, \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \dots\}, \quad n(x) = n_0 + n_1 + \dots \quad (10)$$

Здесь члены ряда с индексом 1 соответствуют линейному приближению.

Тогда из уравнения движения для \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} - \omega_H [\mathbf{v}_1 \mathbf{e}_z] = \frac{e}{m} \mathbf{E}_1; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - \omega_H [\mathbf{v}_2 \mathbf{e}_z] = \frac{e}{m} \mathbf{E}_2 - (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 + \frac{e}{mc} [\mathbf{v}_1 \mathbf{H}_1], \quad (12)$$

где \mathbf{e}_z — единичный вектор в направлении внешнего магнитного поля.

Аналогично (1) представим все величины второй гармоники в виде

$$f_2(x, t) = 2 \operatorname{Re} \{f_2(x) e^{-i2\omega t}\}. \quad (13)$$

Отметим, что в дальнейшем под f_1, f_2 мы будем понимать не зависящие от времени величины, которые стоят в фигурных скобках выражений (1) и (13).

Используя уравнение непрерывности, для токов первой и второй гармоник будем иметь соответственно

$$\mathbf{j}_1 = e n_0 \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{j}_2 = e \left[n_0 \mathbf{v}_2 - i \frac{\mathbf{v}_1}{\omega} \operatorname{div}(n_0 \mathbf{v}_1) \right]. \quad (14)$$

Из уравнений (12) найдем следующие выражения для скоростей второй гармоники:

$$v_{2x} = \frac{e}{m\omega^2} \frac{i 2\omega E_{2x} - \omega_H E_{2y}}{4-u} + \frac{i 2\omega F_x - \omega_H F_y}{\omega^2(4-u)}; \quad (15)$$

$$v_{2y} = \frac{e}{m\omega^2} \frac{i 2\omega E_{2y} + \omega_H E_{2x}}{4-u} + \frac{i 2\omega F_y + \omega_H F_x}{\omega^2(4-u)}, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{F} = \frac{e}{mc} [\mathbf{v}_1 \mathbf{H}_1] - (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1; \quad (17)$$

$$v_{1x} = \frac{e}{m\omega^2} \frac{i \omega E_{1x} - \omega_H E_{1y}}{1-u}, \quad v_{1y} = \frac{e}{m\omega^2} \frac{i \omega E_{1y} + \omega_H E_{1x}}{1-u}, \quad (18)$$

E_{1x}, E_{1y} определяются выражениями (4) и (8).

Подставляя выражения (14)–(18) в уравнения Максвелла и выделяя вторую гармонику, для полей второй гармоники получим следующую систему уравнений:

$$-i 2\omega E_{2x} + \frac{v}{4-u} (i 2\omega E_{2x} - \omega_H E_{2y}) + 4\pi j_{bx} = 0; \quad (19)$$

$$-c \frac{dH_{2z}}{dx} = -i 2\omega E_{2y} + \frac{v}{4-u} (\omega_H E_{2x} + i 2\omega E_{2y}) + 4\pi j_{by}; \quad (20)$$

$$H_{2z} = -i \frac{c}{2\omega} \frac{dE_{2y}}{dx}, \quad (21)$$

где

$$4\pi j_{bx} = -i \frac{e}{m\omega^3} \frac{i\omega E_{1x} - \omega_H E_{1y}}{1-u} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{v}{1-u} (i\omega E_{1x} - \omega_H E_{1y}) \right\} + \frac{4\pi en_0}{\omega^2} \frac{i2\omega F_x - \omega_H F_y}{4-u},$$

$$4\pi j_{by} = -i \frac{e}{m\omega^3} \frac{\omega_H E_{1x} + i\omega E_{1y}}{1-u} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{v}{1-u} (i\omega E_{1x} - \omega_H E_{1y}) \right\} + \frac{4\pi en_0}{\omega^2} \frac{\omega_H F_x + i2\omega F_y}{4-u},$$

$$F_x = \frac{e^2}{m^2 \omega^2 (1-u)} \left\{ -\frac{i}{\omega} (\omega_H E_{1x} + i\omega E_{1y}) \frac{dE_{1y}}{dx} - \right.$$

$$\left. - (i\omega E_{1x} - \omega_H E_{1y}) \frac{d}{dx} \frac{i\omega E_{1x} - \omega_H E_{1y}}{\omega^2 (1-u)} \right\},$$

$$F_y = \frac{e^2}{m^2 \omega^2 (1-u)} \left\{ \frac{i}{\omega} (i\omega E_{1x} - \omega_H E_{1y}) \frac{dE_{1y}}{dx} - \right.$$

$$\left. - (i\omega E_{1x} - \omega_H E_{1y}) \frac{d}{dx} \frac{\omega_H E_{1x} + i\omega E_{1y}}{\omega^2 (1-u)} \right\}.$$

Исключая из системы уравнений (19) — (21) составляющие поля H_{2z} и E_{2x} , придем к дифференциальному уравнению относительно составляющей E_{2y} :

$$\frac{d^2 E_{2y}}{dx^2} + k_2^2 E_{2y} = R(x), \quad (22)$$

где

$$k_2 = \frac{2\omega}{c} \left[1 - \frac{v(1-v/4)}{4-u-v} \right]^{1/2}; \quad (23)$$

$$R(x) = -\frac{\omega_H}{c^2} \frac{v}{4-u-v} 4\pi j_{bx} - i \frac{2\omega}{c^2} 4\pi j_{by}. \quad (24)$$

Учитывая, что в области, где $R(x)$ заметно отлична от нуля (область плазменного резонанса и точек поворота), k_2 можно считать величиной постоянной относительно x , решение уравнения (22), описывающее волны, излучаемые из области плазменного резонанса ($x = 0$), вне области плазменного резонанса и точек поворота запишем в виде

$$E_{2y} = \frac{\exp(ik_2 x)}{i2k_2} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \exp(-ik_2 x) dx \quad (x > 0); \quad (25)$$

$$E_{2y} = \frac{\exp(-ik_2 x)}{i2k_2} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) \exp(ik_2 x) dx \quad (x < 0). \quad (26)$$

В окрестности точки плазменного резонанса и точек поворота выражение (24) для $R(x)$ после простой, но громоздкой выкладки можно преобразовать к следующему:

$$R(\xi) = -i \frac{2e\omega_H}{3mc^3} \left\{ -3 \frac{u(1-u)}{\beta^2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{E_{1y}^2}{\xi^2} \right) + \frac{u(5+u)}{\beta} \frac{E_{1y}}{\xi} \frac{dE_{1y}}{d\xi} + \right. \\ \left. + 3 \frac{1+u}{\beta} E_{1y} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{E_{1y}}{\xi} \right) - \frac{1+2u}{1-u} \frac{d}{d\xi} (E_{1y}^2) \right\}. \quad (27)$$

Учитывая характер особенности функции $R(\xi)$ в точке $\xi=0$, можно заключить, что E_{2y} , определяемое выражением (25), равно нулю, т. е., как и в случае отражения электромагнитной волны от изотропной плазмы [2], вторая гармоника присутствует лишь в отраженном сигнале.

Принимая во внимание неравенства (9), нетрудно показать, что максимальный вклад в величину поля второй гармоники дает третье слагаемое в фигурных скобках соотношения (27) (остальными слагаемыми можно пренебречь по сравнению с третьим). Тогда из (26), (27), (8) и (9) получим

$$E_{2y} = i \frac{2(2\pi)^2 a}{3^{4/3} \Gamma^2(2/3)} \frac{E_a^2}{H_0} \sqrt{\frac{k_2(0)}{k_2(x)}} \exp \left(-i \int_0^x k_2 dx \right), \quad (28)$$

где H_0 — напряженность внешнего постоянного магнитного поля.

Так как $a \sim H_0^2$ и $u \ll 1$, поле второй гармоники пропорционально первой степени напряженности внешнего магнитного поля.

Используя (21), (28), для плотности потока энергии второй гармоники вдоль оси x при $x < 0$ будем иметь следующее выражение:

$$S = - \frac{2(2\pi)^3 a^2 c}{3^{13/6} \Gamma^4(2/3)} \frac{E_a^4}{H_0^2}. \quad (29)$$

Знак минус в выражении (29) означает, что вторая гармоника излучается только в направлении распространения отраженной волны на основной частоте.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность К. Н. Степанову за обсуждение работы и полезные советы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. K. Försterling, H. O. Wüster, J. Atm. Terr. Phys., 2, 22 (1951).
2. Н. С. Ерохин, В. Е. Захаров, С. С. Моисеев, ЖЭТФ, 56, 179 (1969).
3. А. Я. Омельченко, К. Н. Степанов, УФЖ, 13, 1522 (1968).

Поступила в редакцию
17 августа 1970 г.

ON THE SECOND HARMONIC GENERATION AND RADIATION AT NORMAL INCIDENCE OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE ON AN INHOMOGENEOUS MAGNETOACTIVE PLASMA LAYER

V. V. Demchenko, V. V. Dolgopolov, A. Ya. Omel'chenko

The paper investigates the second harmonic radiation from the plasma (hybrid) resonance region at the normal incidence of an electromagnetic wave on an inhomogeneous magnetooactive plasma layer in the case when a part of energy at the frequency of the incident wave penetrating into the hybrid resonance region for the fundamental frequency is not exponentially small.

Expressions are derived for the field and energy flux density of the second harmonic. It is shown that as in the case of the isotropic medium, the second harmonic is present only in the reflected wave, the field of the second harmonic being proportional to the first power of the external magnetic field intensity.

УДК 533.951 621.371.18

• ВЫНУЖДЕННОМ КОМБИНАЦИОННОМ РАССЕЯНИИ ПОПЕРЕЧНОЙ ВОЛНЫ В СЛОЕ ПЛАЗМЫ

И. А. Кольчугина, А. Г. Литвак

Исследуется распадное взаимодействие плазменных и электромагнитных волн в слое однородной плазмы. Определены характерные параметры взаимодействия в режимах усиления и генерации плазменных колебаний. Приведены оценки возможности экспериментального наблюдения эффектов.

Исследованию вынужденного комбинационного рассеяния поперечных волн с фиксированной фазой в плазме посвящено довольно большое число работ. Впервые конверсия пары поперечных волн в продольную была рассмотрена независимо сразу несколькими авторами [1-3] в приближении заданного поля поперечных волн. Затем в [4] были определены коэффициенты трансформации и характерная длина взаимодействия в нелинейном приближении при учете обратного влияния усиливаемых волн на волну накачки. Однако в [4] исследована лишь конверсия спутных поперечных волн, тогда как взаимодействие встречных волн, как будет показано ниже, является более эффективным. Кроме того, при взаимодействии встречных волн возможна генерация волн на комбинационных частотах при распространении в нелинейном слое одной волны накачки*, а для спутных волн реализуется лишь режим усиления (амplitуды двух волн должны быть отличны от нуля). Изучению вынужденного комбинационного рассеяния встречных электромагнитных волн в слое плазмы и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим взаимодействие в однородном слое изотропной плазмы без столкновений трех волн, удовлетворяющих условиям синхронизма

$$\begin{aligned} \omega_1 - \omega_2 &= \omega_l, \\ \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 &= \mathbf{k}_l. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ω_1 и \mathbf{k}_1 — частота и волновой вектор падающей (в $+z$ -направлении) на слой электромагнитной волны, ω_2 и \mathbf{k}_2 — частота и волновое число встречной электромагнитной волны, ω_l и \mathbf{k}_l соответствуют продольной плазменной волне. При решении не учитываем отражения волн на границах слоя, полагая коэффициенты отражения равными нулю. Одной из возможных реализаций такой системы является слой плазмы с плавным изменением концентрации электронов на границах. Затуханием Ландау возбуждаемой плазменной волны можно пренебречь, если фазовая скорость плазменной волны велика по сравнению с тепловой скоростью электронов. При переходе волны в область малых концентра-

* Например, в работе [5] изложена теория возбуждения упругих волн, в [6, 7] — акустических волн. В работе [8] показано, что параметрически связанные волны могут быть «плечены» накачкой: существуют колебания, поле которых локализовано в области, занятой излучением накачки, и вследствие этого непрерывно усиливается.

ций затухание Ландау увеличивается, и можно ввести эффективную границу слоя, от которой не происходит отражения плазменной волны. Для поперечных волн пренебрежение отражением справедливо, если $\omega_1, \omega_2 \gg \omega_p$.

Уравнение для поля в плазме —

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{j}^{(1)} + \mathbf{j}^{(2)}), \quad (2)$$

где $\mathbf{j}^{(1)}$ — линейный по полю ток, $\mathbf{j}^{(2)}$ — квадратичная по \mathbf{E} поправка к нему. Решение уравнения (2) ищем в виде суммы волн с медленно меняющимися амплитудами

$$\mathbf{E} = \sum_{\omega} \mathbf{a}_{\omega} A_{\omega} \exp [i(\omega t - kz)]. \quad (3)$$

Используя выражения для токов $\mathbf{j}^{(1)}$ и $\mathbf{j}^{(2)}$ (см., например, [4, 9]) нетрудно получить известную систему укороченных уравнений для амплитуд взаимодействующих волн:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= -\beta_1 A_1 A_2, \\ \frac{dA_2}{dz} &= -\beta_2 A_1 A_2^*, \\ \frac{dA_l}{dz} &= \beta_l A_1 A_2^* - \alpha_l A_l, \end{aligned} \quad (4)$$

в которой мы учли потери плазменной волны, связанные с соударениями или затуханием Ландау*. Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{e}{2mc^2} \frac{\omega_p^2}{\omega_l^2} \frac{\omega_1}{\omega_2} \frac{k_l}{k_1}, & \beta_2 &= \frac{e}{2mc^2} \frac{\omega_p^2}{\omega_l^2} \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{k_l}{k_2}, \\ \beta_l &= \frac{e}{2mc^2} \frac{\omega_l^2}{\omega_1 \omega_2} \frac{c^2}{3V_{Te}^2}, & \alpha_l &= \frac{v}{V_{rpl}}, \end{aligned}$$

$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$, e и m — заряд и масса электрона, N — электронная концентрация, c — скорость света, V_{Te} — тепловая скорость электронов, v — эффективная частота столкновений или декремент бесстолкновительного затухания, V_{rpl} — групповая скорость плазменной волны.

Система уравнений (4) аналогична уравнениям, описывающим взаимодействие трех волн в нелинейной оптике [5–8, 10]. Мы остановимся на определении характерных параметров обратного рассеяния в плазме.

Рассмотрим сначала решение уравнений (4), удовлетворяющее граничным условиям

$$A_l(z=0) = A_{l0}, \quad A_2(z=L) = A_{2L} \quad (5)$$

в приближении заданного поля накачки ($A_1(z) = A_1(0) = \text{const} \gg A_2(z)$, $A_1(z)$). Коэффициент трансформации волны накачки во встречную электромагнитную волну (нелинейный коэффициент отражения от прозрачного слоя плазмы) оказывается равным

* При $\omega_1, \omega_2 \gg \omega_{pe}$ линейными потерями поперечных волн можно пренебречь.

$$\frac{|A_2(0)|^2}{|A_{10}|^2} = \frac{1}{|A_{10}|^2} \left| \frac{\left(\Omega^2 + \frac{\alpha^2}{4} \right) A_{10} \sin \Omega L + \Omega \beta_l A_{10} A_{2L} e^{(\alpha/2)L}}{\left(\Omega \cos \Omega L + \frac{\alpha}{2} \sin \Omega L \right) \beta_l A_{10}} \right|^2, \quad (6)$$

где $\Omega = \sqrt{\beta_l \beta_2 |A_{10}|^2 - \alpha^2/4}$. При $\operatorname{ctg} \Omega L = -\alpha/2 \Omega$ эта величина стремится к ∞ , что означает возможность генерации в слое волн на комбинационных частотах (получение ненулевых решений в задаче с нулевыми граничными условиями $A_{10} = 0$, $A_{2L} = 0$). Условие самовозбуждения можно приближенно (для оценок) представить в виде

$$\sqrt{\frac{V_\sim^2}{6c^2} - \frac{v^2}{144 k_1^2 V_{Te}^2}} \frac{L \omega_p}{V_{Te}} \approx \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

Отсюда можно оценить пороговую величину поля накачки при заданных параметрах плазменного слоя. Например, при $v/\omega_1 < 5V_{Te} V_\sim/c^2$

$$E_{\text{пор}} = \frac{\pi \sqrt{6} c m \omega_1 V_{Te}}{2 e \omega_p L} \approx 1.4 \cdot 10^{-6} \frac{\omega_1}{L} \sqrt{\frac{T_e^\circ}{N}}. \quad (8)$$

При выполнении обратного неравенства пороговое поле зависит лишь от частоты соударений и температуры электронов и определяется по формуле

$$E_{\text{пор}} = \frac{\sqrt{6} m c^2 v}{12 e V_{Te}} \approx 1.7 \cdot 10^{-4} \frac{v}{V_{Te}^\circ}. \quad (9)$$

Величину коэффициента трансформации в режиме генерации с учетом изменения накачки удается определить, если пренебречь диссипативными эффектами. Не останавливаясь на подробностях, приведем сразу соотношение для определения коэффициента трансформации, полученное при решении задачи с нулевыми граничными условиями ($A_1(0) = A_{10}$, $A_L(0) = 0$, $A_2(L) = 0$) [7]:

$$\sqrt{m_1} \xi_L = K(\gamma^2) (2n - 1). \quad (10)$$

Здесь $K(\gamma^2) = \int_0^1 \frac{dx}{|(1 - x^2)(1 - \gamma^2 x^2)|^{1/2}}$ — четверть периода эллип-

тической функции, $n = 1, 2, \dots, N$ (N — целая часть величины $[\sqrt{m_1} \xi_L / \pi + 1/2]$), $\xi_L = [\beta_1 \beta_2 \beta_l]^{1/2} z$, $\gamma^2 = m_2/m_1$ — искомый коэффициент трансформации, m_1 и m_2 определяются соотношениями Мэнли—Роу: $= (z)^{1/2} u_1^2 + u_l^2 = u_{10}^2 = \text{const}$, $m_2(z) = u_2^2 + u_l^2 = \text{const} < m_1$. Уравнение (10) можно решить графически (см. рис. 1). Нетрудно видеть, что решение с нулевыми граничными условиями существует, если выполнено условие самовозбуждения типа (7) $\sqrt{m_1} \xi_L \geq \pi/2$ [7]. С помощью (10) можно также оценить* параметры плазмы и поля, при которых произойдет практически полная трансформация падающей на слой волны

* Уравнение (10) можно использовать лишь для оценок по порядку величины, так как оно верно только вблизи порога самовозбуждения. При больших амплитудах накачки необходимо учитывать генерацию и взаимодействие спектральных составляющих, для которых не выполнены точные условия синхронизма, а также генерацию волн, распространяющихся под углом к оси z .

в генерируемые волны. Например, коэффициент трансформации во встречную волну $\gamma^2 \approx 0,9$ при условии $\sqrt{m_1 \xi_L} \approx 2,58$. Соответствующая этому условию амплитуда накачки $E_{10} \approx 1,6 E_{\text{пор}}$. Отсюда можно определить также характерную длину трансформации (толщину слоя) при заданной амплитуде накачки. Эта величина оказывается значительно меньше соответствующей характерной длины взаимодействия спутных волн, определенной в [4].

Следует отметить, что, хотя амплитуда электрического поля плазменной волны может заметно превышать амплитуды поперечных волн ($\frac{E_1}{E_2} \sim \frac{c}{\sqrt{6} V_{Te}} \frac{\omega_p}{\omega_2}$), отношение потоков энергии генерируемых волн удовлетворяет соотношению $W_1/W_2 \sim \omega_p/\omega_2$, т. е. максимальная доля энергии падающей волны, трансформируемая в энергию плазменных колебаний, не превышает $1/2$ (при $\omega_1 \sim 2\omega_p$).

Выше все соотношения приведены для стационарного случая, когда время установления равно отношению толщины слоя к групповой скорости плазменной волны $\tau = \frac{L}{6V_{Te}} \frac{c}{V_{Te}} \frac{\omega_p}{\omega_1}$.

В заключение приведем оценки возможности экспериментального наблюдения рассмотренных эффектов. Величина порогового поля в лабораторной плазме с параметрами $N_0 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $T = 10^6 \text{ K}$, $L = 100 \text{ см}$ в диапазоне сантиметровых волн ($\lambda = 3 \text{ см}$), вычисленная по формуле (8), оказывается равной $E_{\text{пор}} \approx 10^3 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$. Это соответствует плотности потока энергии $P \approx 10^8 \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}$. Характерное время установления процесса равно $\tau \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ сек}$. Для пробоя в воздухе при атмосферном давлении ($N_e = 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $T_e \approx 10^6 \text{ K}$, $L = 0,1 \text{ см}$, $\omega_1 = 2 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$, $\nu_{el} = 3 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$), используя формулу (9), получаем $E_{\text{пор}} \approx 10^7 \text{ в} \cdot \text{см}^{-1}$ и эквивалентную плотность потока энергии $P \approx 4 \cdot 10^{10} \text{ вт} \cdot \text{см}^{-2}$. Характерное время установления при этом $\tau \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ сек}$. Оценки показывают, что рассмотренное явление обратного рассеяния должно играть роль в экспериментах по взаимодействию интенсивного СВЧ и оптического излучения с плазмой.

Авторы благодарны М. А. Миллеру за обсуждение результатов и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. L. Bergk, Phys. Fl., 7, 917 (1964).
2. А. Г. Литвак, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, № 3, 562 (1964).
3. N. M. Kroll, A. Ron, N. Rostoker, Phys. Rev. Lett., 13, 83 (1964).
4. И. С. Данилкин, ЖТФ, 35, 667 (1965).
5. N. Kroll, J. Appl. Phys., 36, 34 (1965).
6. D. L. Boggoff, J. Appl. Phys., 36, 1760 (1965).
7. В. И. Беспалов, М. А. Кубарев, Г. А. Пасманик, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 10, 1433 (1970).
8. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 2, 293 (1969).
9. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
10. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.

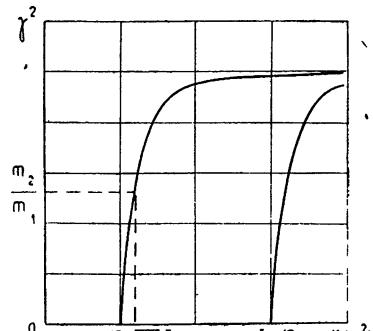


Рис. 1.

**STIMULATED COMBINATIONAL SCATTERING OF A TRANSVERSE WAVE
IN A PLASMA LAYER***. A. Kol'chugina, A. G. Litvak*

The decay interaction of electromagnetic and plasma waves in a homogeneous plasma slab is considered. The characteristics of the interaction in the case of the amplification and generation of a plasma wave are determined. The possibility of the experimental observation of the effect is estimated.

УДК 538.574.4

О КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ РАДИОВОЛН

Н. Г. Денисов, В. В. Тамойкин

В работе исследуются корреляционные свойства поля, возникающего при обратном рассеянии волн на хаотических неоднородностях протяженного слоя. Получены пространственно-временные функции поля рассеяния. Обсуждается возможность измерения среднего профиля ионосферного слоя по измерению функции корреляции амплитуд нормальных волн.

В последнее время большое внимание уделяется методу частичных отражений в связи с применением к исследованию нижних слоев ионосферы. Первые эксперименты по регистрации отраженных сигналов показали возможность изучения как регулярного профиля *D*-слоя, так и его неоднородной структуры. Если предположить, что облачная структура неоднородного слоя является основной причиной, вызывающей слабые отраженные сигналы, то применение стандартного метода корреляционной обработки этих сигналов должно основываться на связи статистических свойств поля рассеяния с основными параметрами рассеивающей области.

Имеется много работ, посвященных исследованию корреляционных свойств поля рассеяния. Однако полученные в них результаты в той или иной степени не полны. Так в [1] имеется расчет корреляционных свойств поля рассеяния на достаточно далеких расстояниях от рассеивающего объема. В [2] (см. также [3]) получены корреляционные функции пульсаций поля, возникающих при рассеянии на мелкомасштабных неоднородностях. В этом случае можно получить спектр мощности рассеянного излучения, суммируя мощности компонент, имеющих одинаковый допплеровский сдвиг по частоте. В той же работе задача решена также для случая плоского рассеивающего зеркала, что соответствует обратному рассеянию на дискообразных неоднородностях или рассеянию вперед. В работе [4] получено весьма общее представление временной корреляционной функции поля обратного рассеяния, применение которой к частным условиям требует дополнительного анализа.

Ниже на основе корреляционной теории обратного рассеяния получены пространственно-временные функции корреляции поля рассеяния для произвольного спектра хаотических неоднородностей применительно к условиям, характерным для нижних слоев ионосферы.

Рассмотрим поле рассеяния, возникающее при падении сферической волны на неоднородный слой, граница которого начинается на уровне $z = z_1$. Если сферическая волна единичной амплитуды создается изотропным излучателем, расположенным в начале координат (см. рис. 1), то поле рассеяния в произвольной точке запишется в виде (борновское приближение)

$$E(t) = -\frac{k_0^2}{4\pi} \int \varepsilon_1(r, t) \frac{\exp[ik_0(r' + r'')]}{r'r''} dr, \quad (1)$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число, $\epsilon_1(\mathbf{r})$ — случайное поле флюктуаций диэлектрической проницаемости, r' и r'' — расстояния от точки интегрирования до излучателя и приемника.

Вначале найдем корреляционную функцию пульсаций в точке O , вызываемых неоднородностями, движущимися с постоянной скоростью \mathbf{v} . В этом случае $r' = r'' = r$ и

$$\Gamma_E(\tau) = \langle E(t) E^*(t+\tau) \rangle = \frac{k_0^4}{(4\pi)^2} \iint_V \Gamma_\epsilon(r_1 - r_2 - \mathbf{v}\tau) \times \\ \times \frac{\exp(-2ik_0(r_1 - r_2))}{r_1^2 r_2^2} dr_1 dr_2. \quad (2)$$

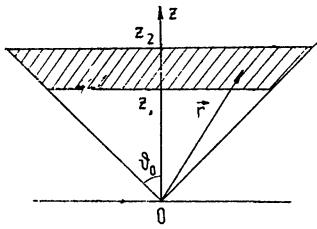


Рис. 1.

Введем теперь новые переменные $\mathbf{r}_1, \rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{v}\tau$ и функцию

$$K(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^2} & \text{в объеме } V \\ 0 & \text{вне объема } V \end{cases}. \quad (3)$$

Тогда интеграл (2) запишется в виде

$$\Gamma_E(\tau) = \frac{k_0^4}{(4\pi^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} K(r_1) K(r_1 - \rho - \mathbf{v}\tau) \Gamma_\epsilon(\rho) \exp(-2ik_0(r_1 - r_2)) dr_1 d\rho, \quad (4)$$

где

$$r_2 = \sqrt{(r_1 - \mathbf{v}\tau - \rho)^2}.$$

В интеграл по переменной ρ входит произведение острой функции $\Gamma_\epsilon(\rho)$ с масштабом l и функции $K(r_1 - \rho - \mathbf{v}\tau)$, масштаб которой определяется размерами рассеивающего объема. Таким образом, если рассеивающий объем содержит много неоднородностей, то плавную функцию в (4) можно вынести за знак интеграла по ρ с ее значением при $\rho = 0$.

Кроме того, можно представить $r_2(\rho)$ в виде

$$r_2 \approx |\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}\tau| (1 + \rho m), \quad m = \frac{r_1 - \mathbf{v}\tau}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}\tau|}, \quad (5)$$

пренебрегая членами $\rho^2/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}\tau|$, что можно сделать, если рассеяние на одной неоднородности описывается приближением Фраунгофера ($k_0 l^2/r_1 \ll 1$).

Таким образом,

$$\Gamma_E(\tau) = \frac{k_0^4}{(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} K(r_1) K(r_1 - \mathbf{v}\tau) \exp(2ik_0(r_1 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}\tau|)) dr_1 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_\epsilon(\rho) \exp(-2ik_0 \rho m) d\rho. \quad (6)$$

Интеграл по ρ представляет спектр функции корреляции и для изотропного случайного поля $\epsilon_1(\mathbf{r})$ равен $(2\pi)^3 \Phi_\epsilon(2k_0)$. Из формулы (6) видно, что временная корреляция поля определяется только амплитудной и фазовой структурой поля невозмущенной волны в объеме рассеяния. Структура функции $\Gamma_E(\tau)$ сравнительно проста, однако форму-

ла (6) может быть значительно упрощена в связи с тем, что масштаб $\Gamma_E(\tau)$ мал по сравнению с временем прохождения неоднородностей через первую зону Френеля.

Рассмотрим (6) для малых τ , когда можно приближенно записать

$$|r_1 - v\tau| = \sqrt{r_1^2 - 2v\tau r_1 + (v\tau)^2} \approx r_1 - v\tau \frac{r_1}{r_1} + O\left(\frac{(v\tau)^2}{r_1}\right), \quad (7)$$

$$K(r_1 - v\tau) \approx K(r_1).$$

Тогда

$$\Gamma_E(\tau) = \frac{\pi k_0^4}{2} \Phi_e(2k_0) \int_{-\infty}^{\infty} K^2(r) \exp\left(2ik_0 v\tau \frac{r}{r}\right) dr \quad (8)$$

при условии

$$k_0 \frac{v^2 \tau^2}{r} \ll 1 \quad (9)$$

и для произвольного объема, заключающего в себе много неоднородностей.

Теперь легко вычислить искомую функцию для конкретных случаев. Если рассеивающая область представляет собой плоский слой толщиной $z_2 - z_1$ и неоднородности движутся горизонтально, то, вычисляя интеграл (8) при учете (3), найдем

$$\Gamma_E(\tau) = \pi^2 k_0^4 \Phi_e(2k_0) \frac{z_2 - z_1}{z_2 z_1} \sin \vartheta_0 \frac{J_1(2k_0 v\tau \sin \vartheta_0)}{2k_0 v\tau}, \quad (10)$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка, $2\vartheta_0$ — угол, под которым видна рассеивающая часть слоя из точки наблюдения (для бесконечно-го плоского слоя $\sin \vartheta_0 = 1$).

Формула (10) показывает, что масштабом корреляции поля является длина волны ($\tau_0 \sim \lambda_0/v$), и, следовательно, при достаточно больших высотах ($z \gg \lambda$) мы не выходим за пределы применимости условия (9) во всем интервале τ , где $\Gamma_E(\tau)$ отлична от нуля. Следует отметить также, что форма кривой (10) совпадает с той, которая была получена для рассеяния на движущемся мелководнистом экране [2]. Отсюда следует, что обратное рассеяние на любых неоднородностях (как крупных, так и мелких) можно рассчитывать с помощью модели мелкомасштабных (дельта-коррелированных) неоднородностей, если объемы рассеяния содержат много неоднородностей.

Другой практически важной моделью рассеивающего объема является участок сферического слоя (рис. 2), геометрия которого определяется условиями эксперимента, в котором регистрируются рассеянные импульсы с определенным запаздыванием. Формула (8) для этого случая, записанная в сферической системе координат с центром в месте расположения источника и приемника, после интегрирования по азимутальному углу и радиусу r запишется в виде

$$\Gamma_E(\tau) = \pi^2 k_0^4 \Phi_e(2k_0) \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \int_0^{\vartheta_0} J_0(2k_0 v\tau \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (11)$$

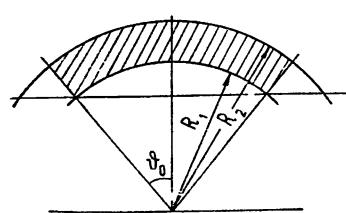


Рис. 2.

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка и ϑ_0 определяется геометрией задачи. Для широкой диаграммы направленности излучателя и приемника это угол, под которым виден освещенный сферический слой, а для достаточно узкой диаграммы направленности под $2\vartheta_0$ следует понимать угловые размеры последней.

Легко убедиться, что при малых ϑ_0 формулы (11) и (10) совпадают. При $\vartheta_0 = \pi/2$ интеграл в (11) также легко вычисляется и

$$\Gamma_E(\tau) \sim \frac{\sin 2k_0 v \tau}{2k_0 v \tau}. \quad (12)$$

Использованная методика расчета позволяет легко найти и пространственно-временную функцию корреляции рассеянного поля. Здесь мы приведем окончательный результат этого расчета, состоящий в том, что корреляция поля в точках $r = 0$ и $r = \rho$ (на плоскости наблюдения) описывается формулой (8), в которой следует заменить вектор $v\tau$ на $v\tau - \rho/2$, а в формулы (10) и (11) вместо $v\tau$ подставить $\sqrt{v^2\tau^2 - v\tau\rho + \rho^2}/4$, при условиях $k_0 v^2 \tau^2 / r \ll 1$, $k_0 \rho^2 / r \ll 1$.

В экспериментах по наблюдению частичных отражений от нижних слоев ионосферы часто используется раздельная регистрация обычной и необыкновенной волн. Если учесть влияние среднего профиля электронной концентрации, то рассеяние различного типа волн в заданном объеме будет определяться формулой (1) с различными значениями k . Для нижних слоев ионосферы разность $k_1 - k_2$ мала, и на высоких частотах ($\omega \gg \omega_H$, ω_H — гирочастота) можно приближенно записать [5]

$$\Delta k = k_1 - k_2 \approx k_0 \frac{4\pi e^2 N \omega_H}{m \omega^3} \cos \alpha \quad \left(k_0 = \frac{\omega}{c} \right), \quad (13)$$

где α — угол между направлением магнитного поля и направлением распространения, N — концентрация электронов.

Можно построить корреляционную функцию

$$\Gamma_E(k_1, k_2) = \langle E(k_1) E^*(k_2) \rangle \sim \iint \frac{\Gamma_\epsilon(r_1 - r_2)}{r_1^2 r_2^2} \exp(2i(k_1 r_1 - k_2 r_2)) dr_1 dr_2. \quad (14)$$

Используя далее обычные упрощения, найдем

$$\Gamma_E(k_1, k_2) \sim \int_V \frac{dr}{r^4} e^{2ir\Delta k} \Phi_\epsilon(2k_0) dr. \quad (15)$$

Для рассеивающего объема, изображенного на рис. 2, при малых углах ϑ_0 (узкая диаграмма направленности)

$$\Gamma_E(k_1, k_2) \sim \int_{R_1}^{R_2} \frac{e^{2i\Delta kr}}{r^2} dr \approx \frac{\exp(i\Delta k(R_1 + R_2))}{R_1^2} \frac{\sin \Delta k(R_1 - R_2)}{\Delta k}. \quad (16)$$

Последнее соотношение получено для тонкого рассеивающего слоя, в котором изменением функции $1/r^2$ можно пренебречь. Так как Δk (см. (13)) пропорционально среднему значению плотности электронов $N(z)$ в рассеивающем слое, то экспериментальные данные о функции $\Gamma_E(k_1, k_2)$, полученные с помощью регистрации нормальных волн, рассеянных на различных высотах, позволяют восстановить средний профиль неоднородного слоя.

Результаты такого эксперимента описаны в работе [6], в которой была получена также и формула, подобная (16). Здесь нам хотелось бы отметить тот факт, что метод измерения $N(z)$, использованный в [6], довольно сложен. Он основывается на измерениях рассеянного сигнала с помощью большого числа антенн, предназначенных для приема сигналов с круговой и линейной поляризацией. Суммирование этих данных позволяет построить действительную или мнимую часть комплексной функции (16) и затем определить $N(z)$ в рассеивающем слое. Однако та же информация о среднем значении N содержится в формуле

$$|\Gamma_B(k_1, k_2)|^2 \sim \left(\frac{\sin \Delta k d}{\Delta k d} \right)^2 = \gamma(\Delta k) \quad (17)$$

($d = R_2 - R_1$ — толщина рассеивающего слоя), которая определяет функцию корреляции амплитуды и интенсивности волн с различными k . Это легко показать, если учесть, что компоненты комплексного поля рассеяния распределены по нормальному закону. Аналогичные выкладки для пространственной функции корреляции имеются в работе [1] (§ 32), используя которые можно записать

$$\begin{aligned} \gamma_A(k_1, k_2) = & \frac{\langle A_1 A_2 \rangle - \langle A_1 \rangle \langle A_2 \rangle}{\sqrt{(\langle A_1^2 \rangle - \langle A_1 \rangle^2)(\langle A_2^2 \rangle - \langle A_2 \rangle^2)}} = 0,921 \gamma^2(\Delta k) + \\ & + 0,058 \gamma^4(\Delta k) + 0,014 \gamma^6(\Delta k) + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\gamma(\Delta k)$ определяется формулой (17).

Корреляционная функция (18) построена так, что индивидуальные параметры нормальных волн (такие как их поглощение в слое, расположенный ниже объема рассеяния, и т. п.) в нее не входят. Таким образом, измерение корреляции амплитуд обычной и необыкновенной волн, рассеянных назад, позволяет определить $\Delta k = k_1 - k_2 \sim N(z)$, т. е. среднюю плотность электронов в рассеивающем слое, толщина которого определяется полушириной зондирующего импульса.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. J. E. D'Uitond, J. Atm. Terr. Phys., 9, № 5–6, 282 (1956).
3. Я. Л. Альперт, Распространение радиоволн в ионосфере, изд. АН СССР, М., 1960.
4. Ю. А. Кравцов, Л. Л. Горышник, Геомагнетизм и аэрономия, 9, 279 (1969).
5. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. H. A. Biel, W. A. Flood, H. G. Gamuitz, J. Geophys. Res., 75, № 2, 4863 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
1 марта 1971 г.

ON THE CORRELATION THEORY OF BACK RADIO WAVE SCATTERING

N. G. Denisov, V. V. Tamoykin

The paper investigates the correlation properties of the field arising from the back wave scattering on random inhomogeneities of the extended layer. The correlation functions of the scattering field are obtained. A possibility of measuring the mean profile of the ionospheric layer using the amplitude correlation function of normal waves is discussed.

УДК 621.378 33

МОДУЛЯЦИЯ ЧАСТОТЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ГАЗОВОГО ОКГ ПРИ МОДУЛЯЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

Л. Л. Алексеева, В. А. Седельников, В. В. Тучин

С использованием результатов полуклассической теории газовых ОКГ Лэмба, модифицированной для учета характера столкновений атомов, получено выражение для зависимости частоты излучения и девиации частоты при низкочастотной модуляции относительного возбуждения от настройки резонатора. Показано, что при определенных настройках резонатора девиация частоты оказывается равной нулю и положение нуля существенно зависит от изменения параметров столкновений. Обсуждается метод экспериментального определения этих параметров.

Задача о воздействии низкочастотной синусоидальной модуляции параметров газового ОКГ, таких как длина резонатора, добротность, относительное возбуждение, на его излучение возникает как при исследовании технических флюктуаций излучения ОКГ [1, 2], так и при исследовании дисперсии и насыщения активной среды [3–6].

Дисперсия и насыщение активной среды в значительной степени определяются характером столкновений атомов. Поэтому при расчете глубины модуляции амплитуды и частоты излучения ОКГ при модуляции того или иного параметра необходимо использовать результаты теории ОКГ, учитывающей характер столкновений атомов. Известен целый ряд работ, в которых рассмотрено влияние атомных столкновений на излучение газовых лазеров (см., например, [7, 8]).

Целью настоящей работы является расчет зависимости девиации частоты излучения ОКГ от настройки резонатора при синусоидальной модуляции относительного возбуждения, так как модуляция этого параметра открывает возможность измерения дисперсионной ширины линии излучения ОКГ [6].

Учет столкновений атомов проводится последовательно в соответствии с работой [8]. Этот выбор обусловлен тем, что метод [8] позволяет сравнить результаты расчета, последовательно учитывавшего столкновения, с результатами работы [2], где столкновения учтены простым увеличением дисперсионной полуширины линии.

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТОТЫ И ДЕВИАЦИИ ЧАСТОТЫ ИЗЛУЧЕНИЯ

Модифицированные для учета столкновений стационарные уравнения Лэмба, определяющие частоту и амплитуду одночастотного газового ОКГ, имеют вид

$$E^2 = \bar{\alpha}/\bar{\beta}; \quad (1a)$$

$$\nu = \Omega + \bar{\sigma} + \bar{\rho} E^2, \quad (1b)$$

где E , ν — соответственно амплитуда и частота излучения; $\bar{\alpha}$ — параметр, пропорциональный разности ненасыщенного коэффициента усиления и потерь за один проход; $\bar{\beta}$ — параметр, характеризующий умень-

шение усиления за счет насыщения; Ω — резонансная частота в отсутствие активной среды; $\bar{\sigma}$ — сдвиг резонансной частоты, обусловленный дисперсией ненасыщенной среды; $\bar{\rho} E^2$ — уменьшение частотного сдвига, обусловленное насыщением.

В общем случае коэффициенты Лэмба выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \frac{\Delta v_p}{2} \frac{x J_i(\mu) - J_i(\mu)}{J_i(\gamma_{ab})}, \\ \bar{\beta} &= \frac{\Delta v_p}{32} \frac{p^2 x}{\gamma_a \gamma_b \hbar^2} \frac{J_i^-(\mu\mu) + J_i^+(\mu\mu^*)}{J_i(\gamma_{ab})}, \\ \bar{\sigma} &= \frac{\Delta v_p}{2} \frac{J_r(\mu)}{J_i(\gamma_{ab})}, \\ \bar{\rho} &= -\frac{\Delta v_p}{32} \frac{p^2 x}{\gamma_a \gamma_b \hbar^2} \frac{J_r^-(\mu\mu) + J_r^+(\mu\mu^*)}{J_i(\gamma_{ab})}.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь Δv_p — ширина полосы резонатора без активной среды; p — матричный элемент электрического дипольного момента атома между верхним возбужденным состоянием a и нижним b ; x — относительное возбуждение; γ_a , γ_b — постоянные распада состояний a и b ; $\gamma_{ab} = (\gamma_a + \gamma_b)/2$; \hbar — приведенная постоянная Планка; $\mu = \gamma_{ab} + i(\omega - \nu)$; ω — центральная частота атомного перехода; J_r и J_i представляют собой действительную и мнимую части функций $J(\mu)$ и $J^{\pm}(\mu\mu^*)$, которые по формулам

$$J(\mu) = iKu \int_{-\infty}^t dt' \exp \{-\mu(t-t')\} \Delta(t', t) \Gamma^-(t', t); \quad (3a)$$

$$J^{\pm}(\mu\mu^*) = iKu \sum_{a=a, b} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \int_{-\infty}^{t''} dt''' \exp \{-\mu(t-t') - \gamma_a(t'-t'') - \mu^*(t''-t''')\} \Delta(t''', t'', t', t) \Gamma^-(t''', t'', t', t) \quad (3b)$$

выражаются через характеристические функции Γ и Δ , описывающие, соответственно, модуляцию частоты излучения и модуляцию скорости излучающих атомов столкновениями; K — волновое число; u — наиболее вероятная скорость атомов; порядок различных времен дается соотношением $t''' < t'' < t' < t$.

На основании оценок, проделанных нами для Не-Не лазера ($\lambda = 0,63 \text{ мк}$), можно заключить, что для обычных давлений смеси ($1 \div 2 \text{ тор}$) погрешности, вносимые пренебрежением столкновениями, приводящими к медленной модуляции частоты вследствие дальних взаимодействий, не выходят за пределы точности экспериментального определения соответствующих параметров.

Используя приближенно рассчитанные в [8] характеристические функции, соответствующие рассматриваемым типам столкновений, в результате интегрирования выражений (3a) и (3b) нетрудно получить выражения для коэффициентов Лэмба (2):

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta v_p}{2} \left[x \frac{\operatorname{Im} Z(1 + \epsilon \operatorname{Im} Z)}{\operatorname{Im} Z(\xi = 0) [1 + \epsilon \operatorname{Im} Z(\xi = 0)]} - 1 \right],$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\beta} &= \frac{\Delta\nu_p}{32} \frac{p^2 \times}{\gamma_a \gamma_b \hbar^2} A \left\{ \eta^2 \operatorname{Im} Z (1 + 2\varepsilon \operatorname{Im} Z) - 4\xi \operatorname{Re} Z (1 + 4\varepsilon \operatorname{Im} Z) + \right. \\
 &+ (2\sqrt{\pi})^{-1} [(\gamma_1/\gamma_2) - 1] \operatorname{Im}^2 Z (\eta^2 + \xi^2) + \operatorname{Im} Z (1 + 2\varepsilon \operatorname{Im} Z) (\eta^2 + \xi^2) \{1 + \right. \\
 &+ (2\sqrt{\pi})^{-1} [(\gamma_1/\gamma_2) - 1] \operatorname{Im} Z \} \} \{ (\eta^2 + \xi^2) \operatorname{Im} Z (\xi = 0) [1 + \varepsilon \operatorname{Im} Z (\xi = 0)] \}^{-1}, \\
 \bar{\sigma} &= \frac{\Delta\nu_p}{2} \times \frac{\operatorname{Re} Z (1 + 2\varepsilon \operatorname{Im} Z)}{\operatorname{Im} Z (\xi = 0) [1 + \varepsilon \operatorname{Im} Z (\xi = 0)]}, \quad (4) \\
 \bar{\rho} &= - \frac{\Delta\nu_p}{32} \frac{p^2 \times}{\gamma_a \gamma_b \hbar^2} A \left\{ \eta^2 [\eta^2 \operatorname{Re} Z (1 + 4\varepsilon \operatorname{Im} Z) + \xi \operatorname{Im} Z (1 + \right. \\
 &+ 2\varepsilon \operatorname{Im} Z)] + \eta (\sqrt{\pi})^{-1} [(\gamma_1/\gamma_2) - 1] (\eta^2 + \xi^2) \operatorname{Re} Z \operatorname{Im} Z \} \{ \eta (\eta^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \xi^2) \operatorname{Im} Z (\xi = 0) [1 + \varepsilon \operatorname{Im} Z (\xi = 0)] \}^{-1},
 \end{aligned}$$

где $\operatorname{Re} Z$ и $\operatorname{Im} Z$ — действительная и мнимая части плазменной дисперсионной функции $Z(\eta, \xi)$ [9, 10]; $\xi = (\omega - \nu + \Delta)/(Ku)$ — относительная расстройка; $\eta = \gamma_1/(Ku)$; $\gamma_1 = \gamma_{ab} + 1/T + \delta + G_{ab}P$; $1/T$ — частота столкновений, меняющих скорость излучающих атомов; δ и Δ — уширение дисперсионного контура линии излучения и сдвиг частоты излучения за счет столкновений, скачком меняющих фазу; $G_{ab}P$ — член, приближенно учитывающий неупругие столкновения в соответствии с [8], P — давление; $\varepsilon = (KuT)^{-1}$; $\gamma_2 = \gamma_1(1 + \theta)^{-1}$; $\theta = 2\sqrt{\pi} [\bar{\gamma}_{ab}/(Ku)] \times \times [(\gamma_{ab} \gamma'_a \gamma'_b)/(\gamma'_a \gamma_b) - 1]$; $A = 2[(\gamma'_{ab} \gamma_a \gamma_b)/(\bar{\gamma}_{ab} \gamma'_a \gamma'_b)]$; $\bar{\gamma}_{ab} = \gamma'_{ab} + \delta$; $\gamma'_{ab} = \gamma_{ab} + 1/T$; $\gamma'_a = \gamma_a + 1/T$; $\gamma'_b = \gamma_b + 1/T$.

Синусоидальная модуляция относительного возбуждения \times газового лазера на низкой частоте ω_m в небольших пределах Δx относительно среднего значения \times вызывает модуляцию амплитуды и частоты излучения на этой же частоте ω_m . При условии $(\Delta x/x) \ll 1$ нелинейные уравнения Лэмба (1) могут быть линеаризованы относительно малых приращений параметров Лэмба. Тогда для частот модуляции ω_m , значительно меньших удвоенного значения параметра Лэмба $\bar{\alpha}$ (4), выражение для девиации частоты излучения имеет вид

$$\Delta\nu = \{\bar{\alpha} + [\bar{\alpha} + \Delta\nu_p/2] \bar{\rho} / \bar{\beta}\} \Delta x / x. \quad (5)$$

Подставляя в (1б) и (5) выражения для коэффициентов Лэмба (4), нетрудно получить конкретные выражения для частоты и девиации частоты излучения лазера.

Окончательный вид этих выражений зависит от выбора приближения для функции $Z(\eta, \xi)$. Заметим, что приближения работы [8] $\operatorname{Re} Z = 0$, $\operatorname{Im} Z = \sqrt{\pi} \exp(-\xi^2)$ в нашем случае неприемлемы, так как коэффициент $\bar{\sigma}$ обращается в этом случае в нуль.

Выпишем выражение для $\Delta\nu$ в следующих приближениях, которые соответствуют работе [10]*:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} Z &= 2\xi \exp(-\xi^2) \quad \text{для коэффициентов}; \\
 \operatorname{Im} Z &= \sqrt{\pi} \exp(-\xi^2) \quad \bar{\alpha} \text{ и } \bar{\sigma}
 \end{aligned} \quad (6)$$

* Это приближение для коэффициентов $\bar{\beta}$ и $\bar{\rho}$ соответствует приближенному интегрированию в третьем порядке теории возмущений с помощью δ -функции (формула (74) работы [10]). В настоящей работе проведено точное интегрирование формул (3), что позволяет использовать более реальные приближения функции $Z(\eta, \xi)$ для коэффициентов $\bar{\beta}$ и $\bar{\rho}$.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} Z = 0 \\ \operatorname{Im} Z = \sqrt{\pi} \end{array} \right\} \text{для коэффициентов } \bar{\beta} \text{ и } \bar{\rho};$$

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\nu_p}{2} \xi \exp(-\xi^2) \left\{ (1 + \sqrt{\pi}\epsilon) - \frac{\sqrt{\pi}\eta}{2[\eta^2 + (\eta^2 + \xi^2)\gamma_1/\gamma_2]} \right\} \Delta x. \quad (7)$$

В пренебрежении столкновениями, т. е. при $\epsilon = 0$ и $\gamma_1 = \gamma_2$ формула (7) сводится к формуле (12) работы [2]*.

Для давлений $1 \text{ torr} \leq P \leq 2 \text{ torr}$ следует использовать приближения

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} Z = 2\xi(1 - \sqrt{\pi}\eta) \exp(-\xi^2) \\ \operatorname{Im} Z = \sqrt{\pi} \exp(-\xi^2) \end{array} \right\} \text{для всех коэффициентов.} \quad (8)$$

Тогда

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\nu_p}{2} \frac{\xi \exp(-\xi^2)}{(1 + 2\sqrt{\pi}\epsilon)} \left\{ (1 - \sqrt{\pi}\eta)(1 + 3\sqrt{\pi}\epsilon) - \frac{\sqrt{\pi}\eta(1 + 2\sqrt{\pi}\epsilon) + 2\eta^2(1 + 4\sqrt{\pi}\epsilon) + 2[(\gamma_1/\gamma_2) - 1] [\eta^2 + \xi^2(1 - \sqrt{\pi}\eta)]}{2 \{ [(\gamma_1/\gamma_2) + 1]\eta^2 + (\gamma_1/\gamma_2)\xi^2 - 2(\sqrt{\pi})^{-1}\xi^2\eta(1 + 2\sqrt{\pi}\epsilon) \}} \right\} (\Delta x). \quad (9)$$

Формулы (7), (9) получены при следующих дополнительных предположениях:

$$\epsilon \exp(-\xi^2) \approx \epsilon; (1 + \sqrt{\pi}\epsilon)^2 \approx (1 + 2\sqrt{\pi}\epsilon); (1 + 2\sqrt{\pi}\epsilon)^2 \approx (1 + 4\sqrt{\pi}\epsilon); \eta^2 \ll 1.$$

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 1 представлены зависимости величины девиации частоты излучения $\Delta\nu$ от относительной расстройки резонатора ξ при модуля-

Рис. 1. Зависимость девиации частоты от настройки резонатора. 1—формула (5) с учетом (4); 2—формула (9); 3—формула (9) при $\gamma_1 = \gamma_2, \epsilon = 0$.

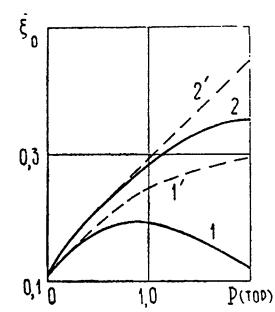
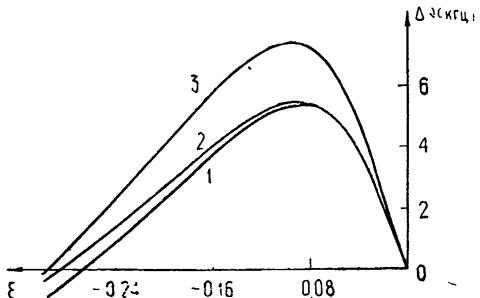


Рис. 2. Зависимость положения нуля девиации от давления в активном элементе. 1—формула (10); 1'—формула (12); 2—формула (11); 2'—формула (13).

