

УДК 538.574.6

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ЧАСТОПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ В ПРИСУТСТВИИ АБСОЛЮТНО ПРОВОДЯЩЕГО ЭКРАНА

В. М. Астапенко, В. В. Смирнов

Методом, предложенным Г. Д. Малюжиным, решается задача дифракции плоской электромагнитной волны на периодической частой решетке в присутствии абсолютно проводящего экрана. Показано, что как в случае H -, так и в случае E -поляризации длинноволновая асимптотика поля вдали от решетки полностью выражается через присоединенную массу двойной решетки, полученной из исходной путем добавления к ней ее зеркального отражения относительно экрана. Асимптотика поля вблизи решетки и экрана определяется действительной и мнимой частями аналитической функции, реализующей конформное отображение внешности указанной двойной решетки на внешность двойной решетки из бесконечно тонких разрезов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В плоскости xy вдоль прямой $x = h$ расположена дискретная периодическая с периодом $2c$ решетка, элементами которой являются замкнутые ограниченные области с кусочно-гладкими границами. Абсолютно проводящий экран расположен вдоль прямой $x = 0$ (рис. 1). Обозначим через D двумерную область, лежащую в полуплоскости $x > 0$, но вне исходной решетки.

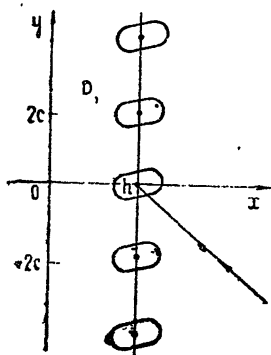


Рис. 1.

Решетка предполагается частой, т. е. $|k| \ll \pi/2c$ (k — волновое число) и h выбрано таким, что $|k(h + 2c)| \ll 1$.

В случае H -поляризации задача дифракции плоской волны $H_z^0 = \exp[-ik(ax - \beta y)]$ с направляющими косинусами α и β на абсолютно проводящей решетке в присутствии абсолютно проводящего экрана заключается в определении функции $H_z(x, y; k) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, регулярной по k при малых $|k|$ и удовлетворяющей следующим условиям:

в области D — уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) H_z = 0; \quad (1)$$

на границе решетки Γ' и на экране $x = 0$ — однородному условию Неймана

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0 \quad (2)$$

(n — нормаль в кривой ∂D , направленная внутрь области D);
в области D — условию квазипериодичности

$$H_z(x, y + 2c) = H_z(x, y) \exp(2ik\beta c) \quad (3)$$

и условию логашаемости Малложинца [1]

$$\sup_D |(H_z - H_z^0) \exp(-ik\beta y)| < \infty \text{ при } \operatorname{Im} k > |\operatorname{Re} k|. \quad (4)$$

Постановка задачи в случае E -поляризации для функции E_z до-словно совпадает с постановкой задачи для случая H -поляризации, за исключением краевого условия на ∂D (2), которое заменяется на следующее:

$$E_z|_{\partial D} = 0. \quad (5)$$

Заметим, что существование и единственность регулярных по k решений поставленных выше задач может быть доказана с помощью функции Грина для полосы. Эта функция была построена Ивановым [2], и метод доказательства теорем единственности и существования был им применен к задачам дифракции плоских волн на решетках (без экра-на).

2. H -ПОЛЯРИЗАЦИЯ

В работе [3] установлена следующая оценка. Любое решение урав-нения Гельмгольца, удовлетворяющее условиям квазипериодичности (3) и логашаемости (4), при $|k| < \pi/2c$ и $x \rightarrow \infty$ может быть представ-лено следующим образом:

$$H_z e^{-ik\beta y} = e^{-ik\alpha x} + R(k) e^{ik\alpha x} + O(e^{-\tau x}) \quad (6)$$

$$(\tau \geq \tau_0 > 0)$$

(R — постоянная).

Учитывая эту оценку, представим магнитное поле H_z в виде

$$H_z = e^{ik\beta y} \begin{cases} e^{-ik\alpha x} + R(\alpha, \beta; k) e^{ik\alpha x} + u(x, y; k), & (x, y) \in D_2 \\ A(\alpha, \beta; k) e^{-ik\alpha x} + B(\alpha, \beta; k) e^{ik\alpha x} + v(x, y; k), & (x, y) \in D_1 \end{cases} \quad (7)$$

где области D_1 и D_2 являются частями области D при $x < h$ и $x > h$.

