УДК 621.371 : 535.2

О СПЕКТРЕ ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ В ОГРАНИЧЕННОМ ПУЧКЕ СВЕТА

Н. С. Тиме

Работа посвящена вопросу о влиянии пространственной ограниченности волны на частотный спектр флуктуаций логарифма амплитуды на оси пучка. Показано, что спектр коллимированного пучка в области высоких частот может существенно отличаться от спектра плоской волны.

При распространении волн в турбулентной среде их параметры испытывают флуктуации, причем величина флуктуаций зависит от вида волны. Случаи плоской и сферической волн были подробно изучены (см., например, [1]). Последнее время в связи с быстрым развитием техники ОКГ особое внимание уделяется распространению пространственно-ограниченных пучков (например, [2—4]). Нас будет интересовать важный для приложений вопрос о том, как влияет пространственная ограниченность волны на частотный спектр флуктуаций амплитуды в точке приема. В работе используется модель турбулентной атмосферы, подчиняющаяся закону Колмогорова—Обухова в инерционном интервале спектра. Для получения решения применяется метод плавных возмущений, справедливый в области слабых флуктуаций логарифма амплитуды волны $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$. Спектр флуктуаций логарифма амплитуды рассматривается также в работе [4], однако автор [4] анализирует лишь спектр в фокусе сходящегося пучка, где применение метода плавных возмущений ничем не оправдано [5].

Пусть на турбулентный слой $[0, L]$ падает волна с плоским фазовым фронтом, имеющая при $x = 0$ распределение амплитуды

$$U(\rho) = A_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2}\right) \quad (a = \mathrm{const}), \tag{1}$$

ρ — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

В отсутствие флуктуаций диэлектрической проницаемости точное решение волнового уравнения имеет вид ($\varepsilon_0 = 1$)

$$U_0(r) = \frac{A_0 \exp\left[(-\rho^2/2a^2)(1 + ix/ka^2) + ikx\right]}{1 + ix/ka^2} \tag{2}$$

при

$$x > a > 1/k. \tag{3}$$

Для турбулентного слоя $[0, L]$ с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r, t) = 1 + \varepsilon_1(r, t)$, где $\sqrt{\langle \varepsilon_1^2(r, t) \rangle} \ll 1$, решение волнового уравнения в первом приближении метода плавных возмущений дает [1]

$$U(r, t) = U_0(r) \exp \Psi_1(r, t),$$

$$\Psi_1(r, t) = \frac{k^2}{4\pi}\int_V \varepsilon_1(r, t)\,\frac{U_0(r')}{U_0(r)}\,\frac{\exp\{ik[(x-x')+(\rho-\rho')^2/2(L-x')]\}}{L-x'} \quad (4)$$

при $\lambda/l_0 \ll 1$ и $\lambda' L/l_0^2 \ll l_0^2/\lambda^2$. Здесь l_0 — внутренний масштаб турбулентности. Подставим (2) в (4) и рассмотрим значение $\Psi_1(r, t)$ на оси, равное

$$\Psi_1(0, 0, L, t) = \frac{k^2}{4\pi}\int_0^L \frac{dx'}{L-x'}\,\frac{1+iL/k\alpha^2}{1+ix'/k\alpha^2}\times$$
$$\times\iint_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\rho'^2\left[\frac{k}{2(k\alpha^2+ix')}-\frac{ik}{2(L-x')}\right]\right\}\varepsilon_1(r', t)d^2\rho'. \quad (5)$$

Заметим, что условие (3) не выполняется при интегрировании по x' от 0 до x' порядка α, но эту область можно не принимать во внимание, так как $L \gg \alpha$, $U(r')$ не имеет особенностей на отрезке $|0, \alpha|$ и вклад этого участка в общий интеграл мал.