* Если в [2] для коэффициента $\bar{\sigma}$ взять приближение $\operatorname{Re} Z = 2\xi \exp(-\xi^2)$ вместо $\operatorname{Re} Z = 2\xi [1 + (1/3)\xi^2] \exp(-\xi^2)$, что вполне возможно при $\xi \leq 0,4$.

ции относительного возбуждения. Кривая 1 представляет расчет по формуле (5) с коэффициентами Лэмба вида (4). При расчете были использованы точные значения функции $Z(\eta, \xi)$, взятые из таблиц [11]. Кривая 2 представляет расчет по формуле (9). Кривая 3 построена также на основании расчета по формуле (9), но при $\gamma_1 = \gamma_2$ и $\epsilon = 0$. Это означает простейший учет характера столкновений атомов, который заключается в пропорциональном давлению росте дисперсионной полуширины линии γ_1 . Все кривые были построены при значениях параметров, полученных в [8] в результате обработки опытных данных Кордовера. Выбор параметров соответствует давлению Не-Не смеси $P = 1$ тор: $\gamma_1 = 71$ Мгц; $\epsilon = 0,02$; $\Delta\nu_p = 5$ Мгц; $\gamma_2 = 48$ Мгц, $Ku = 855$ Мгц; $\Delta\nu = 0,01$. Здесь и далее ξ берем в виде $\xi = (\omega - \nu)/(Ku)$, так как $\Delta \neq 0$ приводит лишь к смещению всех графиков на величину Δ/Ku по оси ξ .

Сравнение кривых 1 и 2 убеждает в достаточно высокой точности приближений относительно $\text{Re } Z$ и $\text{Im } Z$ (8).

Остановимся на возможностях практического использования полученных формул. С одной стороны, их можно рассматривать как уточнение формул работы [2], заключающееся в последовательном учете характера столкновений атомов, и, следовательно, использовать для расчета технической ширины спектра излучения лазера и ширины спектра биений типов колебаний*. С другой стороны, явная зависимость этих формул от параметров активной среды позволяет надеяться из экспериментов с модуляцией частоты извлекать информацию об этих параметрах. В частности, наиболее удобным для этой цели является определение зависимости нуля девиации частоты ($\xi \neq 0$) (рис. 1) от величины давления в активном элементе. Выпишем формулы для нуля девиации частоты, соответствующие формулам (7) и (9):

$$\xi_{01} = \left\{ \frac{\sqrt{\pi}\eta}{2(1+\sqrt{\pi}\epsilon)} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - [(\gamma_2/\gamma_1) - 1]\eta^2 \right\}^{1/2}; \quad (10)$$

$$\xi_{02} = \left\{ \frac{\sqrt{\pi}\eta(1 + 2\sqrt{\pi}\epsilon) - 2\eta^2[(1 - \sqrt{\pi}\epsilon) + 3\sqrt{\pi}\epsilon(\gamma_1/\gamma_2)]}{2[(1 + 3\sqrt{\pi}\epsilon)(1 - \sqrt{\pi}\eta) - 2\eta(\sqrt{\pi})^{-1}(1 + 5\sqrt{\pi}\epsilon)]} \right\}^{1/2}. \quad (11)$$

При простейшем учете характера столкновений $\gamma_1 = \gamma_2$, $\epsilon = 0$ формулы имеют вид

$$\xi'_{01} = \sqrt{\sqrt{\pi}\eta/2 - 2\eta^2}; \quad (12)$$

$$\xi'_{02} = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}\eta}{2} \frac{\sqrt{\pi} - 2\eta}{[\sqrt{\pi} - (2 + \pi)\eta]}}. \quad (13)$$

Соответствующие зависимости приведены на рис. 2 (пунктирными линиями проведены кривые, построенные по формулам (12), (13), сплошными — по формулам (10), (11)). Значения параметров при построении этих кривых также взяты из работы [8]. Из графиков видно, что для давлений $P \leq 1$ тор оказывается возможным учитывать столкновения простым увеличением параметра γ_1 . Видно также, что приближения (6), которые соответствуют работе [10], явно недостаточны даже при меньших давлениях.

Экспериментальное определение зависимости девиации частоты от настройки резонатора и положения нуля девиации от давления возмож-

* Нетрудно, используя выражения для частоты излучения (1 б) и коэффициентов Лэмба (4), получить девиацию частоты, вызванную механическими флуктуациями длины резонатора, флуктуациями добротности.

но с помощью методик, предложенных в работах [4-6]. Предварительные экспериментальные результаты для давления 1 tor He-Ne смеси ($\lambda = 0,63 \text{ мк}$) дали удовлетворительное совпадение положения нуля девиации с расчетным положением [6].

К основным достоинствам определения параметров столкновений γ ; γ_1/γ_2 ; e этим методом следует отнести:

1) нуль девиации наблюдается при достаточно больших расстройках резонатора, что уменьшает искажения, вносимые мощностью излучения;

2) нуль девиации не зависит ни от ширины полосы резонатора $\Delta\nu_p$, ни от относительного возбуждения, что не только избавляет от необходимости дополнительных измерений этих параметров, но и свидетельствует о нечувствительности положения нуля девиации к возможным колебаниям этих параметров в ходе эксперимента.

Получены формулы для девиации частоты излучения газового лазера при низкочастотной ($\omega_m \ll 2\bar{\alpha}$) модуляции плотности инверсной населенности, в которых последовательно учтены столкновения в соответствии с работой [8].

Используя полученные в работе выражения для коэффициентов Лэмба, нетрудно рассчитать девиацию частоты излучения при модуляции длины резонатора и добротности. Эти результаты в соответствии с работой [2] можно использовать для расчета спектра технических флюктуаций излучения ОКГ.

Показано, что метод измерения параметров столкновений по измерению положения нуля девиации частоты может конкурировать с другими методами измерения этих параметров, например, с методом измерения зависимости мощности излучения от настройки резонатора [12].

ЛИТЕРАТУРА

- P. T. Bolwijn, Phys. Lett., 24A, № 5, 285 (1967).
- В. В. Тучин, В. А. Седельников, Изв. высш. уч. зав — Радиоэлектроника, 12, № 3, 221 (1969).
- P. T. Bolwijn, J. Appl. Phys., 37, № 12, 4487 (1966).
- W. R. Bennett, S. F. Jacobs, J. T. La Tourrette, P. Rabinowitz, Appl. Phys. Lett., 5, № 3, 56 (1964).
- M. S. Bouyne, M. M. Birky, W. G. Schweitzer, Appl. Phys. Lett., 7, № 3, 62 (1965).
- В. В. Тучин, В. А. Седельников, Л. Л. Алексеева, Всесоюзный симпозиум по физике газовых оптических квантовых генераторов, Тезисы докладов, Новосибирск, 1969, стр. 54.
- С. Г. Раутиан, Тр. ФИАН, 43, 14 (1968).
- B. L. Gyorffy, M. Bornstein, W. E. Lamb, Phys. Rev., 169, № 2, 340 (1968).
- B. D. Fried, S. D. Conte, The Plasma Dispersion Function, N. Y., 1961.
- У Лэмб, Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд. Мир, М., 1966
- В. Н. Фаддеева, Н. М. Терентьев, Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента, Гостехиздат, М., 1954
- A. Szöke, A. Javan, Phys. Rev., 145, № 1, 137 (1966).

**FREQUENCY MODULATION OF GAS LASER RADIATION AT MODULATION
OF RELATIVE EXCITATION***L. L. Alekseeva, V. A. Sedel'nikov, V. V. Tuchin*

Using the results of the semi-classical theory of gas Lamb lasers modified to allow the character of atom collisions, the expression is obtained for the dependence of the radiation frequency and the frequency deviation at the low-frequency modulation of the relative excitation on the resonator tuning. It is shown that at definite tunings of the resonators the frequency deviation appears to be equal to zero and the position of zero is considerably dependent on the change of the collision parameters. The method of experimental estimation of these parameters is discussed.

УДК 621.378 : 530.145

О ВЛИЯНИИ ВЫНУЖДЕННОГО КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ НА ДВУХКВАНТОВОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В РАДИОЧАСТОТНОМ ДИАПАЗОНЕ

О. Б. Ананьин, Ю. А. Быковский, Э. А. Маныкин, А. Н. Петровский

Исследуется двухквантовое поглощение при взаимодействии первой и третьей гармоник радиоизлучения. Экспериментально показано, что при определенной величине поля на частоте 3ω двухквантовое поглощение поля на частоте ω сменяется его усилением за счет рождения стоксовой компоненты. Теория качественно объясняет полученные экспериментальные результаты и предсказывает зависимость величины поглощения от относительной фазы амплитуд взаимодействующих гармоник. Обсуждаются причины отсутствия в эксперименте фазовой зависимости в двухквантовом поглощении, а также возможности ее наблюдения.

ТЕОРИЯ

В последнее время интенсивно исследуются резонансные процессы с участием двух фотонов, такие, как двухфотонное поглощение и индуцированное комбинационное рассеяние.

Известно [1-3], что двухфотонное поглощение приводит к нелинейному уменьшению интенсивности проходящего излучения, в то время как ВКР приводит к усилению стоксовой компоненты, начиная с некоторого порога. Когда проходящее излучение состоит из первой и третьей гармоник, то возникают условия взаимного влияния двух процессов. Действительно, в этом случае линейная и нелинейная поляризации имеют вид

$$P_\omega = \chi E_\omega + \chi_1 |E_\omega|^2 E_\omega + \chi_2 |E_{3\omega}|^2 E_\omega + \chi_3 E_{3\omega} E_\omega^* E_\omega^*, \quad (1)$$

где P_ω , E_ω и $E_{3\omega}$ — фурье-компоненты поляризации и полей на частотах ω и 3ω . Первый член описывает эффект Керра от первой гармоники и двухфотонное поглощение на первой гармонике (рис. 1). Второй член описывает эффект Керра от третьей гармоники и вынужденное комбинационное рассеяние волны „ 3ω “ в волну „ ω “. Третий член, существенно зависит от фаз взаимодействующих гармоник. Нелинейные восприимчивости χ_1 , χ_2 и χ_3 являются резонансными на частоте $2\omega \approx (\epsilon_1 - \epsilon_0)/\hbar$, и их величины определяются конкретным веществом. В слабых полях, таких, что [4]

$$\frac{\omega}{\gamma} \left(\frac{E}{E_a} \right)^2 \ll 1, \quad (2)$$

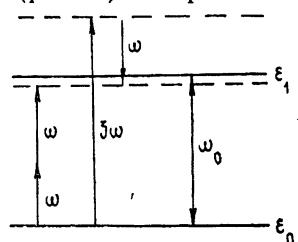


Рис. 1. Схема уровней при двухквантовом поглощении 1-й и 3-й гармоник.

эти коэффициенты не зависят от полей, тогда как в сильных полях они являются сложными функциями последних. Заметим, что $\text{Im } \chi_1$ и $\text{Im } \chi_2$ имеют разные знаки, так что при увеличении поля $E_{3\omega}$ вместо двухфо-

тонного поглощения поля E_ω возникает его усиление за счет рождения стоксовой компоненты.

Цель нашей работы состояла в экспериментальном обнаружении данного явления и в изучении влияния фазовых соотношений между амплитудами гармоник.

Для этого удобно было выбрать диапазон радиочастот, поскольку, с одной стороны, в этом случае отпадает необходимость требования пространственного синхронизма [5], с другой стороны, — многоквантовое поглощение хорошо изучено [6].

Вероятно, наиболее удобным эффектом для этой цели служат электронный или ядерный магнитный резонансы.

Магнитный резонанс в парамагнетиках описывается с помощью феноменологических уравнений Блоха:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{H} - \frac{M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}}{T_2} - \frac{M_z - M_{z0}}{T_1} \mathbf{k}, \quad (3)$$

где использованы общепринятые обозначения [7].

Пусть парамагнетик подвергается воздействию переменных магнитных полей на частотах ω и 3ω . Будем при этом считать, что осуществляется двухквантовый резонанс

$$2\omega \approx \omega_0, \quad (4)$$

где $\omega_0 = \gamma H_0$, H_0 — постоянное магнитное поле, γ — гиромагнитное отношение.

Далее предполагаем, что поля невелики в том смысле, что отсутствует эффект насыщения. Это означает, что можно пользоваться при решении системы уравнений (3) методом последовательных приближений. Критерий применимости этого метода дается неравенством, аналогичным неравенству (2):

$$\omega T_2 \left(\frac{H}{H_0} \right)^2 \ll 1, \quad (5)$$

где H — характерная величина переменных полей.

Рассмотрим подробно наведенный магнитный момент M_ω на частоте ω , который возникает вдоль направления H_ω (см. рис. 2), если поле на частоте 3ω приложено вдоль $H_{3\omega}$, а постоянное поле H_0 действует

вдоль оси z . Стандартная методика последовательных приближений приводит в этом случае к выражению, которое аналогично выражению для дипольного момента (1), с той лишь разницей, что вместо электрических полей и дизлектрических восприимчивостей стоят соответствующие магнитные величины. Вычисление восприимчивостей χ_1 , χ_2 и χ_3 не представляет большого труда, и при условии $\omega T_2 \gg 1$ все они имеют резонансный знаменатель типа $(\omega_0 - 2\omega)^2 + T_2^{-2}$ и простую зависимость от угла α (см. рис. 2). В экспериментальной схеме Роллина обычно из-

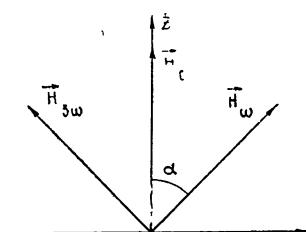


Рис. 2. Направления постоянного (H_0) и переменных (H_ω , $H_{3\omega}$) магнитных полей.

меряется мнимая часть общей восприимчивости, определяемой соотношением

$$M_\omega = \chi_{\text{общ}} H_\omega \exp(i\varphi_t),$$

Расчет приводит к выражению

$$\begin{aligned} \chi''_{\text{общ}} = & -\frac{8}{9} \frac{\gamma}{\omega_0^2 T_2} M_{z0} - \frac{\gamma^3}{\omega_0^2} M_{z0} \frac{1/T_2}{\Delta^2 + (1/T_2)^2} \times \\ & \times \left[\frac{1}{8} H_{\omega}^2 - \frac{1}{9} H_{3\omega}^2 + \frac{1}{12} H_{\omega} H_{3\omega} (\cos \delta\varphi + 3\Delta T_2 \sin \delta\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Последнее выражение справедливо для $\alpha = 45^\circ$; заметим, что φ_1 и φ_2 есть начальные фазы гармоник ω и 3ω , $\Delta = \omega_0 - 2\omega$ и $\delta\varphi = \varphi_3 - 3\varphi_1$.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В эксперименте для наблюдения двухквантового поглощения использовался обычный спектроскоп для магнитного резонанса, собранный по схеме Роллина. Для повышения чувствительности схемы применялся амплитудный мост [8]. Кроме того, использовался метод двойной модуляции: постоянное магнитное поле H_0 линейно сканировалось в пределах ± 17 Oe и одновременно для синхронного детектирования оно модулировалось с частотой 30 кгц и амплитудой $\sim 0,3$ Oe. Постоянная времени синхронного детектора составляла 0,5 сек. Производная линии поглощения записывалась на самописце. Время записи ~ 40 сек.

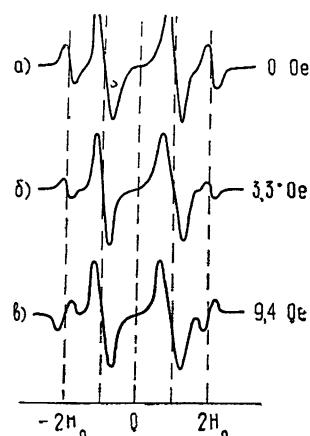
Рабочее вещество (дифенилпикрилгидразил — ДФПГ) помещалось в две катушки индуктивности со взаимно перпендикулярными осями: одна катушка настраивалась на 20 Мгц, другая — на 60 Мгц. Двухквантовое поглощение регистрировалось на частоте 20 Мгц. Постоянное поле H_0 создавалось электромагнитом (катушки Гельмгольца), который мог поворачиваться в плоскости, совпадающей с осями резонансных катушек. Тем самым изменялся угол α — угол между постоянным полем H_0 и переменным полем H_{ω} на частоте 20 Мгц. Направления полей, используемых в эксперименте, показаны на рис. 2.

Генератор накачки, нагруженный на резонансные катушки, создавал в образце два переменных магнитных поля H_{ω} и $H_{3\omega}$ соответственно на частотах 20 Мгц и 60 Мгц. Амплитуда поля H_{ω} достигала 3,4 Oe, а амплитуда поля $H_{3\omega}$ — 9,4 Oe. В генераторе была предусмотрена регулировка относительной фазы $\delta\varphi$ между сигналами на двух частотах с помощью линий задержки на коаксиальном кабеле. Изменяя длину коаксиального кабеля, можно было изменять и относительную фазу $\delta\varphi$.

При поле $H_{\omega} = 3,4$ Oe было получено устойчивое двухквантовое поглощение. Двухквантовое поглощение оказалось максимальным при угле $\alpha = 45^\circ$, что согласуется с результатами работы [6].

При подаче поля $H_{3\omega}$ двухквантовое поглощение уменьшалось. Когда поле $H_{3\omega}$ достигало величины 7,2 Oe, знак производной линии поглощения, которая регистрируется на самописце, изменялся на противоположный. На рис. 3 приведены образцы записи производной линии поглощения при различных величинах поля $H_{3\omega}$.

Рис. 3. Производная линии поглощения при различных значениях напряженности поля $H_{3\omega}$, значения $H_{3\omega}$ указаны на кривых; $H_{\omega} = 3,4$ Oe.



ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из формулы (6) видно, что $\chi''_{\text{общ}}$ в зависимости от соотношения между H_ω и $H_{3\omega}$ может быть либо положительной, либо отрицательной. При $H_{3\omega} = 0$ имеем чисто двухквантовое поглощение, при включении поля $H_{3\omega}$ оно уменьшается. При $H_{3\omega} > 1,1 H_\omega$ знак $\chi''_{\text{общ}}$ изменяется, т. е. вместо поглощения получаем усиление. В эксперименте было получено качественное согласие с таким поведением $\chi''_{\text{общ}}$ при различных H_ω и $H_{3\omega}$. Действительно, при $H_{3\omega} = 0$ получаем чисто двухквантовое поглощениe (рис. 3 а). При увеличении $H_{3\omega}$ поглощение уменьшается; наконец, когда $H_{3\omega} \geq aH_\omega$, где $a = 2,1 \pm 0,2$, знак производной изменялся на противоположный (рис. 3 в), т. е. вместо поглощения получаем усиление поля H_ω на частоте 2ω .

Кроме того, из формулы (6) видно, что при определенных полях H_ω и $H_{3\omega}$ соответствующим подбором относительной фазы двух полей $\delta\varphi$ можно сделать поглощениe $\chi''_{\text{общ}}$ равным нулю. Экспериментально, в пределах ошибки измерения, такой эффект не наблюдался. По-видимому, объяснить это можно следующим образом. Вся вышеизложенная теория справедлива при выполнении условия (5). Кроме того, должно выполняться требование $\omega T_2 \gg 1$. Для частот и полей, используемых в эксперименте, эти условия практически трудно выполнить. В данном эксперименте они изменялись в пределах

$$\omega T_2 \sim (10 \div 30) > 1, \quad \omega T_2 \left(\frac{H}{H_0} \right)^2 \leq 1.$$

Это приводит к тому, что в $\chi''_{\text{общ}}$ значительный вклад будут давать и нерезонансные члены, которые могут в значительной степени изменить коэффициенты перед всеми членами в формуле (6). При этом, по-видимому, уменьшается и член, содержащий зависимость от фазы $\delta\varphi$.

Следует указать, что в работе [9], где измерялся потенциал, наведенный в образце двумя полями E_ω и $E_{2\omega}$, обнаружена зависимость величины потенциала от относительной фазы этих полей. В работе использовались частоты $\sim (10 \div 20)$ ГГц.

Анализ условий применимости вышеизложенной теории подтверждает, что диапазон частот \sim нескольких ГГц наиболее удобен для экспериментального исследования задач подобного рода.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 С А Ахманов, Р В Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, ИНИ, М., 1965
- 2 Н Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
- 3 В. М Файн, Я И. Ханин, Квантовая радиофизика, изд. Сов. радио, М., 1965.
- 4 Э А Маныкин, В сб Прохождение излучения через вещество, Атомиздат, М., 1968, стр. 72.
- 5 Э. А Маныкин, А. М. Афанасьев, ЖЭТФ, 48, № 3, 931 (1965).
6. Д. Н. Клышко, В. С. Туманов, ЖЭТФ, 47, № 6, 2035 (1964).
7. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963.
8. Н. Н. Шумиловский, А. Л. Скрипко, В. С Король, Г. В. Ковалев, Методы ядерного магнитного резонанса, изд. Энергия, М., 1966.
9. W. Schneider, K. Seeger, Appl. Phys. Lett., 8, № 6, 133 (1966).

**INFLUENCE OF STIMULATED COMBINATIONAL SCATTERING ON
TWO-QUANTUM ABSORPTION IN RADIO FREQUENCY BAND***O. B. Anan'in, Yu. A. Bykovskii, E. A. Manykin, A. N. Petrovskii*

The two-quantum absorption at the interaction between the first and the third harmonics of radiation is investigated. It is experimentally shown that at the definite field value at the frequency 3ω the two-quantum field absorption at the frequency ω is changed by its amplification due to the Stokes component. The theory qualitatively explains the experimental data obtained and predicts the dependence of the absorption value on the relative amplitude phase of interacting harmonics. The reasons of the absence in the experiment of the phase dependence in the two-quantum absorption are discussed, as well as the possibility of its observation.

УДК 621.373 : 530.145

ДИСПЕРСИОННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЛАЗЕРА НА $\lambda = 0,63 \text{ мк}$ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ЕГО ЧАСТОТЫ

Д. П. Степанов

Предложен и осуществлен способ получения дисперсионной характеристики газового лазера методом модуляции параметров активной среды продольным магнитным полем. Описана система стабилизации частоты и представлены результаты экспериментов по определению влияния различных факторов на стабильность частоты.

При модуляции тем или иным способом параметров активной среды лазера имеет место частотная модуляция его излучения. При этом дисперсионные свойства активной среды обусловливают определенную зависимость девиации частоты отстройки среднего значения частоты генерации относительно центра линии рабочего перехода. Эта зависимость, называемая обычно дисперсионной характеристикой, впервые исследовалась в Не-Не лазере на переходе $3S_2 \rightarrow 3P_4$ ($3,39 \text{ мк}$) [1]. Характеристика была получена методом модуляции тока газового разряда и использована для целей стабилизации частоты излучения. В работе [2] отмечается возможность использования дисперсионной характеристики для измерения параметров активной среды.

Экспериментальные исследования на переходе $2S_2 \rightarrow 2P_4$ ($1,15 \text{ мк}$) показали, что при модуляции тока разряда дисперсионная характеристика, обусловленная рабочим переходом, существенно искажается за счет модуляции уровней населенности близких по частоте переходов и электронной плотности разряда [3]. При использовании метода модуляции тока разряда на $\lambda = 0,63 \text{ мк}$ ($3S_2 \rightarrow 2P_4$) вклад в девиацию частоты со стороны близких переходов столь велик, что на фоне его практически невозможно обнаружить составляющую девиации, связанную с дисперсионными свойствами рабочего перехода [4]. Тщательные эксперименты и расчеты, проведенные в [5, 6], показали, что основной вклад дает сильный поглощающий переход $1S_5 \rightarrow 2P_8$ ($0,6334 \text{ мк}$). Изменение показателя преломления на рабочей частоте лишь за счет модуляции инверсной населенности рабочего перехода возможно путем модуляции активной среды селективной оптической накачкой; такой прием в различных вариантах был применен в работах [3, 7]. Однако, такой метод модуляции достаточно сложен.

В настоящей работе описан метод получения дисперсионной характеристики, отличающийся от примененных до сих пор, а также система стабилизации частоты лазера на $\lambda = 0,63 \text{ мк}$, основанная на применении этого метода.

Метод заключается в селективном воздействии на рабочий переход путем наложения на активную среду продольного переменного магнитного поля. При достаточно малой амплитуде такого поля населенности уровней остаются в первом приближении неизменными. Однако вследствие эффекта Зеемана расщепление спектральных линий рабочих и нерабочих переходов совершенно по-разному проявляется в изменениях показателя преломления n на частоте генерации. Из качественного

рассмотрения нетрудно видеть, что основной вклад в изменение n вносит рабочий переход. Изменение n , вызванное вкладом нерабочих переходов n_n , пренебрежимо мало вследствие практического постоянства n_n в пределах малой области расстроек около центра рабочего перехода.

Упрощенный расчет влияния эффекта Зеемана на девиацию частоты линейно поляризованного (линейная поляризация обеспечивается наличием выходных окон трубы, расположенных под углом Брюстера) лазерного излучения показал*, что модуляция частоты происходит на второй гармонике частоты модулирующего поля с девиацией D , пропорциональной (вблизи центра линии перехода) квадрату амплитуды модулирующего поля H_0 и расстройке частоты генерации ν относительно центра ν_0 линии

$$D \sim H_0^2(\nu - \nu_0).$$

В соответствии с этим девиация частоты в центре линии перехода проходит через нулевое значение и меняет знак. Поставленный эксперимент подтвердил изложенные выше соображения.

Для обнаружения частотной модуляции и измерения девиации частоты был использован метод частично когерентного оптического гетеродинирования [8]. Измерительная установка (см. блок-схему на рис. 1) включает в себя исследуемый лазер 1 и лазер-гетеродин 2. В качестве исследуемого использовался одночастотный гелий-неоновый лазер с длиной волны 0,63 мк и внешним резонатором длиной 240 мм. Параметры разрядной трубы: выходные окна под углом Брюстера, внутренний диаметр канала 1,5 мм, длина активной части разряда 160 мм, наполнение-смесь Ne²⁰:He³ в отношении 1 : 5,6 при давлении 2,2 тор. Лазер, используемый в качестве гетеродина, имел аналогичные параметры.

Сигнал исследуемого лазера смешивается с сигналом гетеродина и поступает на фотодиод. Полученное на выходе фотодиода напряжение разностной частоты (8,4 МГц) после усиления и амплитудного ограничения поступает на частотный дискриминатор. Выходное напряжение дискриминатора поступает на усилитель постоянного тока с большой постоянной времени и далее на управляющий элемент гетеродина. Эта цепь позволяет поддерживать неизменным среднее значение разностной частоты. Кроме того, сигнал с выхода дискриминатора поступает на селективный усилитель (низкочастотный анализатор спектра), настроенный на вторую гармонику модулирующей частоты (20 кГц) и затем на осциллограф. Напряжение с горизонтальных пластин осциллографа поступает на управляющий элемент исследуемого лазера и обеспечивает сканирование частоты. Таким образом, на экране осциллографа наблюдается зависимость величины девиации частоты от расстройки относительно центра линии рабочего перехода. Одна из типичных на-

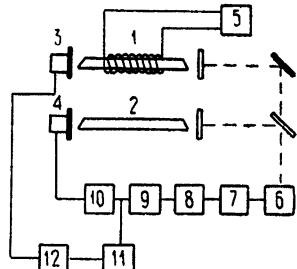


Рис. 1.

1 — исследуемый лазер; 2 — лазер-гетеродин; 3, 4 — управляющие элементы; 5 — звуковой генератор; 6 — фотоприемник; 7 — усилитель; 8 — ограничитель; 9 — частотный дискриминатор; 10 — усилитель постоянного тока; 11 — селективный усилитель (20 кГц); 12 — осциллограф.

* Расчет выполнен в дипломной работе студ. ГГУ О. Н. Суздалцевой путем рассмотрения величины набегов фаз, обусловленных присутствием провалов Беннетта в кривых усиления при наличии магнитного поля, для двух циркулярно поляризованных волн, распространяющихся в активной среде (соответствующих линейно поляризованному выходному излучению лазера). Вращение плоскости поляризации вследствие наличия эффекта Фарадея не учитывалось.

блюдаемых картин приведена на рис. 2. Частотный интервал между максимумами кривой около 200 MГц , что приблизительно соответствует естественной ширине линии для рабочего перехода (с учетом соударений). Дополнительная экспериментальная проверка показала, что знак отклонения частоты действительно меняется при переходе через центр линии. Осциллограммы, полученные при различных значениях модулирующего тока, позволяют найти связь между амплитудой модулирующего магнитного поля и максимальным значением девиации частоты; полученная кривая представлена на рис. 3.

В спектре напряжения на выходе частотного дискриминатора наряду со второй присутствовала также и первая гармоника частоты модуляции (10 кГц). Соотношение между амплитудами первой и второй гармоники существенно зависело от наличия (и величины) добавочного магнитного поля (наложение такого поля приводит к росту амплитуды первой гармоники). Заметный вклад в величину первой гармоники дает паразитная модуляция тока разряда, обусловленная наличием емкостной связи между цепью питания разрядной трубы и цепью модуляции. Наличие паразитной модуляции разрядного тока также и по второй гармонике (вследствие несинусоидальности модулирующего напряжения) приводит к некоторой асимметрии наблюдаемой кривой и небольшому смещению нуля кривой относительно центра линии перехода.

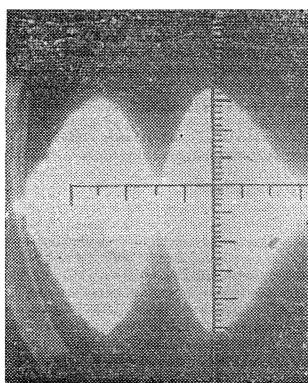


Рис. 2.

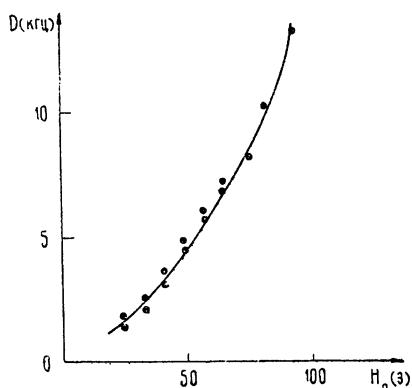


Рис. 3.

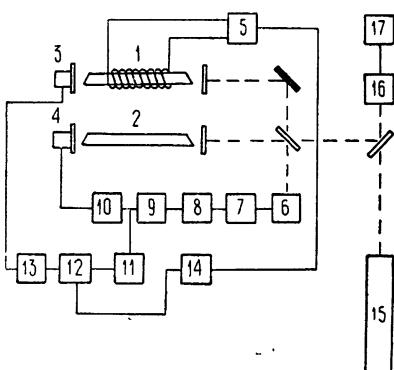
Полученная дисперсионная зависимость была использована для построения системы стабилизации частоты. Общая блок-схема установки приведена на рис. 4. Сигнал с выхода дискриминатора, представляющий собой вторую гармонику модулирующей частоты с амплитудой и фазой, зависящими от величины и знака расстройки частоты генерации относительно центра линии рабочего перехода, после усиления поступает на фазовый детектор. В качестве опорного напряжения фазового детектора используется напряжение с выхода удвоителя частоты, питающегося от модулирующего генератора. Сигнал с выхода фазового детектора поступает на усилитель постоянного тока и далее на управляющий элемент стабилизируемого лазера.

Для определения стабильности частоты построенной системы и оценки влияния различных факторов на частоту стабилизированного лазера сигнал с выхода последнего смешивался с сигналом от вспомогательного лазера, используемого в качестве эталона и стабилизированного по методу вторичных биений, описанному в [9]. Сигнал разностной частоты наблюдался с помощью спектроанализатора типа С-4-8.

Оценка коэффициента стабилизации (по уходам разностной частоты при одном и том же изменении длины резонатора для замкнутой

Рис. 4.

1—стабилизируемый лазер; 2—лазер-гетеродин; 3, 4—управляющие элементы; 5—звуковой генератор; 6—фотоприемник; 7—усилитель ($8,4 \text{ МГц}$); 8—ограничитель; 9—частотный дискриминатор; 10—усилитель постоянного тока; 11—усилитель (20 кГц); 12—фазовый детектор; 13—усилитель постоянного тока; 14—удвоитель частоты; 15—эталонный лазер; 16—фотоприемник; 17—анализатор спектра.



и разомкнутой цепи стабилизации) дала величину около 200. Измерения стабильности частоты показали, что среднее значение ухода разностной частоты не превосходит 1 МГц за несколько часов (2–3 часа). Это соответствует относительной нестабильности каждой из сравниваемых систем стабилизации не хуже $2 \cdot 10^{-9}$.

Наблюдения позволили установить, что частота стабилизированного по описанному методу лазера зависит от ряда факторов: изменений тока разряда, мощности генерации, воздействия посторонних магнитных полей. Измерения показали, что изменение тока разряда на 1 ма (около среднего значения рабочего тока $7,5 \text{ ма}$) смещает частоту стабилизации на $1,5 \text{ МГц}$. Это значение по порядку величины совпадает с данными, приводимыми в работе [10]. Измерения влияния давления газовой смеси на частоту стабилизации в настоящей работе не проводились, но можно предполагать, что это влияние аналогично наблюдавшемуся в [10]. С целью выяснения влияния посторонних магнитных полей измерялось смещение частоты, вызванное постоянной составляющей тока, питающего модулирующий соленоид. Получено значение $\approx 2 \text{ МГц} \cdot \text{эрст}^{-1}$.

Проверка зависимости частоты стабилизации от мощности генерации (мощность изменялась путем перекоса одного из зеркал лазерного резонатора) показала, что при изменении мощности на 10% частота генерации изменяется, в среднем, на 600 кГц .

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность И. Л. Берштейну, под руководством которого проводилась работа, Ю. И. Зайцеву за постоянное внимание к работе и ряд ценных советов и И. П. Курицину за конструирование аппаратуры и помочь в проведении эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. R. Bennet Jr., S. F. Jacobs, Y. T. La Tourrette, R. Rabinowitz, Appl. Phys. Lett., 5, 56 (1964).
2. W. R. Bennett Jr., Quantum Electronics, Proceedings of the Third International Congress, Paris, vol. 1, New York, 1964.
3. H. S. Boyne, M. M. Birky, W. G. Schweitzer, Appl. Phys. Lett., 7, 62 (1965).
4. R. Arrathon, A. E. Siegman, Appl. Phys. Lett., 13, 196 (1968).
5. R. Arrathon, J. Appl. Phys., 40, 7 (1969).
6. P. A. Miller, Y. T. Verdeyen, B. E. Cherrington, IEEE of Q. E., 5, 9 (1969).
7. Y. T. La Tourrette, R. Rabinowitz, IEEE of Q. E., 2, 4 (1966).

8. Ю. И. Зайцев, Д. П. Степанов, Письма в ЖЭТФ, 6, 7 (1967).
9. Ю. И. Зайцев, Л. А. Хуртина, ПТЭ, № 3, 10 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
14 октября 1970 г.

DISPERSION LASER CHARACTERISTICS AT $\lambda = 0,63 \mu$
IN THE MAGNETIC FIELD AND ITS FREQUENCY STABILIZATION

D. P. Stepanov

A method of obtaining the dispersion characteristic of the gas laser is proposed and realized by the method of modulation of the active medium parameters by the longitudinal magnetic field. The frequency stabilization system is described. The experimental results of estimating the influence of different factors on the frequency stability are given.

УДК 535.1

УСРЕДНЕННОЕ ОПИСАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ (МЕТОД МОМЕНТОВ)

С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов

Для монохроматического волнового пучка вводятся в рассмотрение моменты поперечного распределения плотности потока энергии. Показано, что в линейной среде имеет место полиномиальное представление по z моментов любого порядка. В среде с кубичной нелинейностью полиномами по z соответствующего порядка представляются моменты нулевого, первого и центробежный момент второго порядка. Рассматриваются примеры применения усредненного описания волновых пучков.

Как известно, одним из эффективных методов решения задач в теории переноса является метод моментов [1, 2]. Он состоит в том, что задача отыскания некоторого распределения $f(t)$ заменяется определением моментов $R_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt$ этого распределения. Эффективность метода моментов в задачах теории переноса связана с относительной простотой уравнений для R_n . Знание всех моментов позволяет известными методами восстановить вид функции $f(t)$ [3].

Однако даже в тех случаях, когда оказывается невозможным определить все моменты искомого распределения, информация о нескольких первых моментах оказывается полезной [4, 5]. Это особенно важно для нелинейных задач, в которых нередко отыскание всего распределения требует привлечения численных методов. В данной работе речь пойдет о привлечении метода моментов к анализу задач линейной и нелинейной квазиоптики.

1. СВЯЗЬ УСРЕДНЕННОГО ОПИСАНИЯ ПОЛЯ С ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

Пусть в трехмерном пространстве (x_1, x_2, x_3) имеется некоторый набор величин: $w(t, r)$ — скаляр, $S(t, r)$ — вектор, $T_{\alpha\beta}(t, r)$ — тензор, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div} S; \quad (1.1a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div} \hat{T}; \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha} = -\operatorname{div} Q, \quad (1.1c)$$

где Q — некоторый вектор. Введем в рассмотрение моменты величины $w(t, r)$: нулевого порядка

$$W(t) = \int_V w dv, \quad (1.2)$$

первого порядка

$$\mathbf{r}_{\text{ц}}(t) = \frac{1}{W} \int_V \mathbf{r} w(t, \mathbf{r}) dv \quad (1.3)$$

и центробежный момент второго порядка

$$I(t) \equiv a_{\text{эф}}^2 = \frac{1}{W} \int_V r^2 w dv. \quad (1.4)$$

В (2)–(4) интеграл берется по всему бесконечному пространству. Если величине w приписать смысл плотности энергии, то первые два уравнения (1.1) будут описывать законы сохранения энергии и импульса поля. Так, в случае электромагнитного поля в вакууме $w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$,

$S = \frac{c}{4\pi} [EH]$ — плотность потока энергии, $T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^M = \frac{1}{4\pi} \left\{ E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E^2 + H^2) \right\}$ — максвелловский тензор натяжений, $\sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\sigma} = w$ и

$\mathbf{Q} = S$. В однородной среде с проницаемостями ϵ, μ :

$$w = (ED + BH)/8\pi, \quad S = \frac{c}{4\pi} [EH],$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{1}{4\pi} \left\{ E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta) \right\} \equiv \frac{1}{\epsilon\mu} T_{\alpha\beta}^M,$$

$$\sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\sigma} = \frac{1}{\epsilon\mu} w, \quad \mathbf{Q} = \frac{\mathbf{S}}{\epsilon\mu}.$$

В силу уравнений (1.1) для поля, локализованного в некоторой области пространства, выполняются следующие соотношения:

$$W(t) = \text{const} = W(0); \quad (1.5a)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_{\text{ц}}(t)}{dt} = \text{const} = \left. \frac{d\mathbf{r}_{\text{ц}}}{dt} \right|_{t=0}; \quad (1.5b)$$

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} = \text{const} = \left. \frac{d^2 I}{dt^2} \right|_{t=0}. \quad (1.5v)$$

Здесь (1.5a) следует из (1.1a), (1.5b) — из (1.1a) и (1.1б), а (1.5v) — из (1.1a) — (1.1в).

Таким образом, указанные выше моменты распределения представляются по t полиномами соответствующего порядка:

$$W = W_0,$$

$$\mathbf{r}_{\text{ц}} = \mathbf{r}_{\text{ц}0} + \mathbf{v}_{\text{ц}} t, \quad (1.6)$$

$$I = I_0 + Bt + At^2$$

— с коэффициентами, определяемыми начальными условиями

$$\mathbf{v}_n = -\frac{1}{W_0} \int_V S dv \Big|_{t=0},$$

$$A = -\frac{c^2}{W_0} \int_V \sum_{i=1}^3 T_{ii} dv \Big|_{t=0}, \quad B = \frac{2}{W_0} \int_V r S dv \Big|_{t=0}.$$

Соотношения (6) имеют простой физический смысл: энергия сгустка поля W сохраняется, «центр энергии» \mathbf{r}_n движется по прямой с постоянной скоростью \mathbf{v}_n , а квадрат эффективного радиуса сгустка $a_{\text{эфф}}^2$ изменяется по параболическому закону (при $t \rightarrow \infty$, $a_{\text{эфф}} \sim t$) — движение сгустка подобно движению облака невзаимодействующих частиц в отсутствие внешних сил (в этом случае \mathbf{r}_n определяется как центр масс).

2. УСРЕДНЕННОЕ ОПИСАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В ЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Рассмотрим теперь стационарный во времени волновой пучок $\mathcal{E} = E e^{-ikz}$, описываемый уравнением квазиоптики (в координатах $k\mathbf{r}$)

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2i} \Delta_{\perp} E. \quad (2.1)$$

Будем интересоваться зависимостью от z моментов интенсивности $|E|^2$:

$$r_{mn} = \int_S x^m y^n |E|^2 dx dy. \quad (2.2)$$

Поскольку, как следует из (2.1), имеют место соотношения

$$\frac{\partial |E|^2}{\partial z} = -\operatorname{div}_{\perp} \mathcal{S}_{\perp}; \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}_{\perp}}{\partial z} = \operatorname{div}_{\perp} \hat{T}; \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sum_{i=1}^3 T_{ii} = \operatorname{div}_{\perp} \mathbf{Q}, \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{S}_{\perp} = \frac{E \Delta_{\perp} E^* - \text{к. с.}}{2i}; \quad (2.6)$$

$$T_{ik} = \frac{1}{4} \Delta_{\perp} |E|^2 \delta_{ik} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E}{\partial x_i} \frac{\partial E^*}{\partial x_k} + \frac{\partial E^*}{\partial x_i} \frac{\partial E}{\partial x_k} \right); \quad (2.7)$$

$$\mathbf{Q} = -\frac{1}{4i} \{ E \nabla_{\perp} \Delta_{\perp} E^* - \text{к. с.} \}, \quad (2.8)$$

то для величин

$$r_{00} \equiv W_0,$$

$$\frac{1}{r_{00}} (r_{10}x_0 + r_{01}y_0) \equiv r_{\perp},$$

$$\frac{1}{r_{00}} (r_{20} + r_{02}) \equiv a_{\text{eff}}^2$$

применимы формулы, аналогичные (1.2) — (1.4) с заменой t на z и V на S :

$$r_{00}(z) = r_{00}(0); \quad (2.9)$$

$$r_{\perp}(z) = r_{\perp}(0) + \alpha z; \quad (2.10)$$

$$a_{\text{eff}}^2(z) = a_{\text{eff}}^2(0) + Bz + Az^2, \quad (2.11)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{r_{00}} \int_S S_{\perp} ds \equiv \frac{1}{r_{00}} \int_S E_0^2 \nabla_{\perp} \varphi ds \Big|_{z=0}; \quad (2.12)$$

$$B = \frac{2}{r_{00}} \int_S r_{\perp} S_{\perp} ds \equiv \frac{2}{r_{00}} \int_S (r_{\perp} \nabla_{\perp} \varphi) E_0^2 ds \Big|_{z=0}; \quad (2.13)$$

$$A = \frac{1}{r_{00}} \int_S |\nabla_{\perp} E|^2 ds \equiv \frac{1}{r_{00}} \int_S [(\nabla_{\perp} E_0)^2 + E_0^2 (\nabla_{\perp} \varphi)^2] ds \Big|_{z=0}, \quad (2.14)$$

$$E = E_0 e^{-i\varphi}.$$

Таким образом, полный поток энергии пучка сохраняется, центр интенсивности лежит на одной прямой* (следствие закона сохранения попечерного импульса пучка), а квадрат эффективной ширины пучка изменяется по параболическому закону.

Можно показать, что полиномиальное (по z) представление моментов интенсивности поля, описываемого уравнением (2.1), имеет место и для последующих порядков r_{mn} :

$$r_{mn}(z) = P_{m+n}(z), \quad (2.15)$$

где $P_{m+n}(z)$ — полином степени $(m+n)$. В этом проще всего убедиться, используя интегральное преобразование Френеля, эквивалентное уравнению (2.1):

$$E(r, z) = \frac{i}{2\pi z} \int_S E(r'_{\perp}, 0) \exp \left(-i \frac{|r_{\perp} - r'_{\perp}|^2}{2z} \right) d^2 r'_{\perp}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим фокусировку гауссова пучка

$E = E_0 \exp \left(-\frac{r^2}{2a_0^2} + i \frac{r^2}{2F} \right)$. Для него $a_{\text{eff}} = a$, и выражение

$$a_{\text{eff}}^2(z) \equiv a^2(z) = \frac{1}{a_0^2} z^2 + \left(1 - \frac{z}{F} \right)^2 a_0^2 \quad (2.17)$$

описывает изменение действительной ширины пучка a . Таким образом, волновые пучки в усредненном описании ведут себя аналогично гауссовым пучкам соответствующей ширины и расходимости. Можно пока-

* На это обстоятельство уже обращалось внимание в работе [9].

зать, что для коллимированных пучков ($\varphi(0) = 0$) при заданной величине $a_{\text{эфф}}^2(0)$ гауссовые распределения реализуют минимальную дифракционную расходимость эффективного сечения.

В качестве другого примера рассмотрим прохождение произвольного пучка через квадратичный фазовый корректор $\varphi_0 = -r^2/2F$. Полагая в (2.9)–(2.14) $\varphi = \varphi_{\text{п}} + \varphi_0$, где $\varphi_{\text{п}}$ — фаза падающего пучка, найдем, что

$$\begin{aligned} (r_{\text{п.л.}})_{\text{вых}} &= (r_{\text{п.л.}})_{\text{вх}}, \quad \alpha_{\text{вых}} = \alpha_{\text{вх}} - \frac{(r_{\text{п.л.}})_{\text{вх}}}{F}, \\ (a_{\text{эфф}})_{\text{вых}} &= (a_{\text{эфф}})_{\text{вх}}, \\ B_{\text{вых}} &= B_{\text{вх}} - \frac{2(a_{\text{эфф}}^2)_{\text{вх}}}{F}, \quad A_{\text{вых}} = A_{\text{вх}} - \frac{B_{\text{вх}}}{F} + \frac{(a_{\text{эфф}}^2)_{\text{вх}}}{F^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Указанные соотношения наряду с (2.9)–(2.14) позволяют проводить рассмотрение произвольных пучков в системах квадратичных фазовых корректоров. Заметим, что для неквадратичных корректоров преобразования коэффициентов, определяющих изменение эффективной ширины пучка и его направления, будут содержать моменты входного распределения выше второго.

3. ОПИСАНИЕ ЧАСТИЧНО-КОГЕРЕНТНЫХ ПОЛЕЙ И ПОЛЕЙ В СТАТИСТИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Укажем еще один путь получения моментов распределения интенсивности в квазиоптике, пригодный и для описания частично-когерентных полей. Введем в рассмотрение функцию взаимной когерентности [5]

$$B(r, \rho, z) = \left\langle E\left(r + \frac{\rho}{2}, z\right) E^*\left(r - \frac{\rho}{2}, z\right) \right\rangle, \quad (3.1)$$

где $r(x, y)$, $\rho(\xi, \eta)$ — радиус-векторы в плоскости $z = \text{const}$. Уравнение для функции $B(r, \rho, z)$

$$i \frac{\partial}{\partial z} B(r, \rho, z) = \nabla_r \nabla_\rho B(r, \rho, z), \quad (3.2)$$

вытекающее из (2.1), можно решить методом, аналогичным развитому в работе [2]. Для моментов функции взаимной когерентности

$$r_{mn}(\rho) = \int_S x^m y^n B(r, \rho, z) d^2 r \quad (3.3)$$

из (3.2) нетрудно получить рекуррентное уравнение

$$i \frac{\partial r_{mn}}{\partial z} = -m \frac{\partial}{\partial \xi} r_{m-1, n} - n \frac{\partial}{\partial \eta} r_{m, n-1}. \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что

$$r_{00}(\rho, z) = r_{00}(\rho, 0) = \text{const}; \quad (3.5)$$

$$r_{01}(\rho, z) = r_{01}(\rho, 0) - \frac{1}{i} z \frac{\partial r_{00}(\rho, 0)}{\partial \eta}, \quad (3.6)$$

$$r_{10}(\rho, z) = r_{10}(\rho, 0) - \frac{1}{i} z \frac{\partial r_{00}(\rho, 0)}{\partial \xi};$$

$$\begin{aligned} r_{02}(\rho, z) &= r_{00}(\rho, 0) - \frac{2}{i} z \frac{\partial r_{00}(\rho, 0)}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 r_{00}(\rho, 0)}{\partial \eta^2} z^2, \\ r_{20}(\rho, z) &= r_{20}(\rho, 0) - \frac{2}{i} z \frac{\partial r_{10}(\rho, 0)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r_{00}(\rho, 0)}{\partial \xi^2} z^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

и т. д. Таким образом, полиномиальное представление для моментов интенсивности есть частный случай (при $\rho = 0$) полиномиального представления для моментов функции взаимной когерентности $B(\mathbf{r}, \rho, z)$. Результаты (3.4) — (3.7) естественно обобщаются на случай распространения частично-когерентных волновых пучков в статистически-неоднородных средах. В известном приближении [5, 7] этот случай описывается уравнением

$$i \frac{\partial B}{\partial z} = \nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\rho} B - \frac{i}{4} d_{\epsilon}(\rho) B \quad (3.8)$$

для функции взаимной когерентности (3.1). В (3.8)

$$\begin{aligned} d_{\epsilon}(\rho) &= \int_0^{\infty} D_{\epsilon}(\sqrt{\rho^2 + z^2}) dz - \int_0^{\infty} D_{\epsilon}(\sqrt{z^2}) dz, \\ D_{\epsilon}(\rho^{(3)}) &= \left\langle \left[\epsilon \left(R + \frac{\rho^{(3)}}{2} \right) - \epsilon \left(R - \frac{\rho^{(3)}}{2} \right) \right] \right\rangle \equiv D_{\epsilon}(\rho^{(3)}) \end{aligned}$$

— структурная функция локально-однородных и изотропных флюктуаций диэлектрической проницаемости ϵ (R и $\rho^{(3)}$ — радиус-векторы в трехмерном пространстве x, y, z ; $\rho^{(3)} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$).

Из (3.8) можно получить обобщающее (3.4) рекуррентное уравнение, описывающее изменение моментов функции взаимной когерентности B :

$$i \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{4} d_{\epsilon}(\rho) \right) r_{mn} = -m \frac{\partial}{\partial \xi} r_{m-1, n} - n \frac{\partial}{\partial \eta} r_{m, n-1}. \quad (3.9)$$

Из него следует, что

$$\begin{aligned} r_{00}(\rho, z) &= r_{00}(\rho, 0) \exp \left(-\frac{1}{4} d_{\epsilon}(\rho) z \right), \\ r_{01}(\rho, z) &= \left[r_{01}(\rho, 0) - \frac{1}{i} \frac{\partial r_{00}(\rho, 0)}{\partial \eta} z + \frac{1}{i} \frac{\partial d_{\epsilon}}{\partial \eta} r_{00}(\rho, 0) \frac{z^2}{8} \right] \times \\ &\quad \times \exp [-(1/4) d_{\epsilon}(\rho) z], \\ r_{02}(\rho, z) &= \left[(r_{02}(\rho, z))_{\text{пер}} + \frac{1}{i} \frac{\partial d_{\epsilon}}{\partial \eta} r_{01}(\rho, 0) \frac{z^2}{4} + \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^2 d_{\epsilon}}{\partial \eta^2} \times \right. \right. \\ &\quad \times r_{00}(\rho, z) + \left. \frac{1}{4} \frac{\partial d_{\epsilon}}{\partial \eta} \frac{\partial r_{00}(\rho, 0)}{\partial \eta} \right) z^3 - \left(\frac{\partial d_{\epsilon}}{\partial \eta} \right)^2 r_{00}(\rho, 0) \frac{z^4}{64} \left. \right] \exp [-(1/4) d_{\epsilon}(\rho) z]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

В частности,

$$a_{\text{шфф}}^2(z) = (a_{\text{шфф}}^2(z))_{\text{пер}} + \frac{1}{12} [\Delta_{\rho} d_{\epsilon}(\rho)]_{\rho=0} z^3. \quad (3.11)$$

Как видно из (3.11), хаотическая нерегулярность среды вносит в уширение эффективного сечения пучка аддитивный вклад [4, 5].

4. ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ $\epsilon = \epsilon_0(1 + \epsilon' |E|^2)$.

Рассмотрим волновые пучки в кубичной среде, описываемые уравнением

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2i} (\Delta_{\perp} E + \epsilon' |E|^2 E). \quad (4.1)$$

Непосредственным дифференцированием моментов интенсивности по z с использованием уравнения (4.1) можно показать, что для волновых пучков в средах с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_0(1 + \epsilon' |E|^2)$ справедливы соотношения (2.3) — (2.5), в которых

$$T_{lk} = T_{lk}^L + \frac{1}{4} \epsilon' |E|^4 \delta_{lk},$$

$$Q = Q^L - \frac{\epsilon'}{2i} |E|^2 (E \nabla_{\perp} E^* - \text{к. с.}),$$

T_{lk}^L и Q^L — соответствующие выражения для линейной среды.

