ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIV, № 8 РАДИОФИЗИКА 1971

УДК 538.574.5

О ПОГЛОЩЕНИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В КРУГЛОМ ПЛАЗМЕННОМ ЦИЛИНДРЕ

Ю. В. Богомолов

Вычислено сечение поглощения плоской электромагнитной волны в круглом плазменном цилиндре, находящемся в постоянном магнитном поле, параллельном оси цилиндра. Исследуются случаи нормального падения волны с электрическим вектором, поляризованным вдоль и поперек оси цилиндра. В последнем случае пренебрегается током смещения. На границе плазмы полагаем диффузное рассеяние электронов. Расчет проведен в предположении, что средний ларморовский радиус электронов много меньше радиуса цилиндра и длины волны.

Представим себе плазменный цилиндр радиуса a, вдоль оси которого (ось z) наложено постоянное магнитное поле H_0, однородное внутри плазмы. На границе плазмы предполагается диффузное отражение электронов [1]. Движением ионов и столкновениями пренебрегаем. Считаем, что средний ларморовский радиус электронов мал по сравнению с радиусом цилиндра и длиной волны.

Пусть на плазменный цилиндр падает нормально плоская электромагнитная волна вида $\exp[i(ky-\omega t)]$, где $k=\omega/c$. Множитель $\exp(-i\omega t)$ в дальнейшем будем опускать. Амплитуду падающей волны примем равной единице и рассмотрим две поляризации: $E \parallel H_0$ (обыкновенная волна) и $E \perp H_0$ (необыкновенная волна). В последнем случае ток смещения не учитываем. Требуется вычислить сечение поглощения.

Поглощение электромагнитной волны в плазме носит поверхностный характер и связано с тем, что электрическое поле волны производит работу над электроном, сталкивающимся с границей плазмы. Электроны, не сталкивающиеся с границей, вклада в поглощение не дают. Следуя [2], введем поверхностную проводимость γ_τ, связывающую на границе тангенциальные компоненты поля и тока:

$$j_\tau = \gamma_\tau E_\tau. \qquad (1)$$

Отметим, что γ_τ является вещественной величиной. Конкретные выражения для γ_τ можно получить из решения задачи о поглощении волны в полуограниченной плазме при нормальном падении. Коэффициент поглощения A определяется при этом соотношением

$$A = \frac{8\pi Q}{c}, \qquad (2)$$

где Q — поглощаемая мощность на единицу поверхности плазмы. Эту мощность можно отождествить с мощностью потерь, связанной с прохождением в плазме тока:

$$Q = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(j_\tau E_\tau^*). \qquad (3)$$

Используя формулу (1), находим

$$Q = \frac{1}{2}\gamma_\tau |E_\tau|^2. \tag{4}$$

Подставляя это выражение в (2), получаем

$$A = \frac{4\pi}{c}\gamma_\tau |E_\tau|^2. \tag{5}$$

В работе [2] рассматривается случай полуограниченной изотропной плазмы, причем коэффициент поглощения выражается через комплексный коэффициент отражения. Последний, в свою очередь, вычисляется с учетом скачка тангенциальной компоненты магнитного поля, который происходит из-за наличия поверхностного тока. Этот прием не годится для цилиндра, так как в этом случае нельзя ввести комплексного коэффициента отражения. К тому же описанная нами выше процедура проще, потому что мы не формулируем разрыва тангенциальной компоненты магнитного поля. Для E_τ достаточно взять обычное выражение, соответствующее холодной плазме, поскольку температура уже входит в γ_τ. Сравнивая (5) с коэффициентом поглощения, полученным методом кинетического уравнения, находим γ_τ.

Сечение поглощения σ определяется следующим выражением:

$$\sigma = \frac{8\pi q}{c}, \tag{6}$$

где q — поглощаемая мощность на единицу длины цилиндра — равна

$$q = \frac{a}{2}\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} j_\tau E_\tau^* \, d\varphi, \tag{7}$$

φ — азимутальный угол.

Поле на границе цилиндра имеет вид

$$E_\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n e^{in\varphi}, \tag{8}$$

где E_n — некоторые коэффициенты, нечетные относительно индекса n.

