

УДК 621.385

## ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ВОЛН В ЛАМПЕ С ПОПЕРЕЧНЫМ ТОКОМ (ЛПТ)

И. В. Захаров, В. Е. Нечаев

Для известной модели ЛПТ определена зависимость комплексных волновых чисел от частоты при малых расстройках от синхронизма. Это позволило установить характер пространственной неустойчивости волн в различных режимах и указать наличие областей усиления и поглощения.

1. В ряде работ (например, [1,2]) установлена пространственная неустойчивость волны в ЛПТ и найдены значения комплексных волновых чисел. Так как ЛПТ является системой с двумерной замедляющей структурой (по  $x, y$ ), то использование результатов подстановочного анализа связано с определенными трудностями в формулировании граничных условий на плоскостях  $x = \text{const}$ , не пересекаемых электронным потоком. Поэтому целесообразно установить характер неустойчивости волн в соответствии с известной классификацией [3,4], чтобы можно было судить о возможности усиления волн в ЛПТ.

В исследуемой системе кинематический анализ волн внешне отличается от стандартного, так как приходится рассматривать двумерные волновые пакеты, а дисперсионное уравнение объединяет продольное ( $h$ ) и поперечное ( $x$ ) волновые числа. Однако граничные условия в поперечных (по отношению к потоку) плоскостях  $y = \text{const}$  позволяют по существу свести анализ к одномерному для достаточно узких по частоте волновых пакетов.

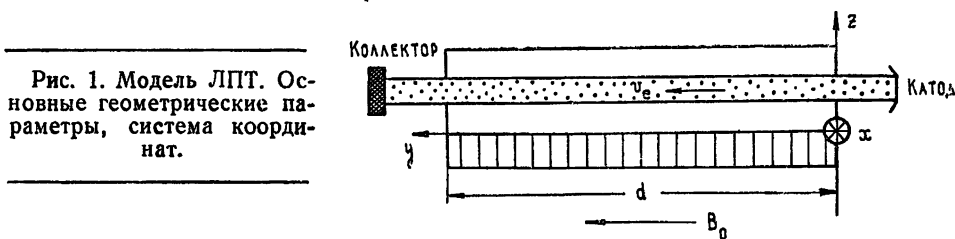


Рис. 1. Модель ЛПТ. Основные геометрические параметры, система координат.

2. Анализ волн в ЛПТ проведем для простейшей модели, принятой в [2] и показанной на рис. 1. Двумерная замедляющая структура размещена вдоль широкой стенки волновода так, что плоскость  $z = 0$  касается ее верхнего края. Ленточный поток электронов, однородный по  $x$ , вводится через боковую стенку  $y = 0$  и фокусируется сильным магнитным полем  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{y}_0$ , позволяющим не учитывать поперечных  $x, z$ -смещений электронов.

Дисперсионные свойства двумерной замедляющей системы удобно иллюстрировать графиками изочастот [5]. В случае гребенчатой структуры перекося пластин относительно осей волновода приводит к тому, что одному продольному волновому числу  $h_0$  соответствуют две волны  $\Gamma_{1,2}$

(рис. 2) с разными поперечными волновыми числами  $|x_{1\omega}| \neq |x_{2\omega}|$ . При этом

$$x_{1\omega} - x_{2\omega} = 2n\pi/d, \quad (1)$$

где  $n$  — номер волноводной моды. Когда  $d > n(2\pi/x_{1\omega})$ , то «быстрая» волна  $\Gamma_2$ , для которой в соответствии с (1)  $x_{2\omega} > 0$ , также может быть приведена в синхронизм с электронным потоком. Для малых  $n$  при больших замедлениях по  $y$  величины  $x_{1\omega}$  и  $x_{2\omega}$  становятся близкими друг к другу.

