ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIV, № 8 *РАДИОФИЗИКА* *1971*

УДК 538.56 : 621.371

АСИМПТОТИКА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПУЧКОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Э. Д. Газазян, Б. Е. Кинбер

Приведено асимптотическое разложение электромагнитных полей с азимутальной зависимостью $e^{im\varphi}$ в окрестности внутренней каустики (фокальной линии). Получена связь между лучевыми разложениями и разложением в окрестности фокальной линии.

В предыдущей работе [1] была рассмотрена коротковолновая асимптотика скалярных волновых полей, соответствующих осесимметричным конгруенциям лучей.

Цель настоящей работы—распространить ранее полученные результаты на случай электромагнитных полей. Она является осесимметричным аналогом работы [2], в которой найдена равномерная, в окрестности каустики, асимптотика электромагнитного поля в случаях, когда радиусы кривизны каустики много больше длины волны.

Решение для полей с азимутальной зависимостью вида $e^{im\varphi}$ будем искать в форме*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \left\{ \boldsymbol{A}(\zeta, \rho)\, J_m(k\rho) + \frac{\boldsymbol{B}(\zeta, \rho)}{ik}\, \rho \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} \right\} \exp\,[ik(\zeta + \rho_0\varphi), \\ \boldsymbol{H} &= \left\{ \boldsymbol{C}(\zeta, \rho)\, J_m(k\rho) + \frac{\boldsymbol{D}(\zeta, \rho)}{ik}\, \rho \frac{dJ_m(k\rho)}{d\rho} \right\} \exp\,[ik(\zeta + \rho_0\varphi), \end{aligned} \tag{1}$$

где φ — азимутальный угол, ρ, ζ — координатные функции ($\zeta = \mathrm{const}$, $\rho = \mathrm{const}$ поверхности вращения), $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ —медленно меняющиеся функции. Функции ρ, ζ, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ подлежат определению. $J_m(k\rho)$ — функция Бесселя, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2J_m}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{dJ_m}{d\rho} + k^2\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) J_m = 0, \tag{2}$$

$\rho_0 = m/k$ — заданная константа.

Поля $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ гармонически зависят от времени и удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} - ik\boldsymbol{H} &= 0, \\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} + ik\boldsymbol{E} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

На них не налагаются какие-либо граничные условия.

---

* В случае $k\rho_0 \gg 1$ рассматриваемая асимптотика переходит в асимптотику с функцией Эйри, т. е. [2].

Подставляя (1) в (3), исключая с помощью (2) $\frac{d^2 J_m}{d\rho^2}$, приравнивая нулю коэффициенты при J_m и $\frac{dJ_m}{d\rho}$ и вводя обозначение

$$\psi = \int \sqrt{1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}}\, d\rho \quad \text{или} \quad \nabla\psi = \sqrt{1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}}\, \nabla\rho, \tag{4}$$

получим систему уравнений для $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$:

$$\begin{gathered}
[(\nabla\zeta + \rho_0\nabla\varphi), \boldsymbol{A}] + \sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}\,[\nabla\psi, \boldsymbol{B}] - \boldsymbol{C} = \frac{i}{k}\operatorname{rot}\boldsymbol{A},\\
[(\nabla\zeta + \rho_0\nabla\varphi), \boldsymbol{B}] + \frac{1}{\sqrt{\rho^2-\rho_0^2}}\,[\nabla\psi, \boldsymbol{A}] - \boldsymbol{D} = \frac{i}{k}\operatorname{rot}\boldsymbol{B},\\
[(\nabla\zeta + \rho_0\nabla\varphi), \boldsymbol{C}] + \sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}\,[\nabla\psi, \boldsymbol{D}] + \boldsymbol{A} = \frac{i}{k}\operatorname{rot}\boldsymbol{C},\\
[(\nabla\zeta + \rho_0\nabla\varphi), \boldsymbol{D}] + \frac{1}{\sqrt{\rho^2-\rho_0^2}}\,[\nabla\psi, \boldsymbol{C}] + \boldsymbol{B} = \frac{i}{k}\operatorname{rot}\boldsymbol{D}.
\end{gathered} \tag{5}$$