Выпишем условия разрешимости задачи (1)–(4), связывающие величины R , A , B , u и v :

$$2ik\alpha c(1 - R) = \int_{\gamma} H_z \frac{\partial \Phi}{\partial n} dl; \quad (8)$$

$$2k\alpha c(1 + R) = \int_{\gamma} H_z \frac{\partial \Psi}{\partial n} dl + \int_{-c}^c H_z(0, y) \frac{\partial \Psi(0, y)}{\partial x} dy. \quad (9)$$

Здесь кривая γ является границей одного элемента решетки, располо-женного в полосе $|y| \leq c$ ($z = 0$), а функции Φ и Ψ определяются следую-щими выражениями:

$$\Phi = \cos(k\alpha x) e^{-ik\beta y}, \quad \Psi = \sin(k\alpha x) e^{-ik\beta y}. \quad (10)$$

Равенства (8) и (9) являются следствием формулы Грина для об-

ласти D_0 (D_0 — часть области D при $|y| \leq c$), дважды примененной к функциям H_z , Φ и H_z , Ψ .

Если функции u , v , R , A и B разложить в степенные ряды по k в окрестности $k = 0$:

$$u = \sum_{p=0}^{\infty} u_p k^p, \quad v = \sum_{p=0}^{\infty} v_p k^p, \quad R = \sum_{p=0}^{\infty} R_p k^p,$$

$$A = \sum_{p=0}^{\infty} A_p k^p, \quad B = \sum_{p=0}^{\infty} B_p k^p,$$

и подставить эти ряды в (1) — (4), предварительно разложив все функции, стоящие в их правых частях в степенные ряды по k в окрестности $k = 0$, собрать все члены, имеющие одинаковую степень k , и их сумму приравнять нулю, то, подобно тому как это делалось в работе [3], получим рекуррентную последовательность краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона. Эта последовательность позволяет определить магнитное поле H_z с любой наперед заданной точностью по k при достаточно малых $|k|$.

Метод сведения задач дифракции длинных волн к рекуррентным последовательностям краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона был предложен Малюжиным (см., например, [3]).

В настоящей работе будет рассмотрена только первая краевая задача из полученной описанным выше способом рекуррентной последовательности, а именно следующая: функции u_1 и v_1 удовлетворяют:

в области D — уравнению Лапласа

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} u_1, \quad (x, y) \in D_2 \\ v_1, \quad (x, y) \in D_1 \end{array} \right\} = 0; \quad (11)$$

на кривых Γ^+ , Γ^- и прямой $x = 0$ — условию Неймана

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial n} \right|_{\Gamma^+} = i\alpha (1 - R_0) \frac{\partial x}{\partial n} - i\beta (1 + R_0) \left. \frac{\partial y}{\partial n} \right|_{\Gamma^+}; \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial n} \right|_{\Gamma^-} = i\alpha (A_0 - B_0) \frac{\partial x}{\partial n} - i\beta (A_0 + B_0) \left. \frac{\partial y}{\partial n} \right|_{\Gamma^-}; \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial v_1}{\partial n} \right|_{x=0} = i\alpha (A_0 - B_0); \quad (14)$$

условиям периодичности

$$u_1(x, y + 2c) = u_1(x, y), \quad v_1(x, y + 2c) = v_1(x, y) \quad (15)$$

и условию затухаемости при $x \rightarrow \infty$

$$u_1 = O(e^{-\pi x/c}). \quad (16)$$

Заметим, что в условиях (11) — (16) учтены тождественные равенства нулю функций u_0 и v_0 , которые следуют из единственности решения нулевой краевой задачи из упомянутой выше рекуррентной последовательности.

Нулевые приближения по k равенств (8) и (9) дают возможность вычислить коэффициенты R_0 , A_0 и B_0 :

$$R_0 = A_0 = B_0 = 1.$$

Из первого приближения по k интегрального соотношения (8) находим величину

$$R_1 = -i\alpha(S/c) + (\beta/2\alpha c)(\mu_1 + \mu_2), \quad (17)$$

где S — площадь одного элемента рассматриваемой решетки и

$$\mu_1 = \int_{\gamma^+} u_1 \frac{\partial y}{\partial n} dl, \quad \mu_2 = \int_{\gamma^-} v_1 \frac{\partial y}{\partial n} dl$$

(кривые γ^+ и γ^- являются частями γ при $x > h$ и $x < h$).