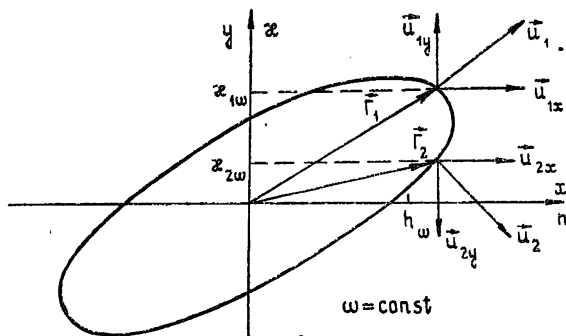


Рис. 2. Кривая изочастоты и групповые скорости для гребенчатой структуры; постоянные распространения волн в волноводе с «косой» гребенкой на стенке.

Условимся считать дисперсию положительной (или нормальной), когда кривые изочастот с уменьшением  $\omega$  «вкладываются» одна в другую, что обычно выполняется для гребенчатых структур. Используя результаты [2], дисперсионное уравнение ЛПТ в пренебрежении кулоновским взаимодействием электронов можно привести к виду, удобному для анализа свойств волновых пакетов:

$$(x_e - x)^2 \left[ (h - h_\omega) \frac{u_{1x}}{u_{1y}} + (x - x_{1\omega}) \right] \left[ (h - h_\omega) \frac{u_{2x}}{u_{2y}} + (x - x_{2\omega}) \right] = -\mu (x_{1\omega} - x_{2\omega}) x_e x^2. \quad (2)$$

Здесь  $h, x$  — постоянные распространения нормальных (связанных) волн в системе с лучком;  $x_e = \omega/v_e$  — постоянная распространения собственных волн в потоке со средней скоростью  $v_e$ ;  $u_{1,2x}$  и  $u_{1,2y}$  — составляющие групповых скоростей собственных волн в замедляющей системе ( $u_{1,2} = \nabla \Gamma_{1,2}\omega$ );  $\mu$  — малый положительный параметр связи\*.

3. Пространственная неустойчивость волн в ЛПТ появляется при синхронизме пучка с любой из волн электродинамической структуры [1,2]. Сначала будем полагать  $x_e = x_{1\omega}$ , где  $x_{1\omega} = x_{1\omega}(\omega_0)$ . Тогда при  $\omega \approx \omega_0$  в ЛПТ распространяются три волны с  $\Gamma \approx \Gamma_1$  и одна с  $\Gamma \approx \Gamma_2$ , так что перенос энергии по волноводу осуществляется четырьмя волнами с одинаковыми  $h$  и различными  $x$ . Поэтому временно-подобный пакет вблизи «синхронной» частоты  $\omega_0$  нужно представить в виде

$$f(x, y, t) = \sum_{m=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f_m(\omega) \exp \left[ j(\omega t - x_{m\omega} y - h_\omega x) \right]. \quad (3)$$

\* На основании [2] принятых там обозначениях можно получить  $\mu = (I_0/4V_0) (\psi^2 V_1^2/2P_y)$ , где погонные потоки мощности противоположны по знаку, но по величине равны  $P_y = (1/2)V_1^2(n\pi/d)jY_{22}(jY_{22} = Y > 0$  для положительной дисперсии). Если ввести импеданс связи  $Z = \psi^2 V_1^2/2P_x$  ( $\psi$  — функция распределения потенциала по  $z$ ,  $V_1$  — его амплитуда при  $z = 0$ ), то  $\mu = (I_0/4V_0) Z$ .

Будем требовать узости пакета, считая, как в [3],  $f_m(\omega) \neq 0$  в малой окрестности  $\omega_0$ , где  $\text{Im } h_0 \neq 0$  ( $h_0 = h(\omega_0)$ ). Пределы изменения  $\omega$ , в которых  $f_m(\omega)$  дает вклад в (3), ограничим условием

$$|z_{m\omega} - z_{m0}| d \ll 1. \quad (4)$$

Тогда подынтегральное выражение в (3) на ширине волновода  $[0, d]$  меняется несущественно, и задача по существу сводится к пространственно одномерной (по  $x$ ) с учетом граничных условий при  $y = 0$ ;  $d$ , позволяющих найти  $z_{m\omega}$  и  $h_\omega$  в явном виде для (3).

