

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Гуртовик А. С., Неймарк Ю. И. Исследование интегрального тороидального многообразия в критическом случае	967
Брусин В. А. О диссипативности неавтономных динамических систем при почти-периодических входных функциях	973
Крутко П. Д. Наблюдение динамической системы как управляемый процесс	978
Костюковский Ю. М.-Л. Об информационной оценке необходимого состава измерений	982
Марков В. П. Анализ влияния шумов на точность отслеживания экстремума системой с инерционным исполнительным устройством	996
Бочаров А. Ф., Костров А. В. О практической реализуемости статистически оптимальных следящих систем	1006
Шильман С. В. Совмещение метода Монте-Карло с методами поиска экстремума в задачах оптимизации стохастических систем	1014
Свирин Ю. П. К вопросу построения условного математического ожидания по методу наименьших квадратов	1022
Григоренко В. П., Рапопорт А. Н., Ронин Е. И. Исследование обучающихся систем, реализованных в виде вероятностных автоматов	1026
Шахгильдян В. В., Савватеев Ю. И. К исследованию условий устойчивости двухпетлевых систем фазовой синхронизации	1035
Пономаренко В. П. Динамика бесфильтровой совместной системы фазовой автоподстройки частоты слежения за задержкой. I	1043
Пономаренко В. П. Динамика бесфильтровой совместной системы фазовой автоподстройки частоты слежения за задержкой. II	1055
Кельзон А. С., Яковлев В. И. Переход вертикального ротора, вращающегося в подшипниках скольжения, через зону автоколебаний	1066
Гришкина Н. А., Королев В. И. Динамика схемы на туннельных диодах	1078
Мотова М. И. Динамика химических реакций простейших типов	1084
Романов П. В., Рошаль А. С. О решении уравнения Пауссона для области взаимодействия электронных приборов	1097
Яблонский А. И. Об экстремальных свойствах случайного поиска	1104
Неймарк Ю. И., Брейдо М. Д. О нелинейном преобразовании признаков в задачах распознавания образов	1112
Башкиров О. А., Башкирова С. И. О синтезе схем, реализующих сложные логические функции	1122

Краткие сообщения и письма в редакцию

Леонов Н. Н. О процессе слежения для одной системы преимущественного поиска	1133
--	------

УДК 517.91

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТОРОИДАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

A. C. Гуртовник, Ю. И. Неймарк

Показано, что n -мерный тор в $(n+1)$ -мерном фазовом пространстве в критическом случае является полуустойчивым и исследуется его бифуркация при малых возмущениях.

Показывается, что интегральный тор в критическом случае при общих предположениях является полуустойчивым. Исследуется бифуркация этого тора при малых возмущениях. Устанавливается, что от критического тора либо рождаются два интегральных тора, один устойчивый, другой неустойчивый, либо интегральный тор пропадает. Проводимые исследования опираются на работу [1], где была исследована устойчивость интегрального тора в общем некритическом случае.

1. ПОЛУУСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТОРА В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Система дифференциальных уравнений, согласно [1], допускающая семейство квазипериодических решений, в окрестности интегрального тора, образуемого этим семейством, записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_i &= \omega_i + \rho f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \rho) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \dot{\rho} &= a(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \rho + b(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \rho^2 + c(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \rho) \rho^3.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Преодполагается, как и в [1], что частоты $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ линейно независимы над полем рациональных чисел, все функции при $|\rho| < \rho_0$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и являются периодическими периода 2π по переменным $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. В [1] было показано, что интегральный тор $\rho=0$ устойчив (неустойчив), если среднее значение σ функции $a(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ меньше (больше) нуля. Ниже рассматривается случай, когда среднее значение σ функции $a(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ равно нулю. В дополнение к перечисленным выше предположениям добавим следующие условия.

1) Функция $a(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ разлагается в ряд Фурье

$$a(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = -\infty}^{k_1 + \dots + k_n = +\infty} a_{k_1, \dots, k_n} \exp(j \sum_{s=1}^n k_s \varphi_s), \quad (1.2)$$

где коэффициенты a_{k_1, \dots, k_n} при некотором M и достаточно большом N удовлетворяют оценкам вида

$$|a_{k_1, \dots, k_n}| \leq M(|k_1| + \dots + |k_n|)^{-N}. \quad (1.3)$$

Эти оценки заведомо имеют место, если функция $a(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ аналитическая, либо достаточно большое число раз дифференцируема.

2) Частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ удовлетворяют условиям сильной линейной независимости [2, 3]

$$|k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n| \geq K(|k_1| + \dots + |k_n|)^{-n-1} \quad (1.4)$$

для каждого набора k_1, k_2, \dots, k_n , для которого соответствующий коэффициент a_{k_1, \dots, k_n} в разложении (1.2) не равен нулю. Как и в [1], сделаем замену

$$\rho = v \exp(Z(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)), \quad (1.5)$$

где

$$Z(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = -j \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_{k_1, \dots, k_n}}{k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n} \exp(j \sum_{s=1}^n k_s \varphi_s). \quad (1.6)$$

Неравенства (1.3) и (1.4) при $N \geq n + 5$ гарантируют наличие непрерывных производных второго порядка от функции $Z(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. В новых переменных система запишется в следующем виде:

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + vf_i^*(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; v) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.7)$$

$$\dot{v} = b^*(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) v^2 + c^*(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; v) v^3,$$

где

$$b^*(\varphi) = e^Z \left\{ b(\varphi) - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_{k_1, \dots, k_n}}{k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n} \left[\sum_{s=1}^n k_s f_s(\varphi; 0) \exp\left(j \sum_{s=1}^n k_s \varphi_s\right) \right] \right\}, \quad (1.8)$$

Будем считать, что среднее значение b_0^* функции $b^*(\varphi)$ отлично от нуля. Аппроксимируем функцию $b^*(\varphi)$ тригонометрическим полиномом

$$b^*(\varphi) = b_0^* + \sum_{-N}^{+N} b_{k_1, \dots, k_n}^* \exp(j \sum_{s=1}^n k_s \varphi_s) + \delta_N(\varphi), \quad (1.9)$$

где N выбрано так, что имеет место неравенство

$$\max_{\varphi_1, \dots, \varphi_n} |\delta_N(\varphi)| < \frac{1}{3} |b_0^*.| \quad (1.10)$$

В системе (1.7) произведем замену

$$v = w + w^2 \sum_{-N}^{+N} \frac{b_{k_1, \dots, k_n}^*}{j(k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n)} \exp\left(j \sum_{s=1}^n k_s \varphi_s\right). \quad (1.11)$$

При достаточно малых $|w|$ имеем

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + wf_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; w) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1.12)$$

$$\dot{w} = [b_0^* + \delta_N(\varphi)] w^2 + g(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; w) w^3,$$

где новые функции $f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; w)$ и $g(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; w)$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам. Из (1.12), учитывая условие (1.10), вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Интегральный тор $\rho=0$ системы (1.1) полуустойчив. Со стороны, где $b_0^* \rho < 0$, траектории асимптотически к нему приближаются при $t \rightarrow +\infty$, а со стороны, где $b_0^* \rho > 0$, траектории асимптотически приближаются при $t \rightarrow -\infty$.

2. БИФУРКАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО КРИТИЧЕСКОГО ТОРА ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu H_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n; \mu) \\ (i &= 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\quad (2.1)$$

с достаточным числом раз непрерывно дифференцируемыми правыми частями. Пусть при $\mu=0$ уравнения (2.1) допускают квазипериодическое решение с n независимыми частотами, которому соответствует n -мерный критический тор. В переменных [1] уравнения (2.1) приводятся к виду

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_i &= \omega_i + \rho f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \rho) + \mu g_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \rho; \mu) \\ (i &= 1, 2, \dots, n),\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$\dot{\rho} = a(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \rho + b(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \rho) \rho^2 + \mu c(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; \rho; \mu).$$

Как и ранее, считаем, что среднее значение функции $a(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ равно нулю и имеют место оценки (1.3) и (1.4). Замена (1.5) приводит систему к виду

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_i &= \omega_i + v f_i^*(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; v) + \mu g_i^*(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; v; \mu) \\ (i &= 1, 2, \dots, n),\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\dot{v} = \mu h(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; v; \mu) + v^2 g(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n; v),$$

