ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIV, № 8 РАДИОФИЗИКА 1971

УДК 523.164

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПРОТЯЖЕННЫХ КОСМИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

Л. Г. Содин

Разработан метод определения полного потока, координат и размеров источников радиоизлучения, не использующий каких-либо предположений о функции распределения радиояркости по источнику. Предлагаемый метод рекомендуется применять в тех случаях, когда источник не может считаться точечным.

Наиболее общая информация об источниках космического радиоизлучения заключена в двумерной функции распределения яркости (температуры), определенной для различных частот в различные моменты времени. Фактически при радиоастрономических исследованиях допустима «запись» источника в виде

$$f(x, y) = m(x, y) \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} b(t, s) R(x, t, y, s)\, dt ds + n(x, y),$$

связанная как с искомым распределением яркости $b(t, s)$, так и с аппаратной функцией (диаграммой направленности радиотелескопа) $R(x, t, y, s)$. Кроме того, запись искажена аддитивным шумом $n(x, y)$ и мультипликативным шумом $m(x, y)$*.

Задачей обработки радиоастрономических наблюдений является нахождение $b(x, y)$ по $f(x, y)$. Эта задача исследована в ряде работ [1–3]. Известно, что при неблагоприятных обстоятельствах («тупая» диаграмма направленности, большие шумы) получить удовлетворительное восстановление распределения яркости нельзя. В этих случаях приходится ограничиться отысканием некоторых числовых характеристик источника, важнейшими среди которых являются следующие три:

1. Полный поток

$$S = \iint b(x, y)\, dx dy.$$

2. Координаты источника

$$\alpha = \frac{1}{S} \iint x b(x, y)\, dx dy, \qquad \beta = \frac{1}{S} \iint y b(x, y)\, dx dy.$$

3. Размеры источника

$$\Delta_\alpha = \left[\frac{1}{S} \iint (x-\alpha)^2 b(x, y)\, dx\, dy \right]^{1/2}, \quad \Delta_\beta = \left[\frac{1}{S} \iint (y-\beta)^2 b(x, y) dx\, dy \right]^{1/2}.$$

Такие определения координат и размеров, хотя и не являются стандартизованными, представляются наиболее естественными: α и β — коорди-

* Мультипликативный шум обязан флуктуациям коэффициента усиления радиометра. Далее считаем $n(x, y)$ и $m(x, y)$ случайными процессами с $\langle n \rangle = 0$, $\langle m \rangle = 1$ (косые скобки здесь и далее обозначают статистическое усреднение).

наты центра тяжести источника, Δ_α и Δ_β—меры «разброса» поверхности $b(x, y)$ относительно центра тяжести.

Настоящая работа посвящена отысканию оптимальных линейных методов обработки записи с целью наиболее точной оценки S, α и Δ. Ограничение задач статьи линейными методами связано с тем, что расширение класса допустимых при обработке операций приводит к практически нереализуемым алгоритмам.

Далее рассматривается только одномерная задача. Это снижает громоздкость выкладок, а обобщение на двумерный случай не вызывает принципиальных затруднений.

1. ЛИНЕЙНАЯ ОЦЕНКА ПОТОКА

Общая формула для линейной оценки потока по записи имеет вид

$$\hat{S} = \int_{T_1}^{T_2} L(t) f(t)\, dt. \tag{1}$$

Здесь (T_1, T_2)—используемый участок записи, $L(t)$—весовая функция ($L(t)$ может быть обобщенной функцией). Так как $f(t) = m(t) \int_{x_1}^{x_2} b(x) R(t-x)\, dx$, то

$$\hat{S} = \int_{x_1}^{x_2} b(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} b(x) dx \left[\int_{T_1}^{T_2} L(t) R(t-x)\, dt - 1\right] + \\ + \int_{x_1}^{x_2} b(x)\, dx \int_{T_1}^{T_2} [m(t)-1]\, L(t)\, R(t-x)\, dt + \int_{T_1}^{T_2} L(t)\, n(t)\, dt. \tag{2}$$

