УДК 538.56 : 519.25

К СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ (ПЛОСКО-СЛОИСТАЯ НЕОДНОРОДНОСТЬ)

Ю. Н. Барабаненков

В теории многократного рассеяния волн обычно предполагают, что рассеивающая среда в среднем однородна. Однако в приложениях, например, при исследовании распространения радиоволн в солнечной короне или в ионосфере, приходится рассматривать в среднем неоднородные рассеивающие среды.

Для однородной рассеивающей среды вычисление ковариации $\overline{\psi(\boldsymbol{r}_1)\,\psi^*(\boldsymbol{r}_2)}$ скалярного поля $\psi(\boldsymbol{r})$ приближенно сводится (см., например, [1]) к решению уравнения переноса [2]. В данной заметке результаты работы [1] обобщаются на случай неоднородной рассеивающей среды. В этом случае вычисление ковариации поля сводится к решению уравнения переноса с учетом рефракционного искривления лучей. Уравнение имеет вид [3]

$$n^2(d/dl)\,(I/n^2) = -\,\alpha I + B, \tag{1}$$

где $I(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ — лучевая интенсивность излучения в точке $\boldsymbol{r}$ и в направлении единичного вектора $\boldsymbol{s}$, dl — элемент длины траектории луча, α — коэффициент экстинкции, B—плотность излучения, n — показатель преломления.

Будем рассматривать монохроматическую волну. Для простоты предположим, что в среднем рассеивающая среда является плоско-слоистой, и направим ось z перпендикулярно к слоям. Положим в основу обобщенное уравнение переноса, полученное в [1], придерживаясь принятых там обозначений. В приближении слабой нелокальности оператора интенсивности K это уравнение имеет вид

$$\begin{gathered} f(Z, \boldsymbol{p}) = f_0(Z, p_z)\,\delta^2(\boldsymbol{p}_\perp - \boldsymbol{p}_{\perp 0}) + \int F(Z, p_\perp, p_z;\, Z'', p_\perp, p''_z)\,\times \\ \times dZ''dp''_z K_c(Z'', \boldsymbol{p}_\perp, p''_z;\, \boldsymbol{p}')\,d^3\boldsymbol{p}' f(Z'', \boldsymbol{p}'). \end{gathered} \tag{2}$$

В уравнении (2) предполагается, что среднее поле $\overline{\psi(\boldsymbol{r})}$ равно

$$\overline{\psi}(\boldsymbol{r}) = \exp\,(i\boldsymbol{p}_{\perp 0}\boldsymbol{r}_\perp)\,\overline{\psi}(z), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{p}_{\perp 0}$— постоянный волновой вектор, перпендикулярный к оси z; через f_0 и F обозначены спектральные плотности, соответствующие среднему полю $\overline{\psi(z)}$ и фурье-образу $g(\boldsymbol{p}_\perp; z, z')$ средней функции Грина по разности перпендикулярных к оси z координат; $K_c(Z, \boldsymbol{p}; \boldsymbol{p}')$ — интеграл от ядра $Q(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{p}; \boldsymbol{R}', \boldsymbol{p}')$ по координатам $\boldsymbol{R}'$.

Среднее поле и средняя функция Грина удовлетворяют уравнению Дайсона. Для его приближенного решения воспользуемся предложенным в [4] методом геометрической оптики для сред с пространственной дисперсией. При этом в нулевом приближении, когда пространственной дисперсией можно пренебречь, уравнение Дайсона сводится к уравнению Гельмгольца с эффективным волновым числом $k_{эфф}(Z)$, квадрат которого равен

$$k^2_{эфф}(Z) = k_0^2(Z) - M_c(Z, p)\big|_{p=k_0(Z)} \equiv \varkappa_0^2(Z) + i\,\varkappa_0(Z)/d(Z), \tag{4}$$

где $k_0(Z)$ — волновое число среды без рассеяния, $M_c(Z, p)$— фурье-образ ядра массового оператора по разности его аргументов, $d(Z)$ — длина экстинкции. Решая уравнение Гельмгольца с эффективным волновым числом в приближении геометрической оптики, получаем

$$\overline{\psi}(z) \approx [a(p_{\perp 0}, z_0)/a(p_{\perp 0}, z)]^{1/2} A(z_0)\exp\left[i\int_{z_0}^{z} a(p_{\perp 0}, t)\,dt\right]; \tag{5}$$

$$g(p_\perp;\, z, z') \approx [1/(2\pi)^2\,2i]\,[a(p_\perp, z)\,a(p_\perp, z')]^{-1/2}\exp\left[i\int_{\min(z, z')}^{\max(z, z')} a(p_\perp, t)\,dt\right], \tag{6}$$