где

$$\begin{aligned}h &= e^{-Z(\varphi)} c(\varphi; ve^Z; \mu) - v \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a_{k_1, \dots, k_n}}{k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n} \sum_{s=1}^n k_s g_s(\varphi; ve^Z; \mu) \times \right. \\ &\quad \times \exp \left(j \sum_{s=1}^n k_s \varphi_s \right) \left. \right] = h_0 + \tilde{h}_0(\varphi) + v h_1(\varphi; v) + \mu h_2(\varphi; v; \mu), \\ g &= e^{Z(\varphi)} \left\{ b(\varphi; ve^Z) - \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a_{k_1, \dots, k_n}}{k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n} \sum_{s=1}^n k_s f_s(\varphi; ve^Z) \times \right. \right. \\ &\quad \times \exp \left(j \sum_{s=1}^n k_s \varphi_s \right) \left. \right] \right\} = g_0 + \widetilde{g_0}(\varphi) + v g_1(\varphi; v).\end{aligned}\quad (2.4)$$

Здесь h_0 и g_0 — средние значения функций $h(\varphi; 0; 0)$ и $g(\varphi; 0)$, а $\widetilde{h_0}(\varphi) = h(\varphi; 0; 0) - h_0$; $\widetilde{g_0}(\varphi) = g(\varphi; 0) - g_0$.

При малых $\mu \neq 0$ и достаточно малых $|v|$ бифуркация критического тора определяется решениями уравнения

$$v^2 g_0 + \mu h_0 = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) при $\mu = 0$ имеет тривиальное решение, соответствующее критическому тору, рассмотренному в разделе 1.

Пусть величины g_0 и h_0 отличны от нуля. При ненулевых значениях μ , в зависимости от знака величины

$$A = -\mu \frac{h_0}{g_0}, \quad (2.6)$$

возможны два случая.

Случай 1. $A > 0$. Уравнение (2.5) имеет два разных по знаку решения

$$v_1 = + \sqrt{-\mu \frac{h_0}{g_0}} \quad \text{и} \quad v_2 = - \sqrt{-\mu \frac{h_0}{g_0}}.$$

Покажем, что в этом случае в достаточно малой фиксированной окрестности критического тора появляются два интегральных тора, один устойчивый, другой неустойчивый.

Действительно, полагая

$$\lambda_1 = + \sqrt{-\mu \frac{h_0}{g_0}} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = - \sqrt{-\mu \frac{h_0}{g_0}},$$

осуществим замену

$$v = \lambda_s r_s + \lambda_s \quad (s = 1, 2). \quad (2.7)$$

В новых переменных система (2.3) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega + \lambda_s F(\varphi, r_s, \lambda_s), \\ \dot{r}_s &= \lambda_s [\alpha(\varphi, \lambda_s) + \beta(\varphi, \lambda_s) r_s + \gamma(\varphi, r_s) \lambda_s r_s^2], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где среднее значение функции $\alpha(\varphi, 0)$ равно нулю, а среднее значение функции $\beta(\varphi, 0)$ равно $2g_0$. Системы дифференциальных уравнений типа (2.8) рассматривались многими авторами [4-8]. Согласно теореме 1 [8], имеет место следующее утверждение.

При достаточно малых $|\mu|$ и некотором малом $\varepsilon > 0$, не зависящем от μ , в окрестностях $|v - v_1| < \varepsilon \sqrt{|\mu|}$ и $|v - v_2| < \varepsilon \sqrt{|\mu|}$ существуют два интегральных тора, один из них устойчивый, другой — неустойчивый. В одной из окрестностей все траектории стремятся к тору при $t \rightarrow +\infty$, в другой — при $t \rightarrow -\infty$. Покажем, что эти два интегральных тора в достаточно малой, не зависящей от μ окрестности $|v| < v_0$ критического тора единственны. От дифференциальных уравнений (2.3) перейдем к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_i(t+\tau) &= \varphi_i(t) + \omega_i \tau + \mu \int_0^\tau g_i^* [\varphi(t+\xi); v(t+\xi); \mu] d\xi + \\ &\quad + \int_0^\tau v(t+\xi) f_i^* [\varphi(t+\xi); v(t+\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} v(t+\tau) &= v(t) + \mu \int_0^\tau h [\varphi(t+\xi); v(t+\xi); \mu] d\xi + \\ &\quad + \int_0^\tau v^2(t+\xi) g [\varphi(t+\xi); v(t+\xi)] d\xi, \end{aligned}$$

которую будем решать методом последовательных приближений [8], положив $\varphi^0(t+\xi) = \varphi(t) + \omega \xi$; $v^0(t+\xi) = v(t)$.