Составим временную автокорреляционную функцию

$$B_\chi(\tau) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[\langle \Psi_1(0, 0, L, t)\Psi_1(0, 0, L, t+\tau)\rangle +$$
$$+\langle \Psi_1(0, 0, L, t)\Psi_1^*(0, 0, L, t+\tau)\rangle]. \quad (6)$$

Для этого применим «гипотезу замороженности» для поля при диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1(x, y, z, t+\tau) = \varepsilon_1(x, y - v\tau, z, t)$, полагая его изотропным, т. е.

$$\langle\varepsilon_1(x', y', z', t)\,\varepsilon_1(x'', y'', z'', t)\rangle = B_\varepsilon\left(\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}, 0\right).$$

Мы предположим, что вектор скорости v перпендикулярен направлению распространения волны. Вычислим первое слагаемое в (6). Подставляя (5) в (6) и записывая двумерное разложение Фурье для

$$B_\varepsilon(|r'-r''|, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(x'-x'', \varkappa_2, \varkappa_3)\cos[\varkappa_2(y'-y'')+\varkappa_3(z'-z'')]\,d^2\varkappa,$$

произведем интегрирование по dy', dz' и dy'', dz''. В результате получим

$$\langle\Psi_1(0, 0, L, t)\Psi_1(0, 0, L, t+\tau)\rangle = -\frac{k^2}{4}\int_0^L dx'\int_0^L dx''\iint_{-\infty}^{\infty} d^2\varkappa F_\varepsilon(x'-x'', \varkappa_2, \varkappa_3)\times$$
$$\times\exp\left\{-i\varkappa v\tau+\frac{\varkappa^2}{2ik}\left[\frac{1}{\Phi(x')}+\frac{1}{\Phi^*(x'')}\right]\right\}. \quad (7)$$

Мы обозначили $\Phi(x') = (L - ik\alpha^2)/(L-x')(x'-ik\alpha^2)$. Путем аналогичных преобразований $\langle \Psi_1(0, 0, L, t)\,\Psi_1^*(0, 0, L, t+\tau)\rangle$ приводятся к виду

$$\langle \Psi_1(0, 0, L, t)\Psi_1^*(0, 0, L, t+\tau)\rangle = \frac{k^2}{4}\int_0^L dx'\int_0^L dx''\iint_{-\infty}^{\infty} d^2\varkappa\times \quad (8)$$

$$\times F_\varepsilon(x'-x'', \varkappa_2, \varkappa_3)\exp\left\{-i\varkappa v\tau+\frac{\varkappa^2}{2ik}\left[\frac{1}{\Phi(x')}-\frac{1}{\Phi^*(x'')}\right]\right\}.$$

Запишем показатели экспонент в формулах (8) и (9) следующим образом:

$$\frac{\varkappa^2}{2ik}\left[\frac{1}{\Phi(x')}+\frac{1}{\Phi^*(x'')}\right]=$$

$$=\frac{\varkappa^2}{ik}\;\frac{k^2\alpha^4(L-\eta)+\eta L(L-\eta)-ik\alpha^2(L-\eta)^2-[(x'-x'')^2/4](L-ik\alpha^2)}{L^2+k^2\alpha^4}; \tag{9}$$

$$\frac{\varkappa^2}{2ik}\left[\frac{1}{\Phi(x')}-\frac{1}{\Phi^*(x'')}\right]=\frac{\varkappa^2}{2ik}\times$$

$$\times\frac{-2ik\alpha^2(L-\eta)^2+(x'-x'')L^2-2\eta L(x'-x'')-k^2\alpha^4(x'-x'')-ik\alpha^2(x'-x'')^2/2}{L^2+k^2\alpha^4}, \tag{10}$$

где $\eta=x'+x''$.

Оценим слагаемые в показателях экспонент, содержащие $x'-x''$, воспользовавшись тем обстоятельством, что функция $F_\varepsilon(x'-x'', \varkappa_2, \varkappa_3)$ отлична от нуля в области $\left|(x'-x'')\sqrt{\varkappa_2^2+\varkappa_3^2}\right|\leqslant 1$. Легко видеть, что последние слагаемые в (9) и (10) имеют порядок не более величины $(\lambda/\alpha)^2$, причем $(\lambda/\alpha)^2\ll 1$, а второе, третье и четвертое слагаемые в (10) не более λ/l_0, где $\lambda/l_0\ll 1$. Отбрасывая эти члены, запишем корреляционную функцию $B_\chi(\tau)$ в виде

$$B_\chi(\tau)=\frac{\pi k^2}{4}\,\mathrm{Re}\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} d^2\varkappa\,\Phi_\varepsilon(\varkappa)\exp{-i\varkappa v\tau}\int_0^L d\eta\exp\left[-\frac{\varkappa^2\alpha^2(L-\eta)^2}{L^2+k^2\alpha^4}\right]\times$$

$$\times\left\{1-\exp\left[\frac{\varkappa^2(L-\eta)(k^2\alpha^4+\eta L)}{ik(L^2+k^2\alpha^4)}\right]\right\}, \tag{11}$$