В результате этого, по-прежнему имеют место формулы (2.9) — (2.11) с единственным отличием:

$$A \equiv A^{NL} = A^L - \frac{\epsilon'}{2r_{00}} \int_S |E|^4 ds. \quad (4.2)$$

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из соотношений (2.9) — (2.11) с учетом (4.2)*. В нелинейной среде центр интенсивности пучка распространяется по прямой, причем той же, что и в линейной среде. Этот вывод справедлив не только для кубичных сред, но и при произвольной зависимости $\epsilon(|E|^2)$. Это значит, что поперечные смещения пучка с асимметричным профилем амплитуды [8] носят локальный характер, в целом же пучок распространяется прямолинейно.

Из (2.11) и (4.2) следует, что любой коллимированный пучок, начиная с некоторой критической мощности P_{kp} , в нелинейной среде будет в среднем «схлопываться»: при $A^{NL} < 0$ $\frac{d^2 a_{\text{эфф}}^2}{dz^2} < 0$. Критическая мощность находится из условия $A^{NL} = 0$:

$$\int_S \left[|\nabla_{\perp} E|^2 - \frac{\epsilon'}{2} |E|^4 \right] ds = 0. \quad (4.3)$$

Полагая $E = E_0 f(\mathbf{r}_{\perp})$, из (4.3) получим

$$E_{0 kp}^2 = \frac{2}{\epsilon'} \frac{\int_S (\nabla_{\perp} f)^2 ds}{\int_S f^4 ds} \quad (4.4)$$

или

* Ввиду произвольности начала отсчета координаты z в (2.11) коэффициент A является интегралом исходных уравнений. Для произвольной нелинейности аналогичный инвариант был определен в работе [14].

$$P_{kp} = \frac{cn}{4\pi k_0^2 \epsilon'} \frac{\int_S (\nabla_{\perp} f)^2 ds / \int_S f^2 ds}{\int_S f^4 ds}, \quad (4.5)$$

где $k_0 = (\omega/c) V_{\epsilon_0}$. Критическая мощность (4.5) определяется лишь параметрами среды и профилем поперечного распределения $f(r_{\perp})$, она не зависит от его амплитуды или ширины. Так, для гауссова пучка $f \sim \exp(-r^2/2a^2)$

$$P_{kp}^r = \frac{cn}{2\epsilon' k_0^2}. \quad (4.6)$$

Определим профиль, для которого критическая мощность минимальна. Варьируя P_{kp} по $f(r_{\perp})$, находим, что этот профиль должен удовлетворять уравнению

$$\Delta_{\perp} f + 2 \frac{\int_S (\nabla f)^2 ds}{\int_S f^4 ds} f^3 - \frac{\int_S (\nabla f)^2 ds}{\int_S f^2 ds} f = 0,$$

которое заменой

$$r_{\text{нов}} = r_{\perp} \left(\frac{\int_S (\nabla_{\perp} f)^2 ds}{\int_S f^2 ds} \right)^{1/2},$$

$$f_{\text{нов}} = f \left(2 \int_S f^2 ds / \int_S f^4 ds \right)^{1/2}$$

можно привести к виду

$$\Delta_{\perp} f_{\text{нов}} + f_{\text{нов}}^3 - f_{\text{нов}} = 0. \quad (4.7)$$

Простейшему решению этого уравнения соответствует аксиально-симметричный пучок, являющийся не зависящим от z решением уравнения (4.1). Таким образом, пучок, профиль которого совпадает с профилем однородного (по z) пучка, имеет наименьшую критическую мощность: $P_{kp \min} = P_{\text{одн}}$. Величина

$$P_{\text{одн}} = \frac{cn}{4\pi k_0^2 \epsilon'} 5,7637 \quad (4.8)$$

была определена в работе [9] численным интегрированием уравнения (4.7). Однако стационарные свойства функционала $P_{kp}[f]$ позволяют вычислить $P_{\text{одн}}$ со сравнительно высокой точностью стандартными вариационными методами. Как видно из (4.6), уже гауссов пучок дает практически достаточное приближение для $P_{\text{одн}}$: $P_{kp}^r = 1,09 P_{\text{одн}}$. Обратим внимание на то, что полученное значение критической мощности гауссова пучка несколько выше значения, определенного в результате численных расчетов [10]: $P_{kp}^r = 1,015 P_{\text{одн}}$. Это связано с тем, что в первом случае критическая мощность определяет порог «схлопывания» пучка как целого ($d^2 a_{\text{эфф}}^2 / dz^2 < 0$), а во втором — порог локального «схлопывания», когда на оси пучка образуется фокальная точка с бес-

конечной интенсивностью. В некотором небольшом интервале мощностей $P_{\text{одн}} < P < 1,09 P_{\text{одн}}$ образование фокальной точки сопровождается увеличением эффективной ширины пучка.

Запишем выражение (2.11) для эффективной ширины пучка, введя в него критическую мощность (4.5)

$$a_{\text{эфф}}^2 = A_0^L \left(1 - \frac{P}{P_{\text{кр}}} \right) z^2 + \int_S (\nabla_{\perp} E_0)^2 E_0^2 ds / \int_S E_0^2 ds, \quad (4.9)$$

где

$$A_0^L = \int_S (\nabla_{\perp} E_0)^2 ds / \int_S E_0^2 ds \quad (4.10)$$

— коэффициент, характеризующий дифракционную расходимость в линейной среде коллимированного пучка того же амплитудного профиля. В частности, для сфокусированного пучка ($\varphi = -r^2/2F$)

$$a_{\text{эфф}}^2(z) = A_0^L \left(1 - \frac{P}{P_{\text{кр}}} \right) z^2 + \left(1 - \frac{z}{F} \right)^2 a_{\text{эфф}}^2(0). \quad (4.11)$$

Из (4.11) видно, что критическая мощность самофокусировки для сфокусированного пучка ($F > 0$) та же, что и для коллимированного: при $P = P_{\text{кр}}$ волновой пучок в среднем имеет вид конуса $a_{\text{эфф}} = |1 - z/F| a_{\text{эфф}}(0)$ с вершиной в точке $z = F$. Этот результат уже был отмечен в работе [11]. Нетрудно убедиться, что эффективная ширина пучка (2.11) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 a_{\text{эфф}}}{dz^2} = \frac{A a_{\text{эфф}}^2(0) - B^2/4}{a_{\text{эфф}}^3}. \quad (4.12a)$$

В частности, для сфокусированного пучка

$$\frac{d^2 a_{\text{эфф}}}{dz^2} = \frac{A_0^L (1 - P/P_{\text{кр}}) a_{\text{эфф}}^2(0)}{a_{\text{эфф}}^3}. \quad (4.12b)$$

Если $E = E_0 \exp(-r^2/2a^2)$, то $a_{\text{эфф}}(0) = a_0$, $A^L = 1/a_0^2$,

$$\frac{d^2 a_{\text{эфф}}}{dz^2} = \frac{1 - P/P_{\text{кр}}}{a_{\text{эфф}}^3}. \quad (4.12b)$$

К последнему уравнению приходят в теории так называемой безаберрационной самофокусировки [12], понимая под $a_{\text{эфф}}$ ширину гауссова пучка. Проведенное рассмотрение уточняет смысл безаберрационного приближения: получающееся уравнение описывает эффективную ширину самофокусирующегося пучка, которая может заметно отличаться от действительной ширины, определенной по какому-нибудь фиксированному уровню. Вместе с тем, в (4.12б) уточнен и смысл критической мощности: $P_{\text{кр}} = 4 \bar{P}_{\text{кр}}$, где $\bar{P}_{\text{кр}}$ — критическая мощность самофокусировки, получаемая в приосевом приближении [12]. Заметим, что уравнение для ширины гауссова пучка, которое может быть получено из функционала действия для уравнения (4.1) вариационным методом [13], полностью совпадает с (4.12б) и, таким образом, описывает не истинную, а эффективную ширину пучка.

Из (4.11) при $P > P_{\text{кр}}$ можно определить длину самофокусировки как расстояние до точки, где $a_{\text{эфф}} = 0$; для коллимированного пучка:

$$z_{\text{сф}}^* = \frac{a_{\text{сф}}(0)}{[A_0^L(P/P_{\text{кр}} - 1)]^{1/2}}. \quad (4.13)$$

Для гауссова пучка

$$z_{\text{сф}}^* = \frac{a_0^2}{(P/P_{\text{кр}} - 1)^{1/2}}. \quad (4.14)$$

Интересно сопоставить это выражение со значением длины самофокусировки, определяемой из численных расчетов как расстояние до фокальной точки [10]:

$$z_{\text{сф}} = \frac{0,366 a_0^2}{\left\{ \left(\sqrt{P/P_{\text{кр}}} - 0,825 \right)^2 - 0,03 \right\}^{1/2}}. \quad (4.15)$$

При $P \gg P_{\text{кр}}$

$$z_{\text{сф}}^* = \frac{a_0^2}{(P/P_{\text{кр}})^{1/2}}, \quad z_{\text{сф}} = \frac{a_0^2}{2\sqrt{2}(P/P_{\text{кр}})^{1/2}}, \quad (4.16)$$

т. е. $z_{\text{сф}}$ меньше $z_{\text{сф}}^*$ почти в 3 раза. При $P \sim P_{\text{кр}}$ $z_{\text{сф}} \approx \frac{0,85 a_0^2}{(P/P_{\text{кр}} - 1)^{1/2}}$,

что весьма близко к $z_{\text{сф}}^*$. Таким образом, определение $z_{\text{сф}}$ из усредненного описания (а также и безаберрационного приближения с уточненной критической мощностью) дает незначительную ошибку лишь при $P \sim P_{\text{кр}}$. С увеличением мощности $z_{\text{сф}}$ и $z_{\text{сф}}^*$ начинают сильно расходиться. Точки $z_{\text{сф}}$ и $z_{\text{сф}}^*$ можно было бы интерпретировать, соответственно, как точки локального (частичного) и абсолютного схлопывания. Однако в точке локального схлопывания мы имеем дело с сингулярностью решения, вследствие чего усредненное описание справедливо лишь до этой точки*. При этом величина $z_{\text{сф}}^*$ характеризует общую тенденцию поведения пучка на участке $0 < z < z_{\text{сф}}$. Подставляя $z = z_{\text{сф}}$ из (4.16) в выражение для гауссова пучка, нетрудно убедиться, что при $P \gg P_{\text{кр}}$ эффективное сечение к точке $z_{\text{сф}}$ уменьшается на 12,5 %. Заметим, что при $P \gg P_{\text{кр}}$ эффективное уширение пучка в линейной среде на расстояниях $z \sim z_{\text{сф}}$ составляет величину порядка $(1/8)(P_{\text{кр}}/P) \ll 1$, так что нелинейная фокусировка лишь незначительно сужает пучок по сравнению с его шириной в линейной среде. Заметим, что в силу инвариантности уравнения (4.1) относительно преобразования фокусировки [11] этот вывод касается и сфокусированных пучков: к точкам локального схлопывания эффективная ширина пучка меняется мало по сравнению с линейной средой.

Возможности усредненного описания не ограничиваются рассмотренными здесь случаями. В приближении квазиоптики полиномиальное представление моментов интенсивности имеет место и для импульсов в диспергирующих средах. Из нелинейных задач следует указать на описание полей в статистически-неоднородных средах с кубичной нелинейностью. Последняя задача рассмотрена в работе [15].

* Как показывают численные расчеты, инвариантность величины A_0^L (4.2) нарушается при прохождении точек локального схлопывания, что свидетельствует о сингулярности решения в этих точках.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б Дэвисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960.
- 2 Л М Романова, Изв. АН СССР, сер Физика атм. и океана, 4, № 3 (1968).
- 3 Н И Ахиезер, Классическая проблема моментов, Физматгиз, М., 1961.
- 4 З. И. Фейзуллин, Ю. А. Кравцов, Изв высш. уч. зав—Радиофизика, 10, № 1, 68 (1967).
- 5 Л С Долин, Изв высш. уч. зав—Радиофизика, 11, № 6, 840 (1968).
- 6 Р. Б. Ваганов, Радиотехника и электроника, 15, 10 (1970).
- 7 В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, 2106 (1969).
- 8 А Е. Каплан, Письма в ЖЭТФ, 9, 69 (1969); М. С. Бродин, А М Камуз, Письма в ЖЭТФ, 9, 577 (1969).
- 9 R. Chiao, E. Gagmire, C. Townes, Phys. Rev. Lett., 13, 479 (1964); Phys. Rev. Lett., 14, 1056 (1965).
- 10 В Н. Гольдберг, В. И. Таланов, Р. Э. Эрм, Изв высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 74 (1967).
- 11 В И Таланов, Письма в ЖЭТФ, 11, 303 (1970).
- 12 С. А Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В Хохлов, УФН, 93, 19 (1967).
- 13 В В. Воробьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 12, 1905 (1970).
- 14 В. Е. Захаров, Аннотации докладов, представленных на V Всесоюзную конференцию по нелинейной оптике (Кишинев, 10—15 ноября 1970 г.), изд МГУ, 1970.
- 15 В. А Петрищев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1416 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
15 января 1971 г.AVERAGED DESCRIPTION OF WAVE BEAMS IN LINEAR AND
NONLINEAR MEDIA*S. N. Vlasov, V. A. Petrishchev, V. I. Talanov*

The moments of the transverse distribution of the energy flux density are introduced to consider a monochromatic wave beam. It is shown that in the linear medium there takes place a polynomial representation over z for the moments of any order. In the medium with cubic nonlinearity, the polynomials over z of the corresponding order are the zero, first and centrifugal moments of the second order. The examples of applying the averaged description of wave beams are considered.

УДК 538.56

ВЛИЯНИЕ НАСЫЩЕНИЯ МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА ЯДЕР Cr^{53} НА МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС ЯДЕР Al^{27} В РУБИНЕ

Л. Л. Бушивили

Показано, что в рубине насыщение запрещенного ядерного резонанса ядер Cr^{53} может вызвать инверсию населенности ядер Al^{27} .

В ряде работ [1–5] было отмечено, что насыщение ядерного резонанса Cr^{53} в рубине увеличивает спиновую температуру спин-системы Al^{27} . Недавно также было замечено, что насыщение ядер Cr^{53} вызывает инверсию населенности ядер Al^{27} , а при переходе на другой край линии—уменьшение спиновой температуры.

Задача данной работы—указать на возможность такого различного поведения спин-системы Al^{27} при насыщении магнитного резонанса ядер Cr^{53} .

Из-за сверхтонкого взаимодействия резонансная частота ядер Cr^{53} сильно отличается от резонансной частоты ядер Al^{27} ($\omega(\text{Cr}) = \omega_1 = 25 \text{ Mгц}$, $\omega(\text{Al}) = \omega_2 = 3 \text{ Mгц}$), поэтому непосредственный обмен энергиями между этими двумя спиновыми системами в принципе запрещается законом сохранения энергии. Однако концентрация ионов хрома достаточно большая, и электронную спиновую систему согласно Провоторову [6] можно представить как совокупность двух подсистем: зеемановской и диполь-дипольной ($d-d$). Поскольку между электронными спинами Cr^{53} и ядерными спинами Al^{27} существует диполь-дипольное взаимодействие, то возможна непосредственная связь между ядерной подсистемой Al^{27} и $d-d$ -резервуаром электронных спинов Cr^{53} (если только $\omega_2 \ll \omega_d$, где ω_d —эффективная частота $d-d$ -резервуара). Этот вопрос подробно изучался как теоретически, так и экспериментально [7–11]. Указанная непосредственная связь приводит к выравниванию температур $d-d$ -резервуара и ядер Al^{27} . Что касается ядерной подсистемы Cr^{53} , то здесь в зависимости от концентрации ионов Cr^{53} возможны два случая: а) $\omega_d \gtrsim \omega_1$ и б) $\omega_d < \omega_1$.

В первом случае, как и для ядер Al^{27} , непосредственная связь с $d-d$ -резервуаром допустима. (Здесь необходимо, чтобы сверхтонкое взаимодействие имело анизотропную часть. Если сверхтонкое взаимодействие чисто изотропно, тогда возможны только такие процессы, при которых поворот ядерного спина сопровождается одновременным поворотом электронного спина. Такой процесс вследствие закона сохранения энергии маловероятен.) Отсюда очевидно, что насыщение, т. е. увеличение температуры ядерной подсистемы хрома, повлечет за собой увеличение температуры $d-d$ -резервуара, а последнее вызовет разогрев ядерной подсистемы Al^{27} . По-видимому, первый случай осуществляется в вышеуказанных экспериментах [1–5].

Что касается второго случая, то непосредственная связь между ядрами хрома и $d-d$ -резервуаром запрещена, но изменение температуры $d-d$ -резервуара можно осуществить, если обратить внимание на следующее обстоятельство. Поскольку имеет место сильное сверх-

тонкое взаимодействие, в перпендикулярном постоянному переменном поле с частотой, близкой к ядерной частоте Cr^{53} , возможны так называемые запрещенные переходы. В отличие от обычных переходов между ядерными уровнями, вызванных непосредственным воздействием переменного поля, запрещенные переходы дают ядерный магнитный резонанс, но обусловлены взаимодействием электронного спина с переменным полем. Таким образом, если переходы между ядерными уровнями—запрещенные, то взаимодействие с внешним полем содержит оператор электронного спина, не коммутирующий с гамильтонианом $d-d$ -резервуара. Поэтому при насыщении ядерного резонанса Cr^{53} , как и в случае насыщения электронного резонанса, в принципе можно изменить температуру $d-d$ -резервуара.

Вывод соответствующих уравнений формально аналогичен выводу уравнений Провоторова [6] для насыщения электронного резонанса, только электронную зеемановскую температуру и частоту надо заменить не зеемановскую температуру и частоту ядер хрома, а вероятность разрешенного перехода—на вероятность запрещенного перехода.

Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d\beta_z}{dt} &= -2W \left(\beta_z - \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_1} \beta_d \right), \\ \frac{d\beta_d}{dt} &= \frac{\omega_1(\omega_1 - \Omega)}{\omega_d^2} 2W \left(\beta_z - \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_1} \beta_d \right),\end{aligned}\quad (1)$$

где β_z, β_d — обратные температуры ядер Cr^{53} и $d-d$ -резервуара соответственно, Ω — частота внешнего переменного поля,

$$W = \pi \left(\frac{\omega_1}{\omega_l} \right)^2 \frac{S(S+1)}{3} g(\Omega - \omega_1), \quad (2)$$

$$g(\Omega - \omega_1) = \frac{3}{2\pi S(S+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\Omega - \omega_1)t] \langle S^z S^z(t) \rangle dt.$$

Стационарные решения уравнения (1) при начальных условиях $\beta_z = \beta_d = \beta_l$ (β_l — обратная температура решетки) имеют вид

$$\beta_z = \frac{(\omega_1 - \Omega)}{\omega_1} \beta_d, \quad \beta_d = \frac{\omega_1(\omega_1 - \Omega)}{(\omega_1 - \Omega)^2 + \omega_d^2}. \quad (3)$$

Если учесть, что $\beta(\text{Al}^{27}) = \beta_d$, выражения (3) означают, что, когда частота насыщающего поля превысит частоту ω_1 , ядра Al^{27} будут иметь отрицательную температуру, т. е. произойдет инверсия населенности уровней ядер Al^{27} и должно наблюдаться индуцированное излучение. При переходе на другой край линии резонанса Cr^{53} величина β_d становится положительной, причем будет иметь место охлаждение спинов ядер Al^{27} , но это уменьшение температуры будет в ω_2/ω_1 раз меньше, чем при насыщении электронного резонанса.

Отметим, что в приведенных выше рассуждениях не учитывалась спин-решеточная релаксация. Это означает, что указанный эффект должен наблюдаться за время, меньшее времени релаксации.

Если же условие не выполняется, то необходимо учитывать спин-решеточную релаксацию, что приведет к замене величины ω_d^2 на $(T_n/T_{dl})\omega_d^2$ в уравнении (3), где T_n и T_{dl} — времена релаксации ядер Cr^{53} и $d-d$ -резервуара соответственно.

Заметим также, что рассмотрение справедливо для случая больших вероятностей запрещенных переходов, а именно:

$$2WT_{dl} \gg 1. \quad (4)$$

Для удовлетворения условия (3) мощность переменного поля должна быть в $(\omega_e/\omega_1)^2$ раз больше, чем при насыщении электронного магнитного резонанса.

Таким образом, в зависимости от концентрации хрома насыщение ядерного магнитного резонанса Cr⁵³ может по-разному воздействовать на ядерную подсистему Al²⁷. При сравнительно низких концентрациях, когда осуществляется случай б), насыщение ядерного резонанса Cr⁵³ может вызвать отрицательное поглощение Al²⁷, а также может увеличить сигнал его поглощения. Если же концентрация хрома большая и осуществляется случай а), тогда насыщение ядерного резонанса Cr⁵³ может уменьшить сигнал ядерного резонанса Al²⁷.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Lambe, N. Lawrence, E. Mc Irvine, R. Terhune, Phys. Rev., **122**, 1161 (1968).
2. H. Yoshioka, J. Phys. Soc. Japan, **20**, 623 (1965).
3. В. А. Ацаркин, А. Б. Мефед, М. И. Родак, ЖЭТФ, **55**, 1791 (1968).
4. R. L. Kyle, B. D. Nageswara-Rao, Phys. Rev., **158**, 284 (1967).
5. В. А. Голенищев-Кутузов, Р. В. Сабурова, И. А. Тетров, ФТТ, **12**, 3100 (1970).
6. Б. Н. Провоторов, ЖЭТФ, **41**, 1522 (1961).
7. Л. Л. Бушвили, ЖЭТФ, **49**, 1868 (1965).
8. Н. С. Бендиашвили, Л. Л. Бушвили, сб. Релаксационные явления в твердых телах, изд. Металлургия, 1968.
9. Г. Р. Хуцишвили, УФН, **96**, 441 (1968).
10. М. А. Кожушнер. Б. Н. Провоторов, сб. Радиоспектроскопия твердого тела 1967, стр. 5.
11. В. А. Ацаркин, А. Б. Мефед, М. И. Родак, ЖЭТФ, **55**, 1671 (1968).

Тбилисский государственный университет

Поступила в редакцию
25 января 1971 г.

INFLUENCE OF SATURATION OF THE MAGNETIC Cr⁵³ NUCLEI RESONANCE ON THE MAGNETIC Al²⁷ RESONANCE IN RUBY

L. L. Buishvili

It is shown that in ruby the saturation of the prohibited nucleous resonance of Cr⁵³ nuclei may produce the inversion of Al²⁷ nuclei populations.

УДК 621.382.3.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМОГО ЛАВИННОГО ТРАНЗИСТОРА

В. П. Дьяконов, В. А. Циганков

Показана возможность эффективного оптического управления формой *S*-образных вольтамперных характеристик лавинного транзистора. Дан анализ эквивалентной схемы и получены уравнения вольтамперной и светопусковой характеристик. Приведены результаты экспериментального исследования опытных образцов лавинных фототранзисторов.

Использование оптических и электрических явлений — перспективное направление в радиофизике и электронике [1, 2]. Современные источники света, например, инжекционные лазеры и светодиоды, имеют большое быстродействие, достигающее 0,1—1 нсек. Вместе с тем ощущается недостаток в фотоприемниках с хорошими ключевыми свойствами, имеющих такое же быстродействие. Существующие приборы, например, фототранзисторы и фототиристоры [1—3], имеют на 2—3 порядка меньшее быстродействие, что сводит на нет реальное преимущество многих импульсных и логических оптикоэлектронных устройств перед их обычными аналогами.

Среди ключевых приборов с *S*-образной вольтамперной характеристикой особое место занимают лавинные транзисторы [4]. Современные лавинные транзисторы, имеющие очень высокое быстродействие (порядка 0,01—1 нсек), нашли применение в ряде устройств [5]. Специальные типы лавинных транзисторов разработаны и выпускаются промышленностью за рубежом и в СССР. Однако до сих пор не делалось попыток использования лавинных транзисторов в оптикоэлектронных устройствах.

В связи с этим большой интерес представляет возможность оптического управления формой вольтамперных характеристик лавинного транзистора, показанная в настоящей работе. Такая возможность значительно расширяет области применения лавинных транзисторов. Впервые появляется возможность эффективного согласования по быстродействию излучателей света и фотоприемников оптикоэлектронных схем. Релаксационные генераторы на оптически управляемых лавинных транзисторах способны генерировать мощные импульсы, которые можно использовать непосредственно для возбуждения инжекционных лазеров и светодиодов. Это позволяет легко каскадировать оптрыны на лавинных фототранзисторах.

АНАЛИЗ ВОЛЬТАМПЕРНОЙ И СВЕТОПУСКОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИК ЛАВИННОГО ФОТОТРАНЗИСТОРА

Основная схема включения фототранзистора показана на рис. 1. При отсутствии светового воздействия ($E = 0$) лавинный транзистор имеет *S*-образные вольтамперные характеристики, управляемые внешним током I_y . Анализ их для этого случая дан в работе [4].

Оптимальной структурой лавинного фототранзистора является

структурой диффузионно-сплавных транзисторов. Такие структуры имеют достаточно развитую поверхность тонкой диффузионной базы, доступную для воздействия световым излучением. Эмиттерный переход диффузионно-сплавных транзисторов закрыт для доступа света расположенным над ним омическим контактом к эмиттерной области. В связи с этим можно считать, что при освещении структуры диффузионно-сплавных транзисторов фотоионизация имеет место только в открытых участках базы, примыкающих к коллекторному переходу.

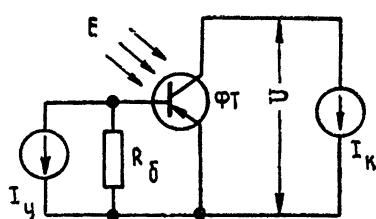


Рис. 1. Основная схема включения лавинного фототранзистора.

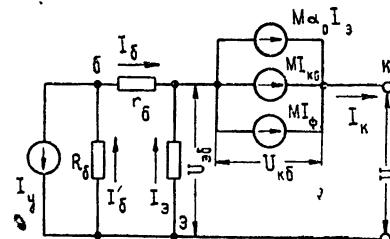


Рис. 2. Эквивалентная схема лавинного фототранзистора.

При освещении структуры лавинного транзистора в базовой области генерируются носители, создающие в коллекторном переходе добавочную компоненту фототока I_ϕ , действие которого на форму вольт-амперной характеристики аналогично действию внешнего тока I_y отпирающей полярности. Это приводит к тому, что вольтамперная характеристика становится управляемой светом, причем напряжение в ее максимуме при увеличении освещенности E падает. Очевидно, что наряду с оптическим управлением сохраняется возможность управления формой характеристики и с помощью тока I_y .

В области лавинного режима работы напряжение на коллекторном переходе намного превышает по величине тепловой потенциал φ_T . В этом случае можно использовать приведенную на рис. 2 эквивалентную схему лавинного фототранзистора. От обычной [4] она отличается наличием дополнительного источника тока I_ϕ , учитывающего действие света на структуру транзистора. Ток I_ϕ определяется выражением

$$I_\phi = kE, \quad (1)$$

где k — интегральная чувствительность по току ($мкА \cdot лк^{-1}$), E — освещенность ($лк$).

В цепи коллектора протекают три основные составляющие тока — обратный ток коллекторного перехода I_{k0} , составляющая эмиттерного тока $\alpha_0 I_3$ и фототок I_ϕ . Так как в лавинном режиме наблюдается заметная ударная ионизация носителей в коллекторном переходе, ее действие учитывается умножением всех составляющих на коэффициент лавинного умножения M , равный по Миллеру

$$M = \frac{1}{1 - (U_{k0}/U_M)^n}, \quad (2)$$

где U_M — напряжение лавинного пробоя коллекторного перехода, $n = 2 \div 6$ — показатель степени, зависящий от типа транзистора. Все сопротивления, входящие в эквивалентную схему, взяты по постоянному току. При этом считается, что $\alpha_0 = \text{const}$, $r_6 = \text{const}$ и $I_\phi = \text{const}$.

С учетом принятых допущений для схемы рис. 2 можно записать уравнения

$$U_{6\beta} = \varphi_T \ln(I_\beta/I_{\beta_0} + 1); \quad (3)$$

$$I_\beta + I_6 = M(\alpha_0 I_\beta + I_{k\beta} + I_\Phi); \quad (4)$$

$$I'_6 = I_y + I_6; \quad (5)$$

$$r_6 I_6 + R_6 I'_6 = r_\beta I_\beta, \quad (6)$$

где

$$r_\beta = \frac{U_{6\beta}}{I_\beta} = \frac{\varphi_T}{I_\beta} \ln(I_\beta/I_{\beta_0} + 1). \quad (7)$$

Решая уравнения (5) и (6) относительно I_6 и подставляя полученный результат с учетом (7) в выражение (6), получим

$$M = \frac{I_\beta + [\varphi_T/(R_6 + r_6)] \ln(I_\beta/I_{\beta_0} + 1) - I_y [R_6/(R_6 + r_6)]}{\alpha_0 I_\beta + I_{k\beta} + I_\Phi}. \quad (8)$$

Из (2) и (8) находим

$$U_{k\beta} = U_M \sqrt[n]{1 - \frac{1}{M}} = \\ = U_M \sqrt[n]{1 - \frac{\alpha_0 I_\beta + I_{k\beta} + I_\Phi}{I_\beta + [\varphi_T/(R_6 + r_6)] \ln(I_\beta/I_{\beta_0} + 1) - I_y [R_6/(R_6 + r_6)]}}. \quad (9)$$

Так как

$$U = U_{k\beta} + U_{6\beta}, \quad (10)$$

то, используя вышеприведенные выражения, нетрудно получить уравнения семейства вольтамперных характеристик лавинного фототранзистора в виде

$$U = U_M \sqrt[n]{1 - \frac{\alpha_0 I_\beta + I_{k\beta} + kE}{I_\beta [\varphi_T/(R_6 + r_6)] \ln(I_\beta/I_{\beta_0} + 1) - I_y [R_6/(R_6 + r_6)]}} + \\ + \varphi_T \ln\left(\frac{I_\beta}{I_{\beta_0}} + 1\right); \quad (11)$$

$$I_k = I_\beta + \frac{\varphi_T}{R_6 + r_6} \ln\left(\frac{I_\beta}{I_{\beta_0}} + 1\right) - I_y \frac{R_6}{R_6 + r_6}. \quad (12)$$

Таким образом, семейство задано двумя уравнениями, записанными в параметрической форме с параметром I_β . Задаваясь рядом значений I_β и определяя из них U и I_k , можно построить

$$U = f(I_k) |_{I_y=\text{const}, E=\text{const}}. \quad (13)$$

Если коэффициент передачи эмиттерного тока α_0 зависит от I_β , то эту зависимость можно учесть при вычислении U , подставляя в (11) вместо α_0 соответствующие значения $\alpha_0(I_\beta)$. По аналогии с пусковой характеристикой лавинного транзистора, т. е. зависимостью напряжения в максимуме вольтамперной характеристики U'_β от тока I_y при $E = 0$, целесообразно ввести представление о светопусковой характеристике, т. е. зависимости

$$U'_\beta = \psi(E) |_{I_y=0}. \quad (14)$$

В точке максимума по напряжению вполне можно пренебречь малым падением напряжения на прямосмещенному эмиттерном переходе

(второй член в уравнении (11)). Тогда $U = U_{\text{кб}}$. Так как в точке максимума выполняется условие

$$\frac{dU}{dI_k} = \frac{dU_{\text{кб}}}{dI_s} \Big| \frac{dI_k}{dI_s} = 0,$$

причем, как видно из (12), $\frac{dI_k}{dI_s} \neq 0$, то очевидно, что в этой точке должно соблюдаться условие $\frac{dU_{\text{кб}}}{dI_s} = 0$.

Дифференцируя (9) по току I_s , имеем

$$\frac{dU_{\text{кб}}}{dI_s} = \frac{U_M}{nM^2} \left[1 - \frac{1}{M} \right]^{1/n-1} \frac{dM}{dI_s}. \quad (15)$$

Из (15) видно, что $\frac{dU_{\text{кб}}}{dI_s} = 0$, если

$$\frac{dM}{dI_s} = 0. \quad (16)$$

Расчет по формулам (11) и (12) показывает, что в точках максимума $I_s > I_{s0}$ и $I_s > I'_{s0}$. Учитя это и считая, что $R_b \gg r_b$, из (8) находим

$$\frac{dM}{dI_s} = \frac{(\alpha_0 \varphi_T / R_b) [1 - \ln(I_s/I_{s0})] + kE(1 + \varphi_T / R_b I_s)}{(\alpha_0 I_s + kE)^2}. \quad (17)$$

Приравнивая на основании (16) последнее выражение нулю, можно получить уравнение, позволяющее рассчитать ток эмиттера I'_s в точке максимума вольтамперной характеристики:

$$\frac{\alpha_0 \varphi_T}{R_b} \left[1 - \ln \left(\frac{I_s}{I_{s0}} \right) \right] = kE \left(1 + \frac{\varphi_T}{R_b I_s} \right). \quad (18)$$

Уравнение (18) трансцендентное и легко решается относительно I_s графически или методом последовательных приближений. Определив ток I'_s и подставляя его в (11), получим

$$U'_\beta(E) = U_M \sqrt[n]{1 - \frac{\alpha_0 I'_s + kE}{I'_s + (\varphi_T / R_b) \ln(I'_s / I_{s0})}}. \quad (19)$$

Из (18) и (19) хорошо видно, что U'_β уменьшается при увеличении E , причем при $E \rightarrow \infty$ напряжение U'_β приближается асимптотически к величине

$$U_\beta = U_M \sqrt[n]{1 - \alpha_0}. \quad (20)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

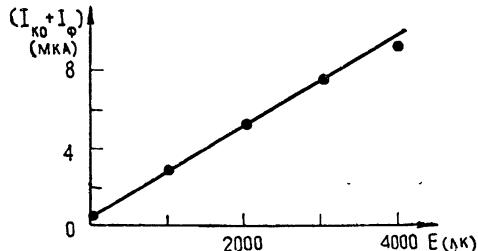
Экспериментально исследовались опытные образцы лавинных фототранзисторов, изготовленные на базе диффузионно-сплавных транзисторов П416—П416Б, П401—П403, П420—П423 и экспериментальных образцов специальных лавинных транзисторов. Опытные образцы были снабжены прозрачной крышкой, открывающей доступ света к структуре транзисторов. Последние помещались внутри трубы, внутренняя поверхность которой практически не отражала света. Освещенность изменя-

лась путем изменения расстояния между транзистором и лампой, передвигающейся внутри трубы. Лампа имела мощность порядка 30 вт, соответствующую цветовой температуре вольфрамовой нити порядка 2850°К. Контроль освещенности осуществлялся люксметром типа Ю-16. Принятые меры обеспечили сохранение спектрального состава света при изменении освещенности в пределах от 0 до 10000 лк.

Вольтамперные характеристики всех образцов при изменении освещенности менялись в соответствии с теоретическими расчетами. Для определения величины k снимались зависимости суммарного коллекторного тока ($I_{ко} + I_{Ф}$) от освещенности E при обрыве эмиттера и малом напряжении $U_{кб} \approx 5$ в, при котором можно пренебречь ударной ионизацией и считать $M=1$. Типичная зависимость ($I_{ко} + I_{Ф}$) от E для одного из образцов показана на рис. 3. Показатель n определялся из выражения (20) по совпадению экспериментально измеренного напряжения пробоя при обрыве базы U_B с расчетным.

На рис. 4 показано типичное семейство вольтамперных характеристик управляемого светом лавинного транзистора, имеющего параметры: $n = 4$, $\alpha_0 = 0,988$, $k = 2,4 \cdot 10^{-3}$ мкА·лк⁻¹ (вычислено из данных рис. 3), $I_{ко} = 0,5$ мкА, $I_{90} = 0,3$ мкА, $U_M = 51$ в, $R_B = 5,1$ ком. Кривая 1

Рис. 3. Зависимость составляющих коллекторного тока $I_{ко}$ и $I_{Ф}$ от освещенности E .



снята при $E = 0$, кривая 2 — при $E = 2000$ лк и 3 — при $E = 4000$ лк. На рисунке также показаны рассчитанные по выражениям (11) и (12) точки для семейства характеристик, исходные параметры которого соответствовали параметрам исследуемого образца. Максимальное расхождение между теоретическим расчетом и экспериментом не превышает 6%. Таким образом, эксперимент хорошо подтверждает теоретические расчеты, приведенные выше.

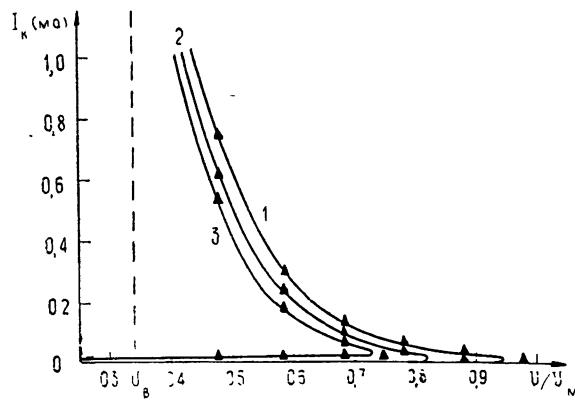


Рис. 4. Семейство ВАХ лавинного фототранзистора,
△△△ — теоретическая кривая,
— — — — — экспериментальная
кривая; 1 — $E = 0$; 2 — $E = 2000$ лк;
3 — $E = 4000$ лк

Анализ быстродействия лавинных фототранзисторов является серьезной самостоятельной задачей. Проведенные эксперименты показали, что параметры импульсов, генерируемых релаксационными генератора-

ми на лавинных фототранзисторах, не зависят от способа их запуска—оптического или электронного. Так, параметры импульсов, полученных от оптически запускаемых генераторов на специальных лавинных транзисторах, были следующими: время нарастания не более 1 μ сек, амплитуда до 15—20 в при сопротивлении нагрузки 75 ом. Генераторы хорошо запускались от оптического квантового генератора КГ-1 («Колибри») импульсами когерентного инфракрасного излучения с длительностью порядка 70—100 μ сек.

1. Показана возможность эффективного оптического управления формой вольтамперных характеристик лавинных транзисторов.

2. Изготовлены и исследованы опытные образцы лавинных фототранзисторов. Параметры исследованных образцов хорошо согласуются с расчетными.

3. Экспериментально подтверждено высокое быстродействие лавинных фототранзисторов при оптическом запуске релаксационных схем. В частности, был осуществлен запуск таких схем короткими импульсами когерентного инфракрасного излучения, полученными от ОКГ.

4. Применение оптически управляемых лавинных транзисторов открывает новые возможности в построении быстродействующих импульсных и логических оптикоэлектронных устройств.

ЛИТЕРАТУРА

- С. В. Свечников, Изв. высш. уч. зав — Радиоэлектроника, 13, № 4, 461 (1970).
- Э. И. Адиорович, Изв. высш. уч. зав — Радиоэлектроника, 11, № 7, 679 (1968).
- Г. С. Полторапавлов, Параметры для расчета схем на фототиристорах, сб. Полупроводниковые приборы в технике и электросвязи, под ред. И. Ф. Николаевского, вып. 4, 97 (1969).
- В. П. Дьяконов, Радиотехника и электроника, 13, № 5, 941 (1968).
- Г. А. Али-Заде, В. П. Дьяконов, Д. Г. Али-Заде, Радиотехника, 24, № 5, 25 (1969).

Смоленский филиал
Московского энергетического института

Поступила в редакцию
2 ноября 1970 г.

INVESTIGATION OF VOLT-AMPERE CHARACTERISTICS OF OPTICALLY CONTROLLED AVALANCHE TRANSISTOR

V. P. Dyakonov, V. A. Tsygankov

A possibility of the effective optical controlling of the form of S-type volt-ampere characteristics of the avalanche transistor is shown. The analysis of the equivalent scheme is given, the equations of volt-ampere and light trigger characteristics are obtained. The results of experimental investigations of samples of avalanche photo-transistors are given.

УДК 538.56

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ДЛЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Е. Н. Пелиновский, М. И. Рабинович

Предлагается метод исследования многоволновых процессов в слабонелинейных распределенных системах с медленно меняющимися параметрами. Данный подход является развитием асимптотического метода, предложенного в [1]. Получены уравнения первого и второго приближений как для систем, описываемых уравнениями первого порядка, так и для систем лагранжевого типа. В последнем случае обсуждается связь рассматриваемого подхода с «усредненным вариационным принципом» [2].

В литературе [3, 4] уже рассматривались с помощью тех или иных приближенных методов отдельные задачи, связанные с исследованием процессов распространения волн в слабонелинейных средах с медленно меняющимися параметрами. Во всех работах, однако, соответствующие приближенные уравнения для амплитуд и фаз волн выводились лишь в первом приближении и только для одной волны, причем, как правило, вывод их зависел от конкретных особенностей решаемой физической задачи.

В данной работе предлагается асимптотический метод исследования многоволновых взаимодействий в одномерных слабонелинейных диспергирующих системах с медленно меняющимися параметрами. Излагаемый здесь подход, являющийся обобщением метода, данного в [1], аналогичен соответствующей модификации асимптотического метода Боголюбова для сосредоточенных систем [5, 6].

1. СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В большинстве практически интересных случаев уравнения, описывающие поля в слабонелинейной среде (или движение непрерывной среды) с медленно меняющимися параметрами, можно представить в виде

$$\begin{aligned} A(\tau, \chi) \frac{\partial u}{\partial t} + B(\tau, \chi) \frac{\partial u}{\partial x} + C(\tau, \chi) u = \mu f^{(1)} + \dots + \\ + \mu^m f^{(m)} \left(\tau, \chi, \beta_1, \dots, \beta_r, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\tau = \mu t, \quad \chi = \mu x, \quad \mu \ll 1,$$

где A — матрица-столбец, а B и C — квадратные матрицы; $u = (u_1, \dots, u_n)$ и $f = (f_1, \dots, f_n)$ — n -мерные вектор-функции, причем f — полиномы по u , $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и периодические с периодом 2π функции переменных β_1, \dots, β_r , являющихся фазами внешних полей, мгновенные частоты и волновые числа которых определяются как

$$\gamma_j(\tau, \chi) = \frac{\partial \theta_j}{\partial t}, \quad \gamma_j(\tau, \chi) = -\frac{\partial \theta_j}{\partial x}. \quad (2)$$

При $\mu = 0$ и постоянных параметрах τ и χ система (1) имеет решения в виде бегущих волн

$$u = \psi^s \exp [i(\omega t - k_s x)] + \text{к. с.}, \quad (3)$$

где ω и k связаны дисперсионным уравнением

$$D(\omega, k_s) = \text{Det} \| A\omega - Bk_s - iC \| = 0 \quad (4)$$

(s — индекс нормальной волны — ветви дисперсионного уравнения), а ψ^s — правые собственные векторы матрицы $\| A\omega - Bk_s - iC \|$, определяемые из уравнений

$$(A\omega - Bk_s - iC) \psi^s = 0. \quad (5)$$

При $\mu \neq 0$ многоволновое решение — результат взаимодействия квазигармонических волн с переменными частотой и волновым числом — будем искать в виде

$$u = \sum_{s=1}^q \psi^s(\tau, \chi) a_s(\tau, \chi) \exp(i\theta_s) + \text{к. с.} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \times \\ \times w^{(n)}(\tau, \chi, \theta_1, \dots, \theta_q, \beta_1, \dots, \beta_r), \quad (6)$$

где $w^{(n)}$ — периодические вектор-функции переменных θ_s и β_j . Выбор решения $u^{(0)}$ (где $u^{(0)} = u(x, t)$ при $\mu = 0$) определяется начальными и граничными условиями, которые естественно ставить сразу для приближенных уравнений, а также видом правой части (1). В частности, в (6) должны быть учтены все возникающие из-за нелинейности и внешних полей волны, которые находятся в синхронизме (резонансе) с нормальными волнами линейной системы (условия резонанса приведены ниже). Уравнения для вновь введенных неизвестных функций a_s и θ_s будем искать в следующей форме:

$$\frac{\partial a_s}{\partial t} = \mu F_1^s \left\{ \tau, \chi, a_s, \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right\} + \mu^2 F_2^s \{ \dots \} + \dots, \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \Phi_0^s \left\{ \tau, \chi, a_s, \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right\} + \mu \Phi_1^s \{ \dots \} + \dots; \quad (7)$$

здесь F и Φ — неизвестные дифференциальные операторы по τ и χ в частных производных. Решение (6) можно определить с любой наперед заданной степенью точности, если найти неизвестные периодические функции $w^{(n)}(\theta_s, \beta_j)$ и раскрыть вид операторов F_i и Φ_i . Заметим, кстати, что возможен несколько иной подход к построению асимптотического решения (6) системы (1), основанный на разложении в ряд по малому параметру самих амплитуд и фаз a_s и θ_s (аналогичный подход используется в методе геометрической оптики [7, 8]), а не их производных, как в данном случае. При таком подходе число переменных, а следовательно, и число получаемых уравнений (даже для одноволнового процесса) непрерывно возрастает с ростом номера приближения. В то же время в рассматриваемом методе число переменных — уравнений — определяется лишь числом взаимодействующих волн, а возрастает только порядок этих уравнений. Поскольку анализ одного нелинейного уравнения определенного порядка зачастую проще, чем соответствую-

шего числа нелинейных уравнений первого порядка*, данный подход оказывается предпочтительным.

Уравнения для $w^{(n)}$ найдем из (1), подставив туда (6), (7), и требуя равенства нулю коэффициентов при μ^n :

$$\left(A\Phi_0^s + B \frac{\partial \theta_s}{\partial x} - iC \right) \psi^s = 0; \quad (8)$$

$$A \left[\sum_{s=1}^q \Phi_0^s \frac{\partial w^{(n)}}{\partial \theta_s} + \sum_{i=1}^r \gamma_i \frac{\partial w^{(n)}}{\partial \beta_i} \right] + B \left[\sum_{s=1}^q \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \frac{\partial w^{(n)}}{\partial \theta_s} + \right. \quad (9)$$

$$\left. + \sum_{i=1}^r \gamma_i \frac{\partial w^{(n)}}{\partial \beta_i} \right] + Cw^{(n)} = h^{(n)}(\tau, \chi, \theta, \beta);$$

$$h^{(1)} = f^{(1)} - \sum_{s=1}^q \exp(i\theta_s) \left\{ \left(AF_1^s + B \frac{\partial a_s}{\partial \chi} + ia_s A\Phi_1^s \right) \psi^s + \right. \quad (10)$$

$$\left. + a_s \left(A \frac{\partial \psi^s}{\partial \tau} + B \frac{\partial \psi^s}{\partial \chi} \right) \right\};$$

$$h^{(n)} = f^{(n)} + \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial u} w^{(1)} + \dots - \sum_{s=1}^q \exp(i\theta_s) A\psi^s (F_n^s + \quad (11)$$

$$+ ia_s \Phi_n^s) - A \frac{\partial w^{(n-1)}}{\partial \tau} - B \frac{\partial w^{(n-1)}}{\partial \chi} \quad (n \geq 2);$$

Поскольку коэффициенты $\psi^s(\tau, \chi)$ в (6) предполагаются не равными нулю, функционал Φ_0^s , согласно (8), должен определяться из дисперсионного уравнения

$$D \left(\Phi_0^s, \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) = \text{Det} \left\| A\Phi_0^s + B \frac{\partial \theta_s}{\partial x} - iC \right\| = 0. \quad (12)$$

Для упрощения записи введем обозначения

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial x} = -k_s(\tau, \chi), \quad \Phi_0^s = \omega_s(\tau, \chi). \quad (13)$$

Заметим, что введенный таким образом параметр ω_s совпадает с мгновенной частотой волны $\frac{\partial \theta_s}{\partial t}$ лишь в первом приближении.

Имея в виду, что правые части уравнений (9) являются периодическими функциями θ_s и β_j , представим $h^{(n)}$ в виде ряда (ниже все быстро меняющиеся переменные, в том числе и β_i , будем обозначать как $\theta_{s,m}$)

$$h = \sum_{s=1}^q H^s(\tau, \chi) \exp(i\theta_s) + \sum_{m=q+1}^p H^m(\tau, \chi) \exp(i\theta_m) + \text{к. с.} \quad (14)$$

* Из одного нелинейного уравнения всегда можно построить систему уравнений первого порядка, обратное же из-за нелинейности возможно лишь в редких случаях [9].

В первую группу членов здесь выделены слагаемые, соответствующие собственным волнам системы, для них

$$D(\omega_s, k_s) = 0, \quad (15)$$

а во вторую — возникающие за счет нелинейности и внешних полей комбинационные волны, которые находятся вне синхронизма с первыми, для них

$$D \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial t}, - \frac{\partial \theta_m}{\partial x} \right) \neq 0. \quad (16)$$

Для того, чтобы комбинационная волна была резонансна, т. е. удовлетворяла (15), очевидно, необходимо выполнение условий синхронизма*

$$\sum_{i=1}^l n_i \theta_i = \theta_j + \theta_j^\circ (\chi, \tau), \quad (17)$$

где n_i — целые числа, а θ_i , θ_j удовлетворяют дисперсионному уравнению (12) (или (15)).

Вектор-функция H^d определяется соотношениями $(d \rightarrow s)$

$$H^d = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} h \exp(-i\theta_d) d\theta_1, \dots, d\theta_p. \quad (18)$$

Периодические по θ функции $w^{(n)}$ также представим в виде ряда

$$w = \sum_{s=1}^q W^s \exp(i\theta_s) + \sum_{m=q+1}^p W^m \exp(i\theta_m) + \text{к. с.} \quad (19)$$

Последействия (14), (19) в (9) получим, приравнивая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, систему алгебраических уравнений для определения $W^{(n)}$. Амплитуды $W^{(1)m}$, согласно (16),

ограничены и равны $W_k^{(1)m} = -i \sum_{j=1}^n D_{jk} H_j^{(1)m} / D \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial t}, - \frac{\partial \theta_m}{\partial x} \right)$

(D_{jk} — минор D). Ограниченнные же решения для $W^{(1)s}$, ввиду (15), могут существовать, как известно, лишь при выполнении условий ортогональности

$$(\xi^s, H^{(1)s}) = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n \xi_k^s H_k^{(1)s} = 0, \quad (20)$$

где ξ^s — правый собственный вектор сопряженной с (8) алгебраической системы. Из этих условий, учитывая (10), (18), найдем выражения для искомых функционалов F_1^s и Φ_1^s :

$$F_1^s = - \frac{d\omega_s}{dk_s} \frac{\partial a_s}{\partial \chi} + \operatorname{Re} f_s^{(1)} - a_s G_s^{(1)}, \quad (21)$$

* При $\tau, \chi = \text{const}$ из этого условия приравниванием коэффициентов при t и x получаются обычные условия синхронизма

$$\sum_{i=1}^l n_i \omega_i = \omega_j, \quad \sum_{i=1}^l n_i k_i = k_j.$$

$$\Phi_1^s = \frac{1}{a_s} \operatorname{Im} f_s^{(1)},$$

где

$$f_s^{(1)} = \sum_{k=1}^n D_{kl}^s \langle f_k^{(1)} \exp(-i\theta_s) \rangle / D_{\omega_s}^l \psi_l^s,$$

а

$$G_s^{(1)} = \sum_{k=1}^n D_{kl}^s \left(A_k \frac{\partial \psi_k^s}{\partial \tau} + \sum_{m=1}^n B_{km} \frac{\partial \psi_m^s}{\partial \chi} \right) / D_{\omega_s}^l \psi_l^s,$$

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \varphi d\theta_1, \dots, d\theta_p.$$

При выводе этих соотношений учтено, что

$$(\xi^{*s}, B\Psi^s) / (\xi^{*s}, A\Psi^s) = \frac{d\omega_s}{dk_s} = v_s(k_s, \tau, \chi), \quad (22)$$

а

$$\frac{\xi_k^s}{(\xi^{*s}, A\Psi^s)} = \frac{D_{kl}^s}{D_{\omega}^l \psi_l^s} \quad (23)$$

(доказательство этих равенств приведено в Приложении).