Нетрудно получить оценку

$$|v(t+\tau) - v^1(t+\tau)| < M \tau^2 [\mu^2 + \mu \delta_0 + \delta_0^3], \quad (2.10)$$

где

$$\delta_0 = \max_{0 < \xi < |\tau|} |v(t+\xi)|.$$

Предположим, что при $|v| \leq v_0$ вне окрестностей $|v - v_1| < \varepsilon \sqrt{|\mu|}$

и $|v - v_0| < \varepsilon V|\mu|$ существует ограниченное по $|v|$ решение системы дифференциальных уравнений (2.3) и $|v(t_0)| = \max_{-\infty < t < +\infty} |v(t)|$. Выпустим из точки $\varphi(t_0)$, $v(t_0)$ траекторию. Применяя оценку (2.10), из первого приближения системы (2.9) получим

$$\begin{aligned} v(t_0 + \tau) - v(t_0) &= \tau [g_0 v^2(t_0) + \mu h_0] + \\ &+ \mu \tau \left\{ \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \widetilde{h}_0 [\varphi(t_0) + \omega \xi] d\xi + \frac{v(t_0)}{\tau} \int_0^\tau h_1 d\xi + \frac{\mu}{\tau} \int_0^\tau h_2 d\xi \right\} + \\ &+ v^2(t_0) \tau \left\{ \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \widetilde{g}_0 [\varphi(t_0) + \omega \xi] d\xi + \frac{v(t_0)}{\tau} \int_0^\tau g_1 d\xi \right\} + \\ &+ \{v(t_0 + \tau) - v^1(t_0 + \tau)\} = \tau \{\mu h_0 + g_0 v^2(t_0)\} + \tau o(\rho) = \\ &= g_0 \tau [v(t_0) - v_i] [v(t_0) + v_i] + \tau o(\rho), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где через $o(\rho)$ обозначена величина, убывающая вместе с убыванием

$$\frac{\mu}{\tau} + \mu v(t_0) + \mu^2 + \frac{v^2(t_0)}{\tau} + v^3(t_0) + \tau \mu^2 + \tau \mu v(t_0) + \tau v^3(t_0).$$

Можно считать, что знаки величин $v(t_0)$ и v_i совпадают. Можно выбрать такие достаточно большие числа $B > 0$, $|\tau|$ и достаточно малые v_0 , $|\mu|$, что в случае $B \sqrt{|\mu|} \leq |v(t_0)| \leq v_0$ знак выражения (2.11) совпадает со знаком величины $\tau g_0 v^2(t_0)$, а в случае $|v(t_0)| < B \sqrt{|\mu|}$ — со знаком величины $\tau [\mu h_0 + g_0 v^2(t_0)]$. Получено противоречие с утверждением о том, что

$$|v(t_0)| = \max_{-\infty < t < +\infty} |v(t)|.$$

Случай 2. $A = -\mu \frac{h_0}{g_0} < 0$. Уравнение (2.5) не имеет решений. В этом случае величины $v^2(t_0) g_0$ и μh_0 в выражении (2.11) одного знака, и предположение о наличие интегрального многообразия при $|v| \leq v_0$ также приводит к противоречию.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. При сделанных ранее предположениях и при выполнении неравенства $-\mu \frac{h_0}{g_0} > 0$, где $|\mu| < \bar{\mu}$, достаточно малой окрестности $|\rho| \leq \rho_0$ у системы (2.2) существуют два интегральных многообразия, одно из них устойчиво, другое неустойчиво. При $\mu \rightarrow 0$ они сливаются в критический полуустойчивый тор и при изменении знака μ пропадают. В последнем случае в окрестности $|\rho| \leq \rho_0$ тороидальных интегральных многообразий не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Гуртовник, Ю. И. Неймарк, Дифференциальные уравнения, 5, № 5, 824 (1969).
2. А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М.—Л., ОНТИ, 1935.
3. В. И. Арнольд, Успехи математических наук, 18, вып. 6, 91 (1963).
4. Н. Н. Боголюбов и Д. Н. Зубарев, Укр. мат. журн., 7, 5 (1955).
5. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Труды симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев, 1961.

6. Дж Хейл, Колебания в нелинейных системах, изд. Мир, М., 1966.
7. В. М. Волосов, Сб Механика в СССР за 50 лет, 1, изд. Наука, М., 1968.
8. А. С. Гуртовник, Ю. И. Неймарк, Изв высш уч зав — Радиофизика, 12, № 11, 1597 (1969).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 июня 1970 г.