Подставляя в (7) формулы (1), (8) и интегрируя по φ, находим

$$q = \pi a \gamma_\tau \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n |E_n|^2. \tag{9}$$

Здесь $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 2$ при $n \geqslant 1$. Из формул (6) и (9) получаем

$$\sigma = \frac{8\pi^2 a}{c}\gamma_\tau \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n |E_n|^2. \tag{10}$$

Изложенный метод является, конечно, приближенным, поскольку пространственная дисперсия предполагается слабой. Именно поэтому для E_τ оказывается возможным взять выражение, соответствующее холодной плазме. Переход к изотропной плазме допустим, но соответствующие формулы справедливы лишь тогда, когда путь, проходимый электроном за период колебания поля, мал по сравнению с длиной волны и радиусом цилиндра.

Рассмотрим обыкновенную волну ($\tau = z$). Поле на границе полупространства при нормальном падении волны имеет вид

$$E_z = \frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon}}, \tag{11}$$

где $\varepsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$ — диэлектрическая постоянная плазмы, $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ — плазменная частота.

В работе [1] методом кинетического уравнения вычислен коэффициент поглощения

$$A = \frac{2}{c}\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\cos^2 \pi\Omega}{4\Omega^2 - 1}\right), \tag{12}$$

где T — абсолютная температура в энергетических единицах, $\Omega = \omega/\omega_H$, $\omega_H = |e| H_0/mc$ — циклотронная частота электронов. Формула (12) была получена в предположении, что $\omega \ll \omega_0$. Анализ показывает, однако, что выражение (12) справедливо и при более слабом условии $\omega < \omega_0$. Это значит, что аналитический вид формулы для коэффициента поглощения не зависит от того, насколько велика роль тока смещения. Аналогичная ситуация характерна и для изотропной плазмы [2].

Положим $\omega < \omega_0$ и подставим (11) в (5). Сопоставляя затем формулы (5) и (12), находим

$$\gamma_z = \frac{\omega_0^2}{4\pi\omega^2}\left(\frac{T}{2\pi m}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\cos^2 \pi\Omega}{4\Omega^2 - 1}\right). \tag{13}$$

Выражение (13) справедливо и при $\omega > \omega_0$. Для того, чтобы убедиться в этом, надо вместо формулы (12) записать выражение для коэффициента поглощения при $\omega > \omega_0$. Последнее нетрудно сделать, используя результаты, полученные в работе [1].

Коэффициенты E_n хорошо известны из решения задачи о дифракции волны на диэлектрическом цилиндре:

$$E_n = \frac{2i}{\pi k a}\left[H_n'(ka) - \sqrt{\varepsilon}\,\frac{J_n'(ha)}{J_n(ha)}\,H_n(ka)\right]^{-1}. \tag{14}$$

Здесь J_n, H_n — функции Бесселя и Ханкеля первого рода, $h = k\sqrt{\varepsilon}$. Штрихами обозначены производные по полному аргументу.

Подставляя (13) и (14) в (10), получаем

$$\sigma = \frac{4c\omega_0^2}{\pi a \omega^4}\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\cos^2 \pi\Omega}{4\Omega^2 - 1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\left|H_n'(ka) - \sqrt{\varepsilon}\,\frac{J_n'(ha)}{J_n(ha)}\,H_n(ka)\right|^{-2}. \tag{15}$$

Отметим, что поглощение пропорционально корню квадратному из температуры и начинается с нулевой частоты. Резонанса при $\omega = \omega_H/2$ нет, так как особенности в числителе и знаменателе взаимно погашаются. Если $H_0 = 0$ (изотропная плазма), то

$$\sigma = \frac{4c\omega_0^2}{\pi a \omega^4}\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\left|H_n'(ka) - \sqrt{\varepsilon}\,\frac{J_n'(ha)}{J_n(ha)}\,H_n(ka)\right|^{-2}. \tag{16}$$

Эта же формула получается и при $\omega = \omega_H/2$. Если, наоборот, магнитное поле является сильным $(\omega_H \gg \omega)$, то

$$\sigma = \frac{4(\pi^2-4)c}{\pi a}\left(\frac{\omega_0}{\omega\omega_H}\right)^2\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\left|H'_n(ka) - \sqrt{\varepsilon}\,\frac{J'_n(ha)}{J_n(ha)}\,H_n(ka)\right|^{-2}. \tag{17}$$

В сильном магнитном поле поглощение убывает, поскольку уменьшается относительная доля электронов, сталкивающихся с границей.