Таким образом, уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{\partial a_s}{\partial t} + v_s(\tau, \chi) \frac{\partial a_s}{\partial x} = \mu \operatorname{Re} f_s^{(1)} - \mu a_s G_s^{(1)}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \omega_s \left(\tau, \chi, \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) = \frac{\mu}{a_s} \operatorname{Im} f_s^{(1)}.$$

Из этих уравнений непосредственно следуют уравнения первого приближения для систем с постоянными параметрами [1]. Действительно, в последнем случае $\theta_s = \omega_s^0 t - k_s^0 x + \varphi_s(\tau, \chi)$, т. е. $\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \omega_s^0 + \mu \frac{\partial \varphi_s}{\partial \tau}$,

$\frac{\partial \theta_s}{\partial x} = -k_s^0 + \mu \frac{\partial \varphi_s}{\partial \chi}$; учитывая, что второе слагаемое мало, разложим

функцию $\omega_s \left(\frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right)$ в ряд $\omega_s \approx \omega_s^0 - \mu v_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial \chi}$. Подставив эти выражения в систему (24), получим для первого уравнения $G \approx 0 (\sim \mu^2)$, а для второго

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} = \frac{\mu}{a_s} \operatorname{Im} f_s^{(1)}. \quad (24a)$$

Для построения уравнений второго приближения необходимо определить $W^{(1)s}$ из системы

$$(A\omega_s - Bk_s - iC) W^{(1)s} = -iH^{(1)s}, \quad (25)$$

где $H^{(1)s}$ представим в виде (см. (10), (14), (24))

$$H^{(1)s} = \bar{H}^{(1)s} + (Av_s - B)\psi^s \frac{\partial a_s}{\partial \chi}.$$

Сравнивая затем (25) и (П.1) и избавляясь от неопределенности, не трудно найти

$$W_t^{(1)s} = i \left(\frac{\partial \psi_t^s}{\partial k_s} + v_s \frac{\partial \psi_t^s}{\partial \omega_s} \right) \frac{\partial a_s}{\partial \chi} - i \frac{\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \omega} (D_{kl} \bar{H}_k^{(1)s})}{D'_\omega (\omega_s k_s)}. \quad (26)$$

Далее воспользуемся условием ограниченности $W^{(2)s}$ (см. (20)) и определим F_2^s и Φ_2^s :

$$\begin{aligned} F_2^s &= \operatorname{Re} f_s^{(2)}, \\ \Phi_2^s &= - \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_s}{dk_s^2} \frac{\partial^2 a_s}{\partial \chi^2} + \frac{1}{a_s} \operatorname{Im} f_s^{(2)} - \frac{1}{a_s} \frac{\partial a_s}{\partial \chi} G_s^{(2)}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$G_s^{(2)} = \frac{1}{D'_\omega} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{D_{km}^s}{\psi_m^s} \left(A_k \delta_{kl} \frac{\partial}{\partial \tau} + B_{kl} \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \left(\frac{\partial \psi_l^s}{\partial k_s} + v_s \frac{\partial \psi_l^s}{\partial \omega_s} \right), \quad (28)$$

а

$$\begin{aligned} f_s^{(2)} &= \frac{1}{D'_\omega} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{D_{km}^s}{\psi_m^s} \left(\exp(-i\theta_s) \left\{ f_k^{(2)} \delta_{kl} + \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_l} \omega_l^{(1)} + \right. \right. \\ &+ \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial t} \left[\sum_{s=1}^q \frac{\partial}{\partial \tau} (\psi_l^s a_s \exp(i\theta_s)) + \sum_{i=1}^q \omega_i \frac{\partial \omega_i^{(1)}}{\partial \theta_i} \right] + \frac{\partial f_k^{(1)}}{\partial u_l} \left[\sum_{s=1}^q \frac{\partial}{\partial \chi} \times \right. \\ &\times (\psi_i^s a_s \exp(i\theta_s)) - \sum_{i=1}^q k_i \frac{\partial \omega_i^{(1)}}{\partial \theta_i} \left. \right] \left. \right\} + i \left(A_k \delta_{kl} \frac{\partial}{\partial \tau} + B_{kl} \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \sum_{l=1}^n \times \\ &\times \frac{\partial}{\partial \omega} (D_{jl}^s \bar{H}_j^{(1)s}) - i A_k \delta_{kl} \left(\frac{\partial \psi_k^s}{\partial k_s} + v_s \frac{\partial \psi_k^s}{\partial \omega_s} \right) \frac{\partial \operatorname{Re} f_s^{(1)}}{\partial \chi} \right); \end{aligned} \quad (29)$$

при получении этих выражений использовалось соотношение (см. Приложение)

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{D_{km}^s}{D'_\omega \psi_m^s} (B - A v_s)_{kl} \left(\frac{\partial \psi_l^s}{\partial k_s} + v_s \frac{\partial \psi_l^s}{\partial \omega_s} \right) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega_s}{dk_s^2}. \quad (30)$$

Окончательно уравнения второго приближения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_s}{\partial t} + v_s(\tau, \chi) \frac{\partial a_s}{\partial x} &= \mu \operatorname{Re} f_s^{(1)} - \mu a_s G_s^{(1)} + \mu^2 \operatorname{Re} f_s^{(2)}, \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \omega_s &= \frac{\mu}{a_s} \operatorname{Im} f_s^{(1)} - \frac{1}{2a_s} \frac{d^2 \omega_s}{dk_s^2} \frac{\partial^2 a_s}{\partial x^2} - \frac{\mu}{a_s} \frac{\partial a_s}{\partial x} G_s^{(2)} + \frac{\mu^2}{a_s} \operatorname{Im} f_s^{(2)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогично строятся уравнения и более высоких приближений. Для сред с постоянными параметрами уравнения (31) переходят в уже известные [1] (при их выводе следует повторить процедуру, использовавшуюся при получении (24a)).

2. СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ОБОБЩЕННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

В тех случаях, когда исследуемая распределенная система описывается системой уравнений второго порядка лагранжевого типа, полученные выше результаты удается связать с так называемым «усредненным вариационным принципом» [2, 10, 11]. Найденная связь доказывает этот, вообще говоря, эвристический принцип и, кроме того, позволяет с его помощью сравнительно просто получить уравнения высших приближений.

Рассмотрим волновое поле, описываемое лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \left[A(\tau, \chi) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + B(\tau, \chi) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + C(\tau, \chi) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + E(\tau, \chi) uu \right] + \mu L^{(1)} + \mu^2 L^{(2)} + \dots \quad (32)$$

(поскольку лагранжиан удовлетворяет условию симметрии относительно перестановки индексов, здесь матрицы A, C, E — симметричные; для упрощения записи будем считать также симметричной и матрицу B). Имея в виду, что неконсервативные и нелинейные силы малы, исходные уравнения для поля можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} - \frac{\partial L}{\partial u} = \mu f^{(1)} + \dots, \quad (33)$$

где f удовлетворяют стандартным условиям (см. (1), (2)).

Отыскивая решение системы (33) в виде рядов (6), (7) и повторяя операции, проделанные в первой части работы, нетрудно получить уравнения первого приближения

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_s}{\partial t} + v_s(\tau, \chi) \frac{\partial a_s}{\partial x} &= \mu \operatorname{Im} f_s^{(1)} + \mu a_s G_s^{(1)}, \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} - \omega_s \left(\tau, \chi, \frac{\partial \theta_s}{\partial x} \right) &= \frac{\mu}{a_s} \operatorname{Re} f_s^{(1)}, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$f_s^{(1)} = (\psi^s, \langle f^{(1)} \exp(-i\theta_s) \rangle) / D_{\omega_s},$$

$$\begin{aligned} G_s^{(1)} &= \frac{1}{D_{\omega_s}} \left(\psi^s, \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} (\omega_s A \psi^s) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (k_s B \psi^s) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \chi} (\omega_s B \psi^s) - \frac{\partial}{\partial \chi} (k_s C \psi^s) \right\} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

волновое число $k_s = -\frac{\partial \theta_s}{\partial x}$ и $\omega_s = \Phi_0^s$ связаны дисперсионным уравнением

$$D(\omega_s k_s) = \operatorname{Det} ||\alpha|| = 0 \quad (\alpha = -A\omega_s^2 + B\omega_s k_s - Ck_s^2 - E), \quad (36)$$

а ψ^s — компоненты собственного вектора матрицы $||\alpha||$ (ввиду сим-

метрии этой матрицы, ее правые и левые собственные векторы совпадают)*.

Уравнения первого приближения (34) нетрудно интерпретировать в терминах усредненного лагранжиана и усредненной виртуальной работы. Вводя усредненный лагранжиан

$$\tilde{L}^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} L \left[U, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x} \right] d\theta_1, \dots, d\theta_p = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^q \times \\ \times (\psi^s, \alpha \psi^s) a_s^2 + \mu \tilde{L}_{NL}^{(1)}; \quad U = \sum_{s=1}^q \psi^s a_s \exp(i\theta_s) + \text{к. с.}$$
(37)

и среднюю виртуальную работу

$$\overline{\delta Q}^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \delta Q \left[U, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x} \right] d\theta_1, \dots, d\theta_p,$$
(38)

непосредственным дифференцированием можно убедиться, что уравнения (34) имеют вид уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tilde{L}^{(1)}}{\partial \frac{\partial \theta_s}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \tilde{L}^{(1)}}{\partial \frac{\partial \theta_s}{\partial x}} - \frac{\partial \tilde{L}^{(1)}}{\partial \theta_s} = \frac{\overline{\delta Q}^{(1)}}{\delta \theta_s};$$
(39a)

$$\frac{\partial \tilde{L}^{(1)}}{\partial a_s} = - \frac{\overline{\delta Q}^{(1)}}{\delta a_s},$$
(39b)

где через $\frac{\overline{\delta Q}}{\delta \theta}$ и $\frac{\overline{\delta Q}}{\delta a}$ обозначены коэффициенты при вариациях $\delta \theta$ и δa соответственно в выражении для

$$\overline{\delta Q} = \sum_{s=1}^q \sum_{k=1}^n \left[\left\langle f_k \frac{\partial U_k}{\partial \theta_s} \right\rangle \delta \theta_s + \left\langle f_k \frac{\partial U_k}{\partial a_s} \right\rangle \delta a_s \right].$$

Из возможности записи уравнений первого приближения в виде (39) непосредственно следует, что

$$\int (\delta \tilde{L} + \overline{\delta Q}) dt dx = 0,$$
(40)

а это, по существу, формулировка обобщенного вариационного принципа Гамильтона в усредненной форме [10–12], который, таким образом, можно считать доказанным.

Итак, для составления уравнений первого приближения достаточно усреднить лагранжиан и виртуальную работу по фазам взаимодействующих волн и записать уравнения Лагранжа второго рода для новых переменных a_s и θ_s . Такой подход для рассмотрения процессов в консервативных системах был предложен в [13–13].

Уравнения высших приближений также могут быть представлены в лагранжевой форме, в частности, уравнения второго приближения по

* Заметим, что если $\|B\|$ — несимметричная матрица, то в матрицу $\|\alpha\|$ вместо элемента b_{kl} войдет элемент $(1/2)(b_{kl} + b_{lk})$ и симметрия $\|\alpha\|$ не нарушится.

виду совпадают с (39), однако при усреднении L и δQ в них следует подставлять решение уже не нулевого, а первого приближения $U = \sum_{s=1}^q \psi^s a_s \exp(i\theta_s) + \text{к. с.} + \mu w^{(1)}$. Аналогично уравнения n -го приближения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \frac{\partial \theta_s}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \frac{\partial \theta_s}{\partial x}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta_s} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \frac{\partial^2 \theta_s}{\partial t^2}} + \dots &= \\ = \frac{\overline{\delta Q}}{\delta \theta_s} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\delta Q}}{\delta \frac{\partial \theta_s}{\partial t}} + \dots, & \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial a_s} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \frac{\partial a_s}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \frac{\partial a_s}{\partial x}} + \dots &= - \frac{\overline{\delta Q}}{\delta a_s} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\delta Q}}{\delta \frac{\partial a_s}{\partial t}} + \dots, \end{aligned} \quad (41)$$

где в L и δQ при усреднении подставляется $n-1$ приближение — $U = \sum_{s=1}^q \psi^s a_s \exp(i\theta_s) + \text{к. с.} + \sum_{i=1}^{n-1} \mu^i w^{(i)}$ (аналогично см. [14]).

В заключение отметим, что используемые в работе ряды (6), (7) рассматриваются как формальные и обоснование данного подхода представляет самостоятельную задачу (см. [16]).

Авторы признательны А. В. Гапонову за постоянный интерес к работе и обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем справедливость соотношений (22), (23) и (30). Продифференцируем уравнения (8) по k_s , учитывая связь (12):

$$(A\omega_s - Bk_s - iC) \left(\frac{\partial}{\partial k_s} + \frac{d\omega_s}{dk_s} \frac{\partial}{\partial \omega_s} \right) \psi^s = \left(B - A \frac{d\omega_s}{dk_s} \right) \psi^s. \quad (\Pi.1)$$

Чтобы существовало нетривиальное решение для $\frac{\partial \psi^s}{\partial k_s} + \frac{d\omega_s}{dk_s} \frac{\partial \psi^s}{\partial \omega_s}$, необходимо выполнение условий ортогональности (см. (20))

$$(\xi^s, B\psi^s) = \frac{d\omega_s}{dk_s} (\xi^s, A\psi^s), \quad (\Pi.2)$$

откуда непосредственно следует соотношение (22).

Для доказательства (30) еще раз продифференцируем по k_s уравнения (П.1). Требуя затем существования нетривиального решения для $\left(\frac{\partial}{\partial k} + \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial}{\partial \omega} \right)^2 \psi$, аналогично предыдущему получим (30).

Справедливость (23) следует из соотношений (ср. [5])

$$D_{kl} = \gamma \xi_k \psi_l \quad (\Pi.3)$$

и

$$D_\omega = \gamma (\xi^*, A\psi), \quad (\Pi.4)$$

для доказательства которых воспользуемся определением миноров

$$D_{ik} = \sum_{l=1}^n (A\omega - Bk - iC)_{il} D_{kl}; \quad (\Pi.5a)$$

$$D\delta_{il} = \sum_{k=1}^n (A\omega - Bk - iC)_{kl} D_{kl}. \quad (\text{П.56})$$

При любом фиксированном $i \neq k$ величины D_{kl} удовлетворяют (8) и, следовательно, пропорциональны ψ_l . С другой стороны, при фиксированном $i \neq l$ D_{kl} пропорциональны ξ_k — решению транспонированной (по отношению к (8)) системы, т. е. $D_{kl} \sim \xi_k \psi_l$.

Дифференцируя (П.5а) по ω и требуя существования нетривиального решения для $\frac{\partial D_{kl}}{\partial \omega}$, убеждаемся в справедливости (П.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, ДАН СССР, 191, № 6, 1253 (1970).
2. Нелинейная теория распространения волн, под ред. Г. И. Баренблатта, изд. Мир, М., 1970.
3. Ф. Г. Басс, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 6, 864 (1970).
4. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 6, № 9, 934 (1970).
5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
6. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, изд. Наука, М., 1964.
7. С. М. Рытов, Тр. ФИАН СССР, 2, 41 (1940).
8. Ю. А. Кравцов, Акуст. ж., 14, № 1, 1 (1968).
9. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964.
10. G. B. Whitham, J. Fluid. Mech., 22, 273 (1965).
11. V. J. Emegu, J. Math. Phys., 11, № 6, 1893 (1970).
12. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Препринт № 2, НИРФИ, Горький, 1970.
13. W. F. Simpson, Proc. Soc. Lond., A 309, 551 (1969).
14. М. И. Рабинович, сб. Нелинейные процессы в оптике (Тр. 1-й Вавиловской конференции по нелинейной оптике), Новосибирск, изд. Наука, СО, 1970, стр. 31.
15. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 29, № 3, 304 (1955).
16. М. И. Рабинович, А. А. Розенблум, ДАН СССР, 199, № 3, 575 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
19 марта 1971 г.

ASYMPTOTIC METHOD FOR WEAKLY LINEAR DISTRIBUTED SYSTEM WITH VARIABLE PARAMETERS

E. N. Pelinovskii, M. I. Rabinovich

A method is proposed to investigate multiwave processes in weakly nonlinear distributed systems with slowly varying parameters. This approach is the result of developing the asymptotic method suggested in [1]. The equations of the first and the second approximations are obtained for the systems described by the first order equation and for the Langrange type systems. In the latter case the connection of the approach considered with "the averaged variation principle" [2] is discussed.

УДК 621.391.822 · 621.373

ФЛУКТУАЦИИ ЧАСТОТЫ В ИЗОХРОННЫХ АВТОГЕНЕРАТОРАХ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ*

В. И. Волошин

Исследуются флуктуации частоты в слабонелинейных изохронных автоколебательных системах при периодически нестационарных случайных воздействиях, типичных для автогенераторов.

Получены соотношения, позволяющие определить спектральную плотность флуктуаций частоты с учетом периодической нестационарности воздействия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые случайные воздействия, вызывающие флуктуации в автогенераторах, являются периодически нестационарными процессами. Примерами таких воздействий являются дробовые шумы токов лампы и транзистора, интенсивность которых меняется во времени с периодом колебания в автогенераторе.

При анализе влияния естественных шумов на флуктуации в автогенераторах, работающих в слабонелинейном режиме, случайные воздействия обычно считаются стационарными. Лишь в [1–3] производился учет влияния периодической нестационарности дробовых шумов анодного тока на флуктуации в ламповых автогенераторах. Результаты этих работ противоречивы. Из [1, 2] следует, что указанное влияние мало либо вообще отсутствует. В [3], напротив, показано, что влияние периодической нестационарности может быть весьма существенным, особенно на флуктуации частоты. Как будет видно из проведенного в настоящей работе рассмотрения, справедливо последнее, а результаты работ [1, 2] следуют объяснить тем, что в [2] величина второй гармоники анодного тока, с которой в приближении постоянства коэффициента депрессии связано влияние периодической нестационарности в ламповом генераторе, считалась малой, а в [1] вообще не учитывалась. В случаях, когда высшие гармоники анодного тока не являются малыми, это влияние может быть значительным.

Возможность существенного влияния периодической нестационарности воздействия на флуктуации частоты, очевидно, может иметь место не только в ламповых, но и в других типах автогенераторов, и это делает целесообразным исследование этого влияния в общем виде. В настоящей работе ограничимся рассмотрением флуктуаций частоты в слабонелинейных изохронных системах при наличии периодически нестационарных случайных воздействий, типичных для автогенераторов.

* Основные результаты работы были доложены на научно-технической конференции ЛЭИС, Ленинград, март—апрель, 1969 г.

2. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ФЛУКТУАЦИИ ЧАСТОТЫ

Поведение флюктуационной составляющей частоты $\nu(\tau)$ колебания*

$$x(t) = V(t) \cos [t + \varphi(t)] + U(t) \quad (1)$$

в слабонелинейных изохронных автоколебательных системах второго [4] и третьего [5] порядка для установившегося режима может быть описано соответственно уравнениями

$$\nu_2(\tau) = \frac{d \varphi_{\Phi_2}}{d \tau} = -\frac{1}{2V_0} E_1(\tau), \quad (2)$$

$$\nu_3(\tau) = \frac{d \varphi_{\Phi_3}}{d \tau} = \frac{1}{2V_0} E_2(\tau).$$

В (1) и (2) $V(t)$, $U(t)$ и $\varphi(t)$ — медленно изменяющиеся функции, которые называем амплитудой, смещением и фазой колебания $x(t)$; V_0 — установившееся значение V ; $\varphi(t) = \varphi_{\Phi}(t) + \varphi_n$; $\varphi_{\Phi}(t)$ — флюктуационная составляющая $\varphi(t)$; φ_n — равномерно распределенная на интервале $0 \div 2\pi$ случайная начальная фаза; $\tau = \mu t$ — «медленное» время; μ — малый параметр. $E_1(\tau)$ и $E_2(\tau)$ в случае произвольной функции $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$, представляющей различные случайные воздействия на систему, определяются соотношениями

$$E_1(\tau) = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t F(w, \tilde{x}, \tilde{\dot{x}}, \tilde{\ddot{x}}) \cos(w + \varphi) dw, \quad (3)$$

$$E_2(\tau) = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t F(w, \tilde{x}, \tilde{\dot{x}}, \tilde{\ddot{x}}) \sin(w + \varphi) dw.$$

Здесь T_0 — период колебания в системе; $\tilde{x} = V_0 \cos[t + \varphi(t)] + U_0$, $\tilde{\dot{x}} = -V_0 \sin[t + \varphi(t)]$, $\tilde{\ddot{x}} = -V_0 \cos[t + \varphi(t)]$ — значения x , \dot{x} , \ddot{x} , в которых пренебрегаем флюктуациями амплитуды и смещения. Считаем, что эти флюктуации малы и их учет в (3) дает поправки второго порядка малости [4].

Для E_1 и E_2 введен аргумент τ , так как после усреднения получаются функции, которые мало изменяются за период T_0 .

Из (2) и (3) следует, что в системах второго порядка флюктуации частоты определяются интенсивностью составляющей $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$, синфазной с колебанием. Это не противоречит тому, что, как известно, флюктуации частоты, определяются интенсивностью квадратурной составляющей случайного воздействия на систему, так как воздействие может входить в $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$ не только непосредственно, но и в виде производных.

Заметим, что введение для автоколебательных систем равномерно распределенной начальной фазы приводит к тому, что все рассматриваемые в настоящей работе процессы, в том числе и «периодические», формально являются стационарными. Это связано с тем, что в ансамбле автогенераторов начальная фаза колебания является произвольной, вследствие чего даже «периодические» колебания в ансамбле генераторов являются стационарными. Несмотря на формальную стационарность рассматриваемых ниже процессов, их воздействие на флюктуации

* Для систем второго порядка $U(t) \equiv 0$.

в автогенераторах имеет существенные особенности, поскольку «периодическое» изменение интенсивности шумовых воздействий на отдельные генераторы коррелировано с фазой колебания. Поэтому, допуская некоторую нестрогость в терминологии, будем называть в дальнейшем эти воздействия периодически нестационарными. Заметим также, что предположение о равномерности распределения φ_n не является обязательным для проводимого анализа. Если не делать этого предположения, то рассматриваемые воздействия являются периодически нестационарными случайными процессами в общепринятом смысле, и при анализе следует вычислять корреляционные функции второго рода [4], что эквивалентно производимому ниже усреднению по φ_n .

Начнем рассмотрение с достаточно общего случая, когда функция $F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}})$ является периодически нестационарной и может быть представлена в виде

$$F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}}) = H_{cs}(t) \varepsilon(t), \quad (4)$$

где

$$H_{cs}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (H_{nc} \cosh n \xi + H_{ns} \sinh n \xi) \quad (5)$$

— «периодическая» функция с периодом колебания в автогенераторе, $\varepsilon(t)$ — стационарный случайный процесс с нормальным распределением, $\xi = t + \varphi(t)$.

Заметим, что соотношения (3) — (5) и, следовательно, уравнения (2) по форме не отличаются от уравнений, которыми описывается влияние широкополосных флуктуаций параметров генератора [4]. Это объясняется тем, что хотя флуктуации параметров считаются стационарными, но в уравнение системы эти параметры входят, как правило, в совокупности с периодическими функциями, приводя к периодически нестационарной функции $F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}})$. Указанные уравнения решены для частных случаев, соответствующих флуктуациям одного и двух параметров [4, 6]. Аналогичная задача решалась и в [7]. В отличие от [4, 6, 7] будем решать уравнения (2) для достаточно общего случая,

когда $F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}})$ определяется (4) и (5), и уделим особое внимание решениям для случаев, имеющих место при периодически нестационарных воздействиях типа дробового шума. Существенной особенностью таких воздействий является то, что для периодов колебаний, значительно больших времени корреляции шума, входящий в $F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}})$ случайный процесс можно считать дельта-коррелированным.

Подставим (5) в (4). Введем, как и в [4], функции

$$A_n(t) = H_{nc} \varepsilon(t), \quad B_n(t) = -H_{ns} \varepsilon(t), \quad (6)$$

медленные функции

$$A_{n\parallel}^{\pm}(\tau) = \frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t A_n(w) \cos(n \pm 1)(w + \varphi_n) dw, \\ A_{n\perp}^{\pm}(\tau) = -\frac{2}{T_0} \int_{t-T_0}^t A_n(w) \sin(n \pm 1)(w + \varphi_n) dw \quad (7)$$

и аналогично $B_{n\parallel}^{+}(\tau)$, $B_{n\parallel}^{-}(\tau)$, $B_{n\perp}^{+}(\tau)$ и $B_{n\perp}^{-}(\tau)$.

Из (7) можно получить выражения для корреляционных функций процессов $A_{n\parallel}^-, A_{n\perp}^-, A_{n\parallel}^+, A_{n\perp}^+$ и т. д. Анализ показывает, что корреляционные функции типа $\langle A_{n\parallel}^\pm(t) A_{m\parallel}^\pm(t+\theta) \rangle$ и $\langle A_{n\perp}^\pm(t) A_{m\perp}^\pm(t+\theta) \rangle$ определяются значением четной относительно частоты $(n \pm 1)$ -й гармоники колебания части спектральной плотности $S_\varepsilon^0(\Omega_{n\pm 1})$ процесса $\varepsilon(t)$, а корреляционные функции типа $\langle A_{n\parallel}^\pm(t) A_{m\perp}^\pm(t+\theta) \rangle$ — значением нечетной части $S_\varepsilon^1(\Omega_{n\pm 1})$. Будем считать, что

$$S_\varepsilon^0(\Omega_{n\pm 1}) = S_{n\pm 1} = \text{const}, \quad S_\varepsilon^1(\Omega_{n\pm 1}) = 0. \quad (8)$$

Здесь $S_{n\pm 1}$ — значение спектральной плотности процесса $\varepsilon(t)$ на частоте $(n \pm 1)$ -й гармоники колебания, $\Omega_{n\pm 1} = \omega - (n \pm 1)\omega_0$, ω_0 — размежная частота колебания.

Условия (8) строго выполняются только в случае дельта-коррелированного процесса $\varepsilon(t)$. Однако из результатов, полученных в [4], следует, что для процессов, отличающихся от дельта-коррелированных, принятие этих условий приводит лишь к некоторому сужению области частот Ω , при которых справедлив проводимый анализ. С учетом (8) из (7) получаем

$$\begin{aligned} \langle A_{n\parallel}^-(t) A_{m\parallel}^-(t+\theta) \rangle &= \begin{cases} H_{nc}^2 4\pi\omega_0 S_{n-1} \delta(\theta) & (m=n, n \neq 1) \\ 2H_{1c}^2 4\pi\omega_0 S_0 \delta(\theta) & (m=n=1); \\ H_{0c} H_{2c} 4\pi\omega_0 S_1 \delta(\theta) & (n=0, m=2 \\ \text{и } n=2, m=0) \end{cases} \\ \langle A_{n\perp}^-(t) A_{m\perp}^-(t+\theta) \rangle &= \begin{cases} H_{nc}^2 4\pi\omega_0 S_{n-1} \delta(\theta) & (m=n, n \neq 1); \\ -H_{0c} H_{2c} 4\pi\omega_0 S_1 \delta(\theta) & (n=0, m=2 \\ \text{и } n=2, m=0) \end{cases} \\ \langle A_{n\parallel, \perp}^+(t) A_{m\parallel, \perp}^+(t+\theta) \rangle &= H_{nc}^2 4\pi\omega_0 S_{n+1} \delta(\theta) \quad (m=n); \quad (9) \\ \langle A_{n\parallel, \perp}^-(t) A_{m\parallel, \perp}^+(t+\theta) \rangle &= \begin{cases} H_{nc} H_{(n-2)c} 4\pi\omega_0 S_{n-1} \delta(\theta) & (m=n-2); \\ \pm H_{0c}^2 4\pi\omega_0 S_1 \delta(\theta) & (m=n=0; \\ \text{для } \parallel, -\text{для } \perp) \end{cases} \\ \langle A_{n\parallel, \perp}^+(t) A_{m\parallel, \perp}^-(t+\theta) \rangle &= \begin{cases} H_{nc} H_{(n+2)c} 4\pi\omega_0 S_{n+1} \delta(\theta) & (m=n+2); \\ \pm H_{0c}^2 4\pi\omega_0 S_1 \delta(\theta) & (m=n=0; \\ \text{для } \parallel, -\text{для } \perp) \end{cases} \\ \langle A_{n\parallel}^-(t) A_{m\perp}^-(t+\theta) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

При других значениях m и n корреляционные функции (9) обращаются в нуль. Аналогичный вид имеют и корреляционные функции типа $\langle A_{n\parallel}^-(t) B_{m\parallel}^-(t+\theta) \rangle$, $\langle B_{n\parallel}^-(t) A_{m\parallel}^-(t+\theta) \rangle$, $\langle B_{n\parallel}^-(t) B_{m\parallel}^-(t+\theta) \rangle$ и т. д. при соответствующей замене коэффициентов H_{nc} на H_{ns} .

Используя метод доказательства, развитый в [4, 8], и учитывая (3) — (9), нетрудно показать, что нелинейные уравнения (2) можно заменить статистически эквивалентными линейными уравнениями с функциями $E_1(\tau)$ и $E_2(\tau)$, определяемыми соотношениями

$$E_1(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{1n}(\tau), \quad E_2(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}(\tau), \quad (10)$$

где

$$E_{1n}(\tau) = \frac{1}{2} [A_{n\parallel}^-(\tau) + A_{n\parallel}^+(\tau) + B_{n\perp}^-(\tau) + B_{n\perp}^+(\tau)], \quad (11)$$

$$E_{2n}(\tau) = \frac{1}{2} [-A_{n\perp}^-(\tau) + A_{n\perp}^+(\tau) + B_{n\parallel}^-(\tau) - B_{n\parallel}^+(\tau)].$$

Заметим, что если воспользоваться для проводимого анализа методами, развитыми в [9, 10]*, то мы непосредственно получим (10) и (11). Это связано с тем, что в указанных методах флюктуации фазы фактически считаются малыми. Правомерность применения этих методов для исследования больших фазовых флюктуаций при стационарных воздействиях была доказана Малаховым [8]. Возможность использования уравнений (2) с правыми частями, определяемыми (10) и (11), свидетельствует о правомерности применения методов, развитых в [9, 10], для исследования произвольных по величине флюктуаций фазы и при периодически нестационарных воздействиях.

3. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ ФЛЮКТУАЦИЙ ЧАСТОТЫ

Используя (9) — (11) и решая уравнения (2) для функции $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})$, определяемой (4), находим спектральные плотности флюктуаций частоты $S_v(\omega)$ в слабонелинейных изохронных автоколебательных системах второго порядка:

$$S_{v2}(\omega) = \frac{\mu^2 \omega_0^2}{8 V_0^2} \left[(H_{1c}^2 - H_{1s}^2) S_0 + 2H_{0c} (H_{0c} + H_{2c}) S_1 + \right. \quad (12)$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} (H_{nc}^2 + H_{ns}^2) (S_{n-1} + S_{n+1}) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (H_{nc} H_{(n+2)c} + H_{ns} H_{(n+2)s}) S_{n+1} \right]$$

и третьего порядка:

$$S_{v3}(\omega) = \frac{\mu^2 \omega_0^2}{8 V_0^2} \left[(H_{1s}^2 - H_{1c}^2) S_0 + 2H_{0c} (H_{0c} - H_{2c}) S_1 + \right. \quad (13)$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} (H_{nc}^2 + H_{ns}^2) (S_{n-1} + S_{n+1}) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (H_{nc} H_{(n+2)c} + H_{ns} H_{(n+2)s}) S_{n+1} \right].$$

Для ряда функций $F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}})$, типичных для автогенераторов, соотношения (12) и (13) могут быть существенно упрощены. Периодическая нестационарность дробового шума в случае, когда время корреляции шума значительно меньше периода колебаний, может учитываться, в частности, функцией

$$F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}}) = H_c(t) \eta(t), \quad (14)$$

где

$$H_c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_{nc} \cos n \xi, \quad (15)$$

$\eta(t)$ — дельта-коррелированный процесс со спектральной плотностью S_η .

* Метод, развитый в [10], был использован в [9].

Нетрудно видеть, что в этом случае корреляционная функция $K_F(t, \theta)$ процесса $F(t, \tilde{x}, \tilde{\dot{x}}, \tilde{\ddot{x}})$ связана с корреляционной функцией $K_\eta(\theta)$ процесса $\eta(t)$ соотношением

$$K_F(t, \theta) = G(t) K_\eta(\theta), \quad (16)$$

где

$$G(t) = H_c^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos n \xi \quad (17)$$

— функция, учитывающая периодическую зависимость от времени корреляционной функции процесса $F(t, \tilde{x}, \tilde{\dot{x}}, \tilde{\ddot{x}})$.

Используя соотношения, полученные в [1], легко показать, что

$$G_0 = \frac{1}{2} \left[H_{0c}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} H_{nc}^2 \right], \quad G_2 = \frac{1}{2} H_{1c}^2 + H_{0c} H_{2c} + \sum_{n=0}^{\infty} H_{nc} H_{(n+2)c}. \quad (18)$$

Учитывая, что для дельта-коррелированного процесса $S_n = S_\eta$, и используя (18), из (12) и (13) получаем

$$S_{2,3}(\omega) = \frac{\mu^2 \omega_0^2}{2V_0^2} n_{1,2} S_\eta, \quad (19)$$

где

$$n_1 = G_0 + \frac{1}{2} G_2, \quad n_2 = G_0 - \frac{1}{2} G_2. \quad (20)$$

Решая аналогичным образом уравнения (2), можно найти соотношения для n_1 и n_2 при других $F(t, \tilde{x}, \tilde{\dot{x}}, \tilde{\ddot{x}})$. В частности, для функции

$$F(t, \tilde{x}, \tilde{\dot{x}}, \tilde{\ddot{x}}) = \frac{d^2}{dt^2} [H_c(t) \eta(t)] \quad (21)$$

n_1 и n_2 определяются (20).

Для функции

$$F(t, \tilde{x}, \tilde{\dot{x}}, \tilde{\ddot{x}}) = \frac{d}{dt} [H_c(t) \eta(t)], \quad (22)$$

$$n_1 = G_0 - \frac{1}{2} G_2, \quad n_2 = G_0 + \frac{1}{2} G_2. \quad (23)$$

Соотношения (19), (20) и (23) справедливы также при замене в (14), (17), (21) и (22) $H_c(t)$ на $H_s(t)$, где

$$H_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_{ns} \sin n \xi. \quad (24)$$

Если в (14), (21) или (22) положить $H_c(t) = H_{0c} = 1$, т. е. принять $F(t, \tilde{x}, \tilde{\dot{x}}, \tilde{\ddot{x}}) = \eta(t)$, то нетрудно видеть, что в этом случае $n_{1,2} = 1$ и (19) переходит в известное соотношение для спектральной плотности флюктуаций частоты в изохронных системах при стационарном воздействии [4]. Таким образом, влияние периодической нестационарности воздействия на флюктуации частоты в изохронных системах учитывается функци-

циями $n_1, 2$, которые в рассмотренных частных случаях полностью определяются постоянной составляющей и амплитудой второй гармоники квадрата функции $H_{c,s}(t)$, отражающей периодическое изменение $F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}})$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

1. В настоящей работе исследованы флуктуации частоты в слабонелинейных изохронных автоколебательных системах при некоторых периодически нестационарных воздействиях, типичных для автогенераторов. Полученные соотношения могут быть использованы и в ряде других случаев, в частности, при анализе влияния широкополосных флуктуаций параметров, так как, как уже указывалось, учет флуктуаций параметров приводит к периодически нестационарным функциям $F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}})$.

2. Возможность замены нелинейных стохастических уравнений, описывающих поведение частоты в указанных выше системах, статистически эквивалентными линейными уравнениями, свидетельствует о правомерности применения методов, развитых в [9, 10], для исследования произвольных по величине флуктуаций фазы при периодически нестационарных воздействиях.

3. На основании полученных в работе соотношений нетрудно найти выражения для функций $n_1, 2$, учитывающих периодическую нестационарность дробового шума в реальных автогенераторах. Для одноконтурных ламповых и транзисторных автогенераторов такие выражения приведены в [12]. При их получении оказывается, что случайное воздействие входит в уравнение, описывающее поведение автогенератора, таким образом, что анализ приводит к функции $n = G_0 - G_2/2$. Действительно, для систем второго порядка характерно, что влияние дробового

шума учитывается функцией $F(t, \tilde{x}, \dot{\tilde{x}}, \ddot{\tilde{x}})$, определяемой (22), а для систем третьего порядка — функциями, определяемыми (14) и (21). Из (20) и (23) следует, что в обоих случаях $n = G_0 - G_2/2$, т. е., как и следовало ожидать, вид функции n , учитывающей влияние периодической нестационарности дробового шума на флуктуации частоты, не зависит от порядка автоколебательной системы.

При работе генератора в режиме с малой нелинейностью (для ламповых генераторов при углах отсечки больше 60° [12]) величина n близка к единице, т. е. учет периодической нестационарности дробового шума несущественно влияет на количественные оценки характеристик флуктуаций частоты. С увеличением нелинейности режима генератора величина n становится заметно меньше единицы [12]. В этом случае пренебрежение при анализе периодической нестационарностью дробового шума приводит к получению завышенных значений характеристик флуктуаций частоты*. Физически этот результат можно истолковать следующим образом.

* Это обстоятельство подтверждается и результатами работ [2, 3]. В [2] считалось, что корреляционная функция шумового тока пропорциональна среднему значению анодного тока $I(t)$. Это соответствует функциям $G(t) = I(t)/I_0$ и $n = (I_0 - I_2/2)/I_0$, где I_0 и I_2 — постоянная составляющая и вторая гармоника $I(t)$. Введенная в [3] «статическая спектральная характеристика шума» с точностью до постоянной совпадает с $G(t)$.

В изохронных системах флюктуации частоты определяются интенсивностью квадратурной составляющей случайного воздействия. Нетрудно убедиться в том (см., например, [3]), что при стационарном воздействии его синфазная и квадратурная составляющие равны, а при периодически нестационарном воздействии квадратурная составляющая, как правило, меньше синфазной и меньше, чем в случае стационарного воздействия. Таким образом, наличие корреляции между интенсивностью случайного воздействия и фазой колебания генератора приводит к уменьшению интенсивности квадратурной составляющей по сравнению со случаем, когда воздействие некоррелировано с фазой колебания, и, тем самым, к уменьшению флюктуаций частоты.

Заметим, что при учете влияния широкополосных флюктуаций параметров генератора (по крайней мере, если флюктуации параметров стационарны и, следовательно, некоррелированы с фазой колебания) возможно увеличение флюктуаций частоты по сравнению со случаем, когда пренебрегают периодическим изменением функции $H(t)$ или ее высшими гармониками. Это явление объясняется в [4].

4. Существенное уменьшение флюктуаций частоты должно происходить в случае, когда функция $H(t)$ имеет характер коротких импульсов. При этом $G_2 \rightarrow 2G_0$ и $n \rightarrow 0$. Функция $H(t)$ может иметь такой характер, как правило, только в сильнолинейных системах, для которых возможность уменьшения флюктуаций частоты указанным образом требует отдельного рассмотрения. Однако можно, по-видимому, создать и слабонелинейные системы, в которых функция $H(t)$ имеет указанный выше характер. Поиск путей создания таких генераторов представляет несомненный интерес, так как из результатов анализа следует, что в таких автогенераторах можно получить значительное уменьшение флюктуаций частоты и, тем самым, существенно улучшить чистоту спектральной линии генерируемого колебания.

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность А. Н. Малахову и А. В. Якимову за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 4, 573 (1959).
2. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
3. А. Н. Бруевич, Радиотехника, 23, № 5, 35 (1968).
4. А. Н. Малахов, Флюктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
5. В. И. Волошин, сб. Материалы научно-технической конференции ЛЭИС, вып. 1—2, 255 (1968).
6. А. Н. Малахов, А. В. Якимов, Радиотехника и электроника, 14, № 2, 299 (1969).
7. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 2, 241 (1960).
8. А. Н. Малахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 4, 710 (1964).
9. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 29, № 3, 304 (1955).
10. С. И. Евтинов, В. Н. Кулешов, Научн. докл. высш. школы — Радиотехника и электроника, 1, № 4, 93 (1958).
11. С. S. Kim, IRE Trans., ED-8, № 5, 394 (1961).
12. В. И. Волошин, сб. Материалы научно-технической конференции ЛЭИС, вып. 2, 190 (1969).

**FREQUENCY FLUCTUATIONS IN ISOCHRONOUS SELF-OSCILLATORS
AT PERIODICALLY NONSTATIONARY RANDOM ACTIONS***V. I. Voloshin*

The frequency fluctuations in weakly nonlinear isochronous self-oscillating systems at periodically nonstationary random actions typical of self-oscillators are investigated. Relations have been derived, which enable one to determine the spectral density of frequency fluctuations with taking into account the periodic nonstationarity of the actions.

УДК 621.371.24

О ФЛУКТУАЦИЯХ ПАРАМЕТРОВ НОРМАЛЬНОЙ ВОЛНЫ ПРИ СВЕРХРЕФРАКЦИИ

M. B. Каневский

Методом малых возмущений получены выражения для одномерных спектров флуктуаций уровня и фазы нормальной волны, распространяющейся в хаотически неоднородной среде при наличии регулярной сверхрефракции. Показано, что при сверхрефракции малые амплитудные флуктуации растут с расстоянием медленнее, чем в случае, когда средняя диэлектрическая проницаемость среды не зависит от координат.

Выражения для спектров флуктуаций параметров плоской волны, распространяющейся в хаотически неоднородной среде с постоянным значением $\bar{\epsilon}$ — средней диэлектрической проницаемости, хорошо известны [1].

В настоящей работе в первом приближении метода малых возмущений получены одномерные аналоги упомянутых выражений, отвечающие случаю, когда рассеяние происходит в условиях регулярной сверхрефракции.

1. Рассмотрим скалярное волновое уравнение

$$\{\Delta + k^2 [\bar{\epsilon}(z) + \epsilon_1(x, y, z)]\} \psi = 0, \quad (1)$$

$$\psi|_{z=0} = 0,$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\bar{\epsilon}(z)$ — монотонно убывающая функция вертикальной координаты. Все случайные неоднородности среды расположены в области $x > 0$; поле величины ϵ_1 статистически однородно; $l \gg \lambda$, где l — наименьший из существенных для данной задачи масштабов случайных неоднородностей; $(\epsilon_1^2)^{1/2} = \mu \ll 1$.

Из области $x < 0$ на границу $x = 0$ падает нормальная волна $\psi_0 = f(z) \exp(ik_1 x)$. Здесь k_1 — продольное волновое число, высотный множитель $f(z)$ — действительная функция, удовлетворяющая одномерному волновому уравнению и условию при $z = 0$:

$$f'' + k^2 s(z) f = 0, \quad s(z) = \bar{\epsilon}(z) - k_1^2/k^2, \quad (2)$$

$$f(0) = 0.$$

Функция $f(z)$ осциллирует в области $0 < z < z_f$ (высота точки поворота z_f — корень уравнения $s(z) = 0$) и экспоненциально убывает при $z > z_f$. Введем $\lambda_f = k^{-2/3} |\bar{\epsilon}'|^{-1/3}$ — масштаб осцилляций $f(z)$ вблизи точки поворота (производная $\bar{\epsilon}'$ взята в точке z_f). Для удобства функцию $f(z)$ полагаем нормированной, т. е. $\int_0^\infty f^2(z) dz = 1$.

Разложим поле ψ в ряд $\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots$, где $|\psi_n| \sim \mu^n |\psi_0|$, а затем, приравнивая нулю члены порядка μ , получим уравнение для ψ_1 :

$$[\Delta + k^2 \bar{\epsilon}(z)] \psi_1 = -k^2 \epsilon_1 \psi_0, \quad (3)$$

$$\psi_1|_{z=0} = 0.$$

Величины $\epsilon_1(x, y, z)$ и $\psi_1(x, y, z)$ представим в виде стохастических интегралов Фурье — Стильтьеса $\epsilon_1(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i x_2 y) d\nu_\epsilon(x, z, x_2)$,

$\psi_1(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i x_2 y) d\nu_\psi(x, z, x_2)$ и перейдем от (3) к уравнению, связывающему спектральные амплитуды $d\nu_\psi$ и $d\nu_\epsilon$:

$$[\Delta_{x, z} + k^2 \bar{\epsilon}(z) - x_2^2] d\nu_\psi = -k^2 \psi_0 d\nu_\epsilon, \quad (4)$$

$$d\nu_\psi|_{z=0} = 0.$$

Пренебрегая обратным рассеянием, запишем приближенное решение уравнения (4) в виде бесконечного ряда

$$d\nu_\psi(x, z, x_2) = \frac{ik^2}{2} \sum_n \beta_n^{-1} u_n(z) \int_0^x dx' \int_0^\infty dz' [d\nu_\epsilon(x', z', x_2)] \times$$

$$\times f(z') \exp(ik_1 x') u_n(z') \exp[i\beta_n(x-x')], \quad (5)$$

где $u_n(z)$ — система действительных ортонормированных собственных функций задачи

$$u_n'' + [k^2 \bar{\epsilon}(z) - x_2^2] u_n - \beta_n^2 u_n = 0, \quad (6)$$

$$u_n(0) = 0,$$

экспоненциально убывающих при больших z ; величины β_n^2 суть собственные значения. Очевидно, $u_n(z)$ есть не что иное как высотные множители нормальных волн регулярного волновода, соответствующего случаю $\epsilon(z) = \bar{\epsilon}(z)$. В частности, при $\beta_n^2 = k_1^2 - x_2^2$ решением задачи (6) является $f(z)$ — высотный множитель первичной волны.

При помощи соотношений $\beta_n^2 + x_2^2 = k^2 \bar{\epsilon}(0) \cos^2 \theta_n$ и $k_1^2 = k^2 \bar{\epsilon}(0) \cos^2 \theta_f$ введем θ_n и θ_f — углы скольжения n -й и первичной нормальных волн вблизи границы $z=0$, причем будем предполагать, что $\theta_f, \theta_n \ll 1$. Из указанных соотношений найдем $\beta_n^2 = k_1^2 - x_2^2 + k^2 \bar{\epsilon}(0) (\theta_f + \theta_n) (\theta_f - \theta_n)$. Следует ожидать, что при рассеянии первичной волны на неоднородностях с вертикальным масштабом $l_3 \sim 1/x_3^{\max}$ в основном возбуждаются лишь те нормальные волны, для которых $|\theta_n - \theta_f| \leq x_3^{\max}/k$, поэтому

$$\beta_n^2 = k_1^2 - x_2^2 + \sigma_n, \quad |\sigma_n| \leq 2\theta_f k x_3^{\max} + (x_3^{\max})^2 \ll k_1^2. \quad (7)$$

Если выполнено условие

$$(\sigma_n - x_2^2)^2 x / 8k_1^3 \ll 1, \quad (8)$$

то в аргумент экспоненты в (5) можно подставить $\beta_n = k_1 + (\sigma_n - x_2^2)/2k_1$. Сопоставляя (7) со следующим из (6) соотношением $\beta_n^2 = k^2 \bar{\epsilon}(z_n) - x_2^2$ (z_n — высота точки поворота n -й нормальной волны), найдем $\sigma_n = k^2 \bar{\epsilon}(z_n) - k_1^2 = k^2 s(z_n) = k^2 \dot{s}_n$, поэтому

$$\beta_n = k_1 + (k^2 s_n - \kappa_2^2)/2k_1. \quad (9)$$

Если $2\vartheta_f k \kappa_3^{\max} \gg (\kappa_{2,3}^{\max})^2$, что в случае изомерных неоднородностей среды соответствует условию $\vartheta_f \gg \lambda/l$, то из (8) следует ограничение на расстояние $x \ll l^2/\lambda\vartheta_f^2$. Если $2\vartheta_f k \kappa_3^{\max} \ll (\kappa_{2,3}^{\max})^2$, тогда приходим к известному (см. [1]) ограничению $x \ll l^4/\lambda^2$.

2. Используя решение (5), можно найти как средние квадраты амплитуд вторичных волн [2,3], так и флюктуации амплитуды и фазы полного поля.

Представим флюктуационное поле в виде $\psi_1 = [(1+\delta A/f) \exp(iS_1) - 1] f \exp(ik_1 x)$, где δA и S_1 — соответственно флюктуации амплитуды и фазы. Вне окрестностей нулей функции $f(z)$ при $S_1 \ll 1$ и $\delta A/f = -\chi \ll 1$ можно считать $\psi_1 \approx (\chi + iS_1) f \exp(ik_1 x)$.

Учитывая (9), запишем выражение для $d\nu_\varphi$ — спектральной амплитуды величины $\varphi = \chi + iS_1$, пригодное вне окрестностей нулей $f(z)$:

$$d\nu_\varphi(x, z, \kappa_2) = \frac{ik^2}{2k_1 f(z)} \sum_n u_n(z) \int_0^x dx' \int_0^\infty dz' \times \\ \times [d\nu_e(x', z', \kappa_2)] f(z') u_n(z') \exp\left[\frac{i}{2k_1} (k^2 s_n - \kappa_2^2) (x - x')\right]. \quad (10)$$

Выражение (10) дает возможность найти одномерные спектры флюктуаций уровня F_χ и фазы F_S :

$$F_\chi, S(x, z, \kappa_2) = \frac{(k^2/2k_1)^2}{f^2(z)} \int_0^x \int_0^\infty dx' dx'' \int_0^\infty dz' dz'' f(z') f(z'') \times \\ \times F_e(|x' - x''|, |z' - z''|, \kappa_2) \sum_{m,n} u_m(z) u_n(z) u_m(z') u_n(z'') \times \\ \times \frac{\sin\left[\frac{1}{2k_1} (\kappa_2^2 - k^2 s_m) (x - x')\right]}{\cos\left[\frac{1}{2k_1} (\kappa_2^2 - k^2 s_n) (x - x'')\right]}, \quad (11)$$

где F_e — функция, определяемая соотношением $\overline{d\nu_e(x', z', \kappa_2)} \times \overline{d\nu_e(x'', z'', \kappa_2)} = F_e(|x' - x''|, |z' - z''|, \kappa_2) \delta(x'_2 - x''_2) d\kappa'_2 d\kappa''_2$. Введем переменные $\xi = x' - x''$, $\eta = (x' + x'')/2$ и проинтегрируем (11) по η , считая выполненным условие $|(\kappa_2^2 - k^2 s_n) l/k_1| \ll 1$ (нетрудно видеть, что это условие выполнено при $\lambda \ll l$ и $\vartheta_f \ll 1$):

$$F_\chi, S(x, z, \kappa_2) = \frac{(k^2/2k_1)^2 x}{2f^2(z)} \int_0^\infty dz' dz'' f(z') f(z'') \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi F_e(|\xi|, |z' - z''|, \kappa_2) \sum_{m,n} u_m(z) u_n(z) u_m(z') u_n(z'') \times \\ \times \left\{ \frac{\sin[(s_m - s_n) k^2 x/2k_1]}{(s_m - s_n) k^2 x/2k_1} \mp \frac{\sin[(\kappa_2^2 x/k_1) - (s_m + s_n) k^2 x/2k_1]}{(\kappa_2^2 x/k_1) - (s_m + s_n) k^2 x/2k_1} \right\}. \quad (12)$$

Учитывая то обстоятельство, что $\int_{-\infty}^{\infty} d\xi F_e(|\xi|, |z' - z''|, \kappa_2) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_3 \Phi_e(0, \kappa_2, \kappa_3) \exp[i\kappa_3(z' - z'')]$, где Φ_e — трехмерный спектр флюктуаций $\varepsilon_1, \kappa_2, \kappa_3$ экспонента $[i\kappa_3(z' - z'')]$, где Φ_e — трехмерный спектр флюктуаций $\varepsilon_1, \kappa_2, \kappa_3$ получим

$$F_L s(x, z, x_2) = \frac{(\pi/4) k^2 x}{f^2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} d x_3 \Phi_{\epsilon}(0, x_2, x_3) \sum_{m, n} u_m(z) u_n(z) \times \\ \times a_m(x_3) a_n^*(x_3) \left\{ \frac{\sin [(s_m - s_n) kx/2]}{(s_m - s_n) kx/2} + \frac{\sin [(x_2^2 x/k) - (s_m + s_n) kx/2]}{(x_2^2 x/k) - (s_m + s_n) kx/2} \right\}; \quad (13)$$

$$a_{m, n}(x_3) = \int_0^{\infty} dz f(z) u_{m, n}(z) \exp(i x_3 z). \quad (14)$$

Из (14) видно, что при $|x_3| z_f \ll 1$ в силу ортонормированности функций $u_{m, n}$ имеют место соотношения: $a_{m, n} \approx 0$, если $u_{m, n} \neq f(z)$, и $a_{m, n} \approx 1$, если $u_{m, n} = f(z)$.

Указанные соотношения выражают тот очевидный факт, что неоднородности среды, обладающие большими по сравнению с z_f вертикальными размерами, не порождают рассеяние в вертикальной плоскости в направления, отличные от направления распространения волны Φ_0 , т. е. вносят относительно малый вклад в величину χ^2 . В случае же $\epsilon = \text{const}$ доминирующий вклад в χ^2 с ростом x вносит все более крупномасштабная, т. е. все более интенсивная часть спектра Φ_{ϵ} . Отсюда следует вывод: на достаточном удалении от границы $x = 0$ малые амплитудные флуктуации при сверхрефракции растиут с расстоянием медленнее, чем в случае, когда ϵ не зависит от координат.

Формулы (13), (14) дают решение поставленной в настоящей работе задачи, если предварительно решена задача о регулярном волноводе и найдены функции $a_{m, n}(x_3)$.