INVESTIGATION OF INTEGRAL TOROIDAL MANIFOLD
IN CRITICAL CASE

A. S. Gurtovnik, Yu. I. Neimark

It is shown that an n -dimensional tore in $(n+1)$ -dimensional phase space in the critical case is semistable and its bifurcation under small perturbations is investigated.

УДК 517.948

О ДИССИПАТИВНОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВХОДНЫХ ФУНКЦИЯХ

B. A. Брусин

Опираясь на результаты работ [1-3], доказывается теорема о диссипативности неавтономных динамических систем при почти-периодических входных функциях.

В настоящей работе проводится дальнейшее исследование неавтономных стационарных динамических систем, введенных в [1, 2].

Определение. Динамическую систему $\{\Phi, \Gamma, F(H)\}$ [2] будем называть диссипативной относительно класса $M \subset F(H)$ входных функций, если для любой функции $f(t) \in M$ существует такая константа $R > 0$, что для любого $z_0 \in \Phi$ и $t_0 \geqslant 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty, \tau \in \Gamma} \|z(\tau; t_0, z_0, f)\|_{\Phi} \leq R \quad (f[t] \equiv f(t)).$$

Основной результат работы заключен в теореме 1, в которой даны достаточные условия диссипативности относительно класса почти-периодических входных функций.

Промежуточным результатом работы является лемма об эргодическом свойстве выходного случайного процесса динамической системы при метрически-транзитивном входном случайном процессе.

1. ЭРГОДИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ВЫХОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ $\{\Phi, R^1, F(H)\}$

В этом разделе, опираясь на обобщение результатов теорем 2.1 и 2.2 работы [2], мы получим одно важное утверждение относительно выходного случайного процесса динамической системы $\{\Phi, R^1, F(H)\}$ [2]. В этих теоремах были сформулированы условия*, при которых среднее значение по времени от квадрата нормы выходного случайного процесса $y(t, \lambda)$ с вероятностью 1 является константой. В приводимой ниже лемме при более общих предположениях доказывается, что эта константа равна пределу при $t \rightarrow \infty$ математического ожидания квадрата нормы выходного процесса.

Итак, пусть $\{\Psi_{\tau}^{(t_0)}\}$ — стационарная динамическая система $\{\Phi, R^1, F(H)\}$; $z(\tau; t_0, z_0, f)$ — ее траектория, исходящая из точки (z_0, t_0) фазового пространства $\Phi \times R^1$ и отвечающая входной функции $f \in F(H)$ **[2]. Под выходной функцией этой динамической системы при начальном ее состоянии z_0 в момент t_0 будем понимать функцию

* В случае, когда Γ — дискретная полугруппа, в теореме 2.2 работы [2] пропущено требование эргодичности процесса $\xi_{t_0}(\tau, \lambda) = \xi(t_0 + \tau, \lambda)$ ($\tau \in \Gamma$).

** $F(H)$ — линейное пространство кусочно-непрерывных отображений $R^1 \rightarrow H$. H — линейное нормированное пространство.

$$\begin{aligned} y(\tau; t_0, z_0, f) &\equiv \varphi z(\tau; t_0, z_0, f) \\ (f \in H), \quad \tau &\geq 0, \end{aligned}$$

где φ — некоторое липшицево отображение $\Phi \rightarrow \Phi_0$.

Обозначим далее $J_\tau[y] = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T \|y(\tau)\|_{\Phi_0}^2 d\tau$, через ξ_λ — элемент пространства $F(H)$, зависящий от $\lambda \in \Lambda$, т. е. функцию $\xi(t, \lambda)$, $t \in R^1$.

Сформулируем сначала одно обобщение теоремы 2.1 работы [2], получающееся тем же путем.

