ственным образом распадается на четыре подобласти, из которых главную трудность при вычислении интегралов представляет ближняя подобласть, определяемая неравенствами $r_1' < R_0$, $r_2' < R_0$. При интегрировании по ближней подобласти множитель $\exp(-R'/d)$ можно приближенно заменить на единицу, а тензор $S_{\mu' \nu'}(R - R')$ вынести за знак интеграла в точке $R' = 0$. После этого получаем оценку

$$\sum_{n,\, m>0;\; n+m>3} J_{\mu\nu}^{(nm)}(< R_0, < R_0) \sim \max\,[1,\, k_0 R_0,\, k_0 r_0 (k_0 R_0)^2], \tag{11}$$

где знаки неравенств слева указывают на ближнюю подобласть интегрирования.

С помощью оценки (11), а также оценок других интегралов $J_{\mu\nu}^{(nm)}$, которые производятся без затруднений, неравенство (8) сводится к виду

$$k_0 d (k_0 r_0)^3 \gg k_0 R_0 \gg 1. \tag{12}$$

Из (12) следует, что условие (8) пренебрежения эффектом квазистатического поля в уравнении Б-С предполагает выполнение двух неравенств: $[(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)]^2 n r_0^3 \ll 1$ и $k_0 R_0 \gg 1$, из которых первое совпадает с условием пренебрежения квадратичными по плотности членами в эффективной диэлектрической проницаемости среды [4], второе же означает, что тензор интенсивности поля плавно меняется на масштабе длины волны.

Автор благодарит В. М. Финкельберга за постановку задачи и обсуждение результатов, а также С. М. Рытова и В. И. Татарского за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, ЖЭТФ, **46**, вып. 4, 1399 (1964).
2. Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961, стр. 93.
3. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 5, 719 (1968).
4. В. М. Финкельберг, ЖТФ, **34**, вып. 3, 509 (1964).
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1958, стр. 322.
6. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, **53**, вып. 3(9), 978 (1967).
7. Г. В. Розенберг, УФН, **56**, вып. 1, 77 (1955).

Поступила в редакцию
6 июля 1970 г.

УДК 538.56

ИЗЛУЧЕНИЕ МАГНИТНОГО И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЕЙ ИЗ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ШАРА

М. С. Ковнер, Г. А. Лупанов

В работах [1] найдено сопротивление излучения магнитного и электрического диполей, помещенных в центр диэлектрического шара. При решении задачи из рассмотрения полного тока и тока, «ответственного за излучение», определялись поля внутри и вне шара и затем вычислялся вектор Пойнтинга.

В настоящем сообщении методом наведенных электродвижущих сил (ЭДС) [2] в подобной задаче отыскивается сопротивление излучения и добавка к реактивной части входного импеданса излучателя. Пусть ток антенны в неограниченном пространстве, заполненном диэлектриком с проницаемостью ε, есть I. Введение границы сопровождается появлением ЭДС $\mathcal{E}^{\text{нав}}$. Соответствующая добавка к импедансу определится как

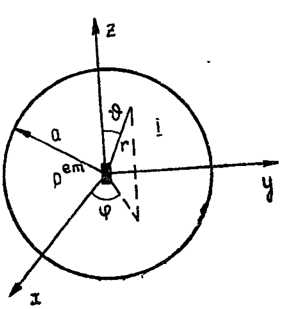

Рис. 1.

$$\Delta Z = -\mathcal{E}^{\text{нав}} I.$$

Магнитный диполь. Для магнитной рамки

$$\Delta Z = \frac{1}{cI}\frac{d\psi}{dt} = i\frac{\omega S H_z}{cI}, \tag{1}$$

где S — площадь рамки (ее размер много меньше длины волны λ), H_z — наводимое поле, ось z выбрана по магнитному моменту (см. рис. 1).