Аналогично для временной неустойчивости ( $\text{Im } \omega(h) \neq 0$ ), пространственно-подобный пакет

$$f(x, y, t) = \sum_{m=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} dh g_m(h) \exp \left[ j(\omega_h t - z_{mh} y - hx) \right] \quad (5)$$

можно приближенно рассматривать как одномерный, если  $g_m(h) \neq 0$  в интервале  $h$ , соответствующем неравенству

$$|z_m(h) - z_m(h_0)| d \ll 1. \quad (6)$$

Для таких узких волновых пакетов можно применять известные представления [3, 4] к кинематическому анализу волны в ЛПТ.

4. Дисперсионное уравнение (2), введя расстройки

$$\omega = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}, \quad \delta = \frac{z - z_{10}}{z_{10}}, \quad \Delta = \frac{h - h_0}{h_0}, \quad (7)$$

представим в виде

$$x^2 (x + f_1) (x + f_2 + v) + \mu v (1 + w) (1 + x + w)^2 = 0, \quad (8)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} x &= \delta - w, & f_{1,2} &= g_{1,2} \Delta + (1 - v_e/u_{1,2y})w, \\ g_{1,2} &= \frac{h_0 u_{1,2x}}{x_{01} u_{1,2y}}, & v &= \frac{2\pi n}{N} = \frac{x_{01} - x_{02}}{x_{01}}, & N &= x_{01} d. \end{aligned} \quad (9)$$

Видно, что при малых  $\mu$  можно ожидать  $x$  порядка  $\mu^{1/3}$ . Система граничных условий, соответствующая немодулированному и несгруппированному при  $y = 0$  потоку, а также обращению в нуль, суммарного (по всем четырем волнам) потенциала на боковых стенках волновода (при  $y = 0, d$ ) может быть представлена в виде соотношения

$$\text{Det} \cdot \text{Det}^* = 0,$$

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} x_1^2 \exp(-jN x_1) x_2^2 \exp(-jN x_2) x_3^2 \exp(-jN x_3) x_4 \exp(-jN x_4) \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Совместное решение (8) и (10) определяет связь  $F(\Delta, w) = 0$ , позволяющую провести исследования волновой неустойчивости. Уравнение (8) удобно представить в виде

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} p &= f_1 + f_2 + \nu, & q &= f_1 (f_2 + \nu) + \mu\nu (1 + \omega), \\ r &= 2(1 + \omega)^2 \mu\nu, & s &= \mu\nu (1 + \omega)^3. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (10), разлагая экспоненты в ряды, можно записать следующим образом:

$$\text{Det} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-jN)^m}{m!} U_{m+2} = 0, \quad (13)$$

где

$$U_m = \begin{vmatrix} x_1^m & x_2^m & x_3^m & x_4^m \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Видно, что  $U_0 = U_1 = U_2 = 0$ , а  $U_3$  — определитель Вандер-Монда.

Из (11) и (14) легко получить рекуррентное соотношение

$$U_{m+2} = -p U_{m+1} - q U_m - r U_{m-1} - s U_{m-2}, \quad (15)$$

позволяющее представить (13) в виде ряда

$$\begin{aligned} \text{Det} &= U_3 \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-jN)^m}{m!} (-p)^{m-1} - q \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-jN)^m}{m!} (m-2) (-p)^{m-3} - \right. \\ &\left. - r \sum_{m=4}^{\infty} \frac{(-jN)^m}{m!} (m-3) (-p)^{m-4} - s \sum_{m=5}^{\infty} \frac{(-jN)^m}{m!} (m-4) (-p)^{m-5} + M \right\} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $M$  — бесконечный ряд сумм с коэффициентами  $q^2$ ,  $r^2$ ,  $qr$  и т. д. В нашей задаче, полагая пакеты узкими настолько, что  $f_1$ ,  $f_2$  имеют порядок  $\mu$ , можно не учитывать сумму  $M$ , имеющую порядок  $\mu^2$ .

