ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIV, № 8 РАДИОФИЗИКА 1971

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 533.951

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИОННО-ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СЛАБОПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПЛАЗМЕ

Е. Н. Пелиновский

Как известно, в сильно неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$) могут распространяться нелинейные ионно-звуковые волны «кноидального» типа, описываемые уравнением Кортевега — де Вриза [1-4]. Частным классом таких волн являются солитоны, играющие важную роль в теории нестационарных «распадных» процессов [4].

В ряде работ исследовалось влияние диссипативных механизмов, таких как вязкость плазмы, столкновения ионов с нейтралами и затухание Ландау, на распространение нелинейной волны в однородной плазме [5, 6]. Настоящая работа посвящена исследованию волновых процессов в неоднородной слабопоглощающей плазме.

Распространение ионно-звуковой волны можно описать уравнением

$$c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{D^2}{c} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} + \frac{cu}{2n} \frac{\partial}{\partial x} (cn) + \alpha cu - \frac{\delta}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + c \sqrt{\frac{m}{8\pi M}} \int\limits_{-\infty}^{\omega} \frac{\partial u}{\partial \tau'} \frac{d\tau'}{\tau - \tau'} = 0, \tag{1}$$

где u — скорость ионов, $c = (kT_e/M)^{1/2}$ — скорость ионного звука, $D = (kT_e/4\pi e^2 n)^{1/2}$ — дебаевский радиус, $\tau = \int \frac{dx}{c} - t$, m — масса электрона, M — масса иона, k — постоянная Больцмана, e — заряд электрона, $T_e = T$ и n — электронная температура и концентрация плазмы, предполагаемые достаточно плавными функциями координаты, α — эффективная частота соударений с нейтральными атомами, δ — вязкость плазмы. В неоднородной плазме α и δ являются также функциями координаты. Первые три члена в уравнении (1) соответствуют уравнению Кортевега — де Вриза, остальные описывают влияние неоднородности и диссипативных механизмов. Вывод уравнения (1) аналогичен приведенному в [6] для однородной плазмы.

Будем считать, что неоднородность плазмы достаточно плавная и диссипация мала, так что решение уравнения (1) близко к «кноидальной» волне Кортевега — де Вриза. Предположим, что на границе полубесконечной ($x > 0$) плазмы генерируется периодическая кноидальная волна с произвольной амплитудой и частотой. Очевидно, что при распространении волны ее частота не изменится, а амплитуда, волновое число и скорость будут функциями только координаты, причем волну локально можно считать кноидальной. Уравнение для медленно меняющейся амплитуды удобно получить с помощью обобщенного вариационного принципа в усредненной форме [7].

Усредненный вариационный принцип уже применялся к исследованию волновых процессов, описываемых уравнением типа Кортевега — де Вриза в работах [5, 8]. Проводя аналогичные вычисления для ионно-звуковой волны, получим уравнение

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{D^4 n}{c} Y_1 \right) = - \frac{2\alpha n D^4}{c^2} Y_1 - \frac{2\omega^2 \delta n D^4}{c^4} Y_2 - \frac{2\omega n D^4}{c^2} \sqrt{\frac{m}{8\pi M}} Y_3, \tag{2}$$

где

$$Y_1(\gamma) = K^2(\gamma) \langle Z_\theta^2 \rangle = \frac{K^4}{\pi^2} \left[\frac{4 - 2\gamma}{3} \frac{E}{K} - \frac{1 - \gamma}{3} - \frac{E^2}{K^2} \right],$$

$$Y_2(\gamma) = K^2(\gamma) \langle Z_{\theta\theta}^2 \rangle = \frac{4K^6}{15\pi^4} \left[2(\gamma^2 - \gamma + 1) \frac{E}{K} - (1-\gamma)(2-\gamma) \right],$$

$$Y_3(\gamma) = K^2(\gamma)\left\langle Z_\theta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2}\, \frac{d\psi}{\theta-\psi}\right\rangle,$$