где $\Phi_\varepsilon(\varkappa)=\Phi_\varepsilon\left(\sqrt{\varkappa_2^2+\varkappa_3^2}\right)$ — трехмерный спектр флуктуаций диэлектрической проницаемости.

Эта формула переходит в формулу $B_\chi(\tau)$ для плоской волны (1) при двух условиях:

а) $\dfrac{L^2}{k^2\alpha^4}\ll 1$,

б) $\dfrac{\varkappa^2(L-\eta)^2\alpha^2}{k^2\alpha^4+L^2}<\dfrac{\varkappa_m^2L^2}{k^2\alpha^2}\ll 1$ или $\alpha\gg\left(\dfrac{\lambda}{l_0}\right)L$,

где $\varkappa_m=5{,}91/l_0$. Смысл ограничения а) очевиден. Условие б) означает, что для коллимированных пучков можно пользоваться формулами для $B_\chi(\tau)$ или ее фурье-преобразованием $W(\omega)$, рассчитанными для плоской волны, если ширина пучка такова, что углы дифракции на всех неоднородностях с размерами $l\geqslant l_0$ меньше угла α/L, или, другими словами, если при распространении плоской волны дифракцией на неоднородностях $l\geqslant l_0$, лежащих вне конуса с основанием радиуса α и высотой L, можно пренебречь при вычислении поля в вершине этого конуса.

Рассмотрим ближнюю зону $k\alpha^2>L$. Пренебрежем в (11) L^2 по сравнению с $k^2\alpha^4$. Найдем выражение для спектральной плотности флуктуаций логарифма амплитуды волны $W(\omega) = 4\int\limits_0^\infty B_\chi(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau$ при

условии $\varkappa_m^2 L/k^2\alpha^2 < 1$ и ограничении первыми двумя членами при разложении экспоненты $\exp[-\varkappa^2(L-\eta)/k^2\alpha^2]$ в ряд.

Первый член разложения дает спектр $W_{\text{пл}}(\omega)$ плоской волны

$$W_{\text{пл}}(\omega) = \frac{2\pi^2 k^2}{v}\int\limits_{\omega/v}^{\varkappa_m}\frac{\varkappa\,d\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2-\omega^2/v^2}}\,\Phi_\varepsilon(\varkappa)\,\mathrm{Re}\int\limits_0^L\left[1-\exp\frac{i\varkappa^2(L-\eta)}{k}\right]d\eta. \qquad (12)$$

Второй член разложения представляет добавку

$$W_1(\omega) = -\frac{2\pi^2 k^2}{v}\int\limits_{\omega/v}^{\varkappa_m}\frac{\varkappa\,d\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2-\omega^2/v^2}}\,\Phi_\varepsilon(\varkappa)\,\mathrm{Re}\int\limits_0^L\frac{\varkappa^2(L-\eta)^2}{k^2\alpha^2}\left[1-\exp\frac{i\varkappa^2(L-\eta)}{k}\right]d\eta. \qquad (13)$$

Вычисляя внутренний интеграл, получим

$$W_1(\omega) = -\frac{2\pi^2 k^2}{v}\int\limits_{\omega/v}^{\varkappa_m}\frac{\varkappa\,d\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2-\omega^2/v^2}}\,\Phi_\varepsilon(\varkappa)\,\frac{\varkappa^2 L^2}{k^2\alpha^2}\left[\frac{1}{3}-\frac{\sin(\varkappa^2 L/k)}{\varkappa^2 L/k}\times\right.$$
$$\left.\times\left(1-\frac{2}{\varkappa^4 L^2/k^2}\right)-\frac{2\cos(\varkappa^2 L/k)}{\varkappa^4 L^2/k^2}\right]. \qquad (14)$$