Векторы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ не ортогональны даже в нулевом приближении. Введем вместо них их линейные комбинации

$$\begin{aligned}
&\frac{\boldsymbol{A}}{\sqrt[4]{\rho^2-\rho_0^2}} + \sqrt[4]{\rho^2-\rho_0^2}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{M}, \qquad &\frac{\boldsymbol{C}}{\sqrt[4]{\rho^2-\rho_0^2}} + \sqrt[4]{\rho^2-\rho_0^2}\,\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P},\\
&\frac{\boldsymbol{A}}{\sqrt[4]{\rho^2-\rho_0^2}} - \sqrt[4]{\rho^2-\rho_0^2}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}, \qquad &\frac{\boldsymbol{C}}{\sqrt[4]{\rho^2-\rho_0^2}} - \sqrt[4]{\rho^2-\rho_0^2}\,\boldsymbol{D} = \boldsymbol{Q},
\end{aligned} \tag{6}$$

которые, как мы покажем ниже, являются амплитудами лучевых полей (1).

Векторы $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ будем искать в форме асимптотических разложений:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{M} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{k}\right)^n \boldsymbol{M}_n, \quad \boldsymbol{N} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{k}\right)^n \boldsymbol{N}_n,\\
\boldsymbol{P} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{k}\right)^n \boldsymbol{P}_n, \quad \boldsymbol{Q} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{k}\right)^n \boldsymbol{Q}_n.
\end{gathered} \tag{7}$$

Введя обозначения

$$\gamma = \nabla\psi + \nabla\zeta + \rho_0\nabla\varphi, \quad \delta = -\nabla\psi + \nabla\zeta + \rho_0\nabla\varphi \tag{8}$$

и образуя сумму и разность первой и второй пар уравнений (5), получим системы рекуррентных уравнений

$$\begin{aligned}
&[\gamma, \boldsymbol{M}_n] - \boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{X}_n, \quad &[\delta, \boldsymbol{N}_n] - \boldsymbol{Q}_n = \boldsymbol{Z}_n,\\
&[\gamma, \boldsymbol{P}_n] + \boldsymbol{M}_n = \boldsymbol{Y}_n, \quad &[\delta, \boldsymbol{Q}_n] + \boldsymbol{N}_n = \boldsymbol{U}_n,
\end{aligned} \tag{9a}$$

где

$$
\begin{aligned}
X_n &= \operatorname{rot} M_{n-1} + \frac{1}{2}[\beta, N_{n-1}],\\
Y_n &= \operatorname{rot} P_{n-1} + \frac{1}{2}[\beta, Q_{n-1}],\\
Z_n &= \operatorname{rot} N_{n-1} + \frac{1}{2}[\beta, M_{n-1}],\\
U_n &= \operatorname{rot} Q_{n-1} + \frac{1}{2}[\beta, P_{n-1}],
\end{aligned}
\tag{9б}
$$

$$
X_0 = Y_0 = Z_0 = U_0,
$$

$$
\beta = \frac{\rho^2}{(\rho^2 - \rho_0^2)^{3/2}} \nabla\psi.
$$

Поскольку система (9) в нулевом приближении однородна, для того, чтобы M_0, N_0, P_0, Q_0 были отличны от нуля, необходимо, чтобы

$$
\begin{aligned}
1 - (\gamma, \gamma) &= 0,\\
1 - (\delta, \delta) &= 0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

т. е. величины

$$
S^{\mp} = \mp \int \sqrt{1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}}\, d\rho + \zeta + \rho_0 \varphi,
\tag{11а}
$$

градиентами которых являются векторы γ и δ, удовлетворяли уравнению эйконала. Это означает, что координаты ζ, ρ, φ образуют ортогональную сетку, ζ и ρ удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{aligned}
(\nabla\psi)^2 + (\nabla\zeta)^2 &= 1 - \rho_0^2 (\nabla\varphi)^2,\\
(\nabla\psi, \nabla\zeta) &= 0.
\end{aligned}
\tag{11б}
$$

Напомним, что

$$
\nabla\varphi = \varphi_0 \frac{1}{r}
$$

(r — расстояние до оси вращения — известная функция).