Дальнейшее исследование формулы (15) проведем в предположении, что $\omega \sim \omega_H$. Пусть $\varepsilon > 0$ и радиус цилиндра мал по сравнению с длиной волны ($ka \ll 1$). Воспользуемся приближенными значениями функций Бесселя и Ханкеля при малых аргументах:

$$J_n(x) \approx \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n, \qquad H_0(x) \approx 1 + \frac{2i}{\pi}\ln\frac{\gamma x}{2}, \qquad H_n(x) \approx -\frac{i}{\pi}(n-1)!\left(\frac{2}{x}\right)^n, \tag{18}$$

где $\gamma = 1{,}78\ldots$ — постоянная Эйлера. Существенный вклад дает лишь слагаемое с $n = 0$, так что формула (15) принимает вид

$$\sigma = \frac{a\omega_0^2}{c\omega^2}\left(\frac{2\pi T}{m}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\cos^2\pi\Omega}{4\Omega^2 - 1}\right). \tag{19}$$

Сечение поглощения пропорционально радиусу цилиндра. Эта же формула получается и для слабо контрастного случая ($\varepsilon \approx 1$) при произвольном соотношении между длиной волны и радиусом цилиндра. Такое совпадение объясняется тем, что в обоих случаях амплитуду поля на границе можно положить равной амплитуде падающего поля.

Рассмотрим теперь случай, когда волна в плазме затухает ($\varepsilon < 0$). Вместо (15) мы имеем

$$\sigma = \frac{4c\omega_0^2}{\pi a\omega^4}\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\cos^2\pi\Omega}{4\Omega^2 - 1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\left|H'_n(ka) - \sqrt{-\varepsilon}\,\frac{I'_n(\varkappa a)}{I_n(\varkappa a)}\,H_n(ka)\right|^{-2}, \tag{20}$$

где I_n — модифицированная функция Бесселя первого рода; $\varkappa = k\sqrt{-\varepsilon}$.

Рассмотрим формулу (20) в приближении геометрической оптики. В этом случае радиус цилиндра велик по сравнению с длиной волны и глубиной скин-слоя ($ka \gg 1$, $\varkappa a \gg 1$). Воспользуемся асимптотическими (в форме Дебая) выражениями цилиндрических функций при больших значениях аргумента [3]:

$$I_n(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(n^2 + x^2)^{-1/4}\exp\left(\sqrt{n^2 + x^2} - n\ln\frac{n + \sqrt{n^2 + x^2}}{x}\right) \qquad (n,\ x > 0),$$

$$H_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} (x^2 - n^2)^{-1/4} \exp\left[i \left(\sqrt{x^2 - n^2} - \right.\right. \tag{21}$$

$$\left.\left. - n \arccos \frac{n}{x} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \qquad (x > n > 0).$$

При вычислении производной от этих выражений дифференцируется лишь быстроменяющийся экспоненциальный множитель. Слагаемыми в формуле (20), для которых $n > ka$, мы пренебрегаем, так как они с увеличением индекса уменьшаются чрезвычайно быстро (быстрее, чем экспонента). В результате бесконечная сумма в (20) заменяется конечной суммой, верхний предел которой—порядка ka. Заменяя эту сумму интегралом и вычисляя его, находим

$$\sigma = \frac{a}{c} \left(\frac{2\pi T}{m} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\cos^2 \pi\Omega}{4\Omega^2 - 1} \right). \tag{22}$$

Формулу (22) можно получить и другим путем. Очевидно, что поглощение происходит только на освещенной части цилиндра, причем каждый небольшой участок поверхности можно рассматривать как плоский. Поэтому

$$\sigma = a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A(\theta) \cos\theta \, d\theta, \tag{23}$$