Чтобы вычислить два последних функционала, рассмотрим периодическую с периодом $2c$ гармоническую в области D функцию φ , которая обладает следующими свойствами:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\partial D} = \left. \frac{\partial y}{\partial n} \right|_{\partial D}, \quad \varphi = O(e^{-\pi x/c}) \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (18)$$

В силу четности функции φ по x ее можно продолжить в левую полуплоскость ($x < 0$), и эта функция будет являться потенциалом обтекания (идеальной несжимаемой жидкостью с единичной скоростью, параллельной оси y при $x \rightarrow \infty$) двойной решетки. Только что упомянутая двойная решетка получается из исходной путем добавления к последней ее зеркального отражения относительно оси y .

Из формулы Грина для области D_0^2 (D_0^2 — часть D_2 при $|y| \leq c$), примененной к функциям φ и u_1 , и той же формулы для области D_0^1 (D_0^1 — часть D_1 при $|y| \leq c$), примененной к функциям φ и v_1 , находим, что

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \int_{\gamma^+} \varphi \frac{\partial u_1}{\partial n} dl - \int_L u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + \int_L \varphi \frac{\partial u_1}{\partial x} dy, \\ \mu_2 &= \int_{\gamma^-} \varphi \frac{\partial v_1}{\partial n} dl + \int_L v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \int_L \varphi \frac{\partial v_1}{\partial x} dy + \int_{-c}^c \varphi(0, y) \frac{\partial v_1(0, y)}{\partial x} dy, \end{aligned}$$

где через L обозначены отрезки прямой $x = h$, расположенные в области D_0 .

Нулевые и первые приближения по k условий непрерывности электрического $E_y = (1/ik) \partial H_z / \partial x$ и магнитного H_z полей на отрезках L с учетом равенств $R_0 = A_0 = B_0 = 1$ позволяют выписать следующие соотношения:

$$u_1 - v_1 = A_1 + B_1 - R_1, \quad (x, y) \in L,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in L,$$

которые, в свою очередь, если принять во внимание условия (12)–(14), определяют выражение

$$\mu_1 + \mu_2 = i\beta\lambda_{yy}, \quad \lambda_{yy} = - \int_{\Gamma_0} \varphi \frac{\partial y}{\partial n} dl, \quad (19)$$

где λ_{yy} — коэффициент присоединенной массы двойной решетки и кривая Γ_0 состоит из кривых $\gamma(x, y)$ и $\gamma(-x, y)$. Для величины λ_{yy} двойной решетки справедлива формула, по которой вычисляется коэффициент λ_{yy} однорядной решетки [4].

Подставляя выражение (19) в равенство (17), окончательно приходим к следующей формуле для R_1 :

$$R_1 = (i/2\alpha c) (\beta^2 \lambda_{yy} - 2\alpha^2 S).$$

Таким образом, найдена асимптотика магнитного поля H_z вдали от решетки:

$$H_z \sim H_z^0 + [1 + kR_1 + O(k^2)] \exp[ik(\alpha x + \beta y)], \quad x \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow 0.$$

Заметим, что для вычисления коэффициента отражения в первом приближении по k мы воспользовались разложением соотношений (8) и (9) в ряд по положительным степеням k . Эти разложения являются асимптотическими при достаточно малых $|k|$ и равномерно сходящимися по k при $|kd| < 1$ ($d = \max \Gamma^+$). Поэтому магнитное поле H_z вдали от решетки ($x \rightarrow \infty$) будет достаточно точно определяться последним равенством только при таких фиксированных k , для которых выполняется соотношение $|kd| \ll 1$.

Итак, знание коэффициента присоединенной массы λ_{yy} упомянутой выше двойной решетки позволяет вычислить коэффициент отражения исходной решетки в присутствии проводящего экрана.

Для примера рассмотрим решетку, состоящую из бесконечно тонких металлических лент, расположенных вдоль прямой $x = h$ (рис. 2). Присоединенная масса λ_{yx} для двойной решетки из таких лент тождественно равна нулю. Отсюда, учитывая, что $\frac{\partial y}{\partial n} = 0$, получим

$$R_1 = 0, \quad R = 1 + O(k^2) \quad \text{при } k \rightarrow 0,$$

т. е. плоская волна отражается от рассматриваемой системы (решетка—экран) как от абсолютно проводящего экрана.

