по сравнению с масштабом флуктуаций показателя преломления, с длиной волны, а также по сравнению с обратной величиной масштаба Δp_z изменения всякой функции $\chi(\boldsymbol{p})$ в зависимости от p_z, которая интегрируется по $\boldsymbol{p}$ в произведении со спектральной плотностью $f(Z, \boldsymbol{p})$ при вычислении некоторой физической величины (средней интенсивности поля, среднего потока энергии, ковариации поля и т. д.).

Автор благодарит С. М. Рытова и Ю. А. Кравцова за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, ЖЭТФ, **56**, вып 4, 1262 (1969).
2. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
3. В. В Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
4. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 10, 1582 (1968).
5. G. S. S. Avila, J. B. Keller, Comm. Pure Appl. Mathem., **16**, 363 (1963).
6. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 2, 234 (1971).

Поступила в редакцию
1 декабря 1969г.

УДК 538.56 : 519.25

О ЗНАЧЕНИИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРИ МНОГОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Ю. Н. Барабаненков

При рассеянии электромагнитной волны на некотором объекте в ближней зоне существенны квазистатические составляющие рассеянного поля с амплитудой, убывающей обратно пропорционально второй и третьей степеням расстояния. Вследствие эффекта квазистатических полей, возникающих при многократном рассеянии электромагнитных волн в рассеивающих средах, в интегральном члене уравнения Бете—Солпитера (Б-С) при переходе к среде, состоящей из точечных дипольных эффективных неоднородностей, появляются расходящиеся трехмерные интегралы со степенной сингулярностью типа расстояние в минус третьей, четвертой, пятой или шестой степени.

В данной заметке предлагается метод последовательных приближений для учета эффекта квазистатического поля при решении уравнения Б-С и производится оценка величины этого эффекта.

Уравнение Б-С для ковариации электрического поля $\overline{E_\mu(\boldsymbol{r}_1) E^*_\nu(\boldsymbol{r}_2)}$ имеет вид [1]

$$\overline{E_\mu(\boldsymbol{r}_1) E^*_\nu(\boldsymbol{r}_2)} = \overline{E}_\mu(\boldsymbol{r}_1)\overline{E}^*_\nu(\boldsymbol{r}_2) + \int \overline{G}_{\mu\mu''}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}''_1)\, \overline{G}^*_{\nu\nu''}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}''_2) \times$$
$$\times\, d^3 r''_1\, d^3 r''_2\, K_{\mu''\mu',\,\nu''\nu'}(\boldsymbol{r}''_1, \boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}''_2, \boldsymbol{r}'_1)\, d^3 r'_1\, d^3 r'_2\, \overline{E_{\mu'}(\boldsymbol{r}'_1) E^*_{\nu'}(\boldsymbol{r}'_2)}. \tag{1}$$

Здесь $\overline{E}_\mu(\boldsymbol{r})$ и $\overline{G}_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ — средние по ансамблю электрическое поле и тензор Грина, удовлетворяющие уравнению Дайсона, K — оператор интенсивности, греческие индексы принимают значения 1, 2, 3 и по повторяющимся индексам производится суммирование.

Будем считать, что рассеивающая среда в среднем однородна изотропна и состоит из сферических рассеивателей, удовлетворяющих условиям рэлеевского рассеяния [2]. Массовый оператор M и оператор интенсивности K вычисляем по формулам (23) работы [3] в первом порядке по плотности рассеивателей. Полученное выражение для ядра K имеет вид

$$K_{\mu\mu',\,\nu\nu'}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1; \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}'_2) \approx 12\pi \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)^2 k_0^4 n r_0^3\, w\left(\frac{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}{r_0}\right) \delta_{\mu\mu'}\, \delta_{\nu\nu'}\, \delta^3(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}'_1)\, \delta^3(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}'_2), \tag{2}$$

где r_0 — радиус рассеивателя, ε — его диэлектрическая проницаемость, n — плотность рассеивателей, k_0 — волновое число в свободном пространстве; функция $w(\rho)$ принимает значения

$$w(\rho) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{4}\rho + \dfrac{1}{16}\rho^3 & (\rho < 2) \\ 0 & (\rho > 2) \end{cases}. \tag{3}$$