Запишем поле магнитного диполя в области I в виде суперпозиции бегущего и стоячего решений [3] (последнее ответственно за наведенные токи) уравнений Максвелла:

$$H_\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{r}\left[-i\varepsilon k^2 p^m e^{-i\rho_1}\left(\frac{i}{\rho_1^2}-\frac{1}{\rho_1}-i\right)+\Gamma_m\left(\frac{\sin\rho_1}{\rho_1^2}-\frac{\cos\rho_1}{\rho_1}-\sin\rho_1\right)\right],$$

$$H_r = \frac{2\cos\vartheta}{r}\left[-i\varepsilon k^2 p^m e^{-i\rho_1}\left(\frac{i}{\rho_1^2}-\frac{1}{\rho_1}\right)+\Gamma_m\left(\frac{\sin\rho_1}{\rho_1^2}-\frac{\cos\rho_1}{\rho_1}\right)\right], \quad (2)$$

$$E_\varphi = -\frac{ik\sin\vartheta}{\rho_1}\left[-i\varepsilon k^2 p^m e^{-i\rho_1}\left(\frac{i}{\rho_1}-1\right)+\Gamma_m\left(\frac{\sin\rho_1}{\rho_1}-\cos\rho_1\right)\right];$$

в (2) $\rho_1 = \varepsilon^{1/2}kr$, $k=\omega/c$, Γ_m — коэффициент при стоячем поле, определяемый обычным образом из граничных условий.

В пределе при $\rho_1 \to 0$ наводимое поле

$$H_z^{\text{нав}} = \frac{2}{3}\varepsilon^{1/2}k\Gamma_m. \quad (3)$$

Полагая диэлектрическую проницаемость пространства вне шара равной единице, из (1), (3) находим

$$\Delta Z = \frac{\varepsilon^{3/2}R_{\Sigma,m,\text{в}}(1-\sqrt{\varepsilon})}{M}\left\{\left[\sqrt{\varepsilon}\rho^2-(1-\varepsilon)(1+\sqrt{\varepsilon})\right]\sin^2\rho-\right.$$

$$\left.-\rho^2\cos^2\rho+\rho(1+\sqrt{\varepsilon})\sin 2\rho+i(1+\sqrt{\varepsilon})\left[(\rho^2+\varepsilon-1)\frac{\sin 2\rho}{2}+\rho\cos 2\rho\right]\right\}, \quad (4)$$

$$M = [\varepsilon\rho^2+(1-\varepsilon)^2]\sin^2\rho-\rho(1-\varepsilon)\sin 2\rho+\rho^2\cos^2\rho,$$

где $R_{\Sigma,m,\text{в}}$ — сопротивление излучения в вакууме; $\rho=\sqrt{\varepsilon}ka$; a — радиус шара.

Рассмотрим предельные случаи.

а) Квазистатическое приближение $\lambda \gg a$ $(\rho \ll 1)$:

$$\Delta Z = R_{\Sigma,m,\text{в}}\left[(1-\varepsilon^{3/2})+i\frac{1-\varepsilon}{ka}\right]; \quad (5)$$

$$R_{\Sigma,m} = \operatorname{Re} Z_{\text{вх}} = R_{\Sigma,m,\text{в}}, \quad (6)$$

последний результат физически очевиден.

б) Волновое приближение $\lambda \ll a$ $(\rho \gg 1)$:

$$\Delta Z = R_{\Sigma,m,\text{в}}\varepsilon^{3/2}(1-\sqrt{\varepsilon})\left[\frac{\sqrt{\varepsilon}\sin^2\rho-\cos^2\rho}{\varepsilon\sin^2\rho+\cos^2\rho}+i\frac{(1+\sqrt{\varepsilon})\sin 2\rho}{2(\varepsilon\sin^2\rho+\cos^2\rho)}\right]; \quad (7)$$

$$R_{\Sigma,m} = R_{\Sigma,m,\text{в}}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon\sin^2\rho+\cos^2\rho}. \quad (8)$$

Соотношения (6), (3) совпадают с полученными в [1]. На рис. 2 изображена зависимость величины $\delta = \operatorname{Im}\Delta Z/\varepsilon^{3/2}R_{\Sigma,m,\text{в}}$ от параметра $\rho = 2\pi a/\lambda$ для случая $\varepsilon = 2$. Отметим, что поправка к реактансу может иметь как емкостный, так и индуктивный характер.