Заметим, что магнитное поле H_z в окрестности решетки и экрана с точностью $O(k^2)$ будет определяться с помощью функции φ по формулам

$$u_1 = -2i\beta\varphi, \quad (x, y) \in D_2; \quad v_1 = -2i\beta\varphi, \quad (x, y) \in D_1, \\ \varphi = \operatorname{Re} [W(z) - iz],$$

где функция $W(z)$ реализует конформное отображение области D (рис. 1) в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ на область D_W (рис. 2).

3. E-ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Представим решение задачи дифракции плоской волны $E_z = \exp[-ik(\alpha x - \beta y)]$ (падение справа $x > h$) на проводящей решетке в присутствии проводящего экрана с учетом оценки (6) в следующем виде:

$$E_z = e^{ik\beta y} \begin{cases} e^{-ik\alpha x} + T(\alpha, \beta; k) e^{ik\alpha x} + f(x, y; k), & (x, y) \in D_2 \\ C(\alpha, \beta; k) e^{-ik\alpha x} + G(\alpha, \beta; k) e^{ik\alpha x} + g(x, y; k), & (x, y) \in D_1. \end{cases}$$

Как и в случае H -поляризации, выпишем условия разрешимости задачи дифракции (1), (5), (3), (4):

$$2ik\alpha c(1 - T) = - \int_{\gamma} \Phi \frac{\partial E_z}{\partial n} dl - \int_{-c}^c \frac{\partial E_z}{\partial x} e^{-ik\beta y} dy; \quad (20)$$

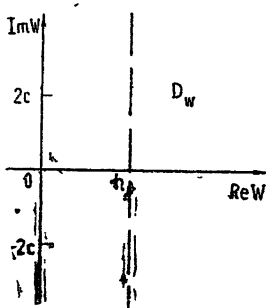


Рис. 2.

$$2 k \alpha c (1 + T) = - \int_{\Gamma} \Psi \frac{\partial E_z}{\partial n} dl. \quad (21)$$

Последние два равенства получаются из формулы Грина аналогично тому, как были получены условия разрешимости в случае H -поляризации.

Если функции f , g , T , C и G разложить в степенные ряды по k в окрестности $k = 0$:

$$f = \sum_{p=0}^{\infty} f_p k^p, \quad g = \sum_{p=0}^{\infty} g_p k^p, \quad T = \sum_{p=0}^{\infty} T_p k^p, \quad C = \sum_{p=0}^{\infty} C_p k^p, \quad G = \sum_{p=0}^{\infty} G_p k^p$$

и подставить полученные результаты в равенства (1), (5), (3) и (4), ограничиваясь только первыми степенями k , то получим краевую задачу для функций f_1 и g_1 , которые удовлетворяют следующим условиям:

в области D — уравнению Лапласа

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} f_1, \quad (x, y) \in D_2 \\ g_1, \quad (x, y) \in D_1 \end{array} \right\} = 0;$$

на кривых Γ^+ , Γ^- и прямой $x = 0$ — условию Дирихле

$$f_1|_{\Gamma^+} = i\alpha(1 - T_0)x - T_1,$$

$$g_1|_{\Gamma^-} = i\alpha(C_0 - G_0)x + (C_1 + G_1),$$

$$g_1|_{x=0} = -(C_1 + G_1);$$

в области D — условиям периодичности

$$f_1(x, y + 2c) = f_1(x, y), \quad g_1(x, y + 2c) = g_1(x, y)$$

и условию при $x \rightarrow \infty$

$$f_1 = O(e^{-\pi x/c}).$$

В последних соотношениях учтены равенства $f_0 = g_0 \equiv 0$, которые следуют из единственности решения краевой задачи для функции f_0 и g_0 .

Нулевые приближения по k равенств (20) и (21) дают возможность вычислить T_0 , C_0 и G_0 :

$$C_0 = -G_0 = T_0 = -1.$$

Из первого приближения по k интегрального соотношения (21) находим величину

$$T_1 = (i\alpha/c)S - (1/2c) \int_{\Gamma^+} x \frac{\partial f_1}{\partial n} dl - (1/2c) \int_{\Gamma^-} x \frac{\partial y_1}{\partial n} dl. \quad (22)$$

Чтобы вычислить два последних функционала, интегрированием по частям проверим справедливость следующих равенств:

$$\int_{\Gamma^+} x \frac{\partial f_1}{\partial n} dl = \int_{\Gamma^+} \bar{f}_1 \frac{\partial y}{\partial n} dl, \quad \int_{\Gamma^-} x \frac{\partial g_1}{\partial n} dl = \int_{\Gamma^-} \bar{g}_1 \frac{\partial y}{\partial n} dl,$$