Средний тензор Грина $G_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})$ для рассматриваемой рассеивающей среды может быть получен из тензора Грина свободного пространства [4] путем формальной замены k_0 на $k_{эфф}$, где $k^2_{эфф} = k^2_0(1+4\pi n\alpha)$ и α — коэффициент поляризуемости рассеивателя. Удобно записать

$$\overline{G}_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{3} g^{(n)}_{\mu\nu}(\boldsymbol{r})\exp(ik_{эфф}r), \qquad g^{(0)}_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) =$$
$$= -(4\pi/3\,k_0^2)\,\delta_{\mu\nu}\,\delta^3(\boldsymbol{r}),\ g^{(1)}_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) = (\delta_{\mu\nu} - s_\mu s_\nu)/r, \tag{4}$$
$$g^{(2)}_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) = (i/k_0)(\delta_{\mu\nu} - 3s_\mu s_\nu)/r^2,\ g^{(3)}_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}) = -(1/k_0^2)\,P(\delta_{\mu\nu} - 3s_\mu s_\nu)/r^3.$$

Здесь $\boldsymbol{s}$ — единичный вектор вдоль вектора $\boldsymbol{r}$, P — символ главного значения [5]. В сумме (4) слагаемое с индексом $n = 1$ определяет амплитуду поперечной волны, излучаемой точечным источником в начале координат; остальные слагаемые определяют квазистатические поля.

Построим для решения уравнения Б-С метод последовательных приближений, учитывающий в нулевом приближении только поперечные волны, а в следующих приближениях — также и квазистатические поля. С этой целью перепишем уравнение Б-С в операторной форме

$$Q = \Gamma(j \times j^*) + \Gamma K Q, \tag{1a}$$

где $Q = \overline{E \times E^*}$, $\Gamma = \overline{G \times G^*}$ и j с точностью до постоянного множителя есть вектор плотности электрического тока. Представим Γ в виде суммы $\Gamma = \Gamma_0 + \Delta\Gamma$, где Γ_0 — билинейная комбинация из слагаемого с индексом $n = 1$ в сумме (4), определяющая интенсивность излучаемой поперечной волны. Решение уравнения (1a) ищем в виде ряда

$$Q = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j, \tag{5}$$

считая, что член Q_j имеет порядок $(\Delta\Gamma)^j$. Подставляя (5) в (1a), получаем уравнение для нулевого приближения

$$Q_0 = \Gamma_0(j \times j^*) + \Gamma_0 K Q_0 \tag{6}$$

и цепочку уравнений для высших приближений

$$Q_1 = \Delta\Gamma(j \times j^*) + \Delta\Gamma K Q_0 + \Gamma_0 K Q_1, \tag{7}$$

. . . .

Уравнение (6) для нулевого приближения Q_0, описывающего только поперечные волны, сводится в приближении Фраунгофера [6] к уравнению переноса электромагнитного излучения в рассеивающей среде [7].

Первое приближение Q_1 учитывает как поперечные волны, так и квазистатические поля. Ограничимся упрощенной оценкой Q_1, приравнивая его неоднородному члену уравнения (7). Требуя, чтобы Q_1 был мал по сравнению с Q_0, приходим к двум неравенствам, из которых выпишем только более существенное:

$$|\Delta\Gamma K Q_0| \ll |\Gamma_0 K Q_0|. \tag{8}$$

Это неравенство представляет собой условие, при котором в уравнении Б-С можно пренебречь эффектом квазистатического поля.

Для раскрытия неравенства (8) вводим интегралы

$$J^{(nm)}_{\mu\nu}(\boldsymbol{R}) = k_0^4\int g^{(n)}_{\mu\mu'}(\boldsymbol{r}'_1)\,g^{(m)*}_{\nu\nu'}(\boldsymbol{r}'_2)\exp(-R'/d)w(|\boldsymbol{r}'_1 - \boldsymbol{r}'_2|/r_0)\,d^3r'_1\,d^3r'_2\,S_{\mu'\nu'}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'), \tag{9}$$