где, как и в [1], обозначено $a(p_\perp, z) = \sqrt{k^2_{эфф}(z) - p_\perp^2} \equiv a' + ia''$, $A(z_0)$ — заданное значение амплитуды в некоторой точке z_0

С помощью выражений (5) и (6) можно вычислить спектральные плотности

$f_0(Z, p_z)$ и $F(Z, p_\perp, p_z; Z', p_\perp, p'_z)$. Спектральная плотность f_0 представляется интегралом Фурье по разности z-координат двух точек, которую мы обозначим тоже через z. В подынтегральном выражении можно выделить осциллирующий экспоненциальный множитель вида

$$\exp\left[i \int\limits_{Z-(1/2)z}^{Z+(1/2)z} a'(t)dt\right]. \tag{7}$$

Разлагая показатель экспоненты в ряд по z, оставляя при этом в показателе только член первого порядка и переводя остальные члены в обычное разложение Тейлора, получаем

$$f_0(Z, p_z) \approx \left|\frac{a(Z_0)}{a(Z)}\right| |A(Z_0)|^2 \exp\left[-2\int\limits_{Z_0}^{Z} a''(t)dt\right]\left[\delta(P_z) + \frac{1}{8}\frac{d^2a'(Z)}{dZ^2}\delta'''(P_z) + \ldots\right], \tag{8}$$

где $P_z = p_z - a'(Z)$. Спектральную плотность F, которая представляется двукратным интегралом. Фурье по z и z', вычисляем аналогично. Ограничиваясь подобластью интегрирования $|z-z'| < 2(Z-Z')$, $Z > Z'$, получаем

$$F(Z, p_\perp, p_z; Z', p_\perp, p'_z) \approx \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{|a(Z)\,a(Z')|}\exp\left[-2\int\limits_{Z'}^{Z} a''(t)dt\right] \times$$
$$\times\left\{1 + \frac{1}{24}\left[\frac{d^2a'(Z)}{dZ^2} - \frac{d^2a'(Z')}{dZ'^2}\right]\frac{\partial^3}{\partial P_-^3} + \ldots\right\}\delta(P_-)\,\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin\,[2P_+(Z-Z')]}{P_+}, \tag{9}$$

где величины $P_\pm$ равны полусумме и разности от P_z и $P'_z = p'_z - a'(Z')$.

В выражении (8) главным является первый член, пропорциональный $\delta(P_z)$, обозначим его через f_{00}. Остальные члены, совокупность которых обозначим через $\Delta f_0 = f_0 - f_{00}$, — поправочные, они учитывают конечную эффективную ширину спектральной плотности f_0 в зависимости от p_z, обусловленную неоднородностью среды. В выражении (9) имеется характерный осциллирующий множитель, который при неограниченном разнесении точек Z и Z', $Z - Z' \to \infty$ стремится к $\delta(P_+)$; обозначим через F_0 получающееся при этом предельном переходе значение первого члена выражения (9). Тогда разность $\Delta F = F - F_0$ учитывает конечную ширину F в зависимости от p_z и p'_z, обусловленную конечным расстоянием между точками Z и Z' и неоднородностью среды.

Подставим значения f_{00} и F_0 спектральных плотностей f_0 и F в пренебрежении их эффективной шириной в уравнение (2). Если при этом выполняется условие

$$\varkappa_0^2(Z) - p_\perp^2 \gg \varkappa_0(Z)/d(Z), \tag{10}$$

то решение уравнения можно искать в виде

$$f(Z, \mathbf{p}) \approx \varkappa_0^{-3}(Z)\,\delta\,[p - \varkappa_0(Z)]\, I(Z, \mathbf{s}), \tag{11}$$

где $\mathbf{s}$ — единичный вектор вдоль вектора $\mathbf{p}$. С помощью тождественного преобразования убеждаемся, что лучевая интенсивность $I(Z, \mathbf{s})$ удовлетворяет уравнению переноса (1) с показателем преломления $n(Z) = \varkappa_0(Z)$, коэффициентом экстинкции $\alpha(Z) = 1/d(Z)$ и плотностью излучения

$$B(Z, \mathbf{s}) = \frac{1}{(4\pi)^2}\int\limits_{(4\pi)} K_c(Z, \varkappa_0(Z)\,\mathbf{s};\ \varkappa_0(Z)\,\mathbf{s}')\, d^2s'\, I(Z, \mathbf{s}'). \tag{12}$$

