

УДК 621.378

СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПИНОВЫХ ГЕНЕРАТОРОВ

Р. М. Умарходжаев

Для четырех типов спиновых генераторов получены динамические уравнения, условия возникновения незатухающих колебаний, условия устойчивой работы, выражения для стационарных частот; для генераторов боковых частот рассмотрен механизм ограничения роста колебаний за счет нелинейной зависимости функции Бесселя от аргумента.

Наличие четкой модуляционной структуры [1] сигналов ЯМР, возникающей при дополнительной модуляции (внешнего магнитного поля, частоты, фазы высокочастотного генератора), позволяет записать уравнения Блоха [2] в системе координат «постоянной» расстройки $\Delta\omega_{01}$ в виде [3]

$$\begin{aligned} \dot{A} + \delta_2 A - B[\Delta\omega_{01}(1 + \alpha) + mp] &= -\gamma H_1 J_m M_z, \\ \dot{B} + \delta_2 B + A[\Delta\omega_{01}(1 + \alpha) + mp] &= 0, \\ \dot{M}_z + \delta_1 M_z - \gamma H_1 J_m A &= \delta_1 M_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где A - и B -компоненты сигнала ЯМР—соответственно поглощение и дисперсия; δ_1 и δ_2 —обратные времена релаксации T_1 и T_2 ; m —номер резонансной компоненты $\Delta\omega_{01}(1 + \alpha) + mp = 0$ спектра полей с амплитудой $H_{1m} = H_1 J_m$; $J_m(\beta)$ —функция Бесселя 1-го рода от аргумента $\beta = \Omega/p$; Ω —девиация модулируемого параметра; p —частота модуляции; n —номера перезонансных компонент спектра полей ($n \neq m$) с амплитудами $H_1 J_n$; $\alpha = \frac{\gamma^2 H_1^2}{2\Delta\omega_{01}p} \sum_{n \neq m} \frac{J_n^2}{n - m}$ —относительная модуляционная поправка

Блоха—Зигерта, обусловленная наличием полей $H_1 J_n$; $\Delta\omega_{01} = \omega_{01} - \omega$; ω —«средняя» частота ВЧ генератора [4]; ω_{01} равна ω_0 при работе с ВЧ полем круговой поляризации и $\omega_0 + \frac{1}{4} \frac{\gamma^2 H_1^2}{\omega} = \omega_0(1 + \alpha_0)$ —при работе с ВЧ полем линейной поляризации $2H_1 \cos \omega t$ [5].

При модуляции поля сигналы ЯМР после ВЧ синхронного детектора записываются в виде

$$\begin{aligned} V &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n [A \cos(n - m)pt + B \sin(n - m)pt], \\ U &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n [-A \sin(n - m)pt + B \cos(n - m)pt]. \end{aligned} \quad (2)$$

При модуляции частоты (фазы) ВЧ генератора сигналы ЯМР на выходе ВЧ синхронного детектора есть

$$\begin{aligned} V &= -A \cos mpt + B \sin mpt, \\ U &= -A \sin mpt - B \cos mpt, \end{aligned} \quad (3)$$

если частота опорного напряжения для ВЧ синхронного детектора равна «средней» частоте модулируемого генератора, и определяются выражениями (2), если на ВЧ детектор вместе с сигналами ЯМР поступает напряжение ВЧ генератора, модулированного на частоте.

Решение (3) в отличие от (2) не обладает частотным спектром [6]. При $\alpha \ll 1$ и выполнении условий медленного прохождения [5] решение (2) переходит в формулу Владимирского [1]. Обычное уравнение Блоха [2] получается из (1) при $\beta = 0$ ($n, m = 0$). Для дальнейшего анализа запишем уравнения (1) в переменных M , φ , M_z , где $M^2 = A^2 + B^2$, $\operatorname{tg} \varphi = B/A$:

$$\begin{aligned} \dot{M} + \delta_2 M &= -\gamma H_1 J_m M_z \cos \varphi, \\ M [\Delta\omega_0 (1 + \alpha) + \dot{\varphi} + mp] &= \gamma H_1 J_m M_z \sin \varphi, \\ \dot{M}_z + \delta_1 M_z - \gamma H_1 J_m M \cos \varphi &= \delta_1 M_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) позволяют сравнить различные типы спиновых генераторов. Анализ проводится в предположении однородного магнитного поля, линейного усилителя в цепи обратной связи с коэффициентом усиления K , прямоугольной полосой пропускания и нулевым «временем задержки» сигнала (нулевой наклон фазовой характеристики), последнее предположение означает, что спиновые генераторы работают с нулевым фазовым углом $\varphi = 0$ [4].