3. Предположим, что $\bar{\epsilon}(z) = \bar{\epsilon}(0) - |\bar{\epsilon}'| z$, причем выполнено условие $l \gg \lambda_f$. Обозначим $t_n = -z_n/\lambda_f$, $t_f = -z_f/\lambda_f$ и выразим $u_n(z)$ через функцию Эйри $v(t)$:

$$u_n(z) = v(t_n + z/\lambda_f) / \left[\int_0^{\infty} v^2(t_n + z/\lambda_f) dz \right]^{1/2} \approx \lambda_f^{-1/2} |t_n|^{-1/4} v(t_n + z/\lambda_f). \quad (15)$$

Очевидно, числа t_n суть нули $v(t)$. Учитывая выбранный вид $\bar{\epsilon}(z)$, запишем $s_n = \bar{\epsilon}(0) + t_n/k^2 \lambda_f^2 - k_1^2/k^2$. Напомним, что $s(z_f) = 0$, поэтому $\bar{\epsilon}(0) - k_1^2/k^2 = -t_f/k^2 \lambda_f^2$, откуда следует

$$s_n = (t_n - t_f)/k^2 \lambda_f^2. \quad (16)$$

Займемся отысканием функций $a_{m, n}(x_3)$:

$$a_n^*(x_3) = \int_0^{\infty} dz f(z) u_n(z) \exp(-i x_3 z) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp v_f(p) v_n^*(p - x_3), \quad (17)$$

$$v_f(p) = (1/2\pi) \int_0^{\infty} dz f(z) \exp(-ipz), \quad v_n(p) = (1/2\pi) \int_0^{\infty} dz u_n(z) \exp(-ipz).$$

Используя (15), запишем:

$$v_n(p) = (\lambda_f^{1/2}/2\pi |t_n|^{1/4}) \int_{t_n}^{\infty} dt v(t) \exp[-i\tilde{p}(t-t_n)] \\ (\tilde{p} = p\lambda_f). \quad (18)$$

Можно показать (см. Приложение), что при $|t_n| \geq 3$ справедливо соотношение

$$\int_{t_n}^{\infty} dt v(t) \exp [-i\tilde{p}(t-t_n)] = \begin{cases} \pi^{1/2} \exp [i(\tilde{p}t_n + \tilde{p}^3/3)] & (|\tilde{p}| < |t_n|^{1/2}) \\ 0 & (|\tilde{p}| > |t_n|^{1/2}) \end{cases}. \quad (19)$$

Подставляя (18) и (19) в (17), получим

$$a_n^*(x_3) = \frac{\exp [i(\tilde{x}_3 t_n + \tilde{x}_3^3/3)]}{2|t_f|^{1/4} |t_n|^{1/4}} \int_{\Delta p} d\tilde{p} \exp \{i[\tilde{x}_3 \tilde{p}^2 + (t_f - t_n - \tilde{x}_3^2) \tilde{p}]\}, \quad (20)$$

где $\tilde{x}_3 = x_3 \lambda_f$, Δp — интервал, на котором перекрываются v_f и v_n^* . Если учесть то обстоятельство, что $\tilde{x}_3^{\max} \sim \lambda_f/l \ll 1$, и положить $\tilde{x}_3^2 |t_f|^{1/2} \ll 1$, а также ограничиться числами t_n , такими, что $|t_f|^{1/2} - |t_n|^{1/2} \ll 1$ (см. ниже), тогда

$$a_n^*(x_3) = \frac{\exp (i \tilde{x}_3 t_n)}{2|t_f|^{1/4} |t_n|^{1/4}} \int_{-|t_f|^{1/2}}^{|t_f|^{1/2}} d\tilde{p} \exp \{i[\tilde{x}_3 \tilde{p}^2 + (t_f - t_n) \tilde{p}]\}, \quad (21)$$

откуда после вычисления интеграла следует

$$\begin{aligned} a_n^*(x_3) = & \frac{(\pi/2\tilde{x}_3)^{1/2}}{2|t_f|^{1/4} |t_n|^{1/4}} [(C_n^+ + C_n^-) + i(S_n^+ + S_n^-)] \times \\ & \times \exp \{i[\tilde{x}_3 t_n - (t_f - t_n)^2/4\tilde{x}_3]\}, \\ S_n^{\pm}, C_n^{\pm} = & (2/\pi)^{1/2} \int_0^{r_n^{\pm}} \frac{\sin x^2 dx}{\cos x^2}, \quad r_n^{\pm} = (\tilde{x}_3 |t_f|)^{1/2} \pm (t_f - t_n)/2\tilde{x}_3^{1/2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставив $a_m a_n^*$ в (13) и используя также (15) и (16), получим

$$\begin{aligned} F_{\chi, s}(x, z, x_2) = & \frac{(\pi/4) k^2 x}{v^2(t_f + z/\lambda_f)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x}_3 \Phi_e(0, x_2, \tilde{x}_3) \times \\ & \times \sum_{m, n} \alpha_{mn} v(t_m + z/\lambda_f) v(t_n + z/\lambda_f) \times \\ & \times \left\{ \frac{\sin [(t_m - t_n)x/2k\lambda_f^2]}{(t_m - t_n)x/2k\lambda_f^2} - \frac{\sin [(x_2^2 x/k) + (2t_f - t_m - t_n)x/2k\lambda_f^2]}{(x_2^2 x/k) + (2t_f - t_m - t_n)x/2k\lambda_f^2} \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\alpha_{mn} = \rho_m \rho_n \cos(\gamma_m - \gamma_n),$$

$$\rho_{m, n} = (\pi/8\tilde{x}_3 |t_m, n|)^{1/2} [(C_{m, n}^+ + C_{m, n}^-)^2 + (S_{m, n}^+ + S_{m, n}^-)^2]^{1/2},$$

$$\begin{aligned} \gamma_{m, n} = & \arcsin \{(S_{m, n}^+ + S_{m, n}^-)/[(C_{m, n}^+ + C_{m, n}^-)^2 + \\ & + (S_{m, n}^+ + S_{m, n}^-)^2]^{1/2}\} + \tilde{x}_3 t_{m, n} - (t_f - t_{m, n})^2/4\tilde{x}_3, \end{aligned}$$

В (23) присутствует совокупность коэффициентов $\rho_n(x_3)$, каждый из которых характеризует степень возбуждения n -й нормальной волны неоднородностями с «вертикальным» волновым числом x_3 . Исследование выражения для ρ_n показывает, что при фиксированном x_3 существенно отличными от нуля являются лишь ρ_n , соответствующие числам t_n из интервала

$$|t_f - t_n| \leq 2x_3 |t_f|^{1/2}. \quad (24)$$

Заметим, что для t_n из этого интервала справедливо соотношение $|t_f|^{1/2} - |t_n|^{1/2} \ll 1$, использованное при переходе от (20) к (21). Нетрудно показать, что (24) эквивалентно ограничению (7) на величину $|\sigma_n|$.

По формулам (23) проводился расчет на ЭВМ величины χ^2 в зависимости от расстояния x . Для расчета был выбран следующий пример.

В среде с градиентом $\varepsilon' = -10^{-8} \text{ см}^{-1}$ распространяется первичная волна $\lambda = 0,3 \text{ см}$ ($\lambda_f \approx 60 \text{ см}$) номера $n = 6$ ($z_f \approx 5,5 \text{ м}$). Точка наблюдения находится на высоте $z = 5 \text{ м}$. Предполагается, что спектр Φ_ε имеет вид $\Phi_\varepsilon(x) = [\Gamma(11/6)/\pi^{3/2}\Gamma(1/3)] \varepsilon_1^2 L_0^3 (1 + x^2 L_0^2)^{-11/6}$, где $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $L_0 = 10 \text{ м}$, численный коэффициент в квадратных скобках равен 0,063.

При выводе (23) была использована малость λ_f по сравнению лишь с вертикальными масштабами неоднородностей, поэтому при вычислении χ^2 интегрирование по $x_2, 3$ проводилось в следующих пределах: $0 \leq |x_2| \leq 0,4 \text{ см}^{-1}$, $0 \leq |x_3| \leq 0,02 \text{ см}^{-1}$. Оказалось, что вклад спектрального участка $0 \leq |x_2| \leq 0,2 \text{ см}^{-1}$, $0 \leq |x_3| \leq 0,01 \text{ см}^{-1}$ в вычисленную величину χ^2 меняется от 70% при $x = 1 \text{ км}$ до 98% при $x = 10 \text{ км}$. Следовательно, ограничение интегрирования указанными пределами в данном случае допустимо.

Результаты расчета даны на рис. 1 вместе с вычисленной по формулам [1] величиной χ^2 для случая $\varepsilon = \text{const}$. Как видно из рис. 1, на расстояниях $x \geq 0,5 z^2/\lambda$ амплитудные флуктуации при сверхрефракции растут заметно медленнее, чем в среде с $\varepsilon = \text{const}$.

Автор благодарит С. А. Жевакина за обсуждение результатов, а также И. А. Ракову за проведение расчетов на ЭВМ.

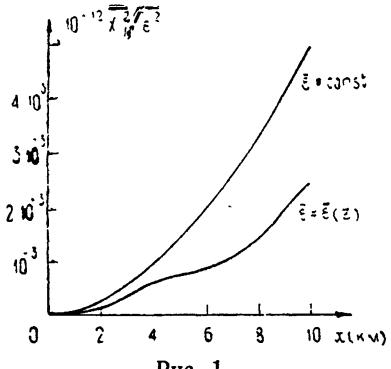


Рис. 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим интеграл

$$R(p, t_n) = \int_{t_n}^{\infty} dt v(t) \exp[-ip(t - t_n)]. \quad (\Pi.1)$$

Можно показать, что $R(p, t_n)$ удовлетворяет уравнению

$$R'_p - i(p^2 + t_n) R = iv'(t_n) - pv(t_n), \quad (\Pi.2)$$

откуда следует

$$R(p, t_n) = [R(0, t_n) + iv'(t_n) I(p, t_n) - iv(t_n) \times$$

$$\times I'_{t_n}(p, t_n)] \exp [i(pt_n + p^3/3)], \quad (\text{П.3})$$

$$I(p, t_n) = \int_0^p dx \exp [-i(xt_n + x^3/3)].$$

Интеграл $I(p, t_n)$ в свою очередь удовлетворяет уравнению

$$I''_{t_n} - t_n I + iI'_p = i, \quad (\text{П.4})$$

решение которого, обращающееся в нуль при $p = 0$, запишем в виде

$$I(p, t_n) = -i\pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} v(t_n - t) [1 - \exp(-ipt)]. \quad (\text{П.5})$$

Подставим (П.5) в (П.3) и учтем, что $v(t_n) = 0$:

$$R(p, t_n) = \left\{ R(0, t_n) + \pi^{-1/2} v'(t_n) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} v(t_n - t) \times \right. \\ \left. \times [1 - \exp(-ipt)] \right\} \exp [i(pt_n + p^3/3)]. \quad (\text{П.6})$$

Считая $|t_n|$ достаточно большим, воспользуемся вблизи $t = 0$ асимптотическим выражением для функции $v(t_n - t)$:

$$v(t_n - t) = (t - t_n)^{-1/4} \cos \left[\frac{2}{3} (t - t_n)^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (\text{П.7})$$

Преобразуем (П.7) вблизи $t = 0$ следующим образом: положим $(t - t_n)^{-1/4} \approx |t_n|^{-1/4}$, а фазу разложим в степенной ряд и ограничимся линейным членом, т. е. $(2/3)(t - t_n)^{3/2} \approx (2/3)|t_n|^{3/2} + |t_n|^{1/2}t$. Подставляя получившееся выражение в (П.6), найдем

$$R(p, t_n) = \left\{ R(0, t_n) - \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} \sin(|t_n|^{1/2}t) \times \right. \\ \left. \times [1 - \exp(-ipt)] \right\} \exp [i(pt_n + p^3/3)]. \quad (\text{П.8})$$

Основной вклад в интеграл, входящий в (П.8), вносит область $|t| \leq \pi|t_n|^{-1/2}$, поэтому (П.8) справедливо, если при $|t| = \pi|t_n|^{-1/2}$ приближенное выражение для фазы в (П.7), использованное при переходе от (П.6) к (П.8), мало отличается от точного, т. е.

$$\frac{2}{3} (|t_n| \mp \pi|t_n|^{-1/2})^{3/2} - \frac{2}{3} |t_n|^{3/2} \mp \pi \ll 1. \quad (\text{П.9})$$

Численный расчет показывает, что (П.9) выполняется при $|t_n| \gtrsim 3$.

Считая, что при $|t_n| \gtrsim 3$ выполняется $R(0, t_n) \approx \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt = \pi^{1/2}$, получим из (П.8)

$$R(p, t_n) = \pi^{-1/2} \exp [i(pt_n + p^3/3)] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t} \sin(|t_n|^{1/2}t) \cos(pt). \quad (\text{П.10})$$

Интегральный множитель в (П.10), просто связанный с разрывным множителем Дирихле [4], отличен от нуля лишь в интервале $|p| \leq |t_n|^{1/2}$ и равен π при $|p| < |t_n|^{1/2}$ и $\pi/2$ при $|p| = |t_n|^{1/2}$, следовательно

$$R(p, t_n) = \begin{cases} \pi^{1/2} \exp[i(pt_n + p^3/3)] & (|p| < |t_n|^{1/2}) \\ 0 & (|p| > |t_n|^{1/2}) \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. М. А. Исаакович, Акуст. ж., 3, 37 (1957).
3. А. Д. Лапин, Акуст. ж., 4, 267 (1958).
4. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, Гостехиздат, М.—Л., 1949.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
15 февраля 1971 г.

ON PARAMETER FLUCTUATIONS OF A NORMAL WAVE AT SUPERREFRACTION

M. B. Kanevskii

By the small perturbation method expressions have been derived for one-dimensional spectra of level and phase fluctuations of a normal wave, propagating in a randomly inhomogeneous medium in the presence of superrefraction. It is shown that at the superrefraction small amplitude fluctuations increase with the distance more slowly than in the case when the mean dielectric permittivity of the medium is independent of the coordinates.

УДК 538.56 : 519.25

**НОВЫЙ МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ
В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СРЕДЕ
СО СЛУЧАЙНЫМИ КРУПНОМАСШТАБНЫМИ
НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

B. И. Кляцкин, B. И. Татарский

Задача о распространении электромагнитных волн в среде со случайными крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями рассматривается на основе скалярного параболического уравнения. Развивается метод последовательных приближений, в котором приближение марковского случайного процесса [2—6] играет роль первого шага. На основе следующего приближения рассматривается вопрос о границах применимости марковского приближения. Развитый в работе метод может быть полезен и для других задач, сводящихся к стохастическим дифференциальным уравнениям с параметрической зависимостью от случайной функции.

1. ВВЕДЕНИЕ

При распространении электромагнитных волн в среде со случайными крупномасштабными (по сравнению с длиной волны) неоднородностями из-за эффекта многократного рассеяния вперед флюктуации волнового поля быстро нарастают с расстоянием. Начиная с некоторого расстояния, становятся непригодными расчеты флюктуаций по теории возмущений в той или иной ее форме. Этот эффект был экспериментально обнаружен Грачевой и Гурвичем [1] в опытах по распространению света в турбулентной атмосфере. В последнее время появился ряд работ, в которых различными методами получены уравнения, позволяющие описывать и область сильных флюктуаций поля [2—10]. Метод получения этих уравнений, применявшийся в работах [2—7], основывался на замене реальной корреляционной функции флюктуаций диэлектрической проницаемости на дельта-функцию вдоль направления распространения, что приводило к возможности описывать процесс распространения волны как марковский случайный процесс. В упомянутом марковском приближении для всех моментов случайного волнового поля удается получить замкнутые дифференциальные уравнения, а для характеристического функционала — уравнение типа Эйнштейна — Фоккера.

В настоящей работе развивается метод последовательных приближений, в котором марковское приближение играет роль первого шага. Вначале составляются уравнения для моментов поля, образующие бесконечную зацепляющуюся цепочку (для каждого из моментов). Замена корреляционной функции флюктуаций диэлектрической проницаемости на дельта-функцию вдоль направления распространения позволяет замкнуть эту цепочку уравнений. Если такая замена производится уже в первом уравнении, то мы приходим к упоминавшемуся выше марковскому приближению. Если же в первых $(n-1)$ уравнениях цепочки оставить реальную корреляционную функцию, а замену произвести в n -м уравнении, то можно получить для каждого из моментов систему

n связанных уравнений. Аналогичная процедура может быть применена и к уравнению для характеристического функционала.

В работе рассматривается простой пример, допускающий точное решение, из которого можно сделать вывод, что последующие приближения довольно быстро сходятся к точному решению, если выполняются некоторые ограничения на параметры задачи. На основе следующего приближения рассматривается также вопрос о границах применимости марковского приближения.

Следует отметить также, что развиваемый метод может оказаться полезным и для других задач, сводящихся к стохастическим дифференциальным уравнениям с параметрической зависимостью от случайной функции.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ МОМЕНТОВ И УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА

Распространение электромагнитной волны мы будем описывать в приближении квазиоптики при помощи параболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, \rho) = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} u + i \frac{k}{2} \tilde{\epsilon}(x, \rho) u(x, \rho). \quad (1)$$

Здесь x — продольная и ρ — поперечная координаты по отношению к первоначальному направлению распространения волны (в дальнейшем будем обозначать $\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \Delta$), u — комплексная амплитуда, связанная с компонентой E_y электрического поля соотношением $E_y = u(x, \rho) \times \times \exp(i k x - i \omega t)$, $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\langle \epsilon \rangle}$, $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon - \langle \epsilon \rangle}{\langle \epsilon \rangle}$ — флукутирующая

часть диэлектрической проницаемости. Скалярное параболическое уравнение (1) является достаточно хорошим приближением при описании распространения света в среде со случайными неоднородностями, когда можно пренебречь обратным рассеянием [4, 11]. К уравнению (1) добавляется начальное условие

$$u(0, \rho) = u_0(\rho). \quad (2)$$

Мы будем предполагать, что $\tilde{\epsilon}(x, \rho)$ — гауссова случайная функция. В этом случае справедлива формула Фуруцу — Новикова [12, 13] для корреляции гауссовой случайной функции с функционалом от нее:

$$\langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) R[\tilde{\epsilon}] \rangle = \int dx' \int d\rho' \langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) \tilde{\epsilon}(x', \rho') \rangle \left\langle \frac{\delta R}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} \right\rangle. \quad (3)$$

Интегрирование в (3) распространено на всю область, где вариационная производная отлична от нуля.

Так как начальное условие к (1) ставится при $x = 0$, то решение (1), которое можно записать, например, при помощи ряда теории возмущений, содержит в выражении для $u(x, \rho)$ лишь «предшествующие» значения $\tilde{\epsilon}(\xi, \rho')$ при $0 \ll \xi \ll x$. Отсюда следует, что

$$\frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} = 0 \quad \text{при } x' > x \text{ и } x' < 0. \quad (4)$$

Усредним уравнение (1). При этом возникает величина $\langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) u(x, \rho) \rangle$. Так как u — функционал от $\tilde{\epsilon}$, то для вычисления этого члена можно

использовать (3), где пределы интегрирования по x поставлены в соответствии с (4). В результате получаем уравнение для $\langle u(x, \rho') \rangle \equiv \bar{u}(x, \rho)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_p \right) \bar{u} = i \frac{k}{2} \int_0^x dx' \int d\rho' B_\epsilon(x, \rho; x', \rho') \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} \right\rangle. \quad (5)$$

Здесь и далее используется обозначение $B_\epsilon(x, \rho; x', \rho') = \langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) \tilde{\epsilon}(x', \rho') \rangle$ для корреляционной функции флюктуаций диэлектрической проницаемости. Из (2) следует начальное условие к (5):

$$\bar{u}(0, \rho) = u_0(\rho). \quad (5a)$$

В уравнении (5) появляется новая неизвестная функция — вариационная производная от u по $\tilde{\epsilon}$. Чтобы получить уравнение и для нее, подействуем на (1) оператором $\delta/\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')$, где $x' < x$, а затем произведем усреднение. Получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_p \right) \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} \right\rangle = i \frac{k}{2} \left\langle \tilde{\epsilon}(x, \rho) \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} \right\rangle.$$

Последнее слагаемое опять можно найти при помощи (3), полагая $R = \delta u / \delta \tilde{\epsilon}$. В результате имеем уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_p \right) \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} \right\rangle &= i \frac{k}{2} \int_0^x dx'' \int d\rho'' B_\epsilon(x, \rho; x'', \rho'') \times \\ &\times \left\langle \frac{\delta^2 u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho') \delta \tilde{\epsilon}(x'', \rho'')} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) справедливо при $x > x'$. В точке $x = x'$ к нему следует добавить начальное условие. Чтобы получить его, проинтегрируем (1) в пределах $(0, x)$, а затем подействуем на получившееся уравнение оператором $\delta/\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} &= i \frac{k}{2} \delta(\rho - \rho') u(x', \rho') + \int_0^x d\xi \left[\frac{i}{2k} \Delta_p + \right. \\ &\left. + i \frac{k}{2} \tilde{\epsilon}(\xi, \rho) \right] \frac{\delta u(\xi, \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')}. \end{aligned}$$

Но в силу (4) нижний предел интегрирования в этой формуле можно заменить на x' . Полагая затем $x = x'$, мы обращаем интеграл в нуль и получаем формулу

$$\frac{\delta u(x', \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} = i \frac{k}{2} \delta(\rho - \rho') u(x', \rho'). \quad (7)$$

Начальное условие к (6) мы получим, усредняя (7):

$$\left\langle \frac{\delta u(x', \rho)}{\delta \tilde{\epsilon}(x', \rho')} \right\rangle = i \frac{k}{2} \delta(\rho - \rho') \bar{u}(x', \rho'). \quad (8)$$

В правой части (6) снова появляется новая неизвестная функция, для которой мы снова можем получить уравнение и т. д. Таким образом, уравнения (5), (6) и т. д. образуют зацепляющуюся бесконечную систему уравнений. Начальные условия к последующим уравнениям можно получить вариационным дифференцированием (7) и последующим усреднением. Например, при $x'' < x'$ получаем

$$\left\langle \frac{\delta^2 u(x', p)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x'', p'') \delta \tilde{\varepsilon}(x', p')} \right\rangle = i \frac{k}{2} \delta(p - p') \left\langle \frac{\delta u(x', p')}{\delta \tilde{\varepsilon}(x'', p'')} \right\rangle. \quad (9)$$

Отметим, что начальное условие к n -му уравнению содержит функцию, входящую в $(n-1)$ -е уравнение.

Аналогичным образом можно получить и уравнение для моментов более высокого порядка. Пусть, например,

$$\gamma_2(x, p_1, p_2) = u(x, p_1) u^*(x, p_2).$$

Умножая уравнение (1) на $u^*(x, p_2)$, а затем уравнение для u^* — на $u(x, p_1)$ и складывая, получим $\left(\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial p_i^2} \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \gamma_2(x, p_1, p_2) = \frac{i}{2k} (\Delta_1 - \Delta_2) \gamma_2 + i \frac{k}{2} [\tilde{\varepsilon}(x, p_1) - \tilde{\varepsilon}(x, p_2)] \gamma_2. \quad (10)$$

Применяя к уравнению (10) ту же процедуру, которая была использована выше, получим уравнение для функции взаимной когерентности $\Gamma_2(x, p_1, p_2) = \langle \gamma_2 \rangle = \langle u(x, p_1) u^*(x, p_2) \rangle$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} (\Delta_1 - \Delta_2) \right] \Gamma_2 = i \frac{k}{2} \int_0^x dx' \int d p' [B_\varepsilon(x, p_1; x', p') - B_\varepsilon(x, p_2; x', p')] \langle \delta \gamma_2(x, p_1, p_2) / \delta \tilde{\varepsilon}(x', p') \rangle. \quad (11)$$

В области $x > x'$ имеет место уравнение

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} (\Delta_1 - \Delta_2) \right] \left\langle \frac{\delta \gamma_2(x, p_1, p_2)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', p')} \right\rangle &= i \frac{k}{2} \int_0^x dx'' \int d p'' \times \\ &\times [B_\varepsilon(x, p_1; x'', p'') - B_\varepsilon(x, p_2; x'', p'')] \left\langle \frac{\delta^2 \gamma_2(x, p_1, p_2)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', p') \delta \tilde{\varepsilon}(x'', p'')} \right\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

и т. д. К уравнению (11) добавляется начальное условие

$$\Gamma_2(0, p_1, p_2) = u_0(p_1) u_0^*(p_2). \quad (13)$$

Начальные условия к (12) и последующим уравнениям легко получить с использованием (7). Они имеют вид

$$\left\langle \frac{\delta \gamma_2(x', p_1, p_2)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', p')} \right\rangle = i \frac{k}{2} [\delta(p_1 - p') - \delta(p_2 - p')] \Gamma_2(x', p_1, p_2); \quad (14)$$

$$\left\langle \frac{\delta^2 \gamma_2(x'', p_1, p_2)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', p') \delta \tilde{\varepsilon}(x'', p'')} \right\rangle = i \frac{k}{2} [\delta(p_1 - p'') - \delta(p_2 - p'')] \times \\ \times \left\langle \frac{\delta \gamma_2(x'', p_1, p_2)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', p')} \right\rangle \quad \text{при } x'' > x'$$
(15)

и т. д.

Заметим, что вся совокупность уравнений для какого-либо момента может быть записана в виде одного уравнения с вариационными производными. Мы не будем выписывать этих уравнений, а выведем уравнение для характеристического функционала поля w , из которого будут следовать все уравнения для моментов.

Рассмотрим вспомогательное уравнение для функции $w(x, p)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta \right) w(x, p) = i \frac{k}{2} [\tilde{\varepsilon}(x, p) + \varphi(x, p)] w(x, p) \quad (16)$$

с начальным условием

$$w(0, p) = u_0(p). \quad (16a)$$

Уравнение (16) отличается от (1) введением новой произвольной детерминированной функции $\varphi(x, p)$. Ясно, что w — функционал от $(\tilde{\varepsilon} + \varphi)$:

$$w = w[x, p; \tilde{\varepsilon} + \varphi].$$

Отсюда вытекает равенство

$$\frac{\delta w(x, p)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', p')} = \frac{\delta w(x, p)}{\delta \varphi(x', p')}. \quad (17)$$

Введем случайные функционалы:

$$F_x[v, v^*, \varphi] = \int d\rho [w(x, p)v(\rho) + w^*(x, p)v^*(\rho)]; \quad (18)$$

$$f_x[v, v^*] = F_x[v, v^*, 0] = \int d\rho [u(x, p)v(\rho) + u^*(x, p)v^*(\rho)], \quad (18a)$$

а также характеристические функционалы для w и u :

$$\Psi_x[v, v^*, \varphi] \equiv \langle \exp(iF_x) \rangle; \quad (19)$$

$$\Phi_x[v, v^*] = \Psi_x[v, v^*, 0] = \langle \exp(if_x) \rangle. \quad (19a)$$

Дифференцируя (19) по x и используя (16), а также комплексно-сопряженное к (16) уравнение, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_x &= i \int d\rho \left\{ v(\rho) \left[\frac{i}{2k} \Delta + i \frac{k}{2} \varphi(x, p) \right] \langle w(x, p) \times \right. \\ &\times \exp(iF_x) \rangle - v^*(\rho) \left[\frac{i}{2k} \Delta + i \frac{k}{2} \varphi(x, p) \right] \langle w^*(x, p) \exp(iF_x) \rangle \Big\} - \\ &- \frac{k}{2} \int d\rho \{ v(\rho) \langle \tilde{\varepsilon}(x, p) w(x, p) \exp(iF_x) \rangle - \\ &- v^*(\rho) \langle \tilde{\varepsilon}(x, p) w^*(x, p) \exp(iF_x) \rangle \}. \end{aligned} \quad (20)$$

Применяя к (19) операторы $\delta/\delta v(\rho)$, $\delta/\delta v^*(\rho)$, получим соотношения

$$\begin{aligned}\langle w(x, \rho) \exp(iF_x) \rangle &= \frac{1}{i} \frac{\delta \Psi_x}{\delta v(\rho)}, \\ \langle w^*(x, \rho) \exp(iF_x) \rangle &= \frac{1}{i} \frac{\delta \Psi_x}{\delta v^*(\rho)},\end{aligned}\quad (21)$$

позволяющие выразить входящие в (20) члены $\langle w \exp(iF_x) \rangle$, $\langle w^* \exp(iF_x) \rangle$ через Ψ . Рассмотрим теперь выражение $\langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho) \exp(iF_x) \rangle$. Применяя формулу (3), найдем

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho) \exp(iF_x) \rangle = \int_0^x dx' \int d\rho' B_\varepsilon(x, \rho; x', \rho') \left\langle \frac{\delta \exp(iF_x)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', \rho')} \right\rangle.$$

Но так как F_x зависит от $\tilde{\varepsilon}$ только через w , то, используя (17), получим

$$\left\langle \frac{\delta \exp(iF_x)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', \rho')} \right\rangle = \left\langle \frac{\delta \exp(iF_x)}{\delta \varphi(x', \rho')} \right\rangle = \frac{\delta \Psi_x}{\delta \varphi(x', \rho')},$$

так что

$$\langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho) \exp(iF_x) \rangle = \int_0^x dx' \int d\rho' B_\varepsilon(x, \rho; x', \rho') \frac{\delta \Psi_x}{\delta \varphi(x', \rho')}. \quad (22)$$

Применяя к (22) операторы $\delta/\delta v(\rho)$, $\delta/\delta v^*(\rho)$, найдем

$$\begin{aligned}i \langle \tilde{\varepsilon}(x, \rho) w(x, \rho) \exp(iF_x) \rangle &= \int_0^x dx' \int d\rho' B_\varepsilon(x, \rho; x', \rho') \times \\ &\times \frac{\delta^2 \Psi_x}{\delta v(\rho) \delta \varphi(x', \rho')}\end{aligned}\quad (23)$$

и аналогичное комплексно-сопряженное равенство. Подставляя (23) и (21) в (20), получим уравнение для характеристического функционала Ψ_x :

$$\begin{aligned}\frac{1}{i} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} &= \int d\rho \left\{ v(\rho) \left[\frac{1}{2k} \Delta + \frac{k}{2} \varphi(x, \rho) \right] \frac{\delta \Psi_x}{\delta v(\rho)} - \right. \\ &- v^*(\rho) \left[\frac{1}{2k} \Delta + \frac{k}{2} \varphi(x, \rho) \right] \frac{\delta \Psi_x}{\delta v^*(\rho)} \left. \right\} + \\ &+ \frac{k}{2} \int_0^x dx' \int d\rho' B_\varepsilon(x, \rho; x', \rho') \hat{M}(\rho) \frac{\delta \Psi_x}{\delta \varphi(x', \rho')},\end{aligned}\quad (24)$$

где введен эрмитов оператор

$$\hat{M}(\rho) = v(\rho) \frac{\delta}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \frac{\delta}{\delta v^*(\rho)}.$$

Важной особенностью уравнения (24) является его однородность по v : каждая операция вариационного дифференцирования по v (или v^*) сопровождается умножением на v (или v^*). Это позволяет получить из

(24) уравнения для моментов поля u . Интересующий нас характеристический функционал Φ_x можно получить из Ψ_x , полагая $\varphi = 0$.

Отметим, что уравнение (24), как и уравнения для моментов, являются точными следствиями исходного уравнения (1) и предположения о гауссовом распределении для ε . В то же время форма этих уравнений естественно допускает переход к уравнению Эйнштейна — Фоккера и соответствующим уравнениям марковского приближения для моментов.

3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Переход к марковскому приближению эквивалентен замене реальной корреляционной функции B_ε на эффективную корреляционную функцию

$$B_\varepsilon^{\text{эфф}}(x, p; x', p') = \delta(x - x') A(x'; p, p'). \quad (25)$$

Вид функции A определяется из требования, чтобы интегралы по x от B_ε и $B_\varepsilon^{\text{эфф}}$ совпадали:

$$A(x'; p, p') = \int_{-\infty}^{\infty} dx B_\varepsilon(x, p; x', p'). \quad (26)$$

Зависимость A от x' исчезает, если B_ε зависит от $x - x'$, т. е. в случае статистической однородности ε , что мы и будем предполагать в дальнейшем. В этом случае

$$A(p, p') = A(p - p').$$

Подставляя (25) в (5), выполняя интегрирование по x' с учетом четности δ -функции, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta \right) \bar{u}_{(1)} = i \frac{k}{4} \int d p' A(p - p') \left\langle \frac{\delta u(x, p)}{\delta \varepsilon(x, p')} \right\rangle. \quad (27)$$

В правой части (27) появляется $\langle \delta u / \delta \varepsilon \rangle$ при совпадающих значениях x . Но именно эта величина была найдена выше как начальное условие (8) к уравнению (6). Подставляя (8) в (27), получаем уравнение первого (марковского) приближения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta \right) \bar{u}_{(1)} = - \frac{k^2}{8} A(0) \bar{u}_{(1)}. \quad (28)$$

Точно так же могут быть получены уравнения первого приближения и для остальных моментов.

Покажем, что уравнение (24) при подстановке в него (25) переходит в уравнение типа Эйнштейна — Фоккера, полученное в [2]. Выполняя интегрирование по x' и полагая затем $\varphi = 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} &= \frac{1}{2k} \int d p \left\{ v(p) \Delta \frac{\delta \Phi_x}{\delta v(p)} - v^*(p) \Delta \frac{\delta \Phi_x}{\delta v^*(p)} \right\} + \\ &+ \frac{k}{4} \int d p d p' A(p - p') \hat{M}(p) \left[\frac{\delta \Psi_x}{\delta \varphi(x, p)} \right]_{\varphi=0}. \end{aligned}$$

Значение производной по φ может быть найдено при помощи (17), (7) и (21);

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\delta \Psi_x}{\delta \varphi(x, p')} \right]_{\varphi=0} &= \left\langle \frac{\delta \exp(iF_x)}{\delta \varphi(x, p')} \right\rangle_{\varphi=0} = \left\langle \frac{\delta \exp(iF_x)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x, p')} \right\rangle_{\varphi=0} = \\
 &= \left\langle \frac{\delta \exp(if_x)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x, p')} \right\rangle = \left\langle i \exp(if_x) - \frac{\delta f_x}{\delta \tilde{\varepsilon}(x, p')} \right\rangle = \\
 &= \left\langle i \exp(if_x) \int d\rho \left[v(\rho) \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x, p')} + v^*(\rho) \frac{\delta u^*(x, \rho)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x, p')} \right] \right\rangle = \quad (29) \\
 &= -\frac{k}{2} \langle \exp(if_x) [v(p') u(x, p') - v^*(p') u^*(x, p')] \rangle = \\
 &\quad = i \frac{k}{2} \hat{M}(p') \Phi_x.
 \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} &= \frac{i}{2k} \int d\rho \left\{ v(\rho) \Delta \frac{\delta \Phi_x}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \Delta \frac{\delta \Phi_x}{\delta v^*(\rho)} \right\} - \\
 &\quad - \frac{k^2}{8} \int d\rho d\rho' A(\rho - \rho') \hat{M}(\rho) \hat{M}(\rho') \Phi_x,
 \end{aligned} \quad (30)$$

что совпадает с полученным в [2] уравнением. Из (30) можно получить замкнутые уравнения для любых моментов поля u [2, 3].

Следующее приближение может быть получено, если замену B_ϵ на $B_\epsilon^{\text{эфф}}$ при вычислении \bar{u} произвести не в уравнении (5), а в (6), оставляя в (5) точное значение B_ϵ . Это приводит к уравнению

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_p \right) \left\langle \frac{\delta u(x, p)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', p')} \right\rangle &= \frac{ik}{4} \int d\rho'' A(\rho - \rho'') \times \\
 &\times \left\langle \frac{\delta^2 u(x, p)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', p') \delta \tilde{\varepsilon}(x, p'')} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Используя формулу (9), получим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta_p \right) \left\langle \frac{\delta u(x, p')}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', p')} \right\rangle = -\frac{k^2}{8} A(0) \left\langle \frac{\delta u(x, p)}{\delta \tilde{\varepsilon}(x', p')} \right\rangle, \quad (31)$$

справедливое при $x > x'$ с начальным условием (8) при $x = x'$. Уравнения (5) и (31) образуют замкнутую систему уравнений второго приближения для u .

Аналогичным образом можно получить уравнения второго приближения для любых моментов. Мы сделаем это, получив сначала второе приближение для характеристического функционала.

Положим в уравнении (24) $\varphi = 0$ и обозначим

$$\left[\frac{\delta \Psi_x}{\delta \varphi(x', p')} \right]_{\varphi=0} = \Theta[x; x', p', v, v^*]. \quad (32)$$

Тогда (24) принимает вид

$$\frac{1}{i} \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} = \frac{1}{2k} \int d\rho \left\{ v(\rho) \Delta \frac{\delta \Phi_x}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \Delta \frac{\delta \Phi_x}{\delta v^*(\rho)} \right\} + \\ + \frac{k}{2} \int_0^x dx' \int d\rho d\rho' B_e(x, \rho; x', \rho') \hat{M}(\rho) \Theta[x; x', \rho', v, v^*]. \quad (33)$$

Чтобы получить уравнение для Θ , подействуем на (24) оператором $\delta/\delta\varphi(x'', \rho'')$, где $x'' < x$, и после этого положим $\varphi = 0$. В результате получим

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Theta[x; x'', \rho'', v, v^*] = \frac{1}{2k} \int d\rho \left\{ v(\rho) \Delta \frac{\delta \Theta}{\delta v(\rho)} - \right. \\ \left. - v^*(\rho) \Delta \frac{\delta \Theta}{\delta v^*(\rho)} \right\} + \frac{k}{2} \int_0^x dx' \int d\rho d\rho' B_e(x, \rho; x', \rho') \hat{M}(\rho) \times \quad (34) \\ \times \left[\frac{\delta^2 \Psi_x}{\delta \varphi(x', \rho') \delta \varphi(x'', \rho'')} \right]_{\varphi=0}.$$

Используем теперь замену B_e на $B_e^{\text{эфф}}$ в уравнении (34). Тогда последнее слагаемое примет вид

$$\frac{k}{4} \int d\rho d\rho' A(\rho - \rho') \hat{M}(\rho) \left[\frac{\delta^2 \Psi_x}{\delta \varphi(x'', \rho'') \delta \varphi(x, \rho')} \right]_{\varphi=0}. \quad (35)$$

Значение второй вариационной производной при $x' = x$ может быть найдено аналогично найденному выше выражению (29). Опуская выкладки, приведем результат

$$\left[\frac{\delta^2 \Psi_x}{\delta \varphi(x'', \rho'') \delta \varphi(x, \rho')} \right]_{\varphi=0} = i \frac{k}{2} \hat{M}(\rho') \Theta. \quad (36)$$

Подставляя (36), (35) в (34), получаем уравнение для Θ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta[x; x'', \rho'', v, v^*] = \frac{i}{2k} \int d\rho \left\{ v(\rho) \Delta \frac{\delta \Theta}{\delta v(\rho)} - v^*(\rho) \Delta \frac{\delta \Theta}{\delta v^*(\rho)} \right\} - \quad (37) \\ - \frac{k^2}{8} \int d\rho d\rho' A(\rho - \rho') \hat{M}(\rho) \hat{M}(\rho') \Theta[x; x'', \rho'', v, v^*].$$

В (37) предполагается, что $x > x''$. В точке $x = x''$ к (37) добавляется начальное условие, вытекающее из (32) и (29):

$$\Theta[x''; x'', \rho'', v, v^*] = i \frac{k}{2} \hat{M}(\rho'') \Phi_{x''}[v, v^*]. \quad (38)$$

Уравнения (33), (37) образуют систему уравнений второго приближения. Из них можно получить систему уравнений для моментов поля u . Для этого будем искать решение уравнений в виде рядов:

$$\Phi_x[v, v^*] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{n+m}}{n! m!} \int \dots \int d\rho_1 \dots d\rho_n d\rho'_1 \dots d\rho'_m \times \quad (39) \\ \times M_{n, m}(x; \rho_1, \dots, \rho'_m) v(\rho_1) \dots v(\rho_n) v^*(\rho'_1) \dots v^*(\rho'_m);$$

$$\Theta [x; x_0, \rho_0, v, v^*] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{n+m}}{n! m!} \int \dots \int d\rho_1 \dots d\rho'_m \times \\ \times q_{n,m}(x; x_0, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho'_m) v(\rho_1) \dots v(\rho_n) v^*(\rho'_1) \dots v^*(\rho'_m). \quad (40)$$

Так как все дифференциальные операторы $\delta/\delta v$, $\delta/\delta v^*$, входящие в (33) и (37), сопровождаются умножением на v , v^* , то при действии этих операторов на степенные функционалы мы получаем функционалы той же степени. В результате для каждого из слагаемых из (39) и (40) получаются независимые уравнения. Они имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} M_{n,m} = \frac{i}{2k} [\Delta_1 + \dots + \Delta_n - \Delta'_1 - \dots - \Delta'_m] M_{n,m} + \\ + i \frac{k}{2} \int_0^x dx_0 \int d\rho_0 \left[\sum_{j=1}^n B_\epsilon(x, \rho_j; x_0, \rho_0) - \sum_{l=1}^m B_\epsilon(x, \rho'_l; x_0, \rho_0) \right], \\ q_{n,m}(x; x_0, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho'_m). \quad (41)$$

Начальное условие к (41) ставится при $x = 0$:

$$M_{n,m}(0, \rho_1, \dots, \rho'_m) = u_0(\rho_1) \dots u_0(\rho_n) u_0^*(\rho'_1) \dots u_0^*(\rho'_m). \quad (42)$$

Для $q_{n,m}$ получаем уравнение в области $x > x_0$:

$$\frac{\partial}{\partial x} q_{n,m} = \frac{i}{2k} [\Delta_1 + \dots + \Delta_n - \Delta'_1 - \dots - \Delta'_m] q_{n,m} - \frac{k^2}{8} Q_{n,m}(\rho_1, \dots, \rho'_m) q_{n,m}, \quad (43)$$

где

$$Q_{n,m} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(\rho_i - \rho_j) - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m A(\rho_i - \rho'_l) + \sum_{l=1}^m \sum_{p=1}^m A(\rho'_l - \rho_p). \quad (44)$$

Начальное условие к (43), вытекающее из (38), имеет вид

$$q_{n,m}(x_0; x_0, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho'_m) = i \frac{k}{2} \left[\sum_{j=1}^n \delta(\rho_j - \rho_0) - \sum_{l=1}^m \delta(\rho'_l - \rho_0) \right] M_{n,m}(x_0, \rho_1, \dots, \rho'_m). \quad (45)$$

Рассмотренные выше уравнения второго приближения для u являются частным случаем (41), (43) при $n = 1$, $m = 0$. При $n = 1$, $m = 1$ получим следующее уравнение второго приближения для функции взаимной когерентности $\Gamma_2(x, \rho_1, \rho_2) = \bar{M}_{1,1} = \langle u(x, \rho_1) u^*(x, \rho_2) \rangle$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_2 = \frac{i}{2k} (\Delta_1 - \Delta_2) \Gamma_2 + i \frac{k}{2} \int_0^x dx_0 \int d\rho_0 [B_\epsilon(x, \rho_1; x_0, \rho_0) - \\ - B_\epsilon(x, \rho_2; x_0, \rho_0)] q_{1,1}(x; x_0, \rho_0, \rho_1, \rho_2), \quad (46)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} q_{1,1} = \frac{i}{2k} (\Delta_1 - \Delta_2) q_{1,1} - \frac{k^2}{4} [A(0) - A(\rho_1 - \rho_2)] q_{1,1} \quad (x > x_0), \\ q_{1,1}(x_0; x_0, \rho_0, \rho_1, \rho_2) = i \frac{k}{2} [\delta(\rho_1 - \rho_0) - \delta(\rho_2 - \rho_0)] \Gamma_2(x_0, \rho_1, \rho_2). \quad (47)$$

Решение уравнений второго приближения и их сравнение с решением первого приближения будут рассмотрены ниже. Из приведенного вывода уравнений второго приближения ясно также, каким образом можно получить и более высокие приближения.

4. ПРИМЕР, ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЙ СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В качестве примера, допускающего точное решение, рассмотрим уравнение, отличающееся от (1) отсутствием члена Δu (приближение геометрической оптики):

$$\frac{du}{dx} = i \frac{k}{2} \tilde{\epsilon}(x) u(x).$$

Решение этого уравнения с начальным условием $u(0) = u_0$ имеет вид

$$u(x) = u_0 \exp \left\{ i \frac{k}{2} \int_0^x d\xi \tilde{\epsilon}(\xi) \right\}.$$

Так как $\tilde{\epsilon}$ — гауссова функция, то и интеграл от нее является гауссовой случайной величиной. Используя формулу

$$\langle \exp \{iz\} \rangle = \exp \left\{ i \langle z \rangle - \frac{1}{2} [\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2] \right\},$$

получим

$$\bar{u}(x) = u_0 \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} \int_0^x d\xi_1 d\xi_2 B_\epsilon(\xi_1, \xi_2) \right\}.$$

Если $B_\epsilon(\xi_1, \xi_2) = B_\epsilon(\xi_1 - \xi_2)$, то

$$\bar{u}(x) = u_0 \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi (x - \xi) B_\epsilon(\xi) \right\}.$$

Решение задачи в первом приближении марковского процесса имеет вид

$$\bar{u}_1(x) = u_0 \exp \left\{ -\frac{k^2 x}{4} \int_0^\infty d\xi B_\epsilon(\xi) \right\}.$$

Решая систему уравнений второго приближения, можно свести задачу к следующему интегродифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dx} \bar{u}_2 = -\frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi \bar{u}_2(\xi) B_\epsilon(x - \xi) \exp \left\{ -\frac{k^2}{4}(x - \xi) \int_0^\infty d\xi' B_\epsilon(\xi') \right\}.$$

Последнее уравнение легко решается преобразованием Лапласа. Если, например, $B_\epsilon(\xi) = \sigma_\epsilon^2 \exp(-\alpha|\xi|)$, то точное решение, первое и второе приближение имеют соответственно вид

$$\bar{u}(x) = u_0 \exp \{ -\mu [\tau - 1 + e^{-\tau}] \}; \quad (a)$$

$$\bar{u}_1(x) = u_0 \exp \{ -\mu \tau \}; \quad (b)$$

$$\bar{u}_2 = \frac{u_0}{1-\mu} [\exp(-\mu\tau) - \mu \exp(-\tau)], \quad (b)$$

где $\tau = \alpha x$, $\mu = \frac{k^2 \sigma_\epsilon^2}{4 \alpha^2} = \frac{k^2}{4} l^2 \sigma_\epsilon^2$, $l = \frac{1}{\alpha}$ — радиус корреляции $\tilde{\epsilon}$.

Сравнивая (а), (б) и (в) при $\tau \gg 1$, легко установить, что приближенные решения (б) и (в) могут быть хорошей аппроксимацией точного решения лишь при $\mu \ll 1$. Кроме того, функция (в), в отличие от (б), имеет в нуле тот же вид, что и точное решение. На рис. 1 приведены функции (а), (б) и (в) при $\mu = 0,2$. Отличие второго приближения от точного решения не превосходит в данном случае 2,5%.

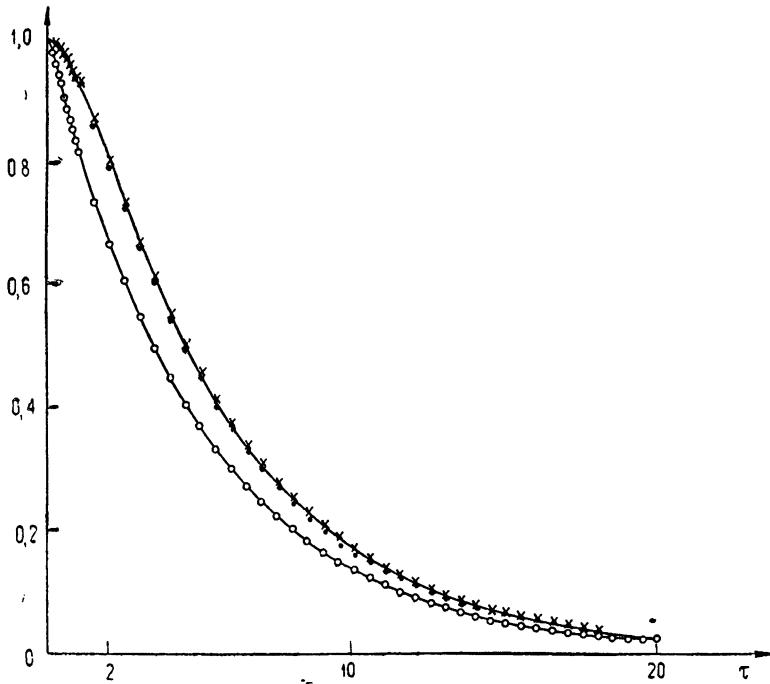


Рис. 1. $\circ\circ\circ - \bar{u}_1/u_0$, $\times\times\times - \bar{u}_2/u_0$, $\bullet\bullet\bullet - \bar{u}/u_0$.

Отметим также, что условия применимости первого приближения, а именно $\mu \ll 1$, $\tau \gg 1$, можно получить не только из сравнения \bar{u}_1 с \bar{u} , но и из сравнения \bar{u}_1 с \bar{u}_2 . Это обстоятельство позволяет получить условия применимости марковского приближения и в тех случаях, когда точное решение неизвестно.

Хотя рассмотренный пример и не может служить доказательством сходимости развитого метода последовательных приближений, однако он позволяет надеяться, что такое доказательство в дальнейшем может быть получено.

5. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ МАРКОВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

В настоящем разделе мы рассмотрим второе приближение для \bar{u} и G_2 и из сравнения с марковским приближением получим условия применимости последнего для этих величин. Мы будем рассматривать здесь простейший случай плоской волны, когда $u_0 = \text{const}$, хотя и более общий случай допускает решение.

Уравнение (31) с начальным условием (8) имеет решение

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\delta u(x, \rho)}{\delta \tilde{u}(x', \rho')} \right\rangle &= i \frac{k}{2} \bar{u}(x', \rho') \left[\frac{k}{2\pi i(x-x')} \exp \left\{ -\frac{k(\rho-\rho')^2}{2i(x-x')} \right\} \right] \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{k^2}{8} A(0)(x-x') \right\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Выражение, заключенное в (48) в квадратные скобки, при $x - x' \rightarrow 0$ стремится к $\delta(\rho - \rho')$. Подставляя (48) в уравнение (5), получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta \right) \bar{u} = - \frac{k^2}{4} \int_0^x dx' \int d\rho' \left[\frac{k}{2\pi i(x-x')} \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ - \frac{k(\rho-\rho')^2}{2i(x-x')} \right\} \right] \exp \left\{ - \frac{k^2}{8} A(0)(x-x') \right\} B_\epsilon(x-x', \rho-\rho') \bar{u}(x', \rho'). \quad (49)$$

Уравнение (49) можно решить преобразованием Лапласа по x' и преобразованием Фурье по ρ' . Мы не будем делать этого, а выясним лишь, при каких условиях решение уравнения (49) переходит в решение уравнения (28) для первого (марковского) приближения. Выражение в квадратных скобках в (49) представляет собой «размазанную» на масштаб $a = [(x-x')/k]^{1/2}$ δ -функцию по $\rho - \rho'$. В свою очередь, величина $(x-x')$ за счет множителя $B_\epsilon(x-x', \rho-\rho')$ ограничивается величиной порядка продольного масштаба неоднородностей l_{\parallel} , откуда $a \sim (l_{\parallel}/k)^{1/2}$. Если масштаб a мал по сравнению с l_{\perp} — масштабом функции B_ϵ по $\rho - \rho'$, т. е. $(l_{\parallel}/k)^{1/2} \ll l_{\perp}$, то выражение в квадратных скобках можно заменить на δ -функцию. Итак, если

$$l_{\parallel} \ll kl_{\perp}^2,$$

то (49) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta \right) \bar{u} = - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi B_\epsilon(\xi, 0) u(x-\xi) \exp \left\{ - \frac{k^2}{8} A(0) \xi \right\}.$$

Если, кроме того, выполняется условие

$$\frac{k^2}{8} A(0) l_{\parallel} \ll 1,$$

т. е. ослабление среднего поля на протяжении l_{\parallel} мало, то можно в последнем уравнении пренебречь и экспоненциальным множителем и сдвигом аргумента функции \bar{u} . В результате это уравнение принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k} \Delta \right) \bar{u} = - \frac{k^2}{4} \int_0^x d\xi B_\epsilon(\xi, 0) \bar{u}(x).$$

Если, наконец, $x \gg l_{\parallel}$, то верхний предел интегрирования можно заменить на бесконечность, и мы приходим к уравнению (28). Таким образом, марковское приближение для среднего поля справедливо при выполнении следующих трех условий (с учетом соотношения $A(0) \sim \sigma_\epsilon^2 l_{\parallel}$):

$$l_{\parallel} \ll kl_{\perp}^2, \quad \sigma_\epsilon^2 k^2 l_{\parallel}^2 \ll 1, \quad x \gg l_{\parallel}. \quad (50)$$

Аналогичным образом можно найти и границы применимости марковского приближения для функции Γ_2 . Для этого следует решить уравнение (47) и его решение подставить в (46). Уравнение (47) может быть решено путем преобразования Фурье по переменной $R = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$ ^[6]. Для случая $u_0 = \text{const}$, когда $\Gamma_2 = \Gamma_2(x, \rho_1 - \rho_2)$, решение имеет вид

$$q_{1,1}(x; x_0, \rho_0, \rho_1, \rho_2) = \frac{ik}{8\pi^2} \int d\mathbf{x} \Gamma_2 \left(x, \rho - \frac{\mathbf{x}}{k}(x - x_0) \right) \times \\ \times \exp \left\{ -i\mathbf{x}\rho_0 - i\frac{\mathbf{x}^2}{2k}(x - x_0) - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^{x-x_0} d\xi H \left(\rho - \frac{\mathbf{x}}{k}\xi \right) \right\} \times \quad (51) \\ \times [\exp(i\mathbf{x}\rho_1) - \exp(i\mathbf{x}\rho_2)],$$

где введено обозначение $A(0) - A(\rho) = \pi H(\rho)$, $\rho = \rho_1 - \rho_2$.