Рассмотрим теперь решение в нулевом приближении. Из (9 а) следует, что тройки векторов M_0, P_0, γ и N_0, Q_0, δ ортогональны друг другу и не связаны между собой. Тройка M_0, P_0, γ соответствует полю лучей, уходящих (срывающихся) с каустики, а тройка N_0, Q_0, δ — полю лучей, приходящих (садящихся) на каустику. Связь между этими конгруенциями определяется тем, что векторы

$$
B_0 = \frac{1}{2} \frac{M_0 - N_0}{\sqrt[4]{\rho^2 - \rho_0^2}}, \qquad D_0 = \frac{1}{2} \frac{P_0 - Q_0}{\sqrt[4]{\rho^2 - \rho_0^2}}
$$

должны быть конечными на внутренней каустике, т. е. при $\rho = \rho_0$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
M_0(\rho_0, \zeta) &= N_0(\rho_0, \zeta),\\
P_0(\rho_0, \zeta) &= Q_0(\rho_0, \zeta).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Соотношения (12), которые надо рассматривать как начальные условия для уходящих лучей, должны соблюдаться и при $n > 0$, так как полные решения системы (9) являются суммой общих решений однородных уравнений и частных решений неоднородных систем. Из (9) следует также связь между парами векторов $\boldsymbol{M}_0$, $\boldsymbol{P}_0$ и $\boldsymbol{N}_0$, $\boldsymbol{Q}_0$, т. е. связь между электрическим и магнитным полями лучевых полей в нулевом приближении. Поэтому будем искать решения для них в форме

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_0 &= \boldsymbol{n}_1 \Phi_{1\,0} + \boldsymbol{b}_1 \Phi_{2\,0}, \quad \boldsymbol{N}_0 = \boldsymbol{n}_2 F_{1\,0} + \boldsymbol{b}_2 F_{20}, \\ \boldsymbol{P}_0 &= -\boldsymbol{n}_1 \Phi_{2\,0} + \boldsymbol{b}_1 \Phi_{1\,0}, \quad \boldsymbol{Q}_0 = -\boldsymbol{n}_2 F_{2\,0} + \boldsymbol{b}_2 F_{1\,0}. \end{aligned} \tag{13}$$

Функции $\Phi_{1\,0}$ и $\Phi_{2\,0}$ для подходящего и $F_{1\,0}$, $F_{2\,0}$ для уходящего от каустики луча определяют два независимых поляризационных состояния.

Векторы $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{b}_1$, γ и $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{b}_2$, δ образуют ортогональные тройки ортов. Поскольку векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ для прямолинейного луча нельзя трактовать как орты нормали и бинормали, разумно ориентировать $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ в плоскостях главных кривизн элемента фронта, соответствующего рассматриваемому лучу, или, иными словами, так, чтобы они соответственно касались и были нормальны к поверхности каустики в точке касания.

Вывод уравнений для скалярных функций $\Phi_{1\,0}$, $\Phi_{2\,0}$ и $F_{1\,0}$, $F_{2\,0}$ производится из условия разрешимости уравнений (9) для первого приближения (напомним, что определитель левых частей (9) при любом n равен нулю).