Первое слагаемое в (2) дает точное значение искомого потока, второе—систематическую ошибку, третье и четвертое—случайные ошибки, обращающиеся в нуль при усреднении. Для устранения систематической ошибки весовую функцию следует выбрать удовлетворяющей интегральному уравнению

$$\int_{T_1}^{T_2} L(t)\, R(t-x)\, dt = 1, \qquad x_1 < x < x_2. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет решение не для любой аппаратной функции. Например, при $R(z) = \cos az$ (интерферометр) $\int_{T_1}^{T_2} L(t) R(t-x)\, dt = A\cos ax + B \sin ax$ (A, B—константы), и ни при каких $L(t)$ (3) не выполняется. Как правило, не будет решения у (3) и при $x_2 - x_1 > T_2 - T_1$. В этом случае интегральное уравнение является континуальным аналогом переопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Отсюда следует важный вывод: для устранения систематической ошибки интервал обработки должен быть достаточно большим, по крайней мере следует выполнять неравенства $T_1 < x_1$, $T_2 > x_2$. При этом вместо (3) можно взять

$$\int_{T_1}^{T_2} L(t) R(t-x)\, dt = 1, \qquad T_1 < x < T_2, \tag{3a}$$

и (3) удовлетворится автоматически.

Несмотря на то, что x_1 и x_2 априори не известны, выполнить приведенные неравенства не сложно. Дело в том, что запись шире, чем исследуемый источник, за счет конечной ширины диаграммы направленности. Приближенно длительность записи равна $\sqrt{(x_2-x_1)^2+M^2} > |x_2-x_1|$, где M — «протяженность» функции $R(z)$. Если T_1 и T_2 выбрать так, что бы обработкой была охвачена вся запись, условие $T_2-T_1 > x_2-x_1$ будет выполнено.

Решить (3 а) аналитически удается лишь в редких случаях (преобразование Фурье ядра $R(z)$ — рациональная функция [4], известно разложение $R(x, y)$ по ортогональной на конечном интервале полной системе функций). Поэтому в большинстве случаев определение $L(t)$ должно производиться численными методами.

Если $T_2-T_1 \gg x_2-x_1$, пределы в (3а) можно растянуть до $\pm\infty$. Тогда

$$L(t) = \Big[\int_{-\infty}^{\infty} R(z)\,dz\Big]^{-1}. \tag{4}$$

При этом решение задачи упрощается, но увеличение интервала обработки увеличивает случайную ошибку оценки потока.

В подтверждение определим дисперсию величины потока, обязанную аддитивному шуму:

$$\sigma_n^2 = \int_{T_1}^{T_2}\int_{T_1}^{T_2} L(t)\,L(s)\,\langle n(t)n^*(s)\rangle\,dt\,ds = \sigma^2 \int\int \rho(t-s)\,L(t)\,L(s)\,dt\,ds.$$

Здесь σ^2 и $\rho(z)$ — дисперсия и коэффициент автокорреляции аддитивного шума: $\sigma^2\rho(z) = \langle n(t)\,n(t+z)\rangle$.

При больших T_2-T_1 естественно считать $\rho(z)$ острой функцией по сравнению с $L(t)$ и

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z)\,dz \int_{T_1}^{T_2} |L(t)|^2\,dt.$$

Видно, что рост T_2-T_1 приводит к увеличению дисперсии оценки потока. При выборе весовой функции по (4)

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z)\,dz}{\Big[\int_{-\infty}^{\infty} R(z)\,dz\Big]^2}\,(T_2-T_1). \tag{5}$$

Таким образом, уменьшение T_2-T_1 приводит к росту систематической ошибки, при увеличении T_2-T_1 возрастает случайная ошибка. В связи с этим рекомендуется выбирать интервал обработки примерно равным длительности реальной записи. Для этого можно рекомендовать следующий простейший прием: на записи отмечается примерно уровень шума и в обработку берется тот участок записи, где отклонение выше отмеченного уровня.