Лемма 1. Предположим, что относительно динамической системы $\{\Psi_\tau^{(t_0)}\}$ выполняются следующие условия:

- 1) условия А) и Б) теоремы 2.1, где θ — нулевой элемент Φ [2],
- 2) для любых $z_0 \in \Phi$, $\tau > 0$, $\xi \in F(H)$

$$\|z(\tau; t_0, z_0, \xi) - z(\tau; t_0, \theta, \xi)\|_{\Phi} \leq \alpha(\tau) G(\|z_0\|_{\Phi}), \quad (1.1)$$

где $G(\rho)$ — неубывающая функция ρ . Тогда будет иметь место обобщение неравенства (2.7) из [2]*.

$$\|z(\tau; t_0, \theta, \xi) - \Omega_T^{(t_0)} P_{0, T} \Delta_{t_0 + \tau - T}(\xi)\|_{t_0 + T, \tau_0, \Phi} \leq \alpha(T) G[\beta(\tau_0) R(r)].$$

Лемма 2. Предположим, что относительно динамической системы $\{\Psi_\tau^{(t_0)}\}$ выполняются

- 1) условия леммы 1, причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) G[\beta(t) R(r)] = 0, \quad (1.2)$$

- 2) условия (2.10), (2.10 а) теоремы 2.2 из [2].

Тогда

$$J_\tau[y(\tau; t_0, \theta, \xi_\lambda)] \stackrel{(P)}{=} \lim_{\tau \rightarrow \infty} E \|y(\tau; t_0, \theta, \xi_\lambda)\|_{\Phi_0}^2 \quad (1.3)$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что при выполнении условий леммы 2 неравенство (2.14) из [2] остается в силе.

Далее в теореме 2.1 [2] (и соответственно в лемме 1) полагаем $\|z(t)\|_{t_0, \tau, \Phi} = \sup_{t \in [t_0, t_0 + \tau]} \|z(t)\|_{\Phi}^2$, $\|\xi\|_{t_0, \tau, H} = \sup_{t \in [t_0, t_0 + \tau]} \|\xi(t)\|_H^2$.

Тогда вследствие леммы 1 для $\tau_0 \geq T$ получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \in [T, \tau_0]} E \|y(\tau; t_0, \theta, \xi_\lambda) - \mu_T(\tau, \lambda)\|^2 &\leq G(X\beta(\tau_0)) \alpha(T), \\ \mu_T(\tau, \lambda) &\equiv \varphi \Omega_T^{(t_0)} P_{0, T} \Delta_{\tau + t_0 - T}(\xi_\lambda). \end{aligned} \quad (1.4)$$

(X — положительная константа, не зависящая от τ_0 , T и t_0).

Пусть $t^* = t^*(\varepsilon)$ есть наибольший положительный корень уравнения $G(X\beta(t)) \alpha(t) = \varepsilon^2/4$, который существует ввиду (1.2). Тогда из (1.4) при $T = t \geq t^*$ и $\tau_0 = t$ получаем

$$(E \|y(t; t_0, \theta, \xi_\lambda) - \mu_t(t, \lambda)\|_{\Phi_0}^2)^{1/2} \leq \varepsilon/2. \quad (1.5)$$

Кроме того, из неравенства (2.14) работы [2] будет следовать существование и такого $t^{**} = t^{**}(\varepsilon)$, что при $t \geq t^{**}$

$$J_\tau^{1/2}[y(t + \tau, t_0) - \mu_t(t + \tau)] \stackrel{(P)}{\leq} \varepsilon/2, \quad (1.6)$$

а в силу эргодичности процесса $\mu_t(t + \tau, \lambda)$, $\tau \geq 0$ [2] — справедливость соотношения

* Обозначения из работы [2].

$$E \|\mu_t(t)\|^2 = J_\tau^{(P)} [\mu(t + \tau)]. \quad (1.7)$$

Пусть теперь $\bar{t} = \max(t^*, t^{**})$. Тогда при $t \geq \bar{t}$ в силу (1.5) — (1.7) будем иметь

$$\begin{aligned} E^{1/2} \|y(t)\|^2 &\stackrel{(P)}{\leq} E^{1/2} \|y(t) - \mu_t(t)\|^2 + J_\tau^{1/2} [\mu_t(t + \tau)] \leq \\ &\leq \varepsilon/2 + J_\tau^{1/2} [y(t + \tau) - \mu_t(t + \tau)] + J_\tau^{1/2} [y(t + \tau)] \stackrel{(P)}{\leq} \\ &\leq \varepsilon + J_\tau^{1/2} [y(t + \tau)] = \varepsilon + J_\tau^{1/2} [y(\tau)]; \\ &(E^{1/2}(y) \equiv (Ey)^{1/2}), \\ J_\tau^{1/2} [y(\tau)] &\stackrel{(P)}{\leq} J_\tau^{1/2} [y_t(t + \tau) - \mu_t(t + \tau)] + \\ &+ (E \|\mu_t(t)\|^2)^{1/2} \stackrel{(P)}{\leq} \varepsilon/2 + (E \|y(t) - \mu_t(t)\|^2)^{1/2} + \\ &+ (E \|y(t)\|^2)^{1/2} \leq \varepsilon + (E \|y(t)\|^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Эти неравенства ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$ и устанавливают искомое утверждение.