Суммы в (16) можно записать следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-jN)^m}{m!} (-p)^{m-1} = -\frac{1}{p} [\exp(jNp) - 1],$$

$$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-jN)^m}{m!} (m-2) (-p)^{m-3} = \frac{2}{p^3} [\exp(jNp) - 1] - \frac{jN}{p^2} [\exp(jNp) + 1],$$

$$\sum_{m=4}^{\infty} \frac{(-jN)^m}{m!} (m-3) (-p)^{m-4} = -\frac{3}{p^4} [\exp(jNp) - 1] - \frac{jN}{p^4} [\exp(jNp) + 2] - \frac{N^2}{2p^2},$$

$$\sum_{m=5}^{\infty} \frac{(-jN)^m}{m!} (m-4) (-p)^{m-5} = \frac{4}{p^5} [\exp(jNp) - 1] - \frac{jN}{p^5} [\exp(jNp) + 3] +$$

$$+ \frac{N^2}{p^3} + j \frac{N^3}{6p^2}.$$

Учитывая  $\exp(jNp) = \exp[jN(f_1 + f_2)]$ , представим экспоненты в виде

быстро убывающих рядов. Тогда из (16)\* и (17), удерживая члены порядка  $\mu$ , нетрудно получить

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 &= (g_1 - g_2) \Delta - v_e \left( \frac{1}{u_{1y}} - \frac{1}{u_{2y}} \right) \omega = \\ &= \mu \left[ \frac{N^2}{6} - 2 \frac{(1-\nu)(2-\nu)}{\nu^2} + jN \frac{\nu-1}{\nu} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

что справедливо при  $N(f_1 - f_2) \sim \mu N^3 \ll 1$ . Это есть решение задачи для малых расстройек  $\omega$ ; при  $\omega = 0$  оно совпадает с решением в [2]. Уравнение  $\text{Det}^* = 0$  (10) определяет точно такую же связь  $\Delta$  и  $\omega$ , поскольку разложение в ряд с определенной степенью точности (ограничиваясь определенным числом членов) приводит к комплексно-сопряженным полиномам.

5. Линейная связь  $\Delta$  и  $\omega$  (18) позволяет проанализировать возможности усиления волн в системе. Полагая  $\omega$  действительной, для  $\Delta = \Delta_r + j\Delta_i$  получим

$$\begin{aligned} \Delta_r &= \frac{1}{g_1 - g_2} \left\{ v_e \left( \frac{1}{u_{1y}} - \frac{1}{u_{2y}} \right) \omega + \mu \left[ \frac{N^2}{6} - 2 \frac{(1-\nu)(2-\nu)}{\nu^2} \right] \right\}, \\ \Delta_i &= \frac{1}{g_1 - g_2} N \mu \left( \frac{\nu-1}{\nu} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Так для  $g_1 - g_2 = \frac{h_0}{x_{01}} \left[ \frac{\partial x_{2\omega}}{\partial h_\omega} - \frac{\partial x_{1\omega}}{\partial h_\omega} \right]_{\omega = \text{const}} > 0$  для пребенчатых структур, то волны нарастают в положительном направлении  $x$ , когда  $\nu < 1$ . Такая пространственная неустойчивость волн приводит к усилению сигнала (пакета), поскольку групповая скорость нормальных (связанных) волн в ЛПТ при малых инкрементах [6] может быть приближенно определена как

$$u_{гр} = \frac{\omega_0}{h_0} \frac{d\omega}{d\Delta_r} = \frac{g_1 - g_2}{1/u_{1y} - 1/u_{2y}} \frac{\omega_0}{h_0 v_e}, \quad (20)$$

и, очевидно,  $u_{гр} > 0$ .

Таким образом, волны нарастают в сторону переноса энергии, что и обеспечивает усиление сигнала. Когда  $\nu < 1$  (при достаточно сильной «анизотропии» системы, когда  $x_{02} > 0$ ),  $\Delta_i < 0$ , и волны нарастают в направлении, обратном направлению переноса энергии. Тогда ЛПТ является аттенуатором. В справедливости сказанного просто убедиться, представив пакеты в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью ( $x' = x - u_{гр} t$ ):