1. *Спиновый генератор Шмельцера* [7]. Исследованию этого генератора посвящено большое число работ [7-16]. Если на систему спинов действует поле H_x линейной поляризации с амплитудой H_{1x} , то амплитуда сигнала обратной связи $H_1 = \frac{1}{2} H_{1x} = -\frac{1}{2} KM$ (в рассматриваемом случае $\beta = 0$). Динамические уравнения генератора Шмельцера имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{M} + M(\delta_2 - K\gamma M_z) &= 0, \\ \omega &= \omega_0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{M}_z + \delta_1 M_z + K\gamma M^2 = \delta_1 M_0.$$

Условие возникновения колебаний

$$\delta_2 - K\gamma M_z < 0, \quad (6)$$

т. е. при $K > K_{\min} = \frac{2\delta_2}{\gamma M_0}$ в схеме возникают колебания. Ограничение

колебаний связано с инерционной нелинейностью — компонентой M_z [5, 17, 18]. Колебания спинового генератора при идеальном усилителе всегда устойчивы [14]. Оптимальный коэффициент усиления, при котором

амплитуда имеет максимум $M = \frac{1}{2} M_0 \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}$, равен $K = \frac{4\delta_2}{\gamma M_0}$ [14].

2. *Спиновый генератор СГ-1* [19]. Работа генератора основана на использовании центрального сигнала ЯМР $m = 0$. Цель обратной

связи замкнута по высокой частоте [19]. Частота p задается независимым генератором. Величина p больше полосы пропускания входного контура [8]. В случае замыкания петли обратной связи за счет применения поля линейной поляризации амплитуда сигнала обратной связи равна $H_1 = -\frac{1}{2} KJ_1 M$.

Уравнения спинового генератора:

$$\dot{M} + M \left(\delta_2 - \frac{1}{2} K\gamma J_0 J_1 M_z \right) = 0, \quad \omega = \omega_{01}, \quad (7)$$

$$\dot{M}_z + \delta_1 M_z + \frac{1}{2} K\gamma J_0 J_1 M^2 = \delta_1 M_0.$$

Модуляционная поправка $\alpha \Delta\omega_{01}$ равна нулю, так как $\sum_{n \neq 0} \frac{J_n^2}{n} = 0$.

Уравнения (7) суть уравнения (5). Согласно [14] генератор устойчив ($\delta_1 > 0$). При оптимальном коэффициенте усиления амплитуда генерации имеет максимум $M = \frac{1}{2} M_0 \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}$. Амплитуда принимаемого сигнала в J_1 раз меньше M .

3. Спиновый генератор на боковой частоте с модуляцией частоты (фазы) высокочастотного генератора [20]. Для случая, когда частота опорного напряжения для ВЧ синхронного детектора равна «средней» частоте ВЧ генератора, амплитуда сигнала обратной связи $\Omega = K\gamma M$, индекс модуляции

$$\beta = \frac{K\gamma M}{\nu}. \quad (8)$$

Уравнения генератора для $m = -1$ записываются в виде

$$\dot{M} + M \left(\delta_2 - \frac{\gamma H_1 J_1 M_z}{M} \right) = 0, \quad \dot{M}_z + M_z \delta_1 + \gamma H_1 J_1 \dot{M} = \delta_1 M_0, \quad (9)$$

$$\Delta\omega_{01} + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 H_1^2}{p} \sum_{n \neq -1} \frac{J_n^2}{n+1} = p.$$

Условия возникновения колебаний с учетом [21] имеют вид

$$\delta_2 - \frac{\gamma H_1 J_1 M_z}{M} = \delta_2 - \frac{1}{2} K\gamma M_z \frac{\gamma H_1}{p} (J_0 + J_2) < 0. \quad (10)$$

Выражение (10) отличается от (6) наличием члена $\frac{\gamma H_1}{p} (J_0 + J_2)$,

т. е. в рассматриваемом генераторе ограничение роста колебаний осуществляется как инерционной нелинейностью M_z , так и нелинейной зависимостью J_n от β . Ограничение роста колебаний инерционной нелинейностью проще рассмотреть при $\beta \ll 1$, тогда уравнения (9) переходят в (5). Согласно [14] генератор устойчив. Ограничение колебаний на не-

линейности функции Бесселя рассмотрим при работе с большим β , но малым H_1 , когда $M_z \approx \text{const}$ [2]. Из (9) следует устойчивость работы генератора при $\delta_2 \left(2 - \beta \frac{J_0}{J_1}\right) > 0$. В общем случае при любых H_1 и β условие устойчивости имеет вид

$$\delta_1 + \delta_2 \left(2 - \beta \frac{J_0}{J_1}\right) > 0. \quad (11)$$

При $0 < \beta < 3,83$ генератор всегда устойчив. При $3,84 < \beta < 5,1$ $2 - \beta \frac{J_0}{J_1} < 0$ и устойчивость определяется соотношением между δ_1 и δ_2 ; при $J_1 = 0$ ($\beta \sim 3,84 \div 3,85$) генератор неустойчив. Стационарная амплитуда имеет максимум

$$M = \frac{1}{2} M_0 \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}} \quad (12)$$