где $\boldsymbol{R}' = (\boldsymbol{r}'_1 + \boldsymbol{r}'_2)/2$, $1/d = 2\,\mathrm{Im}\,k_{эфф}$ — коэффициент экстинкции, $S_{\mu\nu}(\boldsymbol{R}) = E_\mu(\boldsymbol{R})\,E^*_\nu(\boldsymbol{R})$ — тензор интенсивности поля. Правая часть неравенства (8) при совпадающих точках наблюдения $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}$ выражается через интеграл $J^{(11)}_{\mu\nu}$, а левая часть — через сумму остальных интегралов. Вычисление интегралов $J^{(nm)}_{\mu\nu}$, у которых оба верхних индекса отличны от нуля, а их сумма $n + m \geqslant 3$, представляет определенную трудность. Для их оценки обозначим через ΔR масштаб пространственной неоднородности тензора $S_{\mu\nu}(\boldsymbol{R})$ и введем масштаб R_0, удовлетворяющий неравенствам

$$r_0 \ll R_0 \ll \Delta R,\quad R_0 \ll d. \tag{10}$$

С введением R_0 область интегрирования в интересующих нас интегралах (9) естественным образом распадается на четыре подобласти, из которых главную трудность при вычислении интегралов представляет ближняя подобласть, определяемая неравенствами $r_1' < R_0$, $r_2' < R_0$. При интегрировании по ближней подобласти множитель $\exp(-R'/d)$ можно приближенно заменить на единицу, а тензор $S_{\mu'\nu'}(R - R')$ вынести за знак интеграла в точке $R' = 0$. После этого получаем оценку

$$\sum_{n,\, m>0;\; n+m>3} J_{\mu\nu}^{(nm)}(< R_0, < R_0) \sim \max\,[1,\, k_0 R_0,\, k_0 r_0 (k_0 R_0)^2], \tag{11}$$

где знаки неравенств слева указывают на ближнюю подобласть интегрирования.

С помощью оценки (11), а также оценок других интегралов $J_{\mu\nu}^{(nm)}$, которые производятся без затруднений, неравенство (8) сводится к виду

$$k_0 d (k_0 r_0)^3 \gg k_0 R_0 \gg 1. \tag{12}$$

Из (12) следует, что условие (8) пренебрежения эффектом квазистатического поля в уравнении Б-С предполагает выполнение двух неравенств: $[(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)]^2 n r_0^3 \ll 1$ и $k_0 R_0 \gg 1$, из которых первое совпадает с условием пренебрежения квадратичными по плотности членами в эффективной диэлектрической проницаемости среды [4], второе же означает, что тензор интенсивности поля плавно меняется на масштабе длины волны.

Автор благодарит В. М. Финкельберга за постановку задачи и обсуждение результатов, а также С. М. Рытова и В. И. Татарского за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 46, вып. 4, 1399 (1964).
2. Г. ван де Хюлст, Рассеяние света малыми частицами, ИЛ, М., 1961, стр. 93.
3. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 719 (1968).
4. В. М. Финкельберг, ЖТФ, 34, вып. 3, 509 (1964).
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, М., 1958, стр. 322.
6. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, ЖЭТФ, 53, вып. 3(9), 978 (1967).
7. Г. В. Розенберг, УФН, 56, вып. 1, 77 (1955).

Поступила в редакцию
6 июля 1970 г.

УДК 538.56

ИЗЛУЧЕНИЕ МАГНИТНОГО И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЕЙ ИЗ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ШАРА

М. С. Ковнер, Г. А. Лупанов

В работах [1] найдено сопротивление излучения магнитного и электрического диполей, помещенных в центр диэлектрического шара. При решении задачи из рассмотрения полного тока и тока, «ответственного за излучение», определялись поля внутри и вне шара и затем вычислялся вектор Пойнтинга.

В настоящем сообщении методом наведенных электродвижущих сил (ЭДС) [2] в подобной задаче отыскивается сопротивление излучения и добавка к реактивной части входного импеданса излучателя. Пусть ток антенны в неограниченном пространстве, заполненном диэлектриком с проницаемостью ε, есть I. Введение границы сопровождается появлением ЭДС $\mathcal{E}^{нав}$. Соответствующая добавка к импедансу определится как

$$\Delta Z = -\mathcal{E}^{нав} I.$$

Магнитный диполь. Для магнитной рамки

$$\Delta Z = \frac{1}{cI}\frac{d\psi}{dt} = i\frac{\omega S H_z}{cI}, \tag{1}$$

где S — площадь рамки (ее размер много меньше длины волны λ), H_z — наводимое поле, ось z выбрана по магнитному моменту (см. рис. 1).

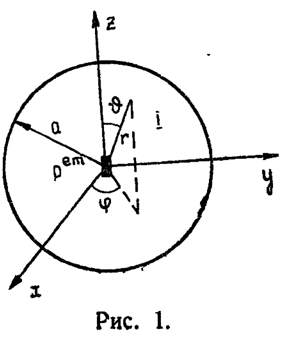

Рис. 1.