Z — дзета-функция Якоби [9], θ — фаза кноидальной волны, $E(\gamma)$ и $K(\gamma)$ — полные эллиптические интегралы с модулем $\sqrt{\gamma}$, γ является параметром несинусоидальности волны: при $\gamma \to 0$ волна близка к синусоидальной, $\gamma = 1$ соответствует солитону. При заданной частоте ω параметр γ однозначно определяет амплитуду волны [5, 8]:

$$A = \frac{12\,\omega^2 D^2}{\pi^2 c}\, \gamma K^2(\gamma). \qquad (3)$$

Решение уравнения (2) в общем виде получить не удается; мы рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Трансформация волны в неоднородной плазме. В тех случаях, когда диссипацией энергии в плазме можно пренебречь, из (2) следует

$$T^{3/2} n^{-1}\, Y_1(\gamma) = \mathrm{const}. \qquad (4)$$

На рис. 1 приведена функция γ от $T^{1/3} n^{-2/9}$ при различных начальных значениях γ_0, характеризующих профиль волны в точке $x = 0$. Если $T^{3/2} n^{-1}$ уменьшается вдоль x, то волна из синусоидальной ($\gamma \ll 1$) может превратиться в последовательность слабо связанных между собой солитонов ($\gamma \sim 1$). Такой процесс, хорошо известный для морских волн над наклонным дном [10, 11], связан с уменьшением дисперсии в системе.

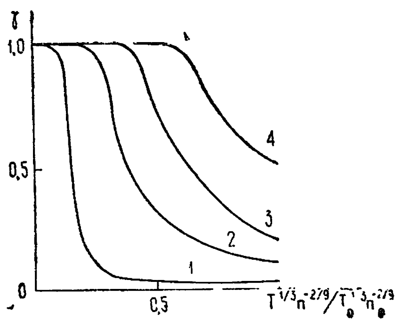

Рис. 1. *1* — $\gamma_0 = 0{,}01$; *2* — $\gamma_0 = 0{,}1$; *3* — $\gamma_0 = 0{,}2$; *4* — $\gamma_0 = 0{,}5$.

В предельных случаях малых и больших γ из (4) можно получить более простые асимптотические выражения.

Если $\gamma \ll 1$, $Y_1 \approx (\pi^2/128)\,\gamma^3$, $K \approx \pi/2$ и из (3) и (4) следует, что

$$A n^{1/2} T^{1/4} = \mathrm{const}.$$

Последний результат легко может быть получен из (1) в пренебрежении в нем нелинейным членом uu_z.

Если $\gamma \sim 1$ (волна состоит из последовательности солитонов), $Y_1 \approx (2/3\pi^2) K^3$, $K \approx (1/2) \ln [16/(1-\gamma)]$ и

$$A T^{1/2} n^{1/3} = \mathrm{const}.$$

Таким образом, амплитуда солитона изменяется иначе, чем амплитуда синусоидальной волны.

2. Распространение солитона в неоднородной слабопоглощающей плазме. В предельном случае $\gamma \to 1$ $Y_2 \approx (8/15\pi^4) K^5$, $Y_3 \approx (1{,}45/\pi^2) K^4$, что позволяет в (2) перейти от переменной γ к амплитуде A:

$$\frac{dA}{dx} = -\left[\frac{4\alpha}{3c} + \frac{2}{3nc^{1/2}D}\, \frac{d}{dx}\,(nc^{1/2}D)\right] A - \frac{4\,\delta A^2}{45\, c^2 D^2} - \frac{1{,}45}{6}\sqrt{\frac{\pi m}{6M}}\, \frac{A^{3/2}}{Dc^{1/2}}. \qquad (5)$$

Уравнение (5), сводимое к уравнению Риккати, не интегрируется в квадратурах. Однако в случаях больших или средних амплитуд его нетрудно проинтегрировать. В результате получаем

а) $\delta A^{1/2} \gg \sqrt{\dfrac{m}{M}}\, c^{3/2} D$ — затухание Ландау несущественно:

$$A n^{1/3} T^{1/2} = \frac{A_0 n_0^{1/3}\, T_0^{1/2} \exp\left[-(4/3)\int \alpha\, dx/c\right]}{\left[1 + \dfrac{16\,\pi e^3 M A_0 n_0^{1/3}\, T_0^{1/2}}{45 k^2} \displaystyle\int \frac{\delta\, n^{2/3}\, dx}{T^{5/2}} \exp\left(-\frac{4}{3}\int \frac{\alpha\, dx'}{c}\right)\right]}, \qquad (6)$$