где $A(\theta)$—коэффициент поглощения волны при наклонном падении на полуограниченную плазму, θ—угол падения. Для вычисления $A(\theta)$, определяемого формулой

$$A(\theta) = \frac{8\pi Q}{c \cos\theta}, \tag{24}$$

нам нужно знать поле на границе плазмы. Оно имеет вид

$$E_z = \frac{2\cos\theta}{\cos\theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}}. \tag{25}$$

Подставляя (25) в формулу (4) и используя (4) и (13), находим в случае $\varepsilon - \sin^2\theta < 0$

$$A(\theta) = \frac{2}{c} \cos\theta \left(\frac{2T}{\pi m} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\cos^2 \pi\Omega}{4\Omega^2 - 1} \right). \tag{26}$$

Подстановка (26) в (23) и интегрирование по θ приводит к (22).

Рассмотрим формулу (20) в случае, когда глубина скин-слоя мала по сравнению с радиусом цилиндра ($\varkappa a \gg 1$). При этом $|\varepsilon| \gg 1$, что означает пренебрежение током смещения. Для модифицированных функций Бесселя можно взять асимптотическое выражение

$$I_n(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \tag{27}$$

причем $(I_n'/I_n) = 1$. Имея это в виду и пренебрегая в (20) производной от функции Ханкеля, получаем

$$\sigma = \frac{4c}{\pi a \omega^2} \left(\frac{2T}{\pi m} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\cos^2 \pi\Omega}{4\Omega^2 - 1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n |H_n(ka)|^{-2}. \tag{28}$$

Формула (28) соответствует случаю, когда применимо импедансное граничное условие Леонтовича. Отметим, что поглощение не зависит от плотности плазмы. В предельном случае $ka \gg 1$ выражение (28) переходит в (22). В противоположном предельном случае, когда длина волны велика по сравнению с радиусом цилиндра ($ka \ll 1$), из формулы (28) в соответствии с (18) следует

$$\sigma = \frac{4c}{a\omega^2}\left(\frac{2\pi T}{m}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\cos^2 \pi\Omega}{4\Omega^2 - 1}\right)[\pi^2 + 4\ln^2(\gamma ka/2)]^{-1}. \tag{29}$$

С уменьшением радиуса цилиндра сечение поглощения возрастает, достигая своего максимального значения при $a \sim c/\omega_0$.

Рассмотрим формулу (15) для случая, когда диэлектрическая постоянная плазмы близка к нулю ($\omega \approx \omega_0$). Используя для функций Бесселя разложения (18), а также рекуррентные соотношения для функций Ханкеля, находим:

$$\sigma = \frac{4c}{\pi a\omega^2}\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\cos^2 \pi\Omega}{4\Omega^2 - 1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n |H_{n+1}(ka)|^{-2}. \tag{30}$$

Интересно отметить, что из этой формулы в предельных случаях $ka \ll 1$ и $ka \gg 1$ следует одна и та же формула (22).

Рассмотрим теперь поглощение необыкновенной волны. При этом мы ограничимся случаем сильного скин-эффекта, когда током смещения можно пренебречь $(\omega \sim \omega_H \ll \omega_0)$. При нормальном падении волны на плазменное полупространство коэффициент поглощения, вычисленный методом кинетического уравнения, имеет вид [1]

$$A = \frac{2}{c}\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{3(4\Omega^2 - 3)\cos^2 \pi\Omega}{(4\Omega^2 - 1)(4\Omega^2 - 9)}\right]. \tag{31}$$

При наклонном падении волны тангенциальная компонента поля ($\tau = y$) на границе полупространства вычислена в работе [4]:

$$E_y = \frac{2\omega\cos\theta}{\omega + i\omega_0\cos\theta}. \tag{32}$$

При $\theta = 0$ имеем

$$E_y = \frac{2\omega}{i\omega_0}. \tag{33}$$

Подставляя это выражение в (5) и сравнивая (5) и (31), находим поверхностную проводимость

$$\gamma_y = \frac{\omega_0^2}{4\pi\omega^2}\left(\frac{T}{2\pi m}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{3(4\Omega^2 - 3)\cos^2 \pi\Omega}{(4\Omega^2 - 1)(4\Omega^2 - 9)}\right]. \tag{34}$$