при $\gamma^2 (H_1 J_1)^2 = \delta_1 \delta_2$. Стационарная частота

$$p = \Delta\omega_{01} + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 H_1^2}{p} \left(J_0^2 + \frac{1}{2} J_1^2 - \frac{3}{2} J_2^2 \right). \quad (13)$$

Поправка Блоха—Зигерта при $\beta \sim 2,4$ равна нулю [3]. В случае $\beta \ll 1$

$p = \Delta\omega_{01} + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 H_1^2}{p} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{K \gamma M}{2p} \right)^2 \right]$ и поправка Блоха—Зигерта максимальна.

4. Спиновый генератор на боковой частоте с модуляцией поля [20,22,23]. Амплитуда сигнала обратной связи для $m = -1$ имеет вид $\Omega = K \gamma V = K \gamma (J_0 + J_1) M$, индекс модуляции

$$\beta = \frac{K \gamma (J_0 + J_1) M}{p}. \quad (14)$$

Рассматриваемый генератор, как и генератор п. 3, описывается уравнениями (9). Стационарная частота и амплитуды даются соответственно (12) и (13). Амплитуда принимаемого сигнала V в $J_0 + J_2$ раз меньше M . Условие устойчивой работы из-за различия (14) и (8) отлично от

(11) и имеет вид $\delta_1 + \delta_2 \frac{4 J_2}{J_0 + 3 J_2} > 0$. При малом H_1 динамическое уравнение рассматриваемого генератора имеет вид

$$\dot{M} + M \left[\delta_2 - \frac{\gamma}{2} K M_z \frac{\gamma H_1}{p} (J_0 + J_2) \right] = 0, \\ p = \Delta\omega_{01},$$

а при малом β переходит в укороченное уравнение Ван-дер-Поля [4]

$\dot{M} + M \left\{ \delta_2 - \frac{1}{2} K \gamma M_z \frac{\gamma H_1}{p} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{K \gamma M}{2p} \right)^2 \right] \right\}$. Условие устойчивой работы при $\beta \ll 1$ имеет вид $\delta_2 \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 > 0$.

Из проведенного анализа видно, что все рассмотренные спиновые генераторы описываются (в системе координат «постоянной» расстройки $\Delta\omega_{01}$ [3]) уравнениями вида

$$\dot{M} + M(\delta_2 - R M_z) = 0,$$

$$\dot{M}_z + \delta_1 M_z + M^2 R = \delta_1 M_0,$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_0 \omega_0, \quad p = \Delta \omega_{01} + \alpha \Delta \omega_{01},$$

где α_0 и α — высокочастотная [5] и модуляционная [3] поправки Блоха—Зигерта. R определяется видом генератора. Для генератора Шмельцера

$$R = \frac{1}{2} K \gamma, \quad \text{для генератора СГ-1 } R = \frac{1}{2} K \gamma J_0 J_1, \quad \text{для генератора на боко-$$

$$\text{вой частоте } R = \frac{\gamma H_1 J_1}{M}.$$

Условие возникновения колебаний $\delta_2 - R M_z < 0$. Условие поддержания колебаний $\delta_2 - R M_z = 0$. Стационарную амплитуду находят из системы уравнений $\delta_2 - R M_z = 0$; $M_z \delta_1 + R M^2 = \delta_1 M_0$. Максимальная амплитуда колебаний для всех видов генераторов $M = \frac{1}{2} M_0 \sqrt{\frac{\delta_1}{\delta_2}}$.

Амплитуда принимаемого сигнала в лабораторной системе координат в J_1 раз меньше M для генератора СГ-1 (п. 2) и в $J_0 + J_2$ раз — для генератора п. 4. Во всех рассмотренных случаях ограничение роста амплитуды колебаний осуществляется инерционной нелинейностью — компонентой M_z , у рассмотренных генераторов боковых частот существует дополнительный механизм ограничения роста амплитуды колебаний за счет нелинейной зависимости функции Бесселя от аргумента, при этом возможна устойчивая работа схемы при малом H_1 и малом β .

При изменении частоты ω_0 амплитуда колебаний генераторов пп. 1, 2 не изменяется. Амплитуда колебаний боковых частот в общем случае зависит от изменения величины расстройки $\Delta \omega_{01}$. Однако при малых уходах $\delta \Delta \omega_{01} \ll \Delta \omega_{01}$ и при $\gamma^2 (H_1 J_1)^2 = \delta_1 \delta_2$ амплитуда генераторов (пп. 3, 4) с точностью до $\left(\frac{\delta \Delta \omega_{01}}{\Delta \omega_{01}}\right)^2$ не изменяется. Амплитуда принимаемого сигнала V остается неизменной с указанной точностью лишь при малом β .