Выясним, в каком случае уравнение (46) с подставленным в него значением (51) совпадает с уравнением первого приближения. При решении этой задачи можно в (51) заменить функцию Γ_2 ее первым приближением $\Gamma_2(x, \rho) = |u_0|^2 \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{4} H(\rho)x \right\}$. После этого в экспоненте в (51) появляются функции вида $H \left(\rho - \frac{\mathbf{x}}{k}\xi \right)$, $H \left(\rho - \frac{\mathbf{x}}{k}(x - x_0) \right)$. Разложим их в ряды по \mathbf{x} с точностью до линейных членов. В результате получим

$$q_{1,1}(x, x_0, \rho_0, \rho_1, \rho_2) = i \frac{k}{2} \Gamma_2(x, \rho) \frac{1}{4\pi^2} \int d\mathbf{x} \exp \left\{ -i\mathbf{x}\rho_0 + \mathbf{x}g - \right. \\ \left. - i\frac{\mathbf{x}^2}{2k}(x - x_0) \right\} [\exp(i\mathbf{x}\rho_1) - \exp(i\mathbf{x}\rho_2)],$$

где $\mathbf{g} = \frac{\pi}{8} k(x^2 - x_0^2) \nabla H(\rho_1)$. Подставим это выражение в (46). Используя, кроме того, двумерное разложение Фурье

$$B_e(x, \rho_1 - \rho_0) - B_e(x, \rho_2 - \rho_0) = \int d\mathbf{x}' F_e(x, \mathbf{x}') \times \\ \times \exp(-i\mathbf{x}'\rho_0) [\exp(i\mathbf{x}'\rho_1) - \exp(i\mathbf{x}'\rho_2)],$$

мы сможем выполнить в (46) интегрирование по ρ_0 , дающее $\delta(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$, а затем интегрирование по \mathbf{x} . В результате получаем (с учетом того, что $(\Delta_1 - \Delta_2)\Gamma_2(x, \rho) = 0$)

$$\frac{1}{\Gamma_2} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} = -\frac{k^2}{2} \int_0^x dx_0 \int d\mathbf{x} [1 - \cos \mathbf{x}\rho] F_e(x - x_0, \mathbf{x}) \times \\ \times \exp(\mathbf{x}g) \exp \left\{ -\frac{i\mathbf{x}^2(x - x_0)}{2k} \right\}.$$

Функция $F_e(x - x_0, \mathbf{x})$ заметно отличается от нуля лишь в области, где $|\mathbf{x}(x - x_0)| \leq 1$ (см. [11]). Поэтому в указанной области $\frac{\mathbf{x}^2(x - x_0)}{2k} < \frac{\mathbf{x}}{2k} < \frac{\mathbf{x}_{\max}}{2k} \ll 1$, если $kl_0 \gg 1$, где l_0 — размер наименьших неоднородностей.

Таким образом, в случае $kl_0 \gg 1$ можно считать $\exp \left\{ -\frac{i\mathbf{x}^2(x - x_0)}{2k} \right\} \approx 1$.

Рассмотрим $|\mathbf{x}g| = \frac{\pi}{8} |(x^2 - x_0^2) \mathbf{x} \nabla H(\rho)|$. В существенной области, где

$|\mathbf{x}(x - x_0)| \leq 1$, имеем $|\mathbf{x}g| < \frac{\pi}{8} k(x + x_0) |\nabla H(\rho)| \approx \frac{\pi}{4} kx |\nabla H|$. Если

выполняется условие $kx|\nabla H(\rho)| \ll 1$, то можно считать и $\exp(xg) \approx 1$. Используя формулу [11]

$$\int d\mathbf{x} [1 - \cos \mathbf{x}\rho] F_\epsilon(x, \mathbf{x}) = B_\epsilon(x, 0) - B_\epsilon(x, \rho),$$

получаем

$$\frac{1}{\Gamma_2} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} = -\frac{k^2}{2} \int_0^x d\xi [B_\epsilon(\xi, 0) - B_\epsilon(\xi, \rho)].$$

Если выполняется условие $x \gg |\rho_1 - \rho_2| = |\rho|$, то интегрирование здесь можно распространить до бесконечности и, с учетом определения функции $H(\rho)$, мы получим

$$\frac{1}{\Gamma_2} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} = -\frac{\pi k^2}{4} H(\rho),$$

т. е. уравнение первого приближения. Таким образом, оно справедливо при выполнении условий

$$kl_0 \gg 1, \quad kx|\nabla H(\rho)| \ll 1, \quad x \gg |\rho|. \quad (52)$$

Второму из условий (52) можно придать более наглядную форму. Для турбулентных флюктуаций ϵ , например, в области $\rho \gg l_0 H(\rho) \sim C_\epsilon^2 \rho^{5/3}$, так что условие $kx|\nabla H| \ll 1$ принимает вид $C_\epsilon^2 kx \rho^{2/3} \ll 1$, $\rho = \rho_1 - \rho_2$. Умножив это неравенство на $k\rho$, запишем его в виде

$$C_\epsilon^2 k^2 x \rho^{5/3} \ll k\rho, \quad \text{или} \quad D_s(\rho) \ll k\rho, \quad (53)$$

где $D_s(\rho) \sim C_\epsilon^2 k^2 x \rho^{5/3}$ — средний квадрат флюктуаций разности фаз между двумя точками ρ_1 и ρ_2 в плоскости $x = \text{const}$ (см. [11]). Условие (53) накладывает довольно слабое ограничение на величину $D_s(\rho)$, что служит косвенным подтверждением известного из экспериментальных данных результата о широкой области применимости выражения для $D_s(\rho)$, получаемого методом Рытова.

Следует отметить, что условия применимости марковского приближения для ϵ и Γ_2 практически независимы, так как накладывают ограничения на разные параметры. В частности, условия (52) могут выполняться и в тех случаях, когда нарушаются условия (50).

ЛИТЕРАТУРА

- М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 4, 717 (1965).
- В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, 2106 (1969).
- В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 57, 952 (1969).
- В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 58, 624 (1970).
- В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1069 (1970).
- В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 7, 1061 (1970).
- В. И. Кляцкин, ЖЭТФ (в печати).
- Л. А. Чернов, Акуст. ж., 15, 594 (1969).
- В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 866 (1968).
- М. J. Вегап, T. L. Но, J. Opt. Soc. America, 56, 1475 (1966).
- В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
- K. Furutsu, J. Res. N. B. S., 67-D, 303 (1963).
- Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, 1919 (1964).

A NEW METHOD OF SUCESSIVE APPROXIMATIONS IN THE PROBLEM
OF WAVE PROPAGATION IN A MEDIUM WITH RANDOM LARGE-SCALE
INHOMOGENEITIES

V. I. Klyatskin, V. I. Tatarskii

The propagation of electromagnetic waves in a medium with random large-scale (as compared with the wavelength) inhomogeneities is considered on the basis of a scalar parabolic equation. A method of successive approximations is developed in which the approximation of Markov's random process is the first step. Based on the next approximation the authors consider the applicability limits of Markov's approximation. The method developed may be also useful for other problems reducing to stochastic differential equations with the parametric dependence on the random function.

УДК 538.56 : 535

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА МОМЕНТОВ К НЕКОТОРЫМ ЗАДАЧАМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЧАСТИЧНО-КОГЕРЕНТНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

B. A. Петрищев

Развитый в [1] аппарат используется для решения некоторых конкретных задач о распространении частично-когерентных волновых пучков в линейных и нелинейных средах: 1) прохождение через последовательность случайных фазовых экранов, 2) распространение волновых пучков в кубической среде со слабыми флуктуациями диэлектрической проницаемости.

1. О ПРОХОЖДЕНИИ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ ЧЕРЕЗ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ФАЗОВЫХ ЭКРАНОВ

Линейная среда. Рассмотрим систему фазовых корректоров (экранов), расположенных на расстоянии L друг от друга в среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon_0$. Будем считать, что изменения фазы волны, осуществляемые по случайному закону разными фазовыми экранами, статистически независимы со средним значением, равным нулю. Кроме того, фазовые экраны будут считаться однородными (локально) и изотропными.

В слое линейного диэлектрика в промежутках между фазовыми экранами поведение пучка света может быть описано уравнениями для моментов распределения функции взаимной когерентности $r_{mn}(\rho, z) = \int x^m y^n B(r, \rho, z) d^2r$ [1]:

$$i \frac{\partial}{\partial z} r_{mn} = -m \frac{\partial}{\partial \xi} r_{m-1, n} - n \frac{\partial}{\partial \eta} r_{m, n-1}. \quad (1.1)$$

Здесь $B(r, \rho, z) = \left\langle E\left(r + \frac{\rho}{2}, z\right) E^*\left(r - \frac{\rho}{2}, z\right) \right\rangle$; r и ρ — координаты в поперечном направлении: $r = x x_0 + y y_0$, $\rho = \xi x_0 + \eta y_0$, а интегрирование ведется по поперечному сечению пучка (все координаты в единицах k^{-1}).

Из (1.1) следует, что на соседних N -м и $(N-1)$ -м экранах

$$\begin{aligned} r_{00}^{(N)}(\rho) &= r_{00}^{(N-1)}(\rho), \\ r_{01}^{(N)}(\rho) &= r_{01}^{(N-1)}(\rho) + \sigma_{+}^{(N-1)}(\rho) \Delta, \\ r_{02}^{(N)}(\rho) &= r_{02}^{(N-1)}(\rho) + a_{+}^{(N-1)}(\rho) \Delta + b_{+}^{(N-1)}(\rho) L^2 \text{ и т. д.,} \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\sigma_{+}^{(N-1)}(\rho) = -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \eta} r_{00}^{(N-1)}(\rho),$$

$$a_{+}^{(N-1)}(\rho) = -\frac{2}{i} \frac{\partial}{\partial \eta} r_{01+}^{(N-1)}(\rho),$$

$$b_{+}^{(N-1)}(\rho) = -\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} r_{00+}^{(N-1)}(\rho).$$

В уравнениях (1.2) «—» обозначает соответствующую величину на входе фазового экрана, а «+» — на выходе.

Рекуррентные преобразования, аналогичные (1.2), могут быть записаны для моментов любого порядка, по которым в произвольном сечении z может быть восстановлена функция взаимной когерентности $B(r, \rho, z)$. Мы, однако, дальнейшее рассмотрение проведем для моментов нулевого, первого и второго порядка, имеющих при $\rho = 0$ ясный физический смысл мощности, центра интенсивности («центра масс») и эффективной ширины пучка.

При рассеянии волн на N -м фазовом экране моменты $r_{00}(\rho)$, $r_{01}(\rho)$, $r_{02}(\rho)$ и их производные, являющиеся коэффициентами при степенях L в уравнениях (1.2), преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{00}^{(N)}(\rho) &= q(\rho) r_{00-}^{(N)}(\rho), \\ r_{01}^{(N)}(\rho) &= q(\rho) r_{01-}^{(N)}(\rho), \\ r_{02}^{(N)}(\rho) &= q(\rho) r_{02-}^{(N)}(\rho), \\ a_{+}^{(N)}(\rho) &= q(\rho) a_{-}^{(N)}(\rho) - \frac{1}{i} r_{00-}^{(N)}(\rho) \frac{\partial q(\rho)}{\partial \eta}, \\ a_{+}^{(N)}(\rho) &= q(\rho) a_{-}^{(N)}(\rho) - \frac{2}{i} r_{01-}^{(N)}(\rho) \frac{\partial q(\rho)}{\partial \eta}, \\ b_{+}^{(N)}(\rho) &= q(\rho) b_{-}^{(N)}(\rho) + 2i a_{-}^{(N)}(\rho) \frac{\partial q(\rho)}{\partial \eta} - r_{00-}^{(N)}(\rho) \frac{\partial^2 q(\rho)}{\partial \eta^2}, \\ q(\rho) &= \left\langle \exp \left\{ -i \left[\tilde{\varphi} \left(r + \frac{\rho}{2} \right) - \tilde{\varphi} \left(r - \frac{\rho}{2} \right) \right] \right\} \right\rangle, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\tilde{\varphi}(r)$ — случайная добавка, вносимая экраном*.

Из (1.2) и (1.3) следует, что

$$\begin{aligned} r_{00}^{(N)} &= q r_{00-}^{(N-1)}, \\ r_{01}^{(N)} &= q r_{01-}^{(N-1)} + q a_{-}^{(N-1)} L - \frac{1}{i} \frac{\partial q}{\partial \eta} r_{00-}^{(N-1)} L, \\ r_{02}^{(N)} &= q r_{02-}^{(N-1)} + q a_{-}^{(N-1)} L - \frac{2}{i} \frac{\partial q}{\partial \eta} r_{01-}^{(N-1)} L + q b_{-}^{(N-1)} L^2 + \\ &+ 2i \frac{\partial q}{\partial \eta} a_{-}^{(N-1)} L^2 - \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} r_{00-}^{(N-1)} L^2, \end{aligned} \tag{1.4}$$

* Усреднение производится отдельно по полю E и по однородным и изотропным флюктуациям $\tilde{\varphi}$ в силу статистической независимости экранов.

$$\begin{aligned} \alpha_{-}^{(N)} &= q\alpha_{-}^{(N-1)} - \frac{1}{i} \frac{\partial q}{\partial \eta} r_{00}^{(N-1)}, \\ \alpha_{-}^{(N)} &= qa_{-}^{(N-1)} - \frac{2}{i} \frac{\partial q}{\partial \eta} r_{01}^{(N-1)} + 2qb_{-}^{(N-1)}L + 4i \frac{\partial q}{\partial \eta} \alpha_{-}^{(N-1)}L - \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} r_{00}^{(N-1)}L, \\ b_{-}^{(N)} &= qb_{-}^{(N-1)} + 2i \frac{\partial q}{\partial \eta} \alpha_{-}^{(N-1)} - \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} r_{00}^{(N-1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили систему рекуррентных соотношений, описывающих преобразование моментов функции когерентности на периоде последовательности экранов. Производя в (1.4) суммирование по всем предшествующим N экранам, можно выразить значения моментов $r_{00}^{(N)}$, $r_{01}^{(N)}$, $r_{02}^{(N)}$ через соответствующие значения моментов в начальном сечении $z = 0$:

$$\begin{aligned} r_{00}^{(N)} &= q^N r_{00}^{(0)}, \\ r_{01}^{(N)} &= q^N r_{01}^{(0)} + Nq^N \alpha^{(0)}L - \frac{1}{2i} \frac{\partial q}{\partial \eta} q^{N-1} r_{00}^{(0)} N(N+1)L, \\ r_{02}^{(N)} &= q^N r_{02}^{(0)} + \left[a^{(0)}q^N + i \frac{\partial q}{\partial \eta} q^{N-1} r_{01}^{(0)}(N+1) \right] NL + \\ &+ b^{(0)}q^N(NL)^2 + i \frac{\partial q}{\partial \eta} q^{N-1} \alpha^{(0)} \left[\frac{3}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} n(n-1) + 1 \right] (NL)^2 - \\ &- \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} q^{N-1} r_{00}^{(0)} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} n(n-1) + \frac{3N-1}{2N} \right] (NL)^2 - \\ &- \left(\frac{\partial q}{\partial \eta} \right)^2 r_{00}^{(0)} q^{N-2} \frac{1}{N^2} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{m-1} n(n+1)+2 \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{m-1} n(n-1) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{n=0}^{N-1} n(n-1) + N(N-1) \right] (NL)^2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

При большом числе экранов $N \gg 1$, учитывая, что $NL = z_N$, (1.5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} r_{00}(z_N) &= r_{00}(0)q^N, \\ r_{01}(z_N) &= \left[(r_{01}(z_N))_{\text{пер}} - \frac{r_{00}(0)}{2i} \left(\frac{\partial q}{\partial \eta} \Big| qL \right) z_N^2 \right] q^N, \\ r_{02}(z_N) &= \left\{ (r_{02}(z_N))_{\text{пер}} + ir_{01}(0) \left(\frac{\partial q}{\partial \eta} \Big| qL \right) z_N^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[i \alpha(0) \left(\frac{\partial q}{\partial \eta} \Big| qL \right) - \frac{1}{3} r_{00}(0) \left(\frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} \Big| qL \right) \right] z_N^3 - \\ &\quad - \frac{1}{4} r_{00}(0) \left(\frac{\partial q}{\partial \eta} \Big| qL \right)^2 z_N^4 \right\} q^N. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь $(r_{01}(z_N))_{\text{пер}}$ и $(r_{02}(z_N))_{\text{пер}}$ — значение моментов в однородной среде (в отсутствие фазовых экранов) [1].

Поскольку $q(\rho) = \left\langle \exp \left\{ -i \left[\tilde{\varphi} \left(r + \frac{\rho}{2} \right) - \tilde{\varphi} \left(r - \frac{\rho}{2} \right) \right] \right\rangle \right\rangle < 1$, то формулы (1.6) указывают на пропорциональное q^N ослабление по сравнению с регулярной средой корреляции между полями в двух отстоящих на ρ точках пространства. Если функция $\tilde{\varphi} \left(r + \frac{\rho}{2} \right) - \tilde{\varphi} \left(r - \frac{\rho}{2} \right)$ распределена по нормальному закону с дисперсией $D_\varphi(\rho) = \left\langle \left[\tilde{\varphi} \left(r + \frac{\rho}{2} \right) - \tilde{\varphi} \left(r - \frac{\rho}{2} \right) \right]^2 \right\rangle$ ($D_\varphi(\rho)$ — структурная функция $\tilde{\varphi}(r)$), то $q(\rho) = \exp \left[-\frac{1}{2} D_\varphi(\rho) \right]$, и

$$r_{00}(z_N) = r_{00}(0) \exp \left[-\frac{1}{2} ND_\varphi(\rho) \right],$$

$$r_{01}(z_N) = \left\{ (r_{01}(z_N))_{\text{пер}} + \frac{1}{4iL} r_{00}(0) \frac{\partial D_\varphi(\rho)}{\partial \eta} z_N^2 \right\} \exp \left[-\frac{1}{2} ND_\varphi(\rho) \right],$$

$$\begin{aligned} r_{02}(z_N) = & \left\{ (r_{02}(z_N))_{\text{пер}} + \frac{1}{2iL} r_{01}(0) \frac{\partial D_\varphi(\rho)}{\partial \eta} z_N^2 + \right. \\ & + \left[\frac{1}{2L} \frac{\partial r_{00}(0)}{\partial \eta} - \frac{\partial D_\varphi(\rho)}{\partial \eta} + \frac{r_{00}}{6L} \frac{\partial^2 D_\varphi}{\partial \eta^2} - \frac{r_{00}(0)}{12L} \left(\frac{\partial D_\varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] z_N^3 - \\ & \left. - \frac{r_{00}(0)}{16L^2} \left(\frac{\partial D_\varphi}{\partial \eta} \right)^2 z_N^4 \right\} \exp \left[-\frac{1}{2} ND_\varphi(\rho) \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Предположим теперь, что фазовыми экранами мы представляли слои случайно неоднородной среды толщиной L . Считая слои достаточно тонкими, можно вычислить $D_\varphi(\rho)$ как структурную функцию сферической волны в методе плавных возмущений $D_\varphi(\rho) \approx \frac{1}{2} d_\varepsilon(\rho) L$, где

$$d_\varepsilon(\rho) = \int_0^\infty \left[D_\varepsilon(\sqrt{\rho^2 + z^2}) - D_\varepsilon(\sqrt{z^2}) \right] dz, \quad (1.8)$$

$D_\varepsilon(r)$ — структурная функция диэлектрической проницаемости. Подставляя (1.8) в (1.7) и устремляя число слоев к бесконечности при условии $NL = z = \text{const}$, т. е. переходя к распределенной задаче, получим соотношения, описывающие изменение моментов функции взаимной когерентности при распространении пучка в случайно неоднородной среде, совпадающие с результатами работы [1].

При $\rho = 0$ эти соотношения определяют движение центра интенсивности $r_\Delta = \frac{1}{r_{00}} (r_{10}x_0 + r_{01}y_0)$ и эффективной ширины пучка $\left(a_{\text{эфф}}^2 = \frac{1}{r_{00}} (r_{02} + r_{20}) \right)$:

$$r_\Delta = (r_\Delta)_{\text{пер}},$$

$$a_{\text{эфф}}^2 = (a_{\text{эфф}}^2)_{\text{пер}} + \frac{1}{12} [\Delta_\rho D_e(\rho)]_{\rho=0} z^3. \quad (1.9)$$

Формула (1.9) совпадает с известными формулами, полученными в работах [2, 3]. По-видимому, предположения, при которых записываются усредненные уравнения в этих работах, а также в [4], соответствуют приближению последовательности статистически независимых фазовых экранов.

Нелинейная (кубичная) среда. Известно [1], что в кубической среде $\epsilon = \epsilon_0(1 + \epsilon' |E|^2)$ полиномиальное представление вида (1.2) имеет место только для моментов нулевого, первого и центробежного момента второго порядка распределения интенсивности: $r_{00}(0, z)$; $r_{01}(0, z)$; $r_{10}(0, z)$; $a_{\text{эфф}}^2 = \frac{1}{r_{00}} (r_{02}(0, z) + r_{20}(0, z))$. Как и в линейной среде, для пучков, прошедших последовательность случайных экранов,

$$r_{00}(0, z) = (r_{00}(0, z))_{\text{пер}} = r_{00}(0, 0),$$

$$r_{01}(0, z) = (r_{01}(0, z))_{\text{пер}}, \quad r_{10}(0, z) = (r_{10}(0, z))_{\text{пер}}.$$

Рассмотрим изменение $a_{\text{эфф}}^2$. В промежутках между экранами [1]

$$\begin{aligned} (a_{\text{эфф}}^2)_-^{(N)} &= (a_{\text{эфф}}^2)_+^{(N-1)} + B_+^{(N-1)} L + A_+^{(N-1)} L^2, \\ A_+^{(N-1)} &= \frac{1}{r_{00}} \int_S \left\langle \left[|\nabla_\perp E_+^{(N-1)}|^2 - \frac{|E_+^{(N-1)}|^4}{2} \right] \right\rangle ds, \\ B_+^{(N-1)} &= \frac{2}{r_{00}} \int_S \left\langle r \frac{E_+^{(N-1)} \nabla E_+^{(N-1)*} - \text{к. с.}}{2i} \right\rangle ds. \end{aligned} \quad (1.10)$$

При прохождении пучка через экран $a_{\text{эфф}}^2$, A и B изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (a_{\text{эфф}}^2)_+^{(N)} &= (a_{\text{эфф}}^2)_-^{(N)}, \\ B_+^{(N)} &= B_-^{(N)}, \\ A_+^{(N)} &= A_-^{(N)} + Q, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $Q = \frac{1}{2} [\Delta_\rho D_\varphi(\rho)]_{\rho=0}$. Из (1.10) и (1.11) следует, что в нелинейной среде для эффективной ширины пучка, прошедшего последовательность случайных фазовых экранов, справедлив тот же результат, что и в линейной среде (1.9), с той разницей, что под $(a_{\text{эфф}}^2)_{\text{пер}}$ надо понимать величину

$$(a_{\text{эфф}}^2)_{\text{пер}} = a_{\text{эфф}}^2(0) + Bz + A^{\text{пер}} z^2,$$

где

$$A^{\text{пер}} = A^{\text{л}} - \frac{1}{r_{00}} \int_S \frac{\langle |E(r, 0)|^4 \rangle}{2} d^2 r.$$

Изменение эффективной ширины пучка происходит как вследствие «истинного» уширения пучка, так и вследствие блуждания пучка как

целого, т. е. флуктуаций центра интенсивности $r_{\text{ц}}$. Будем различать эти два явления и интересоваться изменением ширины пучка в системе координат, связанный с центром интенсивности, т. е. изменением величины

$$d_{\text{эфф}}^2 = a_{\text{эфф}}^2 - R^2,$$

где

$$R^2 = \langle (r_{\text{ц}})^2 \rangle.$$

Величина R^2 не может быть описана с помощью функции взаимной когерентности, а следовательно, и моментов функции когерентности, однако некоторые заключения относительно $d_{\text{эфф}}^2$ можно сделать, рассматривая трансформацию R^2 на одиночном фазовом экране. В промежутке между экранами

$$\begin{aligned} \langle R^2 \rangle^{(N)} &\equiv \langle (r_{\text{ц}})^2 \rangle = \frac{1}{r_{00}^2} \langle (r_{01}^{(N)})^2 \rangle + \frac{1}{r_{10}^2} \langle (r_{10}^{(N)})^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{r_{00}^2} \left\{ \langle (r_{01}^{(N-1)})^2 \rangle + \langle (r_{10}^{(N-1)})^2 \rangle + 2[\langle r_{01}^{(N-1)} \alpha_+^{(N-1)} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle r_{10}^{(N-1)} \beta_+^{(N-1)} \rangle]L + [\langle (\alpha_+^{(N-1)})^2 \rangle + \langle (\beta_+^{(N-1)})^2 \rangle]L^2 \right\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

При рассеянии на фазовом экране

$$\begin{aligned} \langle (r_{01}^{(N)})^2 \rangle &= \langle (r_{01}^{(N)})^2 \rangle, & \langle (r_{10}^{(N)})^2 \rangle &= \langle (r_{10}^{(N)})^2 \rangle, \\ \langle r_{01}^{(N)} \alpha_+^{(N)} \rangle &= \langle r_{01}^{(N)} \alpha_-^{(N)} \rangle, & \langle r_{10}^{(N)} \beta_+^{(N)} \rangle &= \langle r_{10}^{(N)} \beta_-^{(N)} \rangle, \\ \langle (\alpha_+^{(N)})^2 + (\beta_+^{(N)})^2 \rangle &= \langle (\alpha_-^{(N)})^2 + (\beta_-^{(N)})^2 \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{S_1} \int_{S_2} \left\langle \left| E\left(r + \frac{\rho}{2}\right) \right|^2 \left| E\left(r - \frac{\rho}{2}\right) \right|^2 \right\rangle \Delta_\rho D_\varphi(\rho) d^2 r d^2 \rho. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Сравнивая (1.12) и (1.13) с соответствующими формулами преобразования $a_{\text{эфф}}^2$, можно видеть, что величина вклада в изменение $a_{\text{эфф}}^2$ истинного уширения пучка и флуктуаций центра интенсивности зависит от характера структурной функции случайной фазы φ . Можно указать на два предельных случая.

1. Фазовые экраны имеют вид случайных клиньев. В этом случае $D_\varphi(\rho) = \Lambda \rho^2$, и соответствующие слагаемые, ответственные за рассеяние на экране, в формулах преобразования $a_{\text{эфф}}^2$ и $\langle r_{\text{ц}}^2 \rangle$ совпадают. Это означает, что флуктуации поля волны в сечении пучка вызваны случайнм блужданием пучка как целого, и в системе координат, связанный с центром интенсивности пучка, изменение эффективной ширины происходит, как в регулярной среде.

2. Фазовые экраны имеют вид сильношероховатой поверхности с характерным масштабом неоднородности, малым по сравнению с попечальным размером пучка. В этом случае функция $\Delta_\rho D_\varphi(\rho)$ отлична от нуля в узкой области близи $\rho = 0$, и интегрирование по ρ в (1.13) можно провести в предположении $|E(r, \rho)| \equiv \text{const}$ в области сильно-го изменения $\Delta_\rho D_\varphi(\rho)$:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \int_{S_2} \left| E\left(r + \frac{\rho}{2}\right) \right|^2 \left| E\left(r - \frac{\rho}{2}\right) \right|^2 \Delta_\rho D_\varphi(\rho) d^2 r d^2 \rho \approx \\ \approx \int_{S_1} d^2 r |E(r)|^4 \int_{S_2} \Delta_\rho D_\varphi(\rho) d^2 \rho, \\ \int_{S_2} \Delta_\rho D_\varphi(\rho) d^2 \rho = 2\pi \int_0^\infty \left(\frac{d^2 D_\varphi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dD_\varphi}{d\rho} \right) \rho d\rho = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\nabla_\rho D_\varphi(\rho)$ спадает достаточно быстро с ростом ρ . Тогда

$$\langle r_{\text{пп}}^2 \rangle = (r_{\text{пп}}^2)_{\text{пер}}$$

и изменение $a_{\text{эфф}}^2$ вследствие рассеяния на последовательности экранов есть «истинное» уширение.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В СЛАБОФЛУКТУИРУЮЩИХ СРЕДАХ С КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Распространение волновых пучков в среде с диэлектрической проницаемостью вида $\epsilon = (\epsilon_0 + \tilde{\epsilon}) (1 + \epsilon' |E|^2)$ может быть описано параболическим уравнением для случайной комплексной амплитуды поля $E(r)$:

$$\Delta E - 2i \frac{\partial E}{\partial z} + \tilde{\epsilon} E + \epsilon' |E|^2 E + \epsilon' \tilde{\epsilon} |E|^2 E = 0, \quad (2.1)$$

где $\epsilon_0 = \text{const}$ — среднее значение диэлектрической проницаемости среды в слабом поле, $\tilde{\epsilon}$ — известный из теории самофокусировки параметр нелинейности среды, $\tilde{\epsilon}(r, z)$ — флюктуационная составляющая ϵ со средним значением, равным нулю*. Будем предполагать флюктуации ϵ слабыми: полагая $\tilde{\epsilon}(r, z) = \alpha f(r, z)$, будем считать, что $\alpha \ll 1$ ($f(r, z) \sim 1$).

Решая уравнение (2.1) методом последовательных приближений по случайной компоненте поля E , как это делалось в работе [3] для линейных сред со случайными неоднородностями ϵ , и отбрасывая члены порядка малости $\epsilon' \alpha^2$ и выше, можно получить усредненное уравнение для функции взаимной когерентности

$$\begin{aligned} B(r, \rho, z) = & \left\langle E\left(r + \frac{\rho}{2}, z\right) E^*\left(r - \frac{\rho}{2}, z\right) \right\rangle: \\ i \frac{\partial B}{\partial z} = & \nabla_r \nabla_\rho B(r, \rho, z) - \frac{i \alpha^2}{4} d_f(\rho) B(r, \rho, z) + \\ & + \frac{\epsilon'}{2} \left[B\left(r + \frac{\rho}{2}, 0, z\right) - B\left(r - \frac{\rho}{2}, 0, z\right) \right] B(r, \rho, z). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$d_f(\rho) = \int_0^\infty [D_f \sqrt{\rho^2 + z^2} - D_f(\sqrt{z^2})] dz,$$

* Например, в средах с керровским механизмом нелинейности ϵ' определяется поляризумостью отдельной молекулы, а $\tilde{\epsilon}$ играет роль случайной компоненты числа частиц (молекул) в единице объема.

а

$$D_f(\rho) = \left\langle \left[f\left(R + \frac{\rho^{(3)}}{2}\right) - f\left(R - \frac{\rho^{(3)}}{2}\right) \right]^2 \right\rangle$$

— структурная функция локально однородных и изотропных флюктуаций ϵ ; R и $\rho^{(3)}$ — радиус-векторы в пространстве x, y, z ; $\rho^{(3)} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Уравнение, аналогичное (2.2), рассматривалось в работе [5]. При выводе его предполагалась δ -коррелированность по z гауссового поля $\tilde{\epsilon}(\rho, z)$; при этом считалось, что нелинейный отклик среды определяется средней интенсивностью светового поля: $\langle \epsilon^{NL}(|E|^2) \rangle = \epsilon^{NL}(\langle |E|^2 \rangle) \ll \ll \epsilon^{NL}(\langle |E|^2 \rangle)$. Последнее предположение, сделанное с целью представления функции когерентности высокого порядка в нелинейном члене через функцию взаимной когерентности $B(r, \rho, z)$, эквивалентно принятому в данной работе и означает, попросту, малость флюктуаций интенсивности волны.

Нас интересует величина

$$a_{\text{эфф}}^2(z) = \frac{r_{20}(0, z) + r_{02}(0, z)}{r_{00}(0, z)} = \frac{\int_S r^2 B(r, 0, z) d^2 r}{\int_S B(r, 0, z) d^2 r}. \quad (2.3)$$

Непосредственным дифференцированием $a_{\text{эфф}}^2(z)$ по z с учетом (2.2) можно получить, что

$$\frac{d^3 a_{\text{эфф}}^2}{dz^3} = \frac{\alpha^2}{2} [\Delta_\rho d_f(\rho)]_{\rho=0} = \text{const}(z), \quad (2.4)$$

и зависимость $a_{\text{эфф}}^2(z)$ представляется в виде полинома третьей степени от z . При этом коэффициенты при z и z^2 такие же, как в нелинейной кубической среде без флюктуаций диэлектрической проницаемости. Таким образом,

$$a_{\text{эфф}}^2(z) = [a_{\text{эфф}}^2]_{\text{рег}}^{\text{нел}} + Dz^3, \quad (2.5)$$

где член Dz^3 , ответственный за рассеяние на неоднородностях ϵ , такой же, как и в линейной среде [2, 3]. Видно, что нелинейное самовоз действие и рассеяние на неоднородностях среды вносят в изменение эффективной ширины пучка аддитивный вклад. Для частного случая распространения гауссовых пучков в так называемом безабберационном приближении на это указывалось в [5] (в этом случае эффективная ширина совпадает с истинной шириной пучка).

Запишем выражение для эффективной ширины в системе координат, связанной с центром интенсивности пучка

$$d_{\text{эфф}}^2 = a_{\text{эфф}}^2 - R^2,$$

$$R^2 = \langle r_{\text{ц}}^2 \rangle.$$

Рассмотрение величины $d_{\text{эфф}}^2$ необходимо с точки зрения выяснения условий «склонивания» пучков в кубической среде с флюктуациями ϵ , что может, в частности, быть важно в вопросе о влиянии нелинейности и случайной неоднородности среды на различные пороговые эффекты, например, на вынужденное рассеяние или пробой газа в турбулентной атмосфере;

$$\langle r_{\text{u}}^2 \rangle = \frac{\left\langle \int \int \int \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \tilde{B}(\mathbf{r}_1, 0, z) \tilde{B}(\mathbf{r}_2, 0, z) d^2 r_1 d^2 r_2 \right\rangle}{\left(\left\langle \int \tilde{B}(\mathbf{r}, 0, z) d^2 r \right\rangle \right)^2}. \quad (2.6)$$

В отличие от предыдущих формул $\tilde{B}(\mathbf{r}, \rho, z) = E\left(\mathbf{r} + \frac{\rho}{2}, z\right)E^*\left(\mathbf{r} - \frac{\rho}{2}, z\right)$ — случайное поле, удовлетворяющее стохастическому уравнению

$$i \frac{\partial \tilde{B}}{\partial z} = \nabla_{\mathbf{r}} \nabla_{\rho} \tilde{B} - \frac{\alpha}{2} \left[\tilde{\epsilon}\left(\mathbf{r} + \frac{\rho}{2}, z\right) - \tilde{\epsilon}\left(\mathbf{r} - \frac{\rho}{2}, z\right) \right] \tilde{B} + \frac{\epsilon'}{2} \times \\ \times \left[\tilde{B}\left(\mathbf{r} + \frac{\rho}{2}, 0, z\right) - \tilde{B}\left(\mathbf{r} - \frac{\rho}{2}, 0, z\right) \right] \tilde{B}. \quad (2.7)$$

Дифференцируя (2.6) по z с использованием (2.7) и проводя усреднение в принятых в работе предположениях, находим, что

$$R^2 \equiv \langle r_{\text{u}}^2 \rangle = (r_{\text{u}}^2)_{\text{пер}} + \frac{\alpha^2}{12} z^3 \times \quad (2.8)$$

$$\times \frac{\int \int B(\mathbf{r}_1, 0, 0) B(\mathbf{r}_2, 0, 0) \Delta_{\mathbf{r}_1} d_f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) d^2 r_1 d^2 r_2}{\left(\int_{S_1} B(\mathbf{r}_1, 0, 0) d^2 r_1 \right)^2}.$$

Таким образом,

$$d_{\text{зфф}}^2 = (d_{\text{зфф}}^2)_{\text{пер}} + Cz^3 = d_0^2 + Bz + Az^2 + Cz^3, \quad (2.9)$$

где

$$C = \frac{\alpha^2}{12} \left\{ [\Delta_{\rho} d_f(\rho)]_{\rho=0} - \frac{\int \int B\left(\mathbf{r} + \frac{\rho}{2}, 0, 0\right) B\left(\mathbf{r} - \frac{\rho}{2}, 0, 0\right) \Delta_{\rho} d_f(\rho) d^2 r d^2 \rho}{\left(\int_{S_1} B(\mathbf{r}, 0, 0) d^2 r \right)^2} \right\} = \\ = \frac{1}{6} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} q^2 \Phi_{\epsilon}(q^{(3)}) d^3 q^{(3)} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |F(q, 0, 0)|^2 q^2 \Phi_{\epsilon}(q^{(3)}) d^3 q^{(3)}}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(q, 0, 0) d^2 q \right)^2} \right\}, \quad (2.10)$$

$$B(\mathbf{r}, 0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(q, 0, 0) \exp(iqr) d^2 q,$$

$$\alpha^2 d_f(\rho) = d_{\epsilon}(\rho) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \exp(iq\rho)) \Phi_{\epsilon}(q^{(3)}) d^3 q^{(3)};$$

$\Phi_{\epsilon}(q^{(3)})$ — трехмерный спектр флюктуаций ϵ .

Как и в задаче о прохождении пучка через систему фазовых экранов, здесь можно указать два предельных случая.

1. $d_{\epsilon}(\rho) \sim \rho^2$ — в этом случае, как видно из (2.10), $C = 0$ и $d_{\text{зфф}}^2 = (d_{\text{зфф}}^2)_{\text{пер}}$, т. е. уширение пучка вызывается только флюктуа-

циями центра интенсивности, и в системе координат, связанной с центром интенсивности, изменение эффективной ширины пучка происходит, как в регулярной среде. Этот случай, по-видимому, малоинтересный с точки зрения влияния неоднородности на условия «схлопывания» пучка, рассматривался в [5].

2. Второй случай, как и прежде, имеет место, когда поперечный размер пучка много больше характерного масштаба неоднородности. Здесь $R^2 \approx 0$, и изменение $a_{\text{эфф}}^2$ связано с «истинным» уширением пучка.

В реальных условиях, в частности, при распространении световых пучков в турбулентной атмосфере, должен реализоваться промежуточный случай.

Проведем некоторые оценки для случая распространения мощности светового пучка в турбулентной атмосфере. Уравнение (2.9) при $B = 0$, $A < 0$ (что соответствует коллимированному в точке $z = 0$ пучку с мощностью, превышающей критическую мощность самофокусировки $P_{\text{кр}}$) может описывать траектории различного характера (рис. 1). Оценим мощность P_* и расстояние z_* , при которых кривая $a_{\text{эфф}}^2(z)$ касается оси z , т. е. происходит «схлопывание» пучка. В атмосфере [6]

$$\Phi_e(q) = 0,033 C_e^2 q^{-11/3} \exp\left(-\frac{q^2}{q_m^2}\right),$$

и для пучка с гауссовым начальным распределением амплитуды

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)$$

$$\frac{P_*}{P_{\text{кр}}} = 1 + \frac{3k^2 a^{8/3}}{4} (4,38)^{2/3} C_e^{4/3} l_0^{-2/9} \left[1 - \left(1 + 17,5 \left(\frac{a}{l_0} \right)^2 \right)^{-1/6} \right]^{2/3}.$$

Здесь $q_m l_0 = 5,91$; l_0 — внутренний масштаб турбулентности. При $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, $a = 0,35$ см, $l_0 = 0,1$ см, $C_e^2 = 6,6 \cdot 10^{-16}$ см $^{-2/3}$

$$\frac{P_*}{P_{\text{кр}}} = 2,5, \quad z_* \approx 1,7 z_{\text{сф}},$$

где $z_{\text{сф}}$ — длина самофокусировки в среде без флюктуаций при $P = P_*$,

$$[a_{\text{эфф}}^2(z_{\text{сф}})]_{\text{рег}} = 0.$$

В заключение заметим, что применимость результатов разд. 2 ограничена, кроме малости флюктуаций, также пределом применимости описания пучков с помощью моментов интенсивности: при усреднении в некотором сечении $z = z_0$ в статистический ансамбль могли войти реализации $E(r, z)$, имеющие особенность в точке «схлопывания»*, вследствие чего моментное описание справедливо лишь до этой точки. Поэтому, как и в регулярной задаче, следует сказать, что формула

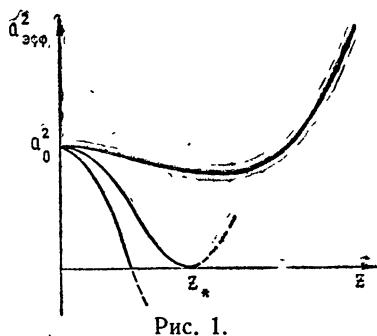


Рис. 1.

* Под точкой «схлопывания» надо понимать точку «локального схлопывания», когда при конечной эффективной ширине на оси пучка образуется фокальная точка с бесконечной интенсивностью.

(2.9) характеризует общую тенденцию поведения пучка на участке $0 < z < z_{\text{сф}}$.

Автор приносит благодарность В. И. Таланову за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 9, 1353 (1971)
2. З. И. Фейзуллин, Ю. Л. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 68 (1967).
3. Л. С. Долин, Изв. высш. зав.—Радиофизика, 11, № 6, 840 (1968)
4. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, № 6, 2106 (1969)
5. В. В. Воробьев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1053 (1970)
6. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, М., 1967.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
11 января 1971 г.

APPLICATION OF THE MOMENTS' METHOD TO SOME PROBLEMS OF PROPAGATION OF PARTIALLY-COHERENT LIGHT BEAMS

V. A. Petrishchev

The method developed in [1] is used to solve some concrete problems on propagation of partially-coherent wave beams in linear and nonlinear media: 1) propagation through a set of random phase screens, 2) propagation of wave beams in a cubic medium with dielectric permittivity fluctuations.

УДК 538.56 : 519.25

О ФЛУКТУАЦИЯХ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНЫ ЗА ХАОТИЧЕСКИМ ФАЗОВЫМ ЭКРАНОМ*

B. V. Тамойкин, A. A. Фрайман

Рассмотрены флюктуации интенсивности волны, прошедшей сквозь хаотический фазовый экран. Для гауссовой структурной функции флюктуаций фазы в плоскости экрана отмечается возрастание дисперсии флюктуаций интенсивности в областях фокусировки, т. е. на расстояниях $z \approx R_f$, где R_f — характерный радиус кривизны фазового фронта волны за экраном. Показано, что статистические свойства поля существенно зависят от вида структурной функции флюктуаций фазы.

1. При распространении волн с неплоскими фазовыми фронтами возможен эффект фокусировки, т. е. интенсивность поля может существенно возрасти в некоторых областях пространства (вблизи каустических поверхностей). Разработке методов расчета полей в прикаустических областях, в основном для регулярных (без флюктуаций) фазовых распределений, посвящено большое число работ (см. обзоры [1, 2]). Однако в ряде случаев флюктуации фазы волны могут существенно влиять на величину и структуру поля в прикаустической зоне [3]. Несколько обособленное положение занимает задача о распространении волны, фазовый фронт которой имеет лишь хаотические искривления. Так, для нее оказывается, например, что средняя интенсивность не зависит от флюктуаций фазы и совпадает с невозмущенным значением. Настоящая работа и посвящена определению влияния флюктуаций фазы первоначально плоской волны на статистические характеристики ее в свободном пространстве.

2. Для определенности мы будем иметь в виду задачу прохождения плоской волны через случайный фазовый экран [4] или эквивалентную ей задачу об отражении плоской волны от статически шероховатой идеально проводящей поверхности [5]. Считая углы рассеяния малыми, в обоих случаях поле на расстоянии z от экрана можно представить в виде

$$E(x, y, z) = \frac{ik e^{-ikz}}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[iS(x_1, y_1, 0)] \exp\left\{-i \frac{k}{2z} \times \right. \\ \left. \times [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1, \quad (1)$$

где $S(x, y, 0)$ — случайное распределение фазы в плоскости экрана**, $k = 2\pi/\lambda$, амплитуда падающей волны принята равной единице. Интег-

* Доложено на V Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн, Ленинград, июнь 1970 г

** Для идеально отражающей поверхности $S = 2k\zeta(x, y)$, где $\zeta(x, y)$ — случайное отклонение поверхности от плоскости $z = 0$.

ралы типа (1) и соответствующие им моменты поля изучались в целом ряде работ [6-8]. Однако удовлетворительных аналитических методов определения флюктуаций интенсивности поля там развито не было, а применяемые численные методы оказывались малоэффективными для больших значений флюктуаций фазы \bar{S}^2 . Здесь мы предположим лишь статистическую однородность и изотропность случайной величины $S(x, y)$ и нормальный закон ее распределения. Тогда, как известно, корреляционная функция комплексного поля*

$$\Gamma_{EE^*} = \bar{E}(r_1, z) E^*(r + \rho, z)$$

имеет вид

$$\Gamma_{FE^*}(\rho) = \exp\left(-\frac{1}{2} D_S(\rho)\right), \quad (2)$$

где $D_S(\rho)$ — структурная функция фазы в плоскости $z = 0$. Таким образом, в этом случае, как уже отмечалось, средняя интенсивность рассеянной волны $\bar{|E|^2}$ не зависит ни от z , ни от \bar{S}^2 и совпадает со своим невозмущенным значением.

3. Рассмотрим теперь момент более высокого порядка, а именно, флюктуации интенсивности. Будем характеризовать их дисперсией $\delta = (\bar{|E|^4} - \bar{|E|^2}^2)/\bar{|E|^2}$, которая в нашем случае равна $\delta = \bar{|E|^4} - 1$. Выражение для $\bar{|E|^4}$ легко получить из (1), однако для упрощения дальнейших вычислений мы рассмотрим модель одномерного экрана, т. е. будем считать случайную фазу S зависящей от одной переменной x . Окончательно получим

$$\begin{aligned} \bar{|E|^4} = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(2\alpha xy) \exp \left\{ - \left[D_S(x) + D_S(y) - \frac{1}{2} D_S(x+y) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} D_S(x-y) \right] \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha = kl^2/2z$, $D_S(x/l)$ — структурная функция флюктуаций фазы в плоскости экрана. Как видно из (3), результат существенно зависит от вида структурной функции флюктуаций фазы $D_S(x)$.

Рассмотрим сначала случай, когда флюктуации фазы характеризуются гауссовой корреляционной функцией, т. е. структурная функция имеет вид

$$D_S(\rho) = 2\bar{S}^2[1 - \exp(-\rho^2)]. \quad (4)$$

Оказывается удобным определить средний квадрат интенсивности поля не как функцию волнового параметра $1/\alpha$ и флюктуаций фазы \bar{S}^2 , как это делалось, например, в [6, 8], а ввести новые параметры: α и $\xi = 8\sqrt{\bar{S}^2}/\alpha$. При этом (3) перепишется в виде

$$\bar{|E|^4} = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(2\alpha xy) \exp\left(-\frac{\alpha^2 \xi^2}{64} f(x, y)\right) dx dy, \quad (5)$$

где

* Черта сверху означает усреднение по ансамблю реализаций.

$$f(x, y) = \frac{1}{2S^2} [2D_S(x) + 2D_S(y) - D_S(x+y) - D_S(x-y)].$$

При изменении α точка наблюдения перемещается из зоны геометрической оптики ($\alpha \gg 1$) в зону Фраунгофера ($\alpha \ll 1$). Параметр ξ есть отношение расстояния $2z$ к некоторому характерному радиусу кривизны фазового фронта $R_\phi = kl^2/8\sqrt{S^2}$. Оказывается, что, хотя средняя интенсивность волны и не меняется при наличии фазовых флуктуаций, фокусировка приводит к возрастанию флуктуаций интенсивности поля.

Результаты численного расчета величины δ по формуле (5) приведены на рис. 1. Наибольшее возрастание среднего квадрата интенсивности поля имеет место в зоне геометрической оптики ($\alpha \gg 1$), а параметр ξ при этом равен 4—6. Заметим, что существует оптимальное значение α , при котором δ максимально. Как легко видеть из (5), при фиксированном значении $S^2 \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \delta = 0$.

При удалении точки наблюдения от экрана (уменьшении α) эффект фокусировки уменьшается, что свидетельствует о приближении закона распределения поля к нормальному. На рис. 2 представлены зависимости от α максимальный выигрыш δ_{\max} и соответствующее ему значение ξ_{\max} . Заметим, что приведенный в [8—10] вывод о том, что $\delta_{\max} \sim \sim \ln S^2$, в наших расчетах подтверждается с точностью $\approx 10\%$.

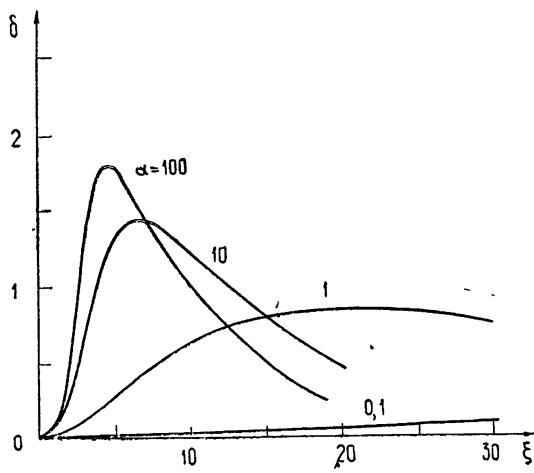


Рис. 1.

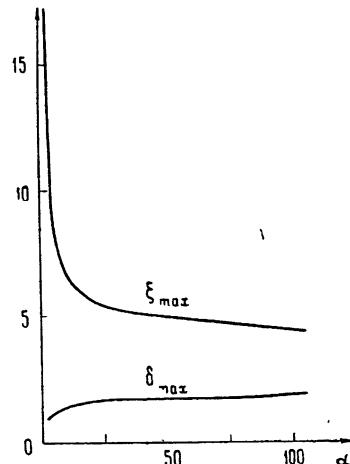


Рис. 2.

Рассмотрим теперь случай, когда флуктуации фазы не могут быть охарактеризованы корреляционной функцией, или, другими словами, структурная функция фазы $D_S(x)$ неограниченно растет с ростом x и не имеет насыщения. Как легко видеть из (3), при задании квадратичной структурной функции $D_S = x^2$ средний квадрат интенсивности не зависит от z и равен единице. Представляет интерес рассмотреть также структурную функцию с более медленным законом нарастания. Мы использовали предложенную Н. Г. Денисовым логарифмическую структурную функцию фазы $D_S = 2 \ln(1 + x^2)$. При малых значениях x она ведет себя как квадратичная, а при $x \rightarrow \infty$ растет медленнее. Интеграл (3) при этом вычисляется аналитически. Средний квадрат интенсивности зависит лишь от одного параметра α и равен

$$\begin{aligned} |\overline{E}|^4 = 2 - \alpha & \left\{ \frac{3}{2} (1 - 4\alpha^2) (\text{Ci } 2\alpha \sin 2\alpha - \text{Si } 2\alpha \cos 2\alpha) + \right. \\ & \left. + 3\alpha + 5\alpha (\text{Ci } 2\alpha \cos 2\alpha + \text{Si } 2\alpha \sin 2\alpha) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\text{Ci } 2\alpha$ и $\text{Si } 2\alpha$ — интегральные косинус и синус соответственно. Как видно из представленной на рис. 3 зависимости $\delta(\alpha)$, для логарифмической структурной функции эффекта фокусировки также нет, и дисперсия флуктуаций интенсивности δ монотонно растет с ростом z .