Умножая при $n = 1$ первую пару (9) скалярно на $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{b}_1$, учитывая (13) и соотношение $\boldsymbol{n}_1 = [\boldsymbol{b}_1, \gamma]$, получим уравнения для $\Phi_{1\,0}$ и $\Phi_{2\,0}$:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{n}_1) + (\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{b}_1) &= 0, \\ (\boldsymbol{X}_0, \boldsymbol{b}_1) - (\boldsymbol{Y}_0, \boldsymbol{n}_1) &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Аналогично из второй пары (9) определяем систему для $F_{1\,0}$, $F_{2\,0}$:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{Z}_0, \boldsymbol{n}_2) + (\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{b}_2) &= 0, \\ (\boldsymbol{Z}_0, \boldsymbol{b}_2) - (\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{n}_2) &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Раскрывая (14) и (15) с помощью (9б) и учитывая, что для конгруенции прямолинейных лучей

$$\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{n} + \boldsymbol{b} \operatorname{rot} \boldsymbol{b} = 0,$$

а также соотношения

$$\begin{aligned} (\beta, [\boldsymbol{n}_1 \boldsymbol{n}_2] + [\boldsymbol{b}_1 \boldsymbol{b}_2]) &= 0, \\ (\beta, [\boldsymbol{b}_2 \boldsymbol{n}_1] - [\boldsymbol{n}_2 \boldsymbol{b}_1]) &= 0, \\ \boldsymbol{b}_1 \operatorname{rot} \boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_1 \operatorname{rot} \boldsymbol{b}_1 = \operatorname{div} [\boldsymbol{n}_1 \boldsymbol{b}_1] &= \operatorname{div} \gamma, \\ \boldsymbol{b}_2 \operatorname{rot} \boldsymbol{n}_2 - \boldsymbol{n}_2 \operatorname{rot} \boldsymbol{b}_2 = \operatorname{div} [\boldsymbol{n}_2 \boldsymbol{b}_2] &= \operatorname{div} \delta, \end{aligned} \tag{16}$$

получим систему тождественных уравнений для $\Phi_{1\,0}$, $\Phi_{2\,0}$, $F_{1\,0}$, $F_{2\,0}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{1\,0} \operatorname{div} \gamma + 2(\nabla \Phi_{1\,0}, \gamma) &\equiv \operatorname{div} (\Phi_{1\,0}^2 \gamma) = 0, \\ \Phi_{2\,0} \operatorname{div} \gamma + 2(\nabla \Phi_{2\,0}, \gamma) &\equiv \operatorname{div} (\Phi_{2\,0}^2 \gamma) = 0, \\ F_{10} \operatorname{div} \delta + 2(\nabla F_{1\,0}, \delta) &\equiv \operatorname{div} (F_{1\,0}^2 \delta) = 0, \\ F_{2\,0} \operatorname{div} \delta + 2(\nabla F_{2\,0}, \delta) &\equiv \operatorname{div} (F_{2\,0}^2 \delta) = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

которые совпадают с уравнениями переноса в нулевом приближении для скалярного случая. Из (17) следует закон сохранения энергии в лучевой трубке

$$\operatorname{div}\left[\left(\Phi_{10}^2+\Phi_{20}^2\right)\gamma\right]=0,$$

а также независимость двух поляризационных состояний.

На основании проделанного анализа можно сказать, что равномерное асимптотическое разложение, справедливое в окрестности каустики, может быть построено с помощью лучевого разложения, которое само расходится на каустике. Для этого надо в нулевом приближении в соответствии с (11) определить аргументы ρ и ζ функции Бесселя и экспоненты через эйконалы S^+ и S^-, а из формул (6) и (13) — $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ через Φ_{10}, Φ_{20}, F_{10}, F_{20}.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Токатлы, Б. Е. Кинбер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **14**, № 5, 761 (1971).
2. Ю. А. Кравцов, Изв. высш уч. зав. — Радиофизика, **7**, № 6, 1064 (1964).

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию 4 января 1971 г.

ASYMPTOTICS OF AXISYMMETRICAL BEAMS OF ELECTROMAGNETIC WAVES

E. D. Gazazyan, B. E. Kinber

The asymptotic expansion of electromagnetic fields with asimuthal dependence $e^{im\varphi}$ in the vicinity of internal caustic (the focal line) is given. The relation between the beam expansion and that in the vicinity of the focal line is obtained.