Как видно из равенства (11), уравнение переноса (1) получается из уравнения (2) в пренебрежении эффективной шириной спектральной плотности $f(Z, \mathbf{p})$ в зависимости от модуля волнового вектора $\mathbf{p}$. Поправки к спектральной плотности, учитывающие ее конечную ширину, можно вычислить путем решения уравнения (2) методом последовательных приближений, представляя искомое решение в виде ряда по степеням разностей Δf_0 и ΔF. Такой метод решения уравнения Бете — Солпитера в спектральном представлении развивается в работе [6] на примере точечного источника в неограниченной однородной рассеивающей среде. Оценка найденных таким путем поправок к спектральной плотности показывает, что ими можно пренебречь, если масштабы пространственной неоднородности лучевой интенсивности поля и среды в среднем велики по сравнению с масштабом флуктуаций показателя преломления, с длиной волны, а также по сравнению с обратной величиной масштаба Δp_z изменения всякой функции $\chi(\boldsymbol{p})$ в зависимости от p_z, которая интегрируется по $\boldsymbol{p}$ в произведении со спектральной плотностью $f(Z, \boldsymbol{p})$ при вычислении некоторой физической величины (средней интенсивности поля, среднего потока энергии, ковариации поля и т. д.).

Автор благодарит С. М. Рытова и Ю. А. Кравцова за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, ЖЭТФ, **56**, вып 4, 1262 (1969).
2. С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953.
3. В. В Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
4. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 10, 1582 (1968).
5. G. S. S. Avila, J. B. Keller, Comm. Pure Appl. Mathem., **16**, 363 (1963).
6. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 2, 234 (1971).

Поступила в редакцию
1 декабря 1969г.

УДК 538.56 : 519.25

О ЗНАЧЕНИИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПРИ МНОГОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Ю. Н. Барабаненков

При рассеянии электромагнитной волны на некотором объекте в ближней зоне существенны квазистатические составляющие рассеянного поля с амплитудой, убывающей обратно пропорционально второй и третьей степеням расстояния. Вследствие эффекта квазистатических полей, возникающих при многократном рассеянии электромагнитных волн в рассеивающих средах, в интегральном члене уравнения Бете—Солпитера (Б-С) при переходе к среде, состоящей из точечных дипольных эффективных неоднородностей, появляются расходящиеся трехмерные интегралы со степенной сингулярностью типа расстояние в минус третьей, четвертой, пятой или шестой степени.

В данной заметке предлагается метод последовательных приближений для учета эффекта квазистатического поля при решении уравнения Б-С и производится оценка величины этого эффекта.

Уравнение Б-С для ковариации электрического поля $\overline{E_\mu(\boldsymbol{r}_1) E^*_\nu(\boldsymbol{r}_2)}$ имеет вид [1]

$$\overline{E_\mu(\boldsymbol{r}_1) E^*_\nu(\boldsymbol{r}_2)} = \overline{E}_\mu(\boldsymbol{r}_1)\overline{E}^*_\nu(\boldsymbol{r}_2) + \int \overline{G}_{\mu\mu''}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}''_1)\, \overline{G}^*_{\nu\nu''}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}''_2) \times$$
$$\times\, d^3 r''_1\, d^3 r''_2\, K_{\mu''\mu',\,\nu''\nu'}(\boldsymbol{r}''_1, \boldsymbol{r}'_1, \boldsymbol{r}''_2, \boldsymbol{r}'_1)\, d^3 r'_1\, d^3 r'_2\, \overline{E_{\mu'}(\boldsymbol{r}'_1) E^*_{\nu'}(\boldsymbol{r}'_2)}. \qquad (1)$$

Здесь $\overline{E}_\mu(\boldsymbol{r})$ и $\overline{G}_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ — средние по ансамблю электрическое поле и тензор Грина, удовлетворяющие уравнению Дайсона, K — оператор интенсивности, греческие индексы принимают значения 1, 2, 3 и по повторяющимся индексам производится суммирование.

Будем считать, что рассеивающая среда в среднем однородна изотропна и состоит из сферических рассеивателей, удовлетворяющих условиям рэлеевского рассеяния [2]. Массовый оператор M и оператор интенсивности K вычисляем по формулам (23) работы [3] в первом порядке по плотности рассеивателей. Полученное выражение для ядра K имеет вид

$$K_{\mu\mu',\,\nu\nu'}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}'_1; \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}'_2) \approx 12\pi \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\right)^2 k_0^4 n r_0^3\, w\left(\frac{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}{r_0}\right) \delta_{\mu\mu'}\, \delta_{\nu\nu'}\, \delta^3(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}'_1)\, \delta^3(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}'_2), \qquad (2)$$

где r_0 — радиус рассеивателя, ε — его диэлектрическая проницаемость, n — плотность рассеивателей, k_0 — волновое число в свободном пространстве; функция $w(\rho)$ принимает значения

$$w(\rho) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{4}\rho + \dfrac{1}{16}\rho^3 & (\rho < 2) \\ 0 & (\rho > 2) \end{cases}. \qquad (3)$$