Показатель преломления холодной плазмы в нашем случае равен $i\omega_0/\omega$. Используя при решении волнового уравнения граничное условие Леонтовича

$$H_z = -\frac{c\omega_0}{\omega^2}\,\frac{\partial H_z}{\partial r}, \tag{35}$$

находим тангенциальную компоненту электрического поля E_φ на границе плазменного цилиндра. Это поле имеет вид (8) ($\tau = \varphi$), где

$$E_n = -\frac{2c}{\pi a\omega_0}\,\frac{1}{H_n'(ka)}. \tag{36}$$

Подставляя (34) и (36) в (10), определяем сечение поглощения ($\gamma_y = \gamma_\varphi$):

$$\sigma = \frac{4c}{\pi a\omega^2}\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{3(4\Omega^2-3)\cos^2\pi\Omega}{(4\Omega^2-1)(4\Omega^2-9)}\right]\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\,|H_n'(ka)|^{-2}. \tag{37}$$

Здесь толщина скин-слоя мала по сравнению с радиусом цилиндра.

Рассмотрим некоторые частные случаи этого выражения. Если плазма изотропна ($\Omega = \infty$), то

$$\sigma = \frac{4c}{\pi a\omega^2}\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\,|H_n'(ka)|^{-2}. \tag{38}$$

В противоположном случае сильного магнитного поля ($\Omega \ll 1$)

$$\sigma = \frac{4}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{28}{9}\right)\frac{c}{a\omega_H^2}\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\,|H_n'(ka)|^{-2}. \tag{39}$$

Анализ формулы (37) для частных случаев $ka \ll 1$ и $ka \gg 1$ показывает, что во втором случае поглощение в два раза больше, чем в первом, и имеет вид

$$\sigma = \frac{2a}{c}\left(\frac{2\pi T}{m}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{3(4\Omega^2-3)\cos^2\pi\Omega}{(4\Omega^2-1)(4\Omega^2-9)}\right]. \tag{40}$$

Эта формула соответствует случаю геометрической оптики и может быть получена из общих соображений, изложенных при получении формулы (22). Коэффициент поглощения волны, падающей наклонно на полуограниченную плазму, можно получить из соотношений (4), (24), (32) и (34):

$$A(\theta) = \frac{2\omega_0^2\cos\theta}{\omega^2+\omega_0^2\cos^2\theta}\left(\frac{2T}{\pi mc^2}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{3(4\Omega^2-3)\cos^2\pi\Omega}{(4\Omega^2-1)(4\Omega^2-9)}\right]. \tag{41}$$

При падении волны, близком к нормальному ($\theta \approx 0$), коэффициент поглощения обратно пропорционален $\cos\theta$, а при скользящем падении ($\theta \approx \pi/2$) он прямо пропорционален $\cos\theta$. Подставляя (41) в (23) и интегрируя по θ, получаем формулу (40). Из (40) следует, что для изотропной плазмы поглощение в два раза больше, чем для обыкновенной волны при тех же условиях.

В заключение отметим, что общая формула (15) для обыкновенной волны была получена нами также методом кинетического уравнения с самосогласованным полем для электронов.

Автор признателен М. Л. Левину и В. В. Клавдиеву за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. А. Канер, Ю. А. Белов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 1, 47 (1962).
2. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
3. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 2, изд. Наука, М., 1966.
4. F. W. Sluijter, Phys. Lett., 9, № 1, 22 (1964).

Поступила в редакцию
10 августа 1970 г.

ABSORPTION OF A PLANE ELECTROMAGNETIC WAVE IN A CIRCULAR PLASMA CYLINDER

Yu. V. Bogomolov

The section of absorption of a plane electromagnetic wave in a circular plasma cylinder being in a constant magnetic field parallel to the cylinder axis is calculated. The cases are investigated of the normal incidence of a wave with the electric vector polarized along and across the cylinder axis. In the latter case the displacement current is neglected. At the plasma boundary the electron scattering is assumed diffusive. Calculation is made under the assumption that the mean Lamor radius of electrons is much smaller than the cylinder radius and the wavelength.