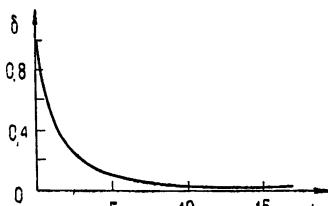


Рис. 3.

4. Остановимся теперь на качественной интерпретации полученных результатов. Задавая структурную функцию в виде (4), мы фактически предполагаем, что все неоднородности экрана имеют размер l . При этом оказывается возможным ввести характерный радиус кривизны фазового фронта

$R_\phi = kl^2/8\sqrt{\overline{S^2}}$. В зоне геометрической оптики в точку наблюдения приходит излучение, рассеянное только од-

ной неоднородностью, и поле имеет логарифмически нормальный закон распределения. Однако, поскольку для сильных фазовых флуктуаций ($\overline{S^2} \gg 1$) $\lambda \ll l_E \ll l$ ($l_E = l/\sqrt{\overline{S^2}}$ — масштаб корреляции комплексного поля), то уже в зоне геометрической оптики происходит интерференция полей, рассеянных отдельными участками одной неоднородности, что и приводит к возрастанию δ . Таким образом, параметром, характеризующим пространственные границы «геометрооптических» и «интерференционных» эффектов, является не α , а $\alpha_E = kl_E^2/2z$. Однако закон распределения поля приближается к нормальному при достаточно малых значениях α , т. е., когда начинают выполняться условия центральной предельной теоремы. Тот факт, что ξ_{\max} меняется с ростом α , говорит о том, что эффект возрастания δ в областях фокусировки не чисто геометрооптический. Другими словами, это означает, что введенный выше радиус кривизны фазового фронта R_ϕ не является универсальным параметром, и зависимость ξ_{\max} от длины волны более сложная, чем это следует из приведенных качественных рассуждений.

Для квадратичной структурной функции, как уже отмечалось, $\delta = 0$ для всех расстояний z . Это означает, что распределение поля нигде не становится нормальным и нельзя ввести понятие зоны Фраунгофера. Заметим, что квадратичная структурная функция является в известном смысле выделенной. Для любой другой зависимости $D_S(x)$ дисперсия флуктуаций зависит от расстояния z .

Логарифмическая структурная функция отличается от квадратичной в области больших значений аргумента. Это отличие приводит к тому, что, хотя эффекта фокусировки нет (зависимость δ от z монотонна), но понятие зоны Фраунгофера ввести можно, и распределение поля для достаточно больших z ($z \gg kl^2/2$) становится нормальным.

Качественно этот результат можно интерпретировать следующим образом: для структурной функции без насыщения существует бесконечный набор различных по размерам и интенсивности неоднородностей, причем связь между размером и фокусным расстоянием каждой «линзы» определяется видом структурной функции. Для каждого расстояния подбирается своя линза, фокусирующая излучение в точку на-

блюдения. Для логарифмической структурной функции, например, интенсивность этих «линз» оказывается такой, что дисперсия флюктуаций интенсивности волны монотонно растет с расстоянием.

5. Проведенное рассмотрение показало, что средний квадрат интенсивности поля за экраном существенно зависит от вида структурной функции флюктуаций фазы в плоскости экрана*. Для одних структурных функций имеет место эффект фокусировки, т. е. зависимость $\delta(z)$ не монотонна, для других его нет. Важную роль при этом играет поведение структурной функции при больших значениях аргумента.

Представляет интерес найти «пределенную» функцию, начиная с которой эффект фокусировки исчезает. В общем случае эта задача, по-видимому, не может быть разрешена, и один из немногочисленных возможных путей получения ответа состоит в переборе различных структурных функций. Например, для $D_s = x^{5/3}$, как показано в [7], эффект фокусировки имеет место.

Авторы благодарны Н. Г. Денисову за обсуждение затронутых в статье вопросов и критические замечания З. Н. Кротовой и Л. А. Масленниковой за проведение численных расчетов на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 9—10, 1283 (1967).
2. Ю. А. Кравцов, Акустич. ж., 14, № 1, 1 (1968).
3. Г. В. Пермитин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 12, 1836 (1969).
4. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 4, № 4, 630 (1961).
5. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 1, 56 (1967).
6. R. P. Megsier, Proc. Cambr. Phil. Soc., 58, 382 (1962).
7. В. И. Погорелов, Геомагнетизм и аэрономия, 7, № 4, 637 (1967).
8. Я. И. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 9, 1371 (1968).
9. E. E. Salpeter, Astrophys. J., 147, № 2, 433 (1967).
10. В. В. Шишков, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 1, 85 (1971).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию

25 марта 1971 г.

ON WAVE INTENSITY FLUCTUATIONS BEHIND A RANDOM PHASE SCREEN

V. V. Tamoykin, A. A. Fraiman

The intensity fluctuations of a wave passed through a random phase screen are considered. For the Gaussian structural function of phase fluctuations in the screen plane, it is pointed out that the intensity fluctuation dispersion increases in focusing regions, i. e. at the distances $z \approx R_{ph}$ where R_{ph} is the characteristic curvature radius of a phase wavefront behind the screen. The statistical properties of the field are shown to depend considerably on the form of the structural function of phase fluctuations.

* Это утверждение относится, по существу, ко всем моментам поля выше второго порядка.

УДК 621.372.4

ОДНОМЕРНЫЙ РЕЗОНАТОР С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

A. И. Весницкий

Рассматривается задача об отыскании электромагнитных полей в одномерном резонаторе с подвижными границами. Показано, что при медленном изменении размеров резонатора последний характеризуется набором ортогональных динамических мод. Описывается приближенный метод нахождения полей в таком резонаторе.

В последние годы появился ряд работ [1-7], посвященных исследованию процессов в одномерном резонаторе с подвижными границами. Однако до сих пор, как правило, задача рассматривалась только для трех частных случаев закона движения границ. Так, например, в [1-5] исследовались процессы в резонаторе, размеры которого равномерно изменяются во времени. В [6] получено точное решение для полей при условии, что резонатор расширяется или сжимается по гиперболическому закону, а в [7] обсуждаются возможности генерации импульсов в резонаторе, границы которого колеблются по периодическому закону.

В настоящей работе описывается приближенный метод отыскания полей в одномерном резонаторе с подвижными границами, применимый в тех случаях, когда фазы волн несущественно изменяются за время их прохождения через резонатор и процессы в нем можно считать квазигармоническими.

Рассмотрим одномерный резонатор, образованный двумя идеально проводящими металлическими поверхностями, одна из которых закреплена ($x = 0$), а другая движется по некоторому, вообще говоря, произвольному закону $a(t)$, но так, что скорость ее движения не превышает скорости света c . Будем считать, что резонатор без заполнения (проницаемости $\epsilon = \mu = 1$). Тогда электрическое и магнитное поля E_y, H_z в такой системе можно следующим образом выразить через волновую функцию $U(x, t)$:

$$E_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad H_z = \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (1)$$

Если положить, что внутри резонатора и на его границах источники отсутствуют, то, как это следует из уравнений Максвелла, функция $U(x, t)$ должна удовлетворять волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Границные условия для этой функции запишем в виде

$$U(x, t)|_{x=0} = 0, \quad U(x, t)|_{x=a(t)} = 2b_0, \quad (3)$$

где b_0 — постоянная величина.

Решение уравнения (2) представим как сумму двух бегущих волн

$$U(x, t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right) + h\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), находим, что

$$h(t) = -f(t); \quad (5)$$

$$f\left(t + \frac{a}{c}\right) - f\left(t - \frac{a}{c}\right) = 2b_0. \quad (6)$$

Таким образом, задача (2), (3) свелась к отысканию решения функционального уравнения (6). Функцию, удовлетворяющую этому уравнению, будем искать в виде

$$f(z) = b_0 g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z),$$

где

$$f_n(z) = a_n \cos n\pi g(z) + b_n \sin n\pi g(z), \quad (7)$$

a_n и b_n — постоянные, определяемые из начальных условий. Тогда $g(z)$ будет функцией зависимости фазы фиксированной моды от характеристики ($z = t \pm x/c$). Подставляя (6) в (7), можно получить следующее уравнение для $g(z)$:

$$g\left(t + \frac{a}{c}\right) - g\left(t - \frac{a}{c}\right) = 2. \quad (8)$$

Последнее имеет бесчисленное количество решений. Однако достаточно найти только одно из них, чтобы получить общее решение уравнения (6). Здесь $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ — решение однородного уравнения, представляющее собой, по крайней мере в тех случаях, когда $g'(z) > 0$, полный набор ортогональных функций с весом $g'(z)^*$, а $b_0 g(z)$ — частное решение неоднородного уравнения**.

Если $g(z)$ имеет производные любого порядка, то, представив функции $g(t + a/c)$ и $g(t - a/c)$ в виде степенных рядов по $a(t)$, из уравнения (8) находим, что

$$\frac{a}{c} \frac{dg(t)}{dt} + \frac{a^3}{3!c^3} \frac{d^3g(t)}{dt^3} + \frac{a^5}{5!c^5} \frac{d^5g(t)}{dt^5} + \dots = 1. \quad (9)$$

Очевидно, в тех случаях, когда $g(t)$ несущественно изменяется за время прохождения сигнала через резонатор ($\tau = ac^{-1}$), каждый последующий член в левой части уравнения (9) будет много меньше предыдущего, и решение для $g(t)$ приближенно можно записать в виде

* Нетрудно убедиться, что такой же набор функций является решением следующей задачи Штурма—Лиувилля:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[(g')^{-1} \frac{dF}{d\xi} \right] + \lambda^2 g' F = 0 \\ F(\text{const}_1) = F(\text{const}_2) = 0 \end{aligned} \right\},$$

для которой доказана полнота системы собственных функций при $g'(\xi) > 0$ [8].

** Если границы резонатора неподвижны, то в качестве частного решения неоднородного уравнения (6) можно взять функцию $f(z) = b_0 z$. Используя (1), (4) и (5), находим, что в этом случае $H = b_0 c^{-1}$, а $E = 0$, т. е. неоднородность граничных условий (3) обусловлена, по-видимому, наличием постоянного магнитного поля.

$$g(t) \approx c \int_0^t \frac{d\zeta}{a(\zeta)} + \text{const.} \quad (10)$$

Так как нас интересует частное решение уравнения (9), то входящую сюда постоянную интегрирования будем считать равной нулю. Из (10) следует, что для n -й динамической моды частота колебательного процесса в непосредственной близости от неподвижной границы ($x = 0$) будет равна $\pi c a^{-1}$. Таким образом, это приближение соответствует квазистационарному резонатору, размеры которого изменяются настолько медленно, что его собственные частоты в каждый фиксированный момент времени определяются как для резонатора с неподвижными границами.

Учитывая сказанное выше, решение уравнения (9) будем искать в виде

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t) \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (11)$$

где

$$A_0(t) = c \int_0^t \frac{d\zeta}{a(\zeta)}, \quad (12)$$

каждый последующий член суммы имеет более высокий порядок малости, и, кроме того,

$$\frac{1}{(k+2)!} \frac{d^{k+2} A_m}{dt^{k+2}} \sim \delta \frac{1}{k!} \frac{d^k A_m}{dt^k} \quad (\delta \text{ — малый параметр}).$$

Если подставить (11) в (9) и приравнять члены одинакового порядка малости по отдельности к нулю, то получим следующую бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений для отыскания $A_m(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} + \frac{a^2}{3!c} \frac{d^2 a^{-1}}{dt^2} &= 0, \\ \frac{dA_2}{dt} + \frac{a^2}{3!c^2} \frac{d^3 A_1}{dt^3} + \frac{a^4}{5!c^3} \frac{d^4 a^{-1}}{dt^4} &= 0, \\ \dots &\dots \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{3!c} \int_0^t a^2 \frac{d^2 a^{-1}}{dt^2} dt, \\ A_2 &= \frac{1}{c^3} \int_0^t \left[\frac{a^2}{(3!)^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(a^2 \frac{d^2 a^{-1}}{dt^2} \right) - \frac{a^4}{5!} \frac{d^4 a^{-1}}{dt^4} \right] dt, \\ A_3 &= \frac{1}{c^5} \int_0^t \left\{ -\frac{a^2}{(3!)^3} \frac{d^2}{dt^2} \left[a^2 \frac{d^2}{dt^2} \left(a^2 \frac{d^2 a^{-1}}{dt^2} \right) \right] + \frac{a^2}{3!5!} \frac{d^2}{dt^2} \left(a^4 \frac{d^4 a^{-1}}{dt^4} \right) \right\} dt + \end{aligned} \quad (14)$$

$$+ \frac{1}{c^5} \int_0^t \left[\frac{a^4}{3!5!} \frac{d^4}{dt^4} \left(a^2 \frac{d^2 a^{-1}}{dt^2} \right) - \frac{a^6}{7!} \frac{d^6 a^{-1}}{dt^6} \right] dt \text{ и т. д.}$$

Из (14) можно найти условия на $a(t)$, при которых решение для $g(t)$ получается в виде асимптотического ряда (11). Мы их выписывать не будем. Заметим лишь, что указанный способ решения уравнения (9) в какой-то мере напоминает метод ВКБ для дифференциального уравнения $\eta'' + \omega^2(t)\eta = 0$. Действительно, одним из условий применимости нулевого приближения будет

$$|3\dot{a}^2 - a\ddot{a}| \ll 6c^2.$$

В то же время, для ВКБ-приближения необходимое условие таково [9]:

$$|3\dot{\omega}^2 - 2\ddot{\omega}| \ll 4\omega^4.$$

Сравнивая эти два неравенства, видим, что медленному движению границы в нашем случае соответствует малое изменение частоты $\omega(t)$ за период $2\pi\omega^{-1}$ в ВКБ-приближении. Однако полной аналогии между сравниваемыми методами нет. Это видно хотя бы из того, что решение в форме нулевого приближения является точным, когда $a = a_0(1 + at)^{-1}$ ($a_0 = \text{const}$, $a = \text{const}$), а решение в форме ВКБ будет точным при $\omega = a_0(1 + at)^{-2}$ ($a_0 = \text{const}$, $a = \text{const}$).

Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных примеров, следует сказать о некоторых общих свойствах полей в подобных системах. Во-первых, в тех случаях, когда ряд (11) сходится, поля в резонаторе можно представить в виде набора ортогональных мод, подобно тому, как это имеет место для резонатора с неподвижными границами. При этом, как следует из (8),

$$\left(1 + \frac{\dot{a}}{c}\right) g' \left(t + \frac{a}{c}\right) = \left(1 - \frac{\dot{a}}{c}\right) g' \left(t - \frac{a}{c}\right).$$

Но $n\pi g' \left(t - \frac{a}{c}\right)$ и $n\pi g' \left(t + \frac{a}{c}\right)$ имеют смысл мгновенных частот падающей на подвижную границу и отраженной от нее волн n -й динамической моды. Следовательно, для любого номера моды отношение частот на подвижной границе $x = a(t)$ будет таким же, как и для двойного эффекта Допплера:

$$\frac{\omega_{n+}}{\omega_{n-}} = \frac{1 + \dot{a}/c}{1 - \dot{a}/c}.$$

Во-вторых, если процесс в резонаторе квазигармонический, т. е. $\omega_{n+} \approx \omega_{n-} \approx \omega_n$, то, используя (1), (5), (6) и (7), нетрудно показать, что в нулевом приближении сохраняется инвариантное отношение

$$\frac{W_n(t)}{\tilde{\omega}_n(t)} = I = \text{const},$$

где $W_n(t)$ — полная энергия электромагнитного поля в резонаторе, усредненная за период мгновенной частоты $\tilde{\omega}_n = n\pi c a^{-1}$.

Следует также заметить, что форма, в которой ищется решение, позволяет учесть линейные по полю потери в неподвижной границе.

При наличии последних задача, очевидно, сводится к решению следующего функционального уравнения:

$$f\left(t + \frac{a}{c}\right) - e^{2\delta} f\left(t - \frac{a}{c}\right) = 2b_0,$$

где $e^{2\delta} = R$ — коэффициент отражения от неподвижной границы ($x=0$). Решение этого уравнения следует искать в виде

$$f(z) = 2b_0(1 - e^{2\delta})^{-1} + e^{\delta g(z)} \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \sin n\pi g(z) + b_n \cos n\pi g(z)\},$$

где $g(z)$ будет решением уравнения (8). Другими словами, учет потерь сводится к домножению падающих на подвижную границу и отраженных от нее волн соответственно на $\exp[\delta g(t - x/c)]$ и $\exp[\delta g(t + x/c)]$.

Так как в большинстве случаев ряд (11) просуммировать не удается и, следовательно, $g(z)$ находится приближенно, то мы не всегда можем решать задачу с произвольными начальными условиями. Однако всегда можно рассмотреть поведение полей в случае отдельно взятых мод и, таким образом, выяснить некоторые особенности системы. Покажем, что при этом погрешность в определении $U_n(x, t)$ будет пропорциональна погрешности, с которой находится $g(z)$. Обозначая соответствующие погрешности через $\Delta U_n(x, t)$ и $\Delta g(z)$ и полагая для простоты $b_n = 0$, из (5) — (7) получаем

$$\begin{aligned} \Delta U_n(x, t) = & a_n \left\{ \cos n\pi \left[\bar{g}\left(t + \frac{x}{c}\right) + \Delta g\left(t + \frac{x}{c}\right) \right] - \right. \\ & - \cos n\pi \bar{g}\left(t + \frac{x}{c}\right) - \cos n\pi \left[\bar{g}\left(t - \frac{x}{c}\right) + \Delta g\left(t - \frac{x}{c}\right) \right] + \\ & \left. + \cos n\bar{g}\left(t - \frac{x}{c}\right) \right\}, \end{aligned}$$

где $\bar{g}(z)$ — приближенное значение $g(z)$. Отсюда, применяя теорему о среднем, находим

$$\begin{aligned} |\Delta U_n(x, t)| = & \left| a_n n\pi \left[\Delta g\left(t + \frac{x}{c}\right) \sin n\pi g^{*n}\left(t + \frac{x}{c}\right) - \right. \right. \\ & - \Delta g\left(t - \frac{x}{c}\right) \sin n\pi g^{*n}\left(t - \frac{x}{c}\right) \left. \right] \right| \leq n\pi |a_n| \left\{ \left| \Delta g\left(t + \frac{x}{c}\right) \right| + \right. \\ & \left. + \left| \Delta g\left(t - \frac{x}{c}\right) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Из (11) следует, что

$$\bar{g}(z) = \sum_{m=0}^M A_m(z), \quad \text{где } A_{m+1}(z) \ll A_m(z).$$

Поэтому $\Delta g(z) \sim A_{M+1}(z)$ и

$$|\Delta U_n(x, t)| \sim n\pi |a_n| \left\{ \left| A_{M+1}\left(t + \frac{x}{c}\right) \right| + \left| A_{M+1}\left(t - \frac{x}{c}\right) \right| \right\}, \quad (15)$$

Пример 1. Рассмотрим неподвижный резонатор, образованный неподвижным полупрозрачным зеркалом ($x=0$), коэффициенты отра-

жения и прохождения которого по полю соответственно равны $R = e^{2\delta}$ и T , и равномерно движущейся поверхностью ($a = a_0(1 + \alpha t)$, где a_0 и α — постоянные величины)*. Если скорость поверхности много меньше скорости света, то ряд (11) быстро сходится и для n -й моды в нулевом приближении имеем

$$U_n^{(1)} \approx a_n \left\{ \left(1 + \alpha t + \alpha \frac{x}{c} \right)^{\delta c/\alpha a_0} \cos \frac{n\pi c}{\alpha a_0} \ln \left(1 + \alpha t + \alpha \frac{x}{c} \right) - \right.$$

$$\left. - R \left(1 + \alpha t - \alpha \frac{x}{c} \right)^{\delta c/\alpha a_0} \cos \frac{n\pi c}{\alpha a_0} \ln \left(1 + \alpha t - \alpha \frac{x}{c} \right) \right\} \quad (0 \leq x \leq a(t)),$$

$$U_n^{(2)} \approx a_n T \left(1 + \alpha t + \alpha \frac{x}{c} \right)^{\delta c/\alpha a_0} \cos \frac{n\pi c}{\alpha a_0} \ln \left(1 + \alpha t + \alpha \frac{x}{c} \right) \quad (x < 0).$$

(Здесь и далее будем полагать, что толщиной полупрозрачного зеркала можно пренебречь.) При $1 - R \ll 1$ процессы можно считать квазигармоническими и волны, распространяющиеся в различных направлениях, характеризовать мгновенными частотами, определив их как частные производные от фаз по времени. В этом случае получаем

$$\omega_{n+} \approx \frac{n\pi c}{a_0(1 + \alpha t - \alpha(x/c))}, \quad \omega_{n-} = \frac{n\pi c}{a_0(1 + \alpha t + \alpha(x/c))}.$$

Мы не будем подробно останавливаться на анализе поведения полей внутри резонатора. Отметим только, что когда работа движущейся границы над полем компенсирует потери, т. е. $|2\delta| < -\alpha a_0/c$, то энергия в системе будет расти и, по мере того как $a(t) \rightarrow 0$, стремиться к бесконечности. В противном случае, когда $|2\delta| > |\alpha a_0/c|$, энергия внутри резонатора может только уменьшаться.

В этом примере мы ограничились рассмотрением случая $|\alpha a_0/c| \ll 1$. Нетрудно, однако, найти тем же методом точное решение данной задачи для произвольных скоростей движения границы, так как ряд (11) можно просуммировать при любых значениях $|\alpha a_0/c| < 1$.

Пример 2. Пусть $a = a_0(1 + \lambda \cos \Omega t)$, где a_0 , λ и Ω — постоянные величины, причем $|\lambda| \ll 1$. Чтобы выполнялись условия применимости приближенного метода решения, необходимо еще положить, что период колебания границы много больше времени прохождения света через резонатор, т. е. $a_0 \Omega/c \ll 1$. Если потери в границах резонатора отсутствуют, то при указанных условиях решение для $U_n(x, t)$ можно приближенно записать в виде

$$U_n(x, t) = a_n \left\{ \cos \left[\frac{2n\pi c}{\Omega a_0 \sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{1 + \lambda} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} \left(t + \frac{x}{c} \right) \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \cos \left[\frac{2n\pi c}{\Omega a_0 \sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{1 + \lambda} \operatorname{tg} \frac{\Omega}{2} \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \right] \right\}.$$

Мгновенные частоты волн n -й собственной моды резонатора будут равны

$$\omega_{n+} = \omega_{0n} \left[1 - \lambda \cos \Omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right], \quad \omega_{n-} = \omega_{0n} \left[1 - \lambda \cos \Omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right],$$

* В [5] были найдены точные выражения для полей в таком резонаторе для случая, когда $\delta = 0$.

где $\omega_{0n} = n\pi c/a_0$. При этом относительная ошибка $\left| \frac{\Delta\omega_{n\pm}}{\omega_{n\pm}} \right| \sim \frac{\lambda}{3!} \left(\frac{\Omega a_0}{c} \right)^2$.

Чтобы определить, до каких пор можно пользоваться нулевым приближением в определении $U_n(x, t)$, найдем из (14) член $A_1(z)$, от которого зависит поправка к фазам волн:

$$A_1 = \frac{a_0 \Omega \lambda}{3! c} \left\{ \frac{2\Omega z}{\lambda} - \sin \Omega z + 4 \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{\sqrt{1-\lambda^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda} \operatorname{tg} \frac{\Omega z}{2} \right) \right\} \approx \\ \approx \frac{a_0 \Omega \lambda}{3! c} (2\Omega z + \sin \Omega z).$$

Подставляя выражение для $A_1(z)$ в (15), получаем

$$|\Delta U_n(x, t)| \sim n\pi |a_n| \frac{a_0 \Omega \lambda}{c} (\Omega t + 1).$$

Отсюда можно найти время, в течение которого ошибка будет меньше наперед заданной величины.

Заметим, что при некоторых значениях a_0 , λ и Ω в системе возможен замкнутый циклический режим, когда процессы будут периодически повторяться. В этом случае, очевидно, достаточно ограничиться тем порядком приближения, который обеспечивает заданную точность за время одного такого цикла.

Из проведенного рассмотрения можно сделать следующие выводы.

1. Поля в одномерных резонаторах с изменяющимися во времени размерами представляются в виде набора собственных мод, подобно тому, как это имеет место для резонатора с неподвижными границами.

2. Нулевое приближение соответствует случаю, когда размеры резонатора изменяются настолько медленно, что в системе успевает устанавливаться стоячая волна. Поэтому точность нулевого приближения тем выше, чем меньше номер моды.

3. Если не учитывать потери в резонаторе, то каким бы приближением мы ни ограничились, $\Delta U_n(x, t)$ с течением времени становится сколь угодно большой. Однако потери всегда присутствуют, и в тех случаях, когда работа границы над полем их не компенсирует, существует характерное время затухания полей. Поэтому можно найти, приближением какого порядка достаточно ограничиться, чтобы за это время $\Delta U_n(x, t)$ не превышала наперед заданной величины.

Благодарю М. А. Миллера и Л. А. Островского за внимание к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Курilikо, ЖТФ, 30, 504 (1960).
2. N. L. Balazs, J. Mathem. Analysis Appl., 3, 3 (1961).
3. О. А. Стеценко, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 6, № 6, 695 (1963).
4. О. А. Стеценко, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 6, № 6, 701 (1963).
5. Р. И. Баранов, Ю. М. Широков, ЖЭТФ, 53, вып. 6 (12), 2121 (1967).
6. А. И. Весницкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
7. В. Н. Красильников, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, 8, 43 (1968).

8. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1966.
9. Дж. Хединг, Введение в метод фазовых интегралов, изд. Мир, М, 1965.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
19 января 1971 г.

ONEDIMENSIONAL RESONATOR WITH MOVABLE BOUNDARIES

A. I. Vesnitskii

The problem on electromagnetic field solution in onedimensional resonator with movable boundaries is considered. It is shown that with slow changing of the resonator sizes, the latter is characterized by a set of orthogonal dynamic modes. The approximative method of the field solution in such a resonator is described.

УДК 621.396 67

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН

C. A. Касьянюк

В работе предлагается метод синтеза антенн с линейным раскрывом, нужные свойства диаграмм направленности которых находятся с помощью решения экстремальных задач теории линейных интегральных операторов. Рассматриваются те задачи синтеза, которые сводятся к задачам экстремализации функционалов типа $\Phi(f(x_1), f(x_2))$, $\Phi(f(x_1), f'(x_2))$, $\Phi(f(x), f'(x))$ и т. п., определенных на множестве диаграмм направленности

$$f(x) = \int_{-a}^a I(t) \exp(ikt) dt.$$

Здесь $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ —вещественная функция комплексных переменных ω_1, ω_2 , не достигающая своего экстремума ни в одной внутренней точке области определения.

Приведены три иллюстративных примера.

Многие задачи синтеза антенн с линейным раскрывом сводятся ([1], стр. 38) к определению величины раскрыва a и к расчету амплитудно-фазового распределения $I(t)$, которые обеспечивают диаграмму направленности

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-a}^a I(t) \exp(ikt) dt, \\ x &= x \sin \theta = xu \end{aligned} \tag{1.1}$$

с нужными свойствами. При этом предварительно необходимо решить математическую задачу экстремализации функционалов вида

$$\Phi(f(x_1), f(x_2)), \Phi(f(x_1), f'(x_2)), \Phi(f(x), f'(x)) \tag{1.2}$$

и т. п. (здесь $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ —вещественная функция комплексных переменных ω_1 и ω_2 , не достигающая своего экстремума ни в одной внутренней точке области определения) на множестве комплекснозначных функций $I(t)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-a}^a |I(t)|^2 dt \leq l^2 \tag{1.3}$$

(полная мощность антенны ограничена). Для каждой конкретной задачи синтеза антенны функционал (1.2) имеет свой специфический вид, но всем этим функционалам свойственно достигать свои экстремальные значения только на границе области задания. Методы, основанные на использовании неравенств Коши—Буняковского и их обобщений и применяющиеся обычно для решения такого рода задач [1], не дают должного эффекта в случае большого числа ограничений на параметры антennы.

В настоящей работе методами экстремальных задач теории линейных интегральных операторов, развитыми в последнее время, решается задача экстремизации функционалов (1.2). В качестве приложения полученных результатов рассматриваются задачи синтеза антенны с максимальным уровнем диаграммы направленности при $x = 0$ и ограниченным модулем диаграммы в любой фиксированной точке вне отрезка $[-\epsilon, \epsilon]$, а также задачи синтеза антенны с максимальной крутизной диаграммы направленности в $x = 0$ и ограниченным модулем диаграммы в любой фиксированной точке вне отрезка $[-\epsilon, \epsilon]$.

1. Рассмотрим вначале задачу экстремизации функционала $\Phi(f(x_1), f(x_2))$, для чего найдем множество G_1 значений упорядоченной пары величин (ω_1, ω_2) в двумерном комплексном пространстве. Здесь

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \int_{-a}^a I(t) \exp(itx_1) dt, \\ \omega_2 &= \int_{-a}^a I(t) \exp(itx_2) dt,\end{aligned}\tag{2.1}$$

$I(t)$ — удовлетворяет неравенству (1.3), а x_1 и x_2 — вещественные числа из отрезка $[-\kappa, \kappa]$.

Множество G_1 является выпуклым, замкнутым, ограниченным множеством ([2], стр. 149). Чтобы найти его, достаточно рассмотреть условия совместности системы интегральных уравнений (2.1) на множестве функций $I(t)$, удовлетворяющих условию (1.3), считая числа $x_1, x_2, \omega_1, \omega_2$ заданными. Необходимым и достаточным условием совместности системы (2.1) является [3] неотрицательность всех главных миноров матрицы

$$\begin{pmatrix} 2al^2 - \omega_1 \bar{\omega}_1 & l^2 \frac{2 \sin a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} - \omega_1 \bar{\omega}_2 \\ l^2 \frac{2 \sin a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} - \bar{\omega}_1 \omega_2 & 2al^2 - \omega_2 \bar{\omega}_2 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Эти условия приводят к неравенствам

$$|\omega_1| \leq l \sqrt{2a} \tag{2.3}$$

и

$$\begin{aligned}|\omega_2|^2 - \frac{\sin a(x_2 - x_1)}{a(x_2 - x_1)} (\omega_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \omega_1) &\leq \\ \leq 2al^2 - |\omega_1|^2 - l^2 \frac{2 \sin^2 a(x_2 - x_1)}{a(x_2 - x_1)^2}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Неравенство (2.3) определяет множество значений величины ω_1 — круг радиуса $l \sqrt{2a}$ с центром в начале координат. Неравенство (2.4) определяет множество значений величины ω_2 при фиксированном ω_1 из круга (2.3) — круг радиуса

$$R_1 = \sqrt{2al^2 - |\omega_1|^2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 a(x_2 - x_1)}{a^2(x_2 - x_1)^2}} \tag{2.5}$$

с центром в точке с аффиксом

$$C_1 = \omega_1 \frac{\sin a(x_2 - x_1)}{a(x_2 - x_1)}. \quad (2.6)$$

Множество G_1 ограничено гиперповерхностью

$$\begin{aligned} \omega_2 \bar{\omega}_2 + \omega_1 \bar{\omega}_1 - (\omega_2 \bar{\omega}_1 + \omega_1 \bar{\omega}_2) \frac{\sin a(x_2 - x_1)}{a(x_2 - x_1)} = \\ = 2al^2 - l^2 \frac{2 \sin^2 a(x_2 - x_1)}{a(x_2 - x_1)^2}. \end{aligned}$$

Знаки равенства в оценках (2.3) и (2.4) реализуются [3] только функциями $I_0(t)$ вида

$$I_0(t) = \xi_1 \exp(itx_1) \quad (2.7)$$

и

$$I_0(t) = \zeta_1 \exp(itx_1) + \zeta_2 \exp(itx_2), \quad (2.8)$$

где ξ_1, ζ_1, ζ_2 — комплексные числа, удовлетворяющие равенствам

$$l \sqrt{2a} e^{i\varphi} = \xi_1 \frac{\sin 2ax_1}{x_1}$$

и

$$\omega_1 = \zeta_1 \frac{\sin 2ax_1}{x_1} + \zeta_2 \frac{2 \sin a(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2},$$

$$C_1 + R_1 e^{i\psi} = \zeta_1 \frac{2 \sin a(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} + \zeta_2 \frac{\sin 2ax_2}{x_2},$$

т. е. реализуются диаграммами направленности вида

$$f_0(x) = \frac{x_1 l \sqrt{2a} e^{i\varphi}}{\sin 2ax_1} \frac{2 \sin a(x + x_1)}{x + x_1} \quad (2.9)$$

и

$$f_0(x) = \frac{1}{\Delta_1} \left| \begin{array}{cc} \omega_1 & \frac{2 \sin a(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \\ C_1 + R_1 e^{i\psi} & \frac{\sin 2ax_2}{x_2} \end{array} \right| \frac{\sin a(x_1 + x)}{x_1 + x} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_1} \left| \begin{array}{cc} \frac{\sin 2ax_1}{x_1} & \omega_1 \\ \frac{2 \sin a(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} & C_1 + R_1 e^{i\psi} \end{array} \right| \frac{\sin a(x_2 + x)}{x_2 + x}, \quad (2.10)$$

$$\Delta_1 = \left| \begin{array}{cc} \frac{\sin 2ax_1}{x_1} & \frac{2 \sin a(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \\ \frac{2 \sin a(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} & \frac{\sin 2ax_2}{x_2} \end{array} \right|.$$

Таким образом, $\text{extr}_{I(t)} \Phi(f(x_1), f(x_2))$ реализуется только функциями (2.10), причем имеет место равенство

$$\text{extr}_{I(t)} \Phi(f(x_1), f(x_2)) = \text{extr}_{\omega_1} \text{extr}_{\psi} \Phi(\omega_1, C_1 + R_1 e^{i\psi}), \quad (2.11)$$

R_1 и C_1 определены формулами (2.5) и (2.6). Равенство (2.11) позволяет поставленную задачу свести к задаче отыскания экстремума вещественной функции трех переменных в замкнутой области.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу. Среди всех диаграмм направленности линейной антенны, принимающих в любой заданной точке отрезков $[-\infty, -\varepsilon]$ или $[\varepsilon, \infty]$ значение, по модулю не превосходящее величины M , $M < l\sqrt{2a}$, найдем ту, у которой величина $|f(0)|$ наибольшая.

Решение этой задачи сводится к следующей цепочке экстремальных задач:

$$\min_{\substack{x_1 \\ \varepsilon < |x_1| < \infty}} \{ \max_{|\omega_1| \leq M} [\max_{f(x)=\omega_1} |f(0)|] \}. \quad (2.12)$$

Сначала ищется $\max |f(0)|$ по всем функциям вида (1.1) с условием (1.3), которые в точке x_1 принимают заданное значение ω_1 , $|\omega_1| \leq M$, т. е. ищется диаграмма направленности, интерполирующая в заданной точке x_1 отрезков $[-\infty, -\varepsilon]$ или $[\varepsilon, \infty]$ заданное значение ω_1 и имеющая максимальную величину $|f(0)|$. Затем найденная величина $\max |f(0)|$ максимизируется по ω_1 за счет подъема интерполируемого значения $|\omega_1|$ до уровня M — за счет изменения ω_1 в круге $|\omega_1| \leq M$. Наконец, исследуется возможность ухудшения полученного результата за счет попадания точки x_1 в «неблагоприятные» зоны отрезков $[-\infty, -\varepsilon]$ или $[\varepsilon, \infty]$.

Из неравенства (2.4) при $x_2 = 0$ следует, что

$$\max |f(0)| = |\omega_1| \left| \frac{\sin ax_1}{ax_1} \right| + (2al^2 - |\omega_1|^2)^{1/2} \left[1 - \frac{\sin^2 ax_1}{a^2 x_1^2} \right]^{1/2}, \quad (2.13)$$

причем

$$f(0) = \rho e^{i\psi},$$

где

$$\rho = \max |f(0)|, \quad \psi = \arg \omega_1.$$

Диаграмма направленности $f_0(x)$, принимающая в точке $x = 0$ значение $\rho e^{i\psi}$, а в точке x_1 значение ω_1 , на основании (2.10) имеет вид

$$\begin{aligned} f_0(x) = & \left[a^2 - \frac{\sin^2 ax_1}{x_1^2} \right]^{-1} \left\{ \left(a\omega_1 - \rho e^{i\psi} \frac{\sin ax_1}{x_1} \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\sin a(x+x_1)}{x+x_1} + \left(a\rho e^{i\psi} - \omega_1 \frac{\sin ax_1}{x_1} \right) \frac{\sin ax}{x} \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Теперь найдем максимум величины (2.13) в зависимости от изменения величины $|\omega_1|$ на отрезке $[0; M]$. Непрерывная по $|\omega_1|$ на $[0; M]$ функция $\max |f(0)|$ (2.13) достигает своего наибольшего значения либо на концах отрезка, либо в точках локального максимума. Поэтому при

$$l\sqrt{2a} \left| \frac{\sin ax_1}{ax_1} \right| \leq M < l\sqrt{2a}$$

$$\max_{|\omega_1| \leq M} \{ \max_{f(x)} |f(0)| \} = l\sqrt{2a}, \quad (2.15)$$

так как точка локального максимума $|\omega_1| = \left| \frac{\sin ax_1}{ax_1} \right| l\sqrt{2}$ попадает на отрезок $[0; M]$. А при

$$\begin{aligned}
 M &\leq l \sqrt{2a} \left| \frac{\sin ax_1}{ax_1} \right| \\
 &= M \left| \frac{\sin ax_1}{ax_1} \right| + (2al^2 - M^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\sin^2 ax_1}{a^2 x_1^2} \right)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

и достигается в точке $|\omega_1| = M$. Экстремальные значения (2.15) и (2.16) реализуются только диаграммами направленности вида (2.14) при $\omega_1 = \left| \frac{\sin ax_1}{ax_1} \right| l \sqrt{2a} e^{i\psi}$ и при $\omega_1 = M e^{i\varphi}$ соответственно.

Величина (2.16) зависит от x_1 . Поэтому найдем ее наименьшее значение (ограничиваясь случаем, когда $ax \ll \pi$) на отрезке $[\epsilon, x^*]$, где x^* — наименьший положительный корень уравнения

$$|\sin ax| = Ma|x|.$$

Несложные выкладки показывают, что это наименьшее значение (если $ax \ll \pi$) достигается при $|x_1| = \epsilon$ и

$$\begin{aligned}
 &\min_{x_1} \{ \max_{\omega_1} [\max_{f(x)} |f(0)|] \} = \\
 &= M \left| \frac{\sin a\epsilon}{a\epsilon} \right| + (2al^2 - M^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\sin^2 a\epsilon}{a^2 \epsilon^2} \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Задача максимизации величины (2.16) по x_1 приводит к результату

$$\max_{x_1} \{ \max_{\omega_1} [\max_{f(x)} |f(0)|] \} = l \sqrt{2a}, \tag{2.18}$$

достигаемому в точке $x_1 = \tilde{x}$, являющейся наименьшим положительным корнем уравнения

$$\frac{\sin ax_1}{ax_1} = \frac{M}{l \sqrt{2a}}.$$

Соответственная диаграмма направленности имеет вид

$$f(x) = l \sqrt{2a} e^{i\psi} \frac{\sin ax}{ax}. \tag{2.19}$$

Отношение уровня бокового лепестка $|f(x)|$ к уровню главного — к $|f(0)|$ (2.17)

$$M \left[M \left| \frac{\sin a\epsilon}{a\epsilon} \right| + (2al^2 - M^2)^{1/2} \left(1 - \frac{\sin^2 a\epsilon}{a^2 \epsilon^2} \right)^{1/2} \right]^{-1} \tag{2.20}$$

за счет роста l можно сделать как угодно малым.

2. Рассмотрим далее задачу экстремизации функционала $\Phi(f(x_1), f'(x_2))$, для чего найдем множество G_2 значений упорядоченной пары величин (σ_1, σ_2) в двумерном комплексном пространстве. Здесь

$$\sigma_1 = \int_{-a}^a I(t) \exp(itx_1) dt, \tag{3.1}$$

$$\sigma_2 = \int_{-a}^a I(t) it \exp(itx_2) dt,$$

$I(t)$ удовлетворяет неравенству (1.3), а x_1, x_2 — вещественные числа из отрезка $[-x, x]$.

Как и в случае множества G_1 разд. 1, для отыскания множества G_2 достаточно исследовать условия неотрицательности всех главных миноров матрицы

$$\begin{pmatrix} 2al^2 - \sigma_1 \bar{\sigma}_1 & l^2 A(x_1, x_2) - \sigma_1 \bar{\sigma}_2 \\ l^2 A(x_1, x_2) - \sigma_2 \bar{\sigma}_1 & (2/3) a^3 l^2 - \sigma_2 \bar{\sigma}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где

$$A(x_1, x_2) = \frac{2 \sin a(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)^2} - \frac{2a \cos a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Эти условия приводят к неравенствам

$$|\sigma_1| \leq l \sqrt{2a} \quad (3.3)$$

и

$$\begin{aligned} |\sigma_2|^2 - \frac{A(x_1, x_2)}{2a} (\sigma_2 \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 \sigma_1) &\leq \\ &\leq \frac{a^2}{3} (2al^2 - |\sigma_1|^2) - \frac{l^2}{2a} A^2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Неравенство (3.3) определяет множество значений величины σ_1 — круг радиуса $l \sqrt{2a}$ с центром в начале координат. Неравенство (3.4) определяет множество значений величины σ_2 при фиксированном σ_1 из круга (3.3) — круг радиуса

$$R_2 = (2al^2 - |\sigma_1|^2)^{1/2} [a^2/3 - (1/4) a^{-2} A^2(x_1, x_2)]^{1/2} \quad (3.5)$$

с центром в точке с аффиксом

$$\sigma_2 = \sigma_1 \left[\frac{\sin a(x_1 - x_2)}{a(x_1 - x_2)^2} - \frac{\cos a(x_1 - x_2)}{a(x_1 - x_2)} \right]. \quad (3.6)$$

Множество G_2 является областью двумерного комплексного пространства, ограниченного гиперповерхностью

$$\begin{aligned} \sigma_2 \bar{\sigma}_2 + \frac{a^2}{3} \sigma_1 \bar{\sigma}_1 - \frac{1}{2a} A(x_1, x_2) (\sigma_1 \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_1 \sigma_2) &= \\ &= \frac{2}{3} l^2 a^3 - \frac{1}{2a} l^2 A^2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Знаки равенства в оценках (3.3) реализуются только функциями (2.7), (2.9), а в оценках (3.4) — только функциями $I_0(t)$ вида

$$I_0(t) = \eta_1 \exp(itx_1) + \eta_2 it \exp(itx_2), \quad (3.7)$$

где η_1 и η_2 — комплексные числа, удовлетворяющие равенствам

$$\sigma_1 = \int_{-a}^a \exp(itx_1) I_0(t) dt, \quad (3.8)$$

$$C_2 + R_2 e^{i\psi} = \int_{-a}^a it \exp(itx_2) I_0(t) dt,$$

т. е. равенствам

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \eta_1 \frac{\sin 2ax_1}{x_1} + \eta_2 B_1(x_1, x_2), \\ C_2 + R_2 e^{i\psi} &= \eta_1 B_1(x_1, x_2) + \eta_2 B_2(x_2),\end{aligned}\quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned}B_1(x_1, x_2) &= \frac{2a \cos a(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} - \frac{2 \sin a(x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2)^2}, \\ B_2(x) &= \left(\frac{1}{2x^3} - \frac{a^2}{x} \right) \sin 2ax - \frac{a}{x^2} \cos 2ax.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Следовательно, знаки равенства в оценках (3.4) реализуются только диаграммами направленности вида

$$\begin{aligned}f_0(x) &= \int_{-a}^a I_0(t) \exp(itx) dt = \\ &= \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} \sigma_1 & B_1(x_1, x_2) \\ C_2 + R_2 e^{i\psi} & B_2(x_2) \end{vmatrix} \left| \frac{\sin a(x_1 + x)}{x_1 + x} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\Delta_2} \begin{vmatrix} \frac{\sin 2ax_1}{x_1} & \sigma_1 \\ B_1(x_1, x_2) & C_2 + R_2 e^{i\psi} \end{vmatrix} \left[\frac{2a \cos a(x_2 + x)}{x_2 + x} - \frac{2 \sin a(x_2 + x)}{(x_2 + x)^2} \right], \right. \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \frac{\sin 2ax_1}{x_1} & B_1(x_1, x_2) \\ B_1(x_1, x_2) & B_2(x_2) \end{vmatrix}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Таким образом, $\text{extr}_{I(t)} \Phi(f(x_1), f'(x_2))$ реализуется только функциями вида (3.7), причем имеет место равенство

$$\text{extr}_{I(t)} \Phi(f(x_1), f'(x_2)) = \text{extr}_{\sigma_1} \text{extr}_{\psi} \Phi(\sigma_1, C_2 + R_2 e^{i\psi}), \quad (3.12)$$

C_2 и R_2 определены равенствами (3.6) и (3.5).

Рассмотрим иллюстративный пример. Среди всех диаграмм направленности линейной антенны, принимающих в любой заданной точке отрезков $[-x, -\epsilon]$ или $[\epsilon, x]$ значение, по модулю не превосходящее величины M , $M < l\sqrt{2a}$, найдем ту, у которой величина $|f'(0)|$ наибольшая.

Решение этой задачи сводится к цепочке экстремальных задач

$$\min_{\epsilon < |x_1| < x} \{ \max_{|\sigma_1| < M} [\max_{f(x)=\sigma_1} |f'(0)|] \}. \quad (3.13)$$

Из неравенства (3.4) при $x_2 = 0$ следует, что

$$\max |f'(0)| = |\sigma_1| |D(x_1)| + (2al^2 - |\sigma_1|^2)^{1/2} (a^2/3 - D^2(x_1))^{1/2},$$

$$D(x) = \frac{\sin ax}{ax^3} - \frac{\cos ax}{ax}, \quad (3.14)$$

причем

$$f'(0) = \rho e^{i\psi},$$

где

$$\rho = \max |f'(0)|, \quad \psi = \arg \sigma_1.$$

Диаграмма направленности $f_0(x)$, принимающая в точке x_1 значение σ_1 и производная которой в точке $x = 0$ принимает значение $\rho e^{i\psi}$, на основании (3.11) имеет вид

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\Delta_3} \left| \begin{array}{cc} \sigma_1 & B_1(x_1, 0) \\ \rho e^{i\psi} & B_3 \end{array} \right| \frac{\sin a(x_1 + x)}{x_1 + x} + \\ &+ \frac{1}{\Delta_3} \left| \begin{array}{cc} \frac{\sin 2ax_1}{x_1} & \sigma_1 \\ B_1(x_1, 0) & \rho e^{i\psi} \end{array} \right| \left(\frac{2a \cos ax}{x} - \frac{2 \sin ax}{x^2} \right), \\ \Delta_3 &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\sin 2ax_1}{x_1} & B_1(x_1, 0) \\ B_1(x_1, 0) & B_3 \end{array} \right|, \quad B_3 = -\frac{2}{3} a^3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Найдем максимум величины (3.14) в зависимости от изменения величины $|\sigma_1|$ на отрезке $[0; M]$. Непрерывная по $|\sigma_1|$ на $[0; M]$ функция $\max |f'(0)|$ (3.14) достигает своего наибольшего значения либо на концах отрезка, либо в точке локального максимума. Поэтому при

$$\begin{aligned} \frac{l \sqrt{6a}}{a} |D(x_1)| &\leq M < l \sqrt{2a} \\ \max_{|\sigma_1| < M} \{ \max_{f(x)} |f'(0)| \} &= \frac{la \sqrt{6a}}{3}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

так как точка локального максимума $|\sigma_1| = \frac{l \sqrt{6a}}{a} |D(x_1)|$ попадает на отрезок $[0; M]$. А при

$$\begin{aligned} M &\leq \frac{l \sqrt{6a}}{a} |D(x_1)| \leq l \sqrt{2a} \\ \max_{|\sigma_1| < M} \{ \max_{f(x)} |f'(0)| \} &= \\ = M |D(x_1)| + (2al^2 - M^2)^{1/2} (a^2/3 - D^2(x_1))^{1/2} & \end{aligned} \quad (3.17)$$

и достигается в точке $|\sigma_1| = M$.

Экстремальные значения (3.16) и (3.17) реализуются диаграммами направленности вида (3.15) при $\sigma_1 = (l \sqrt{6a}/a) |D(x_1)| e^{i\psi}$ и $\sigma_1 = M e^{i\psi}$, соответственно.

Величина (3.17) зависит от x_1 , и она может быть минимизирована по x_1 аналогично тому, как это было сделано в разд. 1 для величины (2.16).

3. Отметим в заключение, что задача экстремизации функционала $\Phi(f(x), f'(x))$ является следствием предыдущих рассуждений разд. 2 при $x_1 = x_2 = x$. В этом случае матрица (3.2) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2al^2 - \sigma_1 \bar{\sigma}_1 & -\sigma_1 \bar{\sigma}_2 \\ -\sigma_2 \bar{\sigma}_1 & \frac{2}{3} a^3 l^2 - \sigma_2 \bar{\sigma}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

множество G_3 значений упорядоченной пары величин (σ_1, σ_2) ($\sigma_1 = f(x)$, $\sigma_2 = f'(x)$) в двумерном комплексном пространстве является областью, ограниченной гиперплоскостью

$$\sigma_2 \bar{\sigma}_2 - \frac{a^2}{3} \sigma_1 \bar{\sigma}_1 = \frac{2a^3}{3} l^2. \quad (4.2)$$

Множеством значений величины σ_2 при фиксированном значении величины σ_1 из круга $|\sigma_1| \leq l \sqrt{2a}$ является круг

$$|\sigma_2| \leq \rho = \frac{a}{\sqrt{3}} \sqrt{2al^2 - |\sigma_1|^2}. \quad (4.3)$$

Знак равенства в оценках (4.3) реализуется только диаграммами направленности вида

$$f_0(\zeta) = \frac{1}{\Delta} \left| \begin{array}{cc} \sigma_1 & \frac{4ax \cos 2ax - \sin 2ax}{4x^2} \\ \rho e^{i\psi} \frac{\sin 2ax}{2x^3} & -\frac{a^2 \sin 2ax}{x} - \frac{a \cos 2ax}{x^2} \end{array} \right| \frac{\sin a(x + \zeta)}{x + \zeta} -$$

$$- \frac{2}{\Delta} \left| \begin{array}{cc} \frac{\sin 2ax}{x} & \sigma_1 \\ \frac{4ax \cos 2ax - \sin 2ax}{4x^2} & \rho e^{i\psi} \end{array} \right| \frac{a(x + \zeta) \cos a(x + \zeta) - \sin a(x + \zeta)}{(x + \zeta)^2}, \quad (4.4)$$

$$\Delta = \left| \begin{array}{cc} \frac{\sin 2ax}{x} & \frac{4ax \cos 2ax - \sin 2ax}{4x^2} \\ \frac{4ax \cos 2ax - \sin 2ax}{4x^2} & \frac{\sin 2ax}{2x^3} - \frac{a^2 \sin 2ax}{x} - \frac{a \cos 2ax}{x^2} \end{array} \right|.$$

Таким образом, $\text{extr}_{I(\zeta)} \Phi(f(x), f'(x))$ реализуется только функциями вида (4.4), причем имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \text{extr}_{I(\zeta)} \Phi(f(x), f'(x)) = \\ & = \text{extr}_{\sigma_1} \text{extr}_{\psi} \Phi \left(\sigma_1, \frac{a}{\sqrt{3}} \sqrt{2al^2 - |\sigma_1|^2} e^{i\psi} \right). \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу о максимальной крутизне диаграммы направленности в заданном направлении x_0 при заданном уровне $|\sigma_1|$ луча в этом направлении. Эта задача максимизации величины $|f'(x_0)|$ при условии, что $f(x)$ в точке x_0 принимает значение σ_1 , поэтому на основании неравенства (4.3)

$$\max_{f(x)} |f'(x_0)| = \frac{a}{\sqrt{3}} \sqrt{2al^2 - |\sigma_1|^2}$$

причем этот максимум достигается только диаграммами направленности вида (4.4). При заданных размерах антенны a и заданной полной

мощности антенны задачи повышения крутизны диаграммы направленности в некотором направлении и повышения ее уровня в этом направлении противоречивы (можно добиться улучшения одного показателя за счет ухудшения другого).

Совершенно аналогично решаются задачи синтеза линейных антенн, сводящиеся к экстремизации функционалов вида

$$\Phi(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$$

и

$$\Phi(f(x_1), f'(x_1), \dots, f^{(k_1)}(x_1), \dots, f(x_m), f'(x_m), \dots, f^{(k_m)}(x_m)),$$

где вещественные функции Φ комплексных переменных обладают свойствами функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$.

Л И Т Е РА Т У Р А

1. Б. М. Минкович, В. П. Яковлев, Теория синтеза антенн, изд. Сов. радио, М., 1969.
2. Э. Беккенбах, Р. Беллман, Неравенства, изд. Мир, М., 1965.
3. С. А. Касьянюк, Автоматика и телемеханика, № 8, 169 (1970).