2. УСЛОВИЯ ДИССИПАТИВНОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ $(\Phi, R^1, F(R^n))$ ОТНОСИТЕЛЬНО КЛАССА ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема 1. Пусть относительно динамической системы $\{\Psi_\tau^{(t_0)}\}$ выполняются все условия леммы раздела 1 при $\varphi \equiv I$ — единичном отображении $\Phi \rightarrow \Phi$. Пусть $\omega \equiv \omega(t) \in F(R^n)$ — некоторая почти-периодическая в смысле Бехнера—Неймана [4] функция $R^1 \rightarrow R^n$. Тогда будет существовать такая константа R , что

$$\sup_{\tau > 0} \sup_{t \in R^1} \|z(\tau, t, \theta, \omega)\|_\Phi \leq R < \infty. \quad (2.1)$$

Неравенство (2.1) вместе с условием (1.1) и устанавливает диссипативность данной динамической системы относительно класса входных функций ω с областью диссипативности, заключенной в шаре $\{z; \|z\|_\Phi \leq R\}$.

Доказательство. Доказательство опирается на классические результаты Люмиса [5] и Крылова, Боголюбова [6]. Согласно теореме Люмиса о представлении почти-периодических функций [5] существует компактная группа Λ и гомеоморфизм g вещественной прямой R^1 в плотную подгруппу $\Lambda' \subset \Lambda$, такие, что будет существовать непрерывное отображение $h^{(t_0)}(\Lambda \rightarrow R^n)$, удовлетворяющее при всех $\tau \in R^1$ равенству

$$\omega(t_0 + \tau) = h^{(t_0)}(g(\tau)). \quad (2.2)$$

С помощью этого гомеоморфизма g мы определим однопараметрическое семейство $\{S_\tau\}$ автоморфизмов группы Λ . Именно, если $\lambda \in \Lambda'$, то

$$S_\tau \lambda = g(\tau + g^{-1}(\lambda)). \quad (2.3)$$

Непрерывное продолжение этого отображения на все Λ и будет искомым отображением S_τ . Легко видеть, что семейство автоморфизмов $\{S_\tau; \tau \in R^1\}$ является непрерывной группой относительно операции умножения

$$S_\tau S_{\tau'} = S_{\tau + \tau'}. \quad (2.4)$$

Коль скоро на компактном множестве Λ определена непрерывная группа автоморфизмов, то на основании известной теоремы Крылова —

Боголюбова [6] мы можем на борелевском поле X его подмножеств, порождающимся классом всех открытых (или замкнутых) множеств из Λ , определить вероятностную меру P , такую, что для любых $\sigma \in X$ и $\tau \in R^1$

$$P(S_\tau \sigma) = P(\sigma). \quad (2.5)$$

Определим на вероятностном пространстве (Λ, X, P) [7] n -мерный стационарный случайный процесс $\omega_{t_0}(\tau, \lambda) = \omega(t_0 + \tau, \lambda)$,

$$\omega_{t_0}(\tau, \lambda) = h^{(t_0)}(S_\tau \lambda) \quad (\tau \geq 0). \quad (2.6)$$

Почти все реализации этого случайного процесса согласно (2.2), (2.3), (2.6) являются сдвигами почти-периодической функции $\omega(t_0 + \tau)$ на некоторую величину $\tilde{\tau}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \omega_{t_0}(\tau, \lambda) &= \omega(t_0 + \tau + \tilde{\tau}(\lambda)), \\ \tilde{\tau}(\lambda) &= g^{-1}(\lambda) \quad (\tau \geq 0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из этого факта вытекает, что поток S_τ является не только стационарным (в узком смысле) потоком, но и метрически транзитивным, а случайный процесс $\omega_{t_0}(\tau, \lambda)$ — эргодическим (в узком смысле) процессом [7].