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \int f(\omega) d\omega e^{j(\omega t - h x)} \rightarrow f(x', t) = \exp [j(\omega_0 - h_0 u_{гр}) t] \times \\ &\times \int f(\omega) d\omega \exp \left[ j \left( \frac{\omega - \omega_0}{u_{гр}} - h_0 \right) x' \right], \end{aligned}$$

где  $h_0 = h(\omega_0)$ . Отсюда сразу видно, что пространственная неустойчивость, приводящая к усилению сигнала, имеет место при  $\text{Im } h_0 > 0$  ( $\Delta_i > 0$ ), когда  $u_{гр} > 0$ , и наоборот. При этих условиях обеспечивается неограниченное возрастание  $f(x', t)$  во времени в системе отсчета, движущейся со скоростью пакета  $u_{гр}$ .

\* В (16)  $U_3 \neq 0$ , так как только при несовпадающих корнях можно удовлетворить граничным условиям.

6. Аналогичным образом можно провести линейное рассмотрение взаимодействия при синхронизации потока с «быстрой» волной системы, когда  $x_e = x_{02} > 0$ . Полагая  $x = x_{02}(1 + \delta)$ ,  $x_e = x_{02}(1 + w)$  и  $h = h_0(1 + \bar{\Delta})$ , можно получить соотношения, подобные (19):

$$\bar{\Delta}_r = \frac{x_{02}}{x_{01}(g_1 - g_2)} \left\{ v_e \left( \frac{1}{u_{1y}} - \frac{1}{u_{2y}} \right) w + \mu \left[ \frac{\bar{N}^2}{6} - 2 \frac{(1 + \bar{v})(2 + \bar{v})}{\bar{v}^2} \right] \right\},$$

$$\bar{\Delta}_i = \frac{x_{02} \bar{N}}{x_{01}(g_1 - g_2)} \mu \left( \frac{1 + \bar{v}}{\bar{v}} \right), \quad (21)$$

$$\bar{N} = x_{02} d = \frac{x_{02}}{x_{01}} N, \quad \bar{v} = \frac{x_{01} - x_{02}}{x_{02}} = \frac{x_{01}}{x_{02}} v.$$

Видно, что в этом случае волны пакета нарастают в направлении групповой скорости, что также подтверждает возможность усиления при  $x_{02} > 0$ .

Если изменить дисперсию системы на обратную (кривые изочастот рис. 2 «вкладываются» одна в другую с ростом  $\omega$ ), это приведет формально к изменению знаков у  $\mu$ ,  $u_{1x}$ ,  $u_{2x}$ , но  $g_1 - g_2$  знака не изменит. Поэтому при синхронизме  $x_e = x_{01}$  будет происходить усиление обратных волн, если  $v > 1$ , а при  $v < 1$  — их поглощение. При этом фазовая скорость направлена вправо, а групповая — влево, так что «входная» плоскость  $x = \text{const}$  находится справа от пространства взаимодействия, а «выходная» — слева. При синхронизме  $x_e = x_{02}$  имеет место режим усиления обратной волны.

В заключение авторы выражают признательность Р. А. Дуднику и М. И. Рабиновичу за обсуждение, а также В. Л. Братману, указавшему на возможность решения дисперсионных соотношений (11), (14) приведенным здесь способом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Лошаков, Радиотехника и электроника, 5, № 9, 1448 (1960)
2. Р. А. Дудник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 4, 764 (1963)
3. Р. А. Стюгоск, Phys. Rev., 112, № 5, 1488 (1958) (пер. П. А. Стэррок, в сб. Колебания сверхвысоких частот в плазме, ИЛ, М., 1961).
4. R. J. Briggs, Electron-Stream Interaction with Plasmas, Cambridge., 1964.
5. Р. А. Силин, В. П. Сазонов, Замедляющие системы, изд. Сов. радио, М., 1966.
6. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
22 сентября 1970 г.

#### NONLINEAR ANALYSIS OF WAVES IN TRANSVERSE CURRENT TUBE (TCT)

N. V. Zakharov, V. E. Nechaev

The dependence of complex wave numbers versus the frequency at small detunings due to synchronism is determined for the known TCT model. This enables one to determine the character of the spatial wave instability in different regimes and to point out the presence of amplification and absorption regions.