Поступила в редакцию
27 мая 1970 г.

ONE CLASS OF PROBLEMS OF THE THEORY OF LINEAR ANTENNA SYNTHESIS

S. A. Kas'yanyuk

A method of the linear aperture antenna synthesis is proposed. The necessary characteristics of the radiation pattern are found by the solving the external problems of the theory of linear integral operators. There are considered the problems of the synthesis which are reduced to those of extremizing the functionals of the type

$$\Phi(f(x_1), f(x_2)), \quad \Phi(f(x_1), f'(x_2)), \quad \Phi(f(x), f'(x))$$

etc., determined on a set of radiation patterns

$$f(x) = \int_{-a}^a I(t) e^{ixt} dt.$$

Here $\Phi(\omega_1, \omega_2)$ is the real function of complex variables ω_1, ω_2 not reaching its extremum in either interior point of the region of existence.

Three illustrations are given.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 533.901

О НЕЛИНЕЙНОМ ПРОСВЕТЛЕНИИ ПЛОСКОГО ПЛАЗМЕННОГО СЛОЯ

B. A. Миронов

Всевозможные стационарные режимы, возникающие при распространении электромагнитных волн в плазме, диэлектрическая проницаемость ϵ которой зависит от квадрата модуля электрического поля E , подробно изучены в [1, 2]. Когда нелинейность обусловлена выталкиванием плазмы из области более сильного поля (нагрев, стрикция), оказывается, что решениями уравнений Максвелла в закритической плазме, в отличие от линейного случая, являются не экспоненциально убывающие, а периодические в пространстве функции. Таким образом, в режиме нелинейного взаимодействия с полем закритическая плазма качественно сходна с обычной прозрачной средой, так что становится возможным существенное увеличение глубины проникновения поля в такую плазму [1].

Цель настоящей работы состоит в изучении возможности нелинейного просветления плоского плазменного слоя. В принципе для этого можно было бы непосредственно воспользоваться формулами, приведенными в [2]. Однако, как будет ясно из дальнейшего, при рассмотрении этой конкретной задачи целесообразно переписать решение в более удобном виде, исходя из граничных условий, заданных не на передней, а на задней границе слоя, т. е. действуя, в известном смысле, в обратном направлении.

Рассмотрим нормальное падение плоской волны из вакуума на однородный слой плазмы, ограниченной плоскостями $z = d$ и $z = -d$. Поле в вакууме с учетом условия излучения ($z \rightarrow \infty$) имеет вид

$$E = \begin{cases} E_0 \exp(ik_0 z) + E_1 \exp(-ik_0 z) & (z > d) \\ E_3 \exp(ik_0 z) & (z < -d) \end{cases} \quad (1)$$

где E_0, E_1, E_3 — соответственно амплитуды полей падающей, отраженной и проходящей волн, $k_0 = \omega/c$, ω — частота волн. Внутри слоя поле представим следующим образом: $E_2 = \eta(z) \exp(i\varphi(z))$, где η и φ — действительные функции. Тогда из уравнений Максвелла для среды $c\epsilon = 1 - q\psi(|E|)$ получаем закон сохранения плотности потока энергии $\dot{\Phi}\eta^2 = k_0 E_3^2 = \text{const}$ и уравнение для определения η :

$$\ddot{\eta} + k_0^2 [1 - q\psi(\eta) - E_3^4/\eta^4] \eta = 0, \quad (2)$$

где q находится из закона сохранения числа частиц: $q = 2dq_0 / \int_{-d}^d \psi(\eta) dz$, $q_0 = \omega_p^2/\omega^2$, ω_p — плазменная частота электронов.

Из условий непрерывности поля и его производной при $z = d$ и $z = -d$ получаем граничные условия $\eta(-d) = E_3$, $\dot{\eta}(-d) = 0$ для уравнения (2), первый интеграл которого при этом записывается в виде

$$\left(\frac{d\eta}{d\zeta} \right)^2 + \frac{E_3^4}{\eta^2} + \eta^2 - q \int_{E_3^2}^{\eta^2} \psi(v) dv = 2E_3^2 \quad (3)$$

(здесь $\zeta = k_0 z$), а также соответствующее выражение для квадрата модуля коэффициента прохождения:

$$|T|^2 = \left[1 + \frac{q}{4E_3^2} \int_{E_3^2}^{\eta^2(d)} \psi(v) dv \right]^{-1}. \quad (4)$$

Когда нелинейность обусловлена выталкиванием плазмы из области более сильного поля, $\psi(\eta)$ представляет собой функцию, монотонно убывающую от $\psi(\eta = 0) = 1$ до $\psi(\eta = \infty) = 0$. Анализ уравнения (3) на фазовой плоскости показывает, что $\eta(\zeta)$ представляет собой периодическую функцию как в прозрачной, так и в закритической плазме. Тогда из (4) следует, что слой с длиной, кратной периоду функции $\eta^2(\zeta)$, будет прозрачным (неотражающим).

По-видимому, наиболее простой функцией $\psi(\eta)$, зависимость которой от η качественно совпадает с описанной выше и для которой решение уравнения (3) может быть получено в явном виде, является $\psi = (1 + |E|^2/E_p^2)^{-2}$, где E_p — характерное плазменное поле*. Это решение выражается через эллиптические интегралы первого и третьего рода и имеет довольно сложный вид. Поэтому оно не приводится здесь, а обсуждаются лишь некоторые предельные случаи.

При $E_0/E_p \ll 1$ период функции $\eta^2(\zeta)$ в закритической плазме равен $L = (2/\sqrt{q-1}) \ln(E_p/E_0)$. Таким образом, полное прохождение возможно при любой сколь угодно малой амплитуде поля падающей волны.

В другом предельном случае ($E_0/E_p \gg 1$) структура поля в плазме имеет очень простой вид. В этом можно непосредственно убедиться, взяв $\psi = E_p^2 / |E|^2$. Тогда из (3) находим

$$\eta^2 = E_3^2 [1 + y \sin^2(\zeta + k_0 d)], \quad (5)$$

где величина $y = qE_p^4/E_3^4$ и удовлетворяет уравнению $y = L q_0 / \int_0^L (1 + y \sin^2 \zeta)^{-2} d\zeta$, $L = 2k_0 d$. Подставляя (5) в (4), получаем для квадрата модуля коэффициента отражения

$$|R|^2 = 1 - |\beta|^2 = \frac{y^2 \sin^2 L}{4 [1 + y(1+y/2) \sin^2 L]}.$$

Величина $|R|^2$ для закритической плазмы (при значениях $q_0 = 2; 5$) вычислена на ЭВМ как функция длины слоя L . Результаты представлены на рис. 1. Для сравнения

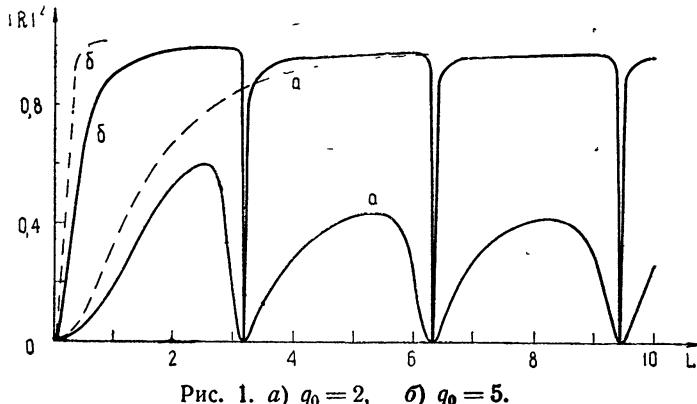


Рис. 1. а) $q_0 = 2$, б) $q_0 = 5$.

на этом же рисунке пунктиром приведена зависимость $|R|^2$ от L в линейном приближении. Очевидно, что в нелинейном случае плазма действительно оказывается средой более прозрачной.

Просветление плазменного слоя связано, естественно, с перераспределением концентрации плазмы под действием поля. При этом диэлектрическая проницаемость оказывается знакопеременной функцией координат. Плоские слои с таким $\epsilon(z)$ в линейной теории могут быть прозрачны. Проще всего в этом убедиться, рассмотрев входной импеданс $z_{\text{вх}}$ системы, состоящей из двух тонких слоев сильно закритической плазмы, расположенных в вакууме на расстоянии $L_{\text{эфф}}$ друг от друга. Аналогичное распределение концентрации внутри слоя реализуется под действием поля (5). Тогда при $k_0 L_{\text{эфф}} \sim \pi$ входной импеданс такой системы оказывается порядка единицы, и отраженная волна отсутствует.

* Для плазмы со стрикционной нелинейностью $E_p^2 = 8T\omega^2 m/e^2$, а с тепловой — в δ раз меньше, где T — температура в эв, e , m — соответственно заряд и масса электрона $\delta = m/M$, M — масса иона.

В заключение заметим, что рассматриваемый эффект, по-видимому, имеет место и при отражении электромагнитной волны от неоднородного слоя более сложной геометрии*.

Автор признателен В. Б. Гильденбургу, А. Г. Литваку и М. А. Миллеру за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, ЖЭТФ, 53, 1662 (1967).
2. Ф. Г. Басс, И. Л. Вербицкий, Ю. Г. Гуревич, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 10, 1480 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
29 января 1971 г.

УДК 550.338.2

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В D-ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ

Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков

Одним из способов измерения электронной концентрации в D-области ионосферы является метод частичных отражений. Обычно для определения профилей $N(h)$ используется различие в величинах поглощения обыкновенной и необыкновенной компонент радиоволн (см., например, [1]). В работе [2] предложен фазовый метод измерений $N(h)$. В работе [3] обращается внимание на то, что величину электронной концентрации можно найти по коэффициенту корреляции между амплитудами обыкновенной и необыкновенной волн. В настоящем сообщении изложены предварительные результаты экспериментальной проверки последнего метода.

Если не учитывать соударения электронов с молекулами в рассеивающем объеме, то для достаточно узкой диаграммы направленности антенны и прямоугольной формы зондирующего импульса коэффициент корреляции амплитуд обычной и необыкновенной компонент в первом приближении равен [3]

$$\rho_{A^0 A^x} \approx \rho_{E^0 E^x}^2 = \frac{|\Gamma_{E^0 E^x}|^2}{|\Gamma_{E^0}| |\Gamma_{E^x}|} = \frac{\sin^2 [kL(n_0 - n_x)]}{k^2 L^2 (n_0 - n_x)^2}. \quad (1)$$

В этом соотношении Γ_{E^0} и Γ_{E^x} — корреляционные функции полей E^0 и E^x (компоненты полей считаются распределенными по нормальному закону), $L = c\tau/2$, τ — длительность зондирующего импульса, n_0 , n_x — показатели преломления обычной и необыкновенной волн, $k = \omega/c$ и ω — круговая частота. Согласно (1), значения $\rho_{A^0 A^x}$ не зависят от параметров среды, расположенной ниже рассеивающего объема, поэтому измерения $\rho_{A^0 A^x}$ на разных высотах можно использовать для определения $N(h)$. Каждое значение N при этом будет соответствовать плотности электронов, усредненной по объему толщиной $c\tau/2$.

Для экспериментальной проверки предложенного в [3] метода были использованы данные наблюдений частичных отражений 24.10.1969 и 18.06.1970 гг. в Горьком во время слабых внезапных ионосферных возмущений [4]. Передатчик работал на частоте 5,75 МГц с длительностью импульсов 50 мксек. Раздельный прием обычной и необыкновенной компонент осуществлялся с помощью антенны, имевшей размеры диаграммы направленности порядка $12^\circ \times 12^\circ$ по уровням половинной мощности. Высотные зависимости амплитуд $A^0(h)$ и $A^x(h)$ регистрировались с экрана осциллографа с помощью кинокамеры. Коэффициенты корреляции $\rho_{A^0 A^x}$ вычислялись на ЭВМ через

* В частности, как сообщил В. Б. Гильденбург, при взаимодействии электромагнитной волны с плоским закритическим плазменным слоем с параболическим распределением концентраций электронов при некоторых условиях также возможно полное прохождение.

каждые 2,5 км (см. рис. 1). По значениям $\rho_{A^0 A^x}$ находились разности $n_0 - n_x$ и соответствующие им величины концентрации N . Результаты вычислений $N(h)$ представлены кружками на рис. 2 вместе с профилями $N(h)$, найденными по тем же данным $A^0(h, t)$ и $A^x(h, t)$ обычным методом дифференциального поглощения (сплошные линии). Как видно из рис. 2, имеет место удовлетворительное соответствие между значениями N , определенными разными методами.

Соотношение (1) выведено без учета соударений v_m электронов с молекулами в рассеивающем слое (считалось, что $v_m^2 \ll \omega^2$). Нетрудно получить в тех же предположениях, что и в [2, 3], более общее выражение для $\rho_{A^0 A^x}$, учитывающее соударения v_m :

$$\rho_{A^0 A^x} = \frac{\sin^2 x + \sin^2 y}{x^2 + y^2} \frac{y_0 y_x}{\sin y_0 \sin y_x}, \quad (2)$$

где

$$x = kL(\mu_0 - \mu_x),$$

$$y = kL(x_0 + x_x),$$

$$y_0 = 2kLx_0, \quad y_x = 2kLx_x,$$

$$n_0, x = \mu_0, x - i\mu_0, x.$$

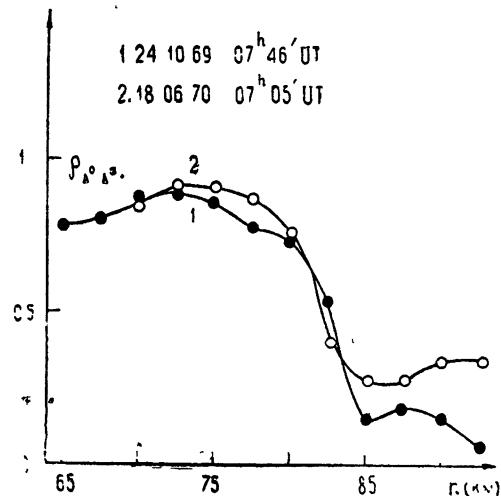


Рис. 1.

Выражение (2) позволяет в принципе находить концентрацию электронов по коэффициенту корреляции $\rho_{A^0 A^x}$ во всей D -области без дополнительных ограничений на

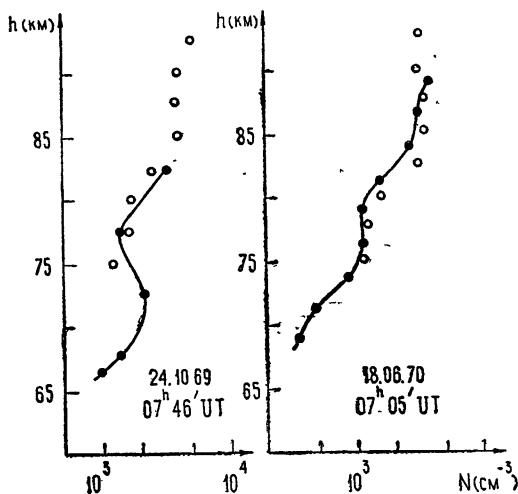


Рис. 2.

соотношение между v_m и ω . Заметим, что на высотах, где $v_m^2 \ll \omega^2$, влияние соударений на значение $\rho_{A^0 A^x}$ невелико. Поэтому, определяя на этих высотах значения N из (1) и разность величин поглощения обычной и необычной компонент, можно получать сведения относительно $v_m(h)$.

Более подробные результаты сравнительного анализа различных методов определения $N(h)$ по данным частичных отражений будут изложены в другой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. S. Belrose, J. Atmos. and Terr. Phys., **32**, 567 (1970).
2. H. A. von Bie1, W. A. Flood, H. G. Camnitz, J. Geophys. Res., **75**, 4863 (1970).

3. Н. Г. Денисов, В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика (в печати).
 4. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Л. В. Гришкевич, В. А. Иванов, Г. П. Комраков, Труды Львовской конференции по физике ионосфера (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
6 апреля 1971 г

УДК 538.56

О ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ЯДЕР

Л. Л. Бунишили, Э. Х. Халваши

В диамагнетиках с парамагнитными примесями спиновую систему можно представить как совокупность трех подсистем [1, 2]: электронной зеемановской, электронной диполь-дипольной ($d-d$ -резервуар) и ядерной зеемановской.

Если W — вероятность переходов, обусловленных приложенным переменным полем, превосходит вероятность переходов, обусловленных спин-решеточной релаксацией, то можно получить значительное уменьшение температуры $d-d$ -резервуара [1]. В этом случае релаксационная связь между $d-d$ -резервуаром и ядерной зеемановской подсистемой приведет к уменьшению температуры последней [2]. При этом предполагается, что W больше скорости установления равновесия между $d-d$ -резервуаром и ядерной зеемановской подсистемой.

С другой стороны, хорошо известно [2], что при низких температурах скорость установления равновесия $(1/T_{dI})$ между $d-d$ -резервуаром и ядерной зеемановской подсистемой гораздо больше скорости установления равновесия $(1/T_{dI})$ между $d-d$ -резервуаром и решеткой. Поэтому возможна ситуация, когда вероятность обмена энергией между $d-d$ -резервуаром и ядерной зеемановской подсистемой больше вероятности перехода, обусловленной внешним переменным полем ($2WT_{dI} \ll 1$), но эта последняя вероятность удовлетворяет условию насыщения, т. е. $2WT_{dI} \gg 1$. При таких условиях в процессе поглощения внешнего переменного поля $d-d$ -резервуар и ядерную зеемановскую подсистему следует рассматривать, аналогично работе [3], как единую систему с обратной температурой β_d . Тогда соответствующие уравнения для поглощения внешнего переменного поля, согласно [1, 3], будут иметь вид

$$\frac{d\beta_z}{dt} = -2W \left(\beta_z - \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \beta_d \right),$$

$$\frac{d\beta_d}{dt} = \frac{\omega_0 (\omega_0 - \omega)}{\omega_d^2 + \omega_I^2 f^{-1}} 2W \left(\beta_z - \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \beta_d \right). \quad (1)$$

Здесь β_z — обратная температура электронной зеемановской подсистемы; ω_0 , ω , ω_d , ω_I — соответственно частоты электронной зеемановской подсистемы, внешнего переменного поля, $d-d$ -резервуара и ядерной зеемановской подсистемы; f — концентрация электронных спинов.

Решение уравнений (1) для времен $T_{dI} \gg t \gg 1/W$ при начальном условии $\beta_z = \beta_d = \beta_I$ (β_I — обратная температура решетки) имеет вид

$$\beta_{z0} = \beta_I \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0},$$

$$\beta_{d0} = \beta_I \frac{(\omega_0 - \omega) \omega_0}{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_d^2 + \omega_I^2 f^{-1}}. \quad (2)$$

В отличие от известного выражения для β_d , когда $2WT_{dI} \gg 1$, в данном случае вместо ω_d^2 появляется $\omega_d^2 + \omega_I^2 f^{-1}$, и так как $\omega_I^2 f^{-1} \gg \omega_d^2$, то получим, что, во-первых, существенно уменьшается поляризация ядер (в $\sqrt{\omega_I^2 f^{-1}/\omega_d^2}$ раза), во-вторых, поляризация становится пропорциональной концентрации.

Аналогичная ситуация возникает при кросс-релаксации. Нестационарное значение β_d также зависит от величины $2W_{kp} T_{dI}$ (W_{kp} — вероятность кросс-релаксации).

В данном случае β_d имеет вид, аналогичный (2). Только вместо ω будет стоять частота спиновой системы, к которой приложено внешнее переменное поле, а ϕ_0 заменяется частотой второй спиновой системы, которой передается насыщение при кросс-релаксации. Отметим, что при выполнении условия $\omega_d^2 \ll \omega_I^2 f^{-1}$, так же как и в случае насыщения электронного парамагнитного резонанса, при достаточно малой концентрации парамагнитной примеси поляризация пропорциональна концентрации. Поскольку $(\omega_1 - \omega_2)^2 \sim \omega_d^2 \ll \omega_I^2 f^{-1}$, то $\beta_z/\beta_0 \ll 1$, и в результате кросс-релаксации происходит передача температуры, т. е. осуществляется традиционная картина кросс-релаксации. С увеличением концентрации, когда справедливо условие $\omega_d^2 > f^{-1} \omega_I^2$, картина кросс-релаксации соответствует результатам [5], в которых поляризация ядер обратно пропорциональна концентрации, и в результате кросс-релаксации почти не происходит передача насыщения из одной линии в другую. Таким образом, когда скорость кросс-релаксации превосходит спин-решеточную, в течение промежутка времени большего, чем время кросс-релаксации, но меньшего, чем время спин-решеточной релаксации, будет иметь место следующая картина: при достаточно малой концентрации происходит передача насыщения от одной резонансной линии к другой, а с ростом концентрации эта передача перестает осуществляться.

В заключение авторы выражают благодарность М. Д. Звиададзе за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б. Н. Провоторов, ЖЭТФ, 42, 882 (1962).
- 2 Л. Л. Бушивили, ЖЭТФ, 49, 1868 (1965); Г. Р. Хуцишвили, УФН, 96, 441, (1968); М. А. Кожушнер, Б. Н. Провоторов, Доклад на Всесоюзном совещании по радиоспектроскопии твердого тела, Красноярск, 1964; В. А. Азаркин, М. Е. Мифед, М. Н. Родак, ЖЭТФ, 55, 1791 (1968).
- 3 W. Th. Wenckebach, T. J. B. Swanepoelvugt and N. J. Pouliis, Physica, 46, 303 (1970).
- 4 Л. Л. Бушивили, М. Д. Звиададзе, ФТТ, 10, 2397 (1968).
- 5 М. Н. Родак, ФТТ, 6, 521 (1964); ЖЭТФ, 45, 730 (1963).

Тбилисский государственный университет

Поступила в редакцию
25 января 1971 г.

УДК 535.1

ОБ УГЛОВЫХ БЛУЖДАНИЯХ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СЕЧЕНИЯ РАСХОДЯЩЕГОСЯ ПУЧКА СВЕТА

Г. А. Андреев, Э. И. Гельфер

Флуктуации направления распространения пучка света, прошедшего через турбулентную атмосферу, характеризуют положением «центра тяжести» [1, 2] случайной интенсивности в поперечном сечении (y_c, z_c):

$$\left\{ \begin{array}{c} y \\ z \end{array} \right\}_c = \frac{\int \left\{ \begin{array}{c} y \\ z \end{array} \right\} I(\rho) d\rho}{\int I(\rho) d\rho}, \quad (1)$$

где $\rho(y, z)$ —вектор в плоскости поперечного сечения пучка.

В работе [2] получено выражение для среднего квадрата линейных смещений координат центра тяжести в фокальной плоскости расходящегося светового пучка. При этом поле в начальном сечении представлялось в виде

$$E(0, \rho) = E_0 \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2\rho_e^2} + \frac{i k \rho^2}{2f} \right\}, \quad (2)$$

где ρ_e —эффективная ширина пучка, f —радиус кривизны волнового фронта.

Вычисления, аналогичные выполненным в [2], показали, что случайная интенсивность в поперечном сечении расходящегося пучка записывается в виде

$$I(L, \rho) = \frac{k^2 E_0^2}{4\pi^2 L^2} \iiint \exp \left\{ -\frac{\rho'^2 + \rho''^2}{2\rho_e^2} + ik \frac{\rho'^2 - \rho''^2}{2f} \left(1 + \frac{f}{L}\right) - ik\rho \frac{\rho' - \rho''}{L} + i[\varphi(r, r') - \varphi(r, r'')] \right\} d\rho' d\rho'', \quad (3)$$

где L — путь, пройденный волной в турбулентной атмосфере, φ — флюктуационная разность фаз между точками $r'(0, \rho')$ и $r(L, \rho)$. Полученное выражение отличается от соответствующей формулы для случайной интенсивности в сфокусированном пучке сомножителем $\exp \left[ik \frac{\rho'^2 - \rho''^2}{2f} \left(1 + \frac{f}{L}\right) \right]$ в подынтегральном выражении, учитывающим радиус кривизны волнового фронта расходящегося пучка. Подставляя (3) в (1) и учитывая, что множитель $\exp \{i[\varphi(r, r') - \varphi(r, r'')]\}$ является гораздо более медленно меняющейся функцией, чем $\exp \left(ik\rho \frac{\rho' - \rho''}{L} \right)$ [2], вычислим случайную координату центра тяжести

$$\begin{aligned} y_c &= i \frac{L}{\pi k \rho_e^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y'^2 + y''^2}{2\rho_e^2} + ik \frac{y'^2 - y''^2}{2f} \left(1 + \frac{f}{L}\right) \right\} \times \\ &\times \delta'(y' - y'') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{z'^2 + z''^2}{2\rho_e^2} + ik \frac{z'^2 - z''^2}{2f} \left(1 + \frac{f}{L}\right) + \right. \\ &\left. + i[\varphi(r_0; y', z') - \varphi(r_0; y'', z'')] \right\} \delta(z' - z'') dz' dz'' dy' dy'', \end{aligned} \quad (4)$$

где $r_0 = r(L, 0)$.

Используя фильтрующие свойства δ -функции, после интегрирования по z'' , получим

$$\begin{aligned} y_c &= i \frac{L}{\pi k \rho_e^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{z'^2}{\rho_e^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{y'^2 + y''^2}{2\rho_e^2} + \right. \\ &+ ik \frac{y'^2 - y''^2}{2f} \left(1 + \frac{f}{L}\right) + i[\varphi(r_0; y', z') - \varphi(r_0; y'', z')] \left. \right\} \times \\ &\times \delta'(y' - y'') dy' dy'' dz'. \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразуем (5) с учетом известных свойств производных обобщенных функций:

$$\begin{aligned} y_c &= -i \frac{L}{\pi k \rho_e^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{z'^2}{\rho_e^2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{y'}{\rho_e^2} + ik \frac{y'}{f} \left(1 + \frac{f}{L}\right) + \right. \\ &\left. + i \frac{\partial \varphi(r_0; y', z')}{\partial y'} \right] \exp \left(-\frac{y'^2}{\rho_e^2} \right) dy' dz'. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как интеграл от нечетной функции в бесконечных пределах равен нулю, то окончательно для случайной координаты центра тяжести найдем:

$$y_c = \frac{1}{\pi k \rho_e^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{\rho'^2}{\rho_e^2} \right) \frac{\partial \varphi(r_0; \rho')}{\partial y'} dy' dz'. \quad (7)$$

Для среднего квадрата углового смещения центра тяжести получается выражение

$$\begin{aligned} \langle \beta^2 \rangle &= \frac{\langle y_c^2 \rangle}{L^2} = \langle \gamma^2 \rangle = \frac{\langle z_c^2 \rangle}{L^2} = \frac{1}{4k^2 \rho_e^2} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{\rho^2}{2\rho_e^2} \right) \left[D''_{\varphi}(\rho) + \frac{D'_{\varphi}(\rho)}{\rho} \right] \rho d\rho, \end{aligned} \quad (8)$$

полностью совпадающее с соответствующими выражениями для сфокусированного и коллимированного пучков, несмотря на отличие в исходных формулах для случайной интенсивности в сечении пучка. В (8) входит $D_\phi(\rho)$ — структурная функция случайного набега фазы $\varphi(r_0, \rho')$ на пути между произвольной точкой $(0, \rho')$ в начальном сечении и центральной областью в плоскости наблюдения (точкой $(L, 0)$). Поэтому, независимо от вида пучка, при вычислении смещения его центра тяжести должна быть использована структурная функция флуктуаций фазы в сходящихся лучах. Подставляя конкретный вид ее [3, 4] в (8), для среднего квадрата углового смещения светового центра тяжести расходящегося пучка получим соотношение

$$\langle \beta^2 \rangle = 0,48 \alpha C_n^2 L (2\rho_e)^{-1/3}. \quad (9)$$

Коэффициент α вычислен в [2]. $\alpha = 1$ при $\lambda L / \pi \rho_e^2 \gg 1$ и $\alpha = 2$ при $\lambda L / \pi \rho_e^2 \ll 1$.

Таким образом, вычисления показывают, что при $\rho_e/f \ll 1$, когда распределение поля в начальном сечении может быть записано в виде (2), смещение центра тяжести пучка, независимо от его формы (коллимированный, сфокусированный, расходящийся), описывается одной и той же формулой.

Эксперименты по измерению смещений расходящегося пучка проводились с импульсным когерентным источником света — $\lambda = 0,53 \text{ мкм}$, угол расходимости $\theta_e = 30''$. Фоторегистрация поперечного сечения осуществлялась по схеме, описанной в [6]. Расстояние, проходимое пучком в турбулентной атмосфере, составляло $L = 1,5 \text{ км}$.

На рис. 1 приведено несколько фотографий поперечного сечения пучка; сделанных в плоскости наблюдения с интервалом времени порядка одной минуты. Для из-

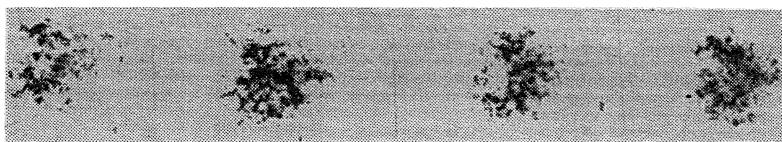


Рис. 1. Изображение сечения расходящегося светового пучка в различные моменты времени (уменьшено в 40 раз).

мерения смещения центра тяжести использовались пленки с позитивным изображением интенсивности в сечении пучка, полученные из первичной пленки контактным перепечатыванием.

Центр тяжести кадра прозрачного отпечатка измерялся на оптической установке для определения центра тяжести двумерных структур переменной прозрачности. Ошибка измерений координаты центра тяжести в установке порядка $0,02 \text{ мм}$, что составляет $0'',1$ в данном эксперименте.

Дисперсия смещения центра тяжести изображения пучка определялась по обычным формулам с использованием измеренных последовательно координат центров тяжести n кадров. Так для реализаций вида, приведенного на рис. 1, величины углового смещения пучка в горизонтальном и вертикальном направлениях равны соответственно (для $n = 30$): $\sqrt{\langle \beta^2 \rangle} = 5''$; $\sqrt{\langle \gamma^2 \rangle} = 4''$.

Из измерений смещения изображения удаленного точечного источника света в фокальной плоскости оптической системы [5], проведенных одновременно с регистрацией поперечного сечения расходящегося светового пучка, были получены значения $C_n = 0,79 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1/3}$ для горизонтальных смещений и $C_{\tilde{n}} = 0,69 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-1/3}$ для вертикальных. Подставляя найденные значения C_n в (9), получим $\sqrt{\langle \beta^2 \rangle} = 4'',5$; $\sqrt{\langle \gamma^2 \rangle} = 3'',8$, что в пределах 10% ошибок измерений согласуется с результатами эксперимента.

Принадлежность приведенных значений флуктуаций углов прихода к области сильных или слабых флуктуаций интенсивности определяется по дисперсии уровня σ_χ ; в условиях эксперимента $\sigma_\chi \approx 1,5$. Совпадение экспериментальных данных с результатами приведенного приближенного расчета подтверждает возможность расчета флуктуаций фазы и вызванных ими флуктуаций углов прихода волны и направления распространения светового пучка указанным методом даже в области сильных флуктуаций амплитуды [7, 8].

Л И Т Е Р А Т У РА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 1, 61 (1970).
3. Ф. Г. Басс, А. В. Мень, Акуст. ж., 9, вып. 3, 283 (1963).

4. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 7, № 2, 306 (1964).
5. Г. А. Андреев, В. М. Кузнецов, В. Э. Цейтлин, Тезисы докладов 8-го научного совещания по оптике атмосферы и актинометрии, Томск, 80 (1970).
6. Г. А. Андреев, Э. И. Гельфер, В. А. Зверев, В. Э. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 2, 276 (1971).
7. А. С. Гурвич, М. А. Каллистров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 1, 66 (1968).
8. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 5, 723 (1969).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
30 ноября 1970 г.

УДК 533.574.4.517.9

ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МАЛЫХ ТЕЛАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ. II

A. Г. Рамм

1. Характеристику рассеяния электромагнитных волн на теле, размер которого $a \ll \lambda$, где λ — длина волны первичного поля в среде, можно вычислить по формулам [1]

$$f_E = \frac{k_0^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\epsilon_0} [x^0 [Px^0]] - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} [x^0 M] \right\}, \quad (1)$$

$$f_H = [x^0, f_E] \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}},$$

где $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, $\omega = 2\pi/\lambda$, ϵ_0 , μ_0 — параметры среды, P , M — электрический и магнитный моменты, приобретенные телом в статических полях E , H , значения которых равны значению первичного поля в точке нахождения малого тела. В [1] выведены формулы для отыскания P и M для однородных тел произвольной формы. Здесь эта задача решена для слоистого тела и системы тел.

Пусть поверхность Γ_j отделяет слой с постоянными ϵ_{j-1} , μ_{j-1} от слоя с постоянными ϵ_j , μ_j ($0 < j < n$); $\gamma_j = \epsilon_j - \epsilon_{j-1}/\epsilon_j + \epsilon_{j-1}$; V_j — объем тела, ограниченного поверхностью Γ_j ; $N_i(t_j)$, $t_i^{(l)}$ — i -я компонента внешней нормали к поверхности Γ_j вектора t_j ;

$$A_l \sigma = \int_{\Gamma_j} \Psi(s_j, t_j) \sigma(t_j) dt_j, \quad \Psi(s, t) = \frac{\partial}{\partial N(s)} \frac{1}{2\pi r_{st}}; \quad (2)$$

$$T_j^{(p)} \sigma = \int_{\Gamma_p} \Psi(s_j, t_p) \sigma(t_p) dt_p. \quad (3)$$

Определим тензор электрической поляризуемости тела формулой $P_l = A_{lq} \epsilon_0 E_q$. Решение электростатической задачи о внесении тела в первичное поле $E = -\nabla \varphi$ имеет вид

$$u(x) = \sum_{p=1}^n \int_{\Gamma_p} \frac{\sigma_p(t_p) dt_p}{4\pi r_{xt_p} \epsilon_0}, \quad (4)$$

где функции σ_p определяются из системы уравнений

$$\sigma_j(t_j) = -\gamma_j A_j \sigma_j - \gamma_j \sum_{p \neq j} T_j^{(p)} \sigma_p - 2\gamma_j \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial N(t_j)}, \quad (1 < j < n). \quad (5)$$

Теорема 1. Система (5) однозначно разрешима, причем итерационный процесс

$$\begin{aligned}\sigma_j^{(n+1)} &= -\gamma_j A_j \sigma_j^{(n)} - \gamma_j \sum_{p \neq j} T_j^{(p)} \sigma_p^{(n)} - 2\gamma_j \frac{\partial \varphi}{\partial N(t_j)} \epsilon_0, \\ \sigma_j^{(0)} &= -2\gamma_j \frac{\partial \varphi}{\partial N(t_j)} \epsilon_0 \quad (1 \leq j \leq n)\end{aligned}\quad (6)$$

сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $0 < c < 1$ зависит только от формы поверхностей Γ_j и постоянных γ_j . Функции $\sigma_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_j^{(n)}$ удовлетворяют уравнениям (5) и условиям

$$\int_{\Gamma_j} \sigma_j \, dt_j = 0. \quad (7)$$

Из теоремы 1 можно вывести приближенную формулу для тензора поляризуемости. Приведем лишь формулу первого приближения:

$$A_{iq}^{(1)} = \sum_{p=1}^n \alpha_{iq}^{(1)} (\gamma_p) V_p + \sum_{p=1}^n \sum_{l \neq p} \alpha_{iq}^{(p, l)}. \quad (8)$$

Здесь

$$\alpha_{ij}^{(1)} (\gamma_p) = \delta_{ij} (2\gamma_p + 2\gamma_p^2) - \frac{\gamma_p^2}{\pi V_p} \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_p} \frac{N_i(s) N_j(t)}{r_{st}} \, ds \, dt; \quad (9)$$

$$\alpha_{iq}^{(p, l)} = \begin{cases} -\frac{\gamma_p \gamma_j}{\pi} \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_j} \frac{N_l(t) N_q(s)}{r_{st}} \, dt \, ds, & p > j \\ -\frac{\gamma_p \gamma_j}{\pi} \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_j} \frac{N_j(t) N_q(s)}{r_{ts}} \, dt \, ds + 4\gamma_p \gamma_j V_j \delta_{lq}, & p < j \end{cases}. \quad (10)$$

Вычисление магнитного момента проводится аналогично [1].

2. Пусть плоская волна $E = E_0 \exp \{i(kr)\}$ падает на систему n однородных тел, $a_p, \epsilon_p, V_p, \Gamma_p$ — соответственно характерный размер, диэлектрическая постоянная, объем и поверхность p -го тела, $ka_p \ll 1$. Если расстояние между телами велико по сравнению с длиной волны падающего поля, то характеристика рассеяния на системе тел равна сумме характеристик рассеяния на отдельных телах (многократным рассеянием можно пренебречь). Если расстояние между телами сравнимо с длиной волны, то следует учесть взаимодействие между ними, что и сделано ниже. В рассматриваемой задаче первичное поле для каждого отдельного тела является однородным электростатическим, но оно зависит от положения тела. Для тела, находящегося в точке t_j , статическое поле равно $E_j = E_0 \exp \{i(k, t_j)\} \equiv -\nabla \psi_j$. Решение статической задачи ищем в виде (4). Для функций σ_p получаем систему уравнений

$$\sigma_j(t_j) = -x_j A_j \sigma_j - x_j \sum_{p \neq j} T_j^{(p)} \sigma_p - 2x_j \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial N(t_j)}, \quad (11)$$

$$x_j \equiv \frac{\epsilon_j - \epsilon_0}{\epsilon_j + \epsilon_0} \quad (1 \leq j \leq n).$$

Теорема 2. Система (11) однозначно разрешима. Ее решение может быть получено методом итераций

$$\sigma_j^{(n+1)}(t_j) = -x_j A_j \sigma_j^{(n)} - x_j \sum_{p \neq j} T_j^{(p)} \sigma_p^{(n)} - 2x_j \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial N(t_j)}, \quad (12)$$

$$\sigma_j^{(0)} = -2x_j \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial N(t_j)} = 2x_j \epsilon_0 \exp \{i(k, t_j)\} (E_0, N(t_j)), \quad (13)$$

который сходится со скоростью геометрической прогрессии. Функции $\sigma_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_j^{(n)}$ ($1 \leq j \leq n$) удовлетворяют системе (11) и условиям (7),

Обозначим через B_{lq} , $P_l = B_{lq} \epsilon_0 E_{0q}$ тензор поляризуемости рассматриваемой системы тел. Приближенная формула (первого приближения) для вычисления этого тензора имеет вид:

$$B_{lq}^{(1)} = \sum_{p=1}^n a_{lp}^{(1)}(x_p) V_p \exp\{i(k, x_p)\} + \sum_{p=1}^n \sum_{j \neq p} \tilde{a}_{lp}^{(p, j)} \exp\{i(k, x_j)\}. \quad (14)$$

Здесь величины $a_{lp}^{(1)}(\gamma)$ определены формулой (9), а

$$\tilde{a}_{lp}^{(p, j)} = -\frac{1}{\pi} x_p x_j \exp\{i(k, x_j)\} \int_{\Gamma_p} \int_{\Gamma_j} \frac{N_l(t) N_q(s)}{r_{ts}} dt ds. \quad (15)$$

В частности, для системы из двух тел формулы (14), (15) дают

$$\begin{aligned} B_{lq}^{(1)} = & a_{lq}^{(1)}(x_1) V_1 \exp\{i(k, x_1)\} + a_{lq}^{(1)}(x_2) V_2 \times \\ & \times \exp\{i(k, x_2)\} - \frac{x_1 x_2}{\pi} \left[\exp\{i(k, x_2)\} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{N_l(t) N_q(s)}{r_{ts}} \times \right. \\ & \times dt ds + \exp\{i(k, x_1)\} \left. \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{N_l(t) N_q(s)}{r_{ts}} dt ds \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что $B_{lq}^{(1)}$, B_{lq} — неэрмитовы тензоры, поскольку внешнее поле является статическим лишь в окрестности каждого из тел, но не в целом. Если расстояние d между телами мало ($kd \ll 1$), то фазовые множители $\exp\{i(k, x_j)\}$, где $j = 1, 2$, практически совпадают и тензор (16) становится эрмитовым.

Если глубина проникновения поля в каждое из тел удовлетворяет неравенству $\delta_p \gg a_p$ и если $\mu_p \approx 1$, то магнитным излучением можно пренебречь. В противном случае его нужно учесть [1].

В частности, даже при $\mu_p = 1$, но при $\delta_p \ll a_p$ дипольное магнитное излучение имеет порядок величины такой же, как дипольное электрическое [1]. Комбинируя результаты пп. 1, 2, можно вывести формулу для характеристики рассеяния на системе слоистых тел.

3. Приведем в заключение идею доказательства теоремы 1. Система (5) записывается в виде $\sigma = -B\sigma + f$, где σ — искомый вектор ($\sigma_1, \dots, \sigma_n$). f — вектор свободных членов, B — матричный оператор системы (5). Доказывается, что уравнение $\sigma = \lambda B\sigma$ не имеет нетривиальных решений при $|\lambda| \leq 1$, если выполнены условия (7). (Если $|\gamma_j| < 1$, то сделанное утверждение верно и тогда, когда условия (7) не выполнены.) Отсюда нетрудно вывести утверждение теоремы 1.

Полученные результаты имеют обширные применения [2, 3]. Подчеркнем, что в п. 2 учитывались кооперативные эффекты (по терминологии обзора [3]), т. е. взаимодействие между рассеивающими телами.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Рамм, ДАН СССР, 186, № 1, 62 (1969); 195, № 6, 1303 (1970); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 8, 1185 (1969); 14, № 4, 613 (1971).
2. Г. Ванде Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961.
3. Г. В. Розенберг, УФН, 91, № 4, 569 (1967); 69, № 1, 57 (1959).

Ленинградский институт точной механики и оптики

Поступила в редакцию
21 сентября 1970 г.

УДК 621.385.6

О РОЛИ ПРИКАТОДНОЙ ОБЛАСТИ В МЕХАНИЗМЕ ФЛУКТУАЦИЙ В МАГНЕТРОННОМ ДИОДЕ

М. И. Кузнецов

В [1] был рассмотрен механизм, вызывающий флюктуации тока, текущего от поверхности прикатодного минимума потенциала в магнетронном диоде к области вер-

шин траекторий электронов. Но в итоговой формуле работы [1] не была учтена депрессия этих флуктуаций, обусловленная реакцией прикатодного минимума потенциала. Поэтому может показаться, что упомянутая формула дает сильно завышенные значения интенсивности флуктуационного тока на низких частотах, где, как известно, депрессия флуктуаций тока прикатодным минимумом потенциала особенно велика. Но в действительности учет реакции прикатодного минимума потенциала на флуктуации тока, рассчитанные в [1], в конечном счете приводит к почти такой же формуле для флуктуационного тока, если принять во внимание некоторые особенности движения электронов в области вершин траекторий. Результаты соответствующих расчетов излагаются в настоящем письме.

Механизм, описанный в [1], приводит к тому, что в прикатодной области формируются сгустки заряда со средней квадратичной величиной $q = M e$, где

$$M = 4\pi^{3/2} \varphi_{B K}^{1/8} \varphi_T^{7/8} y_B \frac{\epsilon_0}{(2.55)^2}.$$

(Здесь и всюду ниже используются обозначения, принятые в [1].) Они направляются от поверхности прикатодного минимума потенциала к вершинам траекторий электронов. Очевидно, что прикатодная область реагирует на образование этих сгустков так же, как и на дробовые флуктуации плотности заряда в потоке электронов, проходящих через прикатодный минимум потенциала. Иными словами, в этом потоке через интервал времени $\Delta t_1 = 1.5 k T_k \epsilon_0 / u_m e j$ после формирования каждого из рассматриваемых сгустков возникают разрежения, «дефект заряда» в которых равен заряду соответствующего «первичного» сгустка. Очевидно, что флуктуационное поле, создаваемое в области вершин траекторий этими парами сгустков и разрежений, отличается от создаваемого «дробовыми» парами только тем, что его средняя квадратичная величина больше в M раз. Точнее, средний квадрат величины этого поля равен $Ey = eM\rho/\epsilon_0 l$, а радиус его корреляции равен расстоянию между парными сгустками и разрежениями в этой области. Следовательно, средний квадрат возмущения азимутальной скорости электрона в области вершин траекторий также в M раз больше, чем рассчитанный в [1]:

$$(\overline{dv_x})^2 = \frac{4eM V \pi}{\epsilon_0 y_B} \left(\frac{\varphi_{B K}}{\varphi_T} \right)_{av}^{1/8} = \frac{16\pi^3 (\varphi_{B K})^{1/4} \varphi_T^{3/4}}{(2.55)^2} \quad av$$

или

$$\sqrt{(\overline{dv_x})^2} = \frac{4\pi}{2.55} \left(\frac{\varphi_T}{\varphi_{B K}} \right)^{3/8} v_B,$$

где $v_B = \omega_H y_B$ — средняя азимутальная скорость электронов в области вершин траекторий. Из-за этого возмущения азимутальной скорости электроны испытывают дополнительное радиальное ускорение, средняя квадратичная величина которого равна $\sqrt{(\overline{dy})^2} = (4\pi/2.55)(\varphi_T/\varphi_{B K})^{3/8} v_B \omega_H$. Используя результаты работы [2], можно показать, что средняя величина радиального ускорения электронов в области вершин траекторий удовлетворяет следующему неравенству:

$$0 < -\frac{\frac{d^2 y}{dt^2}}{dt^2} < \sqrt{1.28} \frac{\omega_H v_B \left[(\omega_p^2 - \omega_H^2)/\omega_p^2 \right]^{7/8} r_k^{1/4}}{4 \sqrt{\pi} \alpha^{1/8} y_B^{1/4}}$$

$$\left(\text{при } \omega_H y_B \gg \sqrt{2 \frac{e}{m} \varphi_T} \right).$$

где $\alpha = m \omega_H^2 r_k^2 / 2k T_k$, r_k — радиус катода. Следовательно, результирующее радиальное ускорение электронов в области вершин их невозмущенных траекторий может оказаться положительным, если

$$\frac{4\pi}{2.55} \left(\frac{\varphi_T}{\varphi_{B K}} \right)^{3/8} > \sqrt{1.28} \frac{\left[(\omega_p^2 - \omega_H^2)/\omega_p^2 \right]^{7/8} (r_k/y_B)^{1/4}}{4 \sqrt{\pi} \alpha^{1/8}}.$$

Нетрудно убедиться, что это неравенство выполняется во всех практически интересных случаях. Следовательно, флуктуационные поля в области вершин траекторий вызывают рассортировку электронов. Те электроны, которые ускоряются флуктуационным полем, возвращаются к катоду. Те, которые тормозятся этим полем, переходят в часть электронного облака, расположенную выше вершин невозмущенных траекторий, т. е. либо

в квазибриллюэновский слой, если он может существовать в данном режиме, либо, в противном случае, в нерегулярную часть электронного облака*. В обоих случаях время пребывания этих электронов вне двухпоточной области значительно больше, чем $2\pi/\omega_H$, и определяется главным образом случайными процессами.

Напомним, что возмущения радиальной скорости и, следовательно, радиального ускорения практически одинаковы для всех электронов, пролетающих через область вершин траекторий на расстояниях друг от друга, меньших, чем x_1 . Таким образом, электроны уходят из двухпоточной части электронного облака в квазибриллюэновский слой или нерегулярную часть электронного облака группами, содержащими в среднем $\rho x_1^2 l/e = M$ электронов. Соответственно в потоке электронов, текущем от вершин траекторий к катоду, случайным образом возникают разрежения с дефектом числа электронов, в среднем равным M . Иными словами, из области вершин траекторий к катоду течет флюктуационный ток, состоящий из разрежений заряда величиной eM , беспорядочно следующих друг за другом, т. е. такой же, как «итоговый» ток, вычисленный в [1].

Таким образом, итоговая формула [1] в конечном счете оказывается правильной и при полном учете реакции прикатодного минимума потенциала на флюктуации тока, текущего от его поверхности к вершинам траекторий электронов.

В заключение считаю приятным долгом выразить благодарность Л. В. Родыгину и В. Е. Белову за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Кузнецов Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 12, 1873 (1969).
2. В. Е. Белов, Л. В. Родыгин, Л. С. Родыгина, А. Д. Юнаковский, Тезисы докладов на VI межвузовской конференции по электронике СВЧ, Минск, 1969, стр. 124.

Поступила в редакцию
2 октября 1970 г.

* Условия существования квазибриллюэновского слоя определены в [2].

ХРОНИКА

СЕМИНАР «ПРИМЕНЕНИЕ НАЗЕМНОЙ РАДИОТЕПЛОЛОКАЦИИ
В МЕТЕОРОЛОГИИ»

17 марта 1971 г. в Научно-исследовательском радиофизическом институте (г. Горький) состоялся семинар на тему «Применение наземной радиотеплолокации в метеорологии». Открыл семинар член-корреспондент АН СССР В. С. Троицкий (НИРФИ). С обзорным докладом «Основные результаты и возможности исследования земной атмосферы методами наземной радиотеплолокации» выступил А. П. Наумов (НИРФИ).

Первая часть семинара была посвящена радиометрическим исследованиям влагосодержания атмосферы, облаков, осадков и сравнению результатов решения соответствующих задач при наземных и спутниковых измерениях атмосферного радиоизлучения. В этой части семинара были представлены сообщения И. А. Горчаковой, М. С. Малкевича (ИФА АН СССР), А. П. Наумова и В. М. Плечкова (НИРФИ) «Примеры определения вертикального профиля влажности по наземным измерениям теплового радиоизлучения атмосферы в резонансе $H_2O \lambda = 1,35 \text{ см}$ », А. И. Горчаковой, В. В. Демина, А. Т. Ершова (ИФА АН СССР) «К определению вертикального профиля влажности по измерениям микроволнового излучения с ИСЗ», сотрудников ЦАО ГУГМС СССР (А. Г. Горелика и др.) «Возможности и перспективы совместного применения радиолокационного и радиотеплолокационного методов для измерения облаков и осадков», Л. М. Митника (ИРЭ АН СССР) «О выборе частот при определении интегральных параметров атмосферы методом пассивного радиозондирования», В. М. Плечкова (НИРФИ), Ю. А. Романова, В. Г. Снопкова (ИО АН СССР) «Результаты радиометрического исследования атмосферы над Атлантическим океаном с борта НИС «Академик Курчатов» (VIII рейс)». Практическому использованию результатов измерений в СВЧ диапазоне полей интегральной влажности для целей прогнозирования погоды и синоптического анализа был посвящен доклад Е. П. Домбковской (Гидрометцентр, СССР).

Вторая часть семинара «Радиометрические исследования подстилающей поверхности и примесных газов атмосферы» открылась сообщением К. Я. Кондратьева, Е. М. Шульгиной, О. М. Покровского, Ю. М. Тимофеева (ЛГУ, ГГО) «Возможности косвенного зондирования почвы в сантиметровом диапазоне». Затем были сделаны сообщения К. Я. Кондратьевым и Е. М. Шульгиной (ЛГУ, ГГО) «Расчеты излучательной способности взволнованной поверхности моря», А. Е. Башариновым и А. М. Шутко (ИРЭ АН СССР) «Исследование земных покровов методами СВЧ-радиометрии» и «Исследование поверхности акваторий методом СВЧ-радиометрии». К. С. Шифрин, Ю. И. Рабинович и В. В. Мелентьев (ГГО) в своем сообщении изложили метод и результаты лабораторных измерений излучательных способностей поверхностных пород Земли в сантиметровом диапазоне волн. В сообщении В. Н. Воронова, А. Г. Кислякова, Э. П. Кукиной, А. И. Наумова (НИРФИ) были приведены экспериментальные результаты определения интегрального содержания CO и N_2O в земной атмосфере по наблюдениям их линий вращательного спектра с поверхности Земли в горном районе.

В дискуссии приняли участие А. Г. Горелик (ЦАО ГУГМС СССР), А. С. Гурвич и М. С. Малкевич (ИФА АН СССР), В. С. Самойленко и В. Г. Снопков (ИО АН СССР), В. И. Дробышевич (ВЦ СО АН СССР) и другие участники семинара.

В рекомендации, принятой участниками семинара, отмечается достоинства радиотеплолокационных методов исследования метеопараметров атмосферы, а также температурного режима и степени влажности поверхностных покровов. Были сформулированы основные проблемы радиотеплолокационных исследований атмосферы и подстилающей поверхности, требующие своего решения. Участники семинара также отметили, что ценная в научном и полезная в практическом отношении метеорологическая информация может быть получена при комплексных одновременных исследованиях характеристик атмосферы радиотеплолокационным методом с поверхности Земли и с лепестильных аппаратов, радиотеплолокационным и радиолокационным методами, а также при одновременных наблюдениях атмосферы в микроволновом и инфракрасном диапазонах волн.