Оценим теперь ошибку, обязанную мультипликативному шуму, считая $L(t)$ выбранной в соответствии с (4):

$$\sigma_m^2 = \frac{\mu^2}{\Big[\int_{-\infty}^{\infty} R(z)\,dz\Big]^2} \int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x_2} b(x)\,b(y)\,dx\,dy \int_{T_1}^{T_2}\int_{T_1}^{T_2} r(t-s)\,R(t-x)\,R(s-y)\,dt\,ds. \tag{6}$$

Здесь μ^2 и $r(t-s)$ — дисперсия и коэффициент автокорреляции мультипликативного шума: $\langle [m(t-1)][m(s)-1] \rangle = \mu^2 r(t-s)$. Будем полагать, что аппаратная функция острее, чем $b(x)$. Противоположный случай — случай дискретного источника — исследован в [5].

Рассмотрим отдельно быстрые и медленные флуктуации.

1. Быстрые флуктуации: $r(z)$ острее, чем $R(z)$. Тогда

$$\sigma_m^2 \approx \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} r(t)\,dt \int_{x_1}^{x_2} b^2(x)\,dx = \mu^2 S^2 \int_{-\infty}^{\infty} r(t)\,dt\, \frac{\int b^2(x)\,dx}{\left[\int b(x)\,dx\right]^2}. \tag{7}$$

Множитель в (7), зависящий от $b(x)$, практически для любых $b(x)$ слабо отличается от $1/(x_2-x_1)$ и

$$\sigma_m^2 \approx \frac{\mu^2 S}{x_2-x_1} \int_{-\infty}^{\infty} r(t)\,dt. \tag{7a}$$

Видно, что, если радиус корреляции флуктуаций мал по сравнению с протяжённостью источника, относительная дисперсия оценки потока также мала.

2. Медленные флуктуации. На интервале обработки T_2-T_1 можно считать $r(t-s)=r(0)=1$ и

$$\sigma_m^2 = \mu^2 S. \tag{7б}$$

Сравнение (7а) и (7б) показывает, что чем быстрее флуктуации, тем точнее оценка потока.

Хотя приведенные оценки дисперсий (5)—(7) не являются вполне точными, для характеристики предлагаемого метода они вполне достаточны. В то же время в каждом конкретном случае ошибки могут быть вычислены более точно.

Далее мы рассмотрим определение координат и размера источника, не приводя большинства формул для ошибок, поскольку получение таких формул не составляет труда.

2. ЛИНЕЙНАЯ ОЦЕНКА КООРДИНАТЫ ИСТОЧНИКА

В соответствии с определением, сделанным во введении, координату источника оценим по положению его центра тяжести:

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{M}_1}{\hat{S}}, \qquad \hat{M}_1 = \int_{T_1}^{T_2} M(t)\, f(t)\,dt; \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\hat{M} = \int_{x_1}^{x_2} b(x)\,dx \int_{T_1}^{T_2} M(t)\,R(t-x)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} b(x)\,dx \int_{T_1}^{T_2} [m(t)-1]\times \\ \times M(t)\,R(t-x)\,dt + \int_{T_1}^{T_2} M(t)\,n(t)\,dt.\end{gathered} \tag{9}$$

Выбирая T_2 и T_1 в соответствии с выводами предыдущего раздела о выборе интервала обработки, для $M(t)$ получаем интегральное уравнение

$$\int_{T_1}^{T_2} M(t)\,R(t-x)\,dt = x, \qquad T_1 < x < T_2, \tag{10}$$

обеспечивающее отсутствие систематической ошибки α. Если $T_2-T_1 \gg \gg x_2-x_1$, решение (10) можно взять в виде

$$M(t)=\frac{t}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(z)\,dz}-\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} zR(z)\,dz}{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(z)\,dz\right]^2}=\frac{t}{R_0}-\frac{R_1}{R_0^2}. \tag{11}$$

Обозначения R_0 и R_1 ясны из (11).