У всех рассмотренных генераторов существует зависимость частоты колебаний от амплитуды; в двух случаях (пп. 1, 2) это принципиально устранимый эффект: обратную связь необходимо осуществлять с помощью высокочастотного поля круговой поляризации.

Высокочастотной поправкой Блоха—Зигерта при работе с сильным полем с достаточно высокой степенью однородности всегда можно пренебречь [5], однако при работе в слабых магнитных полях порядка поля Земли и ниже (при T_1, T_2 порядка нескольких секунд — учитывая точность современных магнитометров) пренебрегать поправкой нельзя. Величина модуляционной поправки Блоха—Зигерта существенно зависит от β и однородности рабочего поля H_0 . Так, при $\gamma^2 (H_1 J_1)^2 = \delta_1 \delta_2$ и работе в поле с неоднородностью $\frac{\Delta H_0}{H_0} \sim 10^{-6}$ $\left(\frac{\omega_{01}}{\Delta \omega_{01}} = \frac{100 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^3}\right)$ α изменяется от $2 \cdot 10^{-2}$ до $3 \cdot 10^{-5}$, если β изменяется от 0,1 до 1,84; при работе в поле с неоднородностью $\frac{\Delta H_0}{H_0} \sim 10^{-8}$ α изменяется от $2 \cdot 10^{-6}$ до $3 \cdot 10^{-9}$ при тех же пределах изменения β .

Таким образом, модуляционную поправку Блоха—Зигерта необходимо учитывать (если спиновый генератор используется в ЯМР «само-настраивающемся» спектрометре с двумя раздельными образцами [6, 22]) лишь при работе с малым β в поле со средней неоднородностью

$\frac{\Delta H_0}{H_0} \sim 10^{-6}$ [24]. Из-за симметричного расположения полей $H_1 J_n$ относительно центрального сигнала модуляционная поправка к частоте генератора СГ-1, несмотря на применение модуляционных методов, отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. В. Владимирский, ЖЭТФ, 6, 142 (1958).
2. Э. Эндрю, Ядерный магнитный резонанс, ИЛ, М., 1957.
3. Р. М. Умарходжаев, Вестник МГУ, Физика, астрон., № 4, 1970.
4. В. И. Калинин, Г. М. Герштейн, Введение в радиофизику, Гостехиздат, М., 1957.
5. А. Лёйс, Ядерная индукция, ИЛ, М., 1963.
6. ЯМР и ЭПР спектроскопия, изд. Мир, М., 1964.
7. К. Шмельцер, Лекции по теории и конструированию протонного синхротрона с жесткой фокусировкой, Женева, 1953.
8. С. С. Курочкин, Радиотехника и электроника, 2, 198 (1958).
9. В. Г. Веселаго, Радиотехника и электроника, 5, 849 (1961).
10. Б. Ф. Амирханов, Тр. УПИ, 3, 63 (1961).
11. E. Fecher, W. Storek, Hochfrequenzspectroscopie, Acad. Verlag, Berlin, 1961.
12. G. Bonnet, J. Phys. Rad., 22, 204 (1961).
13. K. V. Vladimírskii, B. A. Labsov, Spartan Books, Washington, 1962.
14. И. М. Иевская, Р. М. Умарходжаев, Электричество, № 7, 57 (1965).
15. П. И. Кузнецов, Л. И. Малыхин, Электричество, № 7, 82 (1967).
16. А. А. Морозов, В. В. Москалев, Ядерный магнитный резонанс, вып. 2, изд. Ленингр. ун-та, 1968.
17. К. Ф. Теодорчик, Автоколебательные системы, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
18. Р. М. Умарходжаев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 6, 1207 (1964).
19. Р. М. Умарходжаев, Авт. свид. № 168334.
20. W: A. Anderson, Rev. Sci. Instr., 32, 241 (1961).
21. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, М., 1962.
22. Проспект спектрометра А-60 фирмы Варриан, 1960.
23. К. В. Владимирский, Б. А. Лабзов, ПТЭ, № 2, 103 (1962).
24. А. Н. Любимов, Н. М. Померанцев, ЖТФ, 38, вып. 12, 2044 (1968).

Научно-исследовательский институт
ядерной физики при Московском университете

Поступила в редакцию
29 декабря 1969 г.

RELATIVE CHARACTERISTICS OF SPIN GENERATORS

R. M. Umarchodzhayev

The dynamic equations, the conditions of occurring undamped oscillations, and steady-state regime of operation, the expressions for stationary frequencies, have been derived for four types of spin generators. The mechanism of limitation of oscillation increasing due to the nonlinear dependence of Bessel's function on the argument has been considered for side frequency generators.