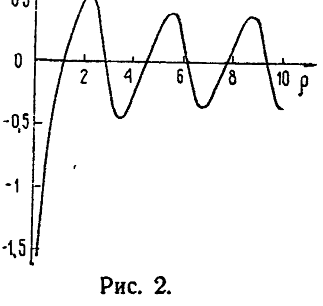

Рис. 2.

Электрический диполь. Рассмотрение, совершенно аналогичное приведенному выше, в случае электрического диполя для поправки к импедансу дает

$$\Delta Z_e = e^{-i\rho}\frac{\alpha_1+i\beta_1}{\alpha_2+i\beta_2}R_{\Sigma,e,\text{в}}\sqrt{\varepsilon}, \quad (9)$$

где $R_{\Sigma,e,\text{в}}$ — сопротивление излучения электрического диполя в вакууме,

$$\alpha_1 = (1-\varepsilon)\left(\sqrt{\varepsilon}-\rho^2\right),\quad \alpha_2 = (1-\varepsilon)\,\rho^2\cos\rho - \rho\,(1-\varepsilon-\rho^2)\sin\rho,$$
$$\beta_1 = \left(1-\sqrt{\varepsilon}\right)\rho\left[(1+\sqrt{\varepsilon})^2-\rho^2\right],\quad \beta_2 = \sqrt{\varepsilon}\left[(1-\varepsilon)\sin\rho - \rho\,(1-\varepsilon+\rho^2)\cos\rho\right]. \tag{10}$$

В частности, в квазистатическом приближении получаем

$$\Delta Z_e = R_{\Sigma,e,\text{в}}\left[\left(\frac{3}{\varepsilon+2}\right)^2 - \sqrt{\varepsilon} - i\,\frac{3\,(\varepsilon-1)}{k^3a^3\,(\varepsilon+2)}\right]; \tag{11}$$

$$R_{\Sigma,e} = \operatorname{Re} Z_{\text{вх}} = R_{\Sigma,e,\text{в}}\left(\frac{3}{\varepsilon+2}\right)^2. \tag{12}$$

В волновом приближении имеем

$$\Delta Z_e = \frac{R_{\Sigma,e,\text{в}}\sqrt{\varepsilon}\left(\sqrt{\varepsilon}-1\right)}{\varepsilon\cos^2\rho+\sin^2\rho}\left[\sin^2\rho - \sqrt{\varepsilon}\cos^2\rho + i\,\frac{1+\sqrt{\varepsilon}}{2}\sin 2\rho\right]; \tag{13}$$

$$R_{\Sigma,e} = R_{\Sigma,e,\text{в}}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon\cos^2\rho+\sin^2\rho}. \tag{14}$$

Интересно сравнить поправку к реактансу с величиной последнего в вакууме. Так, для магнитного диполя, у которого реактанс в вакууме $Z_{p,m,\text{в}}$ равен [2]

$$Z_{p,m,\text{в}} \approx 2{,}5\cdot 10^3\,\frac{b}{\lambda}\ln\frac{b}{r_0}\ (\text{ом}), \tag{15}$$

где b — радиус кругового витка, r_0 — радиус проволоки, находим

$$\gamma = \left|\frac{\operatorname{Im}\Delta Z}{Z_{p,m,\text{в}}}\right| \approx \begin{cases} 100\left(\dfrac{b}{\lambda}\right)^2\dfrac{\lambda}{a}\,\dfrac{1}{\ln b/r_0} & (\lambda \gg a) \\[2ex] 100\left(\dfrac{b}{\lambda}\right)^3\dfrac{1}{\ln b/r_0} & (\lambda \ll a) \end{cases}. \tag{16}$$

Авторы признательны А. А. Андронову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Sager, F. Tisi, Z. angew. Phys., 22, 121 (1967); 22, 210 (1967).
2. С. Щелкунов, Г. Фриис, Антенны, изд Сов. радио, М., 1955
3. М. С. Ковнер, В. А. Лапидус, Г. А. Лупанов, Изв высш уч зав. — Радиофизика, 14, № 1, 28 (1971).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
6 июля 1970 г.