Для $M(t)$ в форме (11) дисперсия оценки $\hat{M}_1$, связанная с аддитивным шумом,

$$\nu_n^2 \approx \frac{\sigma^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(z)\,dz}{R_0^2}(T_2-T_1)\left[\frac{T_1^2+T_1T_2+T_2^2}{3}+\frac{R_1^2}{R_0^2}-\frac{R_1}{R_0}(T_1+T_2)\right]. \tag{12}$$

3. ЛИНЕЙНАЯ ОЦЕНКА РАЗМЕРА ИСТОЧНИКА

Размер источника будем оценивать по формуле $\hat{\Delta}^2=\frac{\hat{M}_2}{\hat{S}}-\frac{\hat{M}_1}{\hat{S}^2}$, где $\hat{M}_2=\int x^2 b(x)\,dx$ — оценка второго момента распределения яркости, равная $\hat{M}_2=\int\limits_{T_1}^{T_2} N(t)f(t)\,dt$. Весовая функция $N(t)$ при ограничениях, сделанных выше, имеет вид

$$N(t)=\frac{t^2}{R_0}+\frac{2tR_1}{R_0^2}+\frac{R_2R_0-2R_1^2}{R_0^3}, \tag{13}$$

R_0, R_1 — то же, что и в (11), $R_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2R(z)\,dz$. Погрешности оценки размера, обязанные аддитивному и мультипликативному шумам, отыскиваются аналогично предыдущим случаям и здесь не приводятся.

Представляет интерес оценить систематические погрешности, свойственные разработанному методу. Основным источником таких погрешностей будут, по-видимому, ошибки вычисления весовых функций $L(t)$, $N(t)$, $M(t)$. Рассмотрим для определенности оценку потока в случае наиболее типичной формы диаграммы направленности радиотелескопа

$$R(x)=\frac{\sin\frac{\pi}{H}x}{\pi x}.$$

Очевидно, H — ширина диаграммы направленности (по уровню $2/\pi$), нормирована диаграмма таким образом, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx=1$.

Приближенное значение весовой функции $L(t)$ в соответствии с (4) равно $L_0(t)=1$. Интервал обработки выберем $-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant\frac{T}{2}$. В этом случае

$$\int_{-T/2}^{T/2} L_0(t)\, R(t-x)\, dx = 1 - \frac{\cos[\pi(T+2x)/2H]}{\pi^2(T+2x)/2H} - \frac{\cos[\pi(T-2x)/2H]}{\pi^2(T-2x)/2H} + O(T^{-2}H^{-2}),$$

ошибка в оценке потока

$$\Delta\hat{S} = \int_{x_1}^{x_2} b(x)\,dx \left[\int_{-T/2}^{T/2} L(t)\,R(t-x)\,dt - 1\right] \approx \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{H}{T}\right).$$

Такого же рода оценки ошибок нетрудно получить и для диаграмм направленности иного вида. Видно, что погрешности определяются в первую очередь соотношением ширины диаграммы и интервала обработки, что уже отмечалось выше.

Таким образом, имея запись источника радиоизлучения, можно, не делая каких-либо априорных предположений о форме источника, определить его поток и размеры. В обычно используемых процедурах для этой цели либо делаются необоснованные предположения о функции распределения яркости (часто предполагается, что $b(x)$ — гауссова кривая), либо запись интегрируется без весовой функции. Используя разработанный метод, параметры источника можно оценить без систематической погрешности, (если $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$ вычислены точно)*.

Методика, развитая в статье, может быть продолжена с целью отыскания по записи моментов функции распределения яркости более высоких порядков. При этом появляется возможность (по крайней мере — грубого) синтеза функции $b(x)$ при помощи ряда Эджворта [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. R. N. Bracewell, J. Opt. Soc. Amer., 45, № 10, 799 (1955).
2. А Н Тихонов, В. В. Виткевич, В. С. Артюх, В. Б. Гласко, А. В. Гончарский, А. Г. Ягола, Астрон. ж., 46, № 3, 472 (1969).
3. Л. Г. Содин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 5, 739 (1971).
4. В. Б. Давенпорт, В. Л. Рут, Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, М., 1960.
5. Л. Г. Содин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 5, 670 (1970).
6. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, изд. Сов. радио, М., 1960.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
26 октября 1970 г.

THE METHOD OF DETERMINING THE PARAMETERS OF EXTENDED RADIO SOURCES

L. G. Sodin

The method is developed to estimate the total flux, coordinates and dimensions of radioemission sources without any assumptions of the source radio brightness distribution function. The method proposed is recommended to use in those cases when a source cannot be considered point.

---

*Отметим, что для заданного радиотелескопа эти функции вычисляются один раз, поэтому затраты усилий на их точное определение вполне оправданы.