В качестве модели турбулентности возьмем спектр $\Phi_\varepsilon(\varkappa) = 0{,}33\,C_\varepsilon^2\varkappa^{-11/3}\exp(-\varkappa^2/\varkappa_m^2)$. Тогда, учитывая, что средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды в плоской волне в случае больших значений волнового параметра $\varkappa_m^2 L/k \gg 1$ равен $\langle\chi^2\rangle = 0{,}077\,C_\varepsilon^2 k^{7/6}L^{11/6}$, составим функцию $U_1(\omega) = \omega W(\omega)/2\pi\langle\chi^2\rangle$, являющуюся безразмерной функцией безразмерных параметров—частоты $\Omega = (\omega/v)\sqrt{L/k}$, $\delta^2 = L/k\alpha^2$ и $D = \varkappa_m^2 L/k$:

$$U_1(\Omega,\delta^2,D) = -0{,}673\,\delta^2\Omega\int\limits_0^\infty\left\{\frac{1}{3}-\left[1-\frac{2}{(x+\Omega^2)^2}\right]\frac{\sin(x+\Omega^2)}{x+\Omega^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{2\cos(x+\Omega^2)}{(x+\Omega^2)^2}\right\}(x+\Omega^2)^{-5/6}x^{1/2}\exp\left[-\frac{x+\Omega^2}{D}\right]dx. \qquad (15)$$

В области низких частот $\Omega \ll 1$ $U_1(\Omega,\delta^2,D) = A(D)\delta^2\Omega$. При $D\to\infty$ $A(D)\to\mathrm{const} = -0{,}716$. Положение максимума и характер убывания в области высоких частот $\Omega > 1$ определяется экспоненциальным множителем в (13).

На рис. 1 представлено отношение величины $(U_1/\delta^2)(\Omega, D)$ к значениям спектра плоской волны $U_{\text{пл}}(\Omega, D)$ для трех значений волнового параметра $D = 100$; 10 и 1. Например, для $L/k = 5\cdot10^{-2}$ *см*^{2}, $\alpha = 2$ *см*; $l_0 = 4$ *мм*, $v = 3{,}5$ *м·сек*$^{-1}$ на частоте $f = 2$ *кгц* $(U_1/U_{\text{пл}})\cdot100\% \approx 28\%$. Это означает, что в области высоких частот $(\omega/v)\sqrt{L/k} > 1$ для расчета спектра в случае коллимированного пучка пользоваться формулой (12) для спектра плоской волны нужно с большой осторожностью.

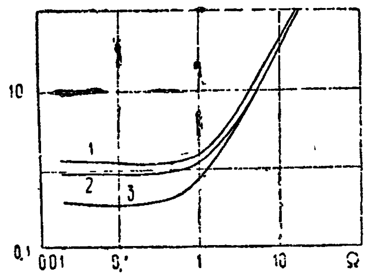

Рис. 1. Относительная ошибка $(U_1/U_{пл}\delta^2)(\Omega)$, возникающая при определении спектра для коллимированных пучков по формуле, рассчитанной для плоской волны. Три кривые соответствуют различным значениям волнового параметра $D = \varkappa_m^2 L/k$: *1*—D=100, *2*—D=10, *3*—D=1.

Автор признателен А. С. Гурвичу за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 5, 870 (1965).
3. R. A. Schmeltzer, Quart. Math., 24, 339 (1967).
4. A. Ishimaru, Proc. IEEE, 57, № 4, 40 (1969).
5. М. А. Грачева, А С. Гурвич, М. А. Каллистратова, И. А. Старобинец, Радиотехника и электроника, 15, № 6, 1290 (1970).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
4 мая 1970 г.

THE SPECTRUM OF AMPLITUDE FLUCTUATIONS IN BOUNDED LIGHT BEAM

N. S. Thieme

The paper is concerned with the influence of the spatial wave boundedness on the frequency spectrum of amplitude logarithm fluctuations on the beam axis. It is shown that the spectrum of the collimated beam in the high frequency range may considerably differ from that of a plane wave.