б) $\delta A^{1/2} \ll \sqrt{m/M}\, c^{3/2} D$ — вязкость плазмы несущественна:

$$An^{1/3}\,T^{1/2} = \frac{A_0 n_0^{1/3}\,T_0^{1/2}\exp\left[-(4/3)\int a\,dx/c\right]}{\left\{1+\frac{1{,}45}{6}\left[\frac{\pi^2 e^2 m A_0 T_0 n_0^{2/3}}{6k^{3/2} M}\right]^{1/2}\int \frac{n^{1/6}\,dx}{T^{5/4}}\exp\left(-\frac{4}{3}\int\frac{a\,dx'}{c}\right)\right\}^2}. \quad (7)$$

В зависимости от конкретных параметров плазмы и амплитуды генерируемого солитона может преобладать тот или иной диссипативный механизм. Но, как следует из (6), (7), на больших расстояниях существен столкновительный член, и затухание происходит по экспоненциальному закону с декрементом $4a/3c$. При средних амплитудах сказывается затухание Ландау (в отсутствие неоднородностей и столкновений ($A = A_0/[1 + (x/x_0)^2]$ [6])). Если амплитуда генерируемого импульса достаточно велика, то на начальной стадии затухания существенна вязкость плазмы ($A=A_0/(1+x/x_0)$ [5]). Неоднородность параметров плазмы может изменить эффективную длину затухания.

Заметим, что при $a=0$ и $x\to\infty$ амплитуда солитона не зависит от начальной амплитуды A_0 (сходная ситуация имеет место для ударных волн в акустике [12]).

Автор благодарен А. В. Гапонову и Л. А. Островскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Захаров, ПМТФ, 3, 167 (1964).
2. H. Washimi, T. Taniuti, Phys. Rev. Lett., 17, 996 (1966).
3. T. Taniuti, C. C. Wei, J. Phys. Soc. Japan, 24, 4, 941 (1968).
4. В. И. Карпман, Нелинейные волны в диспергирующих средах (лекции), Новосибирск, 1968.
5. Е. Н. Пелиновский, ПМТФ, 2, 68 (1971).
6. E. Ott, R. N. Sudan, Phys. Fluids, 12, 11, 2388 (1969); 13, 6, 1432 (1970).
7. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Препринт № 2, НИРФИ, 1970; ПММ (в печати).
8. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Аннотации докладов V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Ленинград, 1970; Препринт № 3, НИРФИ, 1970
9. Э. Т. Уиттекер, Д. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. 2, Физматгиз, М., 1963
10. Л. А. Островский, Е. Н. Пелиновский, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 6, 9, 934 (1970).
11. W. H. Munk, N. Y. Acad. Sci. Ann., 51, № 3 (1949) (перевод в сб. Основы предсказания ветровых волн, зыби и прибоя, ИЛ, М., 1951).
12. Л. К. Зарембо, В. Н. Красильников, Введение в нелинейную акустику, изд. Наука, М., 1966.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
10 сентября 1970 г.

УДК 538.574.3.535.2

РАССЕЯНИЕ СВЕТОВОГО ПУЧКА В СРЕДЕ С РЕГУЛЯРНОЙ РЕФРАКЦИЕЙ

В. В. Воробьев

Использование интенсивных световых пучков открывает большие возможности в создании искусственных волноводных каналов, которые могут образовываться из-за нагревания и ионизаций среды [1–2], а также при испарении дисперсной фазы [3]. Наличие в среде волноводного канала может существенно изменить характер рассеяния на случайных неоднородностях показателя преломления среды: изменить ослабление и уширение из-за рассеяния пучка с малой интенсивностью и меньшего диаметра, который после действия мощного излучения или одновременно с ним распространяется в таком канале.

Если образующийся волноводный канал широкий по сравнению с шириной распространяющегося в нем пучка, зависимость средней диэлектрической проницаемости в канале можно представить в виде

$$\langle \varepsilon(x, R)\rangle = n^2(R) = \varepsilon_0(1 \mp \varepsilon_2 R^2/a^2), \quad (1)$$