где функции \bar{f}_1 и \bar{g}_1 являются гармонически сопряженными с функциями f_1 и g_1 и удовлетворяют условиям

$$\left. \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial n} \right|_{\Gamma^+} = 2i\alpha \left. \frac{\partial y}{\partial n} \right|_{\Gamma^+}, \quad \bar{f}_1 = O(e^{-\pi x/c}) \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

$$\left. \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial n} \right|_{\Gamma^-} = 2i\alpha \left. \frac{\partial y}{\partial n} \right|_{\Gamma^-}, \quad \bar{g}_1 \Big|_{x=0} = 0.$$

Из формулы Грина для областей D_0^2 и D_0^1 , примененной к функциям f_1, φ и g_1, φ (определение функции φ см. (18)), получим

$$\int_{\Gamma^+} x \frac{\partial f_1}{\partial n} dl + \int_{\Gamma^-} x \frac{\partial g_1}{\partial n} dl = -i\alpha \lambda_{yy}.$$

Подставляя последний результат в выражение (22) для T_1 , получаем

$$T_1 = (i\alpha/2c) (2S + \lambda_{yy}).$$

В результате найдена асимптотика электрического поля E_z при $k \rightarrow 0$ вдали от решетки:

$$E_z \sim E_z^0 + [-1 + kT_1 + O(k^2)] \exp[ik(ax + \beta y)].$$

Последнее равенство достаточно хорошо определяет электрическое поле E_z вдали от решетки ($x \rightarrow \infty$) только при $|kd| \ll 1$.

Таким образом, знание коэффициента присоединенной массы λ_{yy} упомянутой выше двойной решетки позволяет вычислить коэффициент отражения исходной решетки в присутствии проводящего экрана.

Наконец, электрическое поле E_z в случае E -поляризации в окрестности решетки и экрана с точностью до $O(k^2)$ при $k \rightarrow 0$ будет зависеть также и от местных (экспоненциально затухающих при $x \rightarrow \infty$) полей f_1 и g_1 . Эти поля, как и в случае H -поляризации, определяются через аналитическую функцию $W(z)$, реализующую конформное отображение области D (рис. 1) в плоскости комплексного переменного z на область D_W (рис. 2), по формулам

$$f_1 = 2i\alpha \operatorname{Im} [W(z) - iz - (i/4c) (2S + \lambda_{yy})], \quad (x, y) \in D_2,$$

$$g_1 = 2i\alpha \operatorname{Im} [W(z) - iz - (i/4c) (2S + \lambda_{yy})], \quad (x, y) \in D_1.$$

Авторами был вычислен коэффициент присоединенной массы λ_{yy} двойной решетки, составленной из тонких лент, длина и высота которых равна $2d$ и $2b$, и $(d/b) \ll 1$ (рис. 3), по формулам Седова [4]:

$$\lambda_{yy} = \frac{8d^2}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \ln \frac{d^2 \sin(\pi b/c)}{4c^2 \sin(\pi h/c) \sin[\pi(h+b)/c] \sin[\pi(2h+b)/c]} \right] + o(d^2/c^2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Д. Малюжинец, Аннотации докл. 1-го Всесоюзного симпозиума по дифракции волн, Одесса, изд. АН СССР, 1960, стр. 42.
2. В. П. Иванов, ЖВММФ, 10, № 3, 673 (1970).
3. В. М. Астапенко, Г. Д. Малюжинец, Акуст. ж., 16, № 3, 354 (1970).
4. Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

DIFFRACTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE ON FREQUENTLY-PERIODIC ARRAY IN THE PRESENCE OF A PERFECTLY CONDUCTING SCREEN

V. M. Astapenko, V. V. Smirnov

The diffraction of a plane electromagnetic wave on a frequently-periodic array in the presence of a perfectly conducting screen is considered by the method suggested by Malyuzhinets. It is shown that both for H - and E -polarizations the longwave asymptotic field far from the array is fully expressed through the joint mass of the double array obtained from the initial one by adding to the latter its mirror reflection with respect to the screen. The field asymptotics near the array and the screen is determined by real and imaginary parts of the analytical function realizing the conform image of the appearance of the double array, consisting of the initial one, over the appearance of the double array consisting of infinite thin sections.

.

— — — — —