Применим теперь к динамической системе $\{\Psi_\tau^{(t_0)}\}$ лемму 2, полагая в ней $\xi_\lambda[\tau] \equiv \xi(\tau, \lambda) = \omega_{t_0}(\tau, \lambda) \equiv \omega_\lambda[\tau]$. Тогда в силу (1.3) мы получаем, что существует число $R_1 > 0$, такое, что

$$\sup_{\tau \geq 0} \int_A \|z(\tau; t_0, \theta, \omega_\lambda)\|_\Phi^2 dP = R_1. \quad (2.8)$$

Из этого неравенства, пользуясь свойством компактности множества Λ , мы выведем эквивалентное исходному результату утверждение, что

$$\sup_{\substack{\tau \geq 0 \\ \lambda \in \Lambda}} \|z(\tau, \lambda)\|_\Phi < \infty \quad (2.9)$$

(где с целью сокращения записи обозначено $z(\tau, \lambda) \equiv z(\tau, t_0, \theta, \omega_\lambda)$). В силу этого же свойства компактности и свойства (1.1) нам достаточно будет показать, что при некотором фиксированном $\lambda_0 \in \Lambda'$

$$\sup_{\tau \geq 0} \|z(\tau, \lambda_0)\| < \infty. \quad (2.10)$$

Пусть это будет такой элемент, что $\tilde{\tau}(\lambda_0) = 0$. Обозначим через M_τ подмножество Λ : $M_\tau = \{\lambda, \lambda \in \Lambda, 0 \leq \tilde{\tau}(\lambda) \leq \tau\}$. Неравенство (2.10) мы установим, показав (и это вытекает из свойств непрерывности семейства операторов $\{\Psi_\tau^{(t)}\}$ динамической системы [2]), что для некоторого $\tau^* > 0$ существует такое $T > 0$, что при $t > T$ на отрезке $[t, t + \tau^*]$ всегда найдется число t' , удовлетворяющее неравенству

$$\begin{aligned} \|z(t', \lambda)\| &\leq C = [(R_1 + \varepsilon)/P(M_{\tau^*})]^{1/2} + \varepsilon, \\ t' &\in [t, t + \tau^*] \quad (t > T) \end{aligned} \quad (2.11)$$

($\varepsilon > 0$ — сколь угодно мало). Пусть $T_\varepsilon(\lambda)$ — отображение Λ на положительную полуось Λ $\lambda \mapsto T \geq 0$, которое определяется следующим образом: число T есть минимальное положительное число, для которого

$$\sup_{t \geq T + \tau^*} \|z(t - \tilde{\tau}(\lambda), \lambda) - z(t, \lambda_0)\| \leq \varepsilon. \quad (2.12)$$

Такое отображение ввиду (1.1) действительно существует, и, более того, оно будет непрерывным. В силу компактности Λ отсюда вытекает, что существует число $T = T(\varepsilon) > 0$, $T < \infty$, равное

$$T = \sup_{\lambda \in \Lambda} T_\varepsilon(\lambda). \quad (2.13)$$

Итак, предположим теперь, что (2.11) не имеет места для некоторого $\bar{t} > T$, т. е.

$$\inf_{t \in [\bar{t}, \bar{t} + \tau^*]} \|z(t, \lambda)\| \geq C. \quad (2.14)$$

Но тогда из неравенства

$$C \leq \|z(\bar{t} + \tilde{\tau}, \lambda_0)\| \leq \|z(\bar{t} + \tilde{\tau}, \lambda_0) - \bar{z}(t, \lambda)\| + \|\bar{z}(t, \lambda)\|, \\ (\lambda \in M_{\tau^*}, \tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\lambda) \in [0, \tau^*], \bar{t} > T)$$

и неравенства (2.12) будет следовать, что $|R_1 + \varepsilon| \leq \int_{\Lambda} \|z(\bar{t}, \lambda)\|^2 dP$, что противоречит (2.8). Это и доказывает неравенство (2.9), а за ним и искомое утверждение.

Замечание 1. Теорема, аналогичная только что доказанной, может быть установлена и для стационарных динамических систем $\{\Phi, \Gamma, F(R^n), \Gamma_1\}$ с дискретным временем (входные функции заданы на некоторой дискретной группе $\Gamma_1 \subset R^1$). В некотором отношении для таких систем будет справедлив даже более общий, чем лемма и теорема 1, результат, поскольку, кроме условия $\Gamma \subset \Gamma_1$, никаких других ограничений на Γ здесь не требуется. (В теореме 1 $\Gamma > \Gamma_1 = R^1$). Существенный отличительный момент при доказательстве «дискретного варианта» леммы связан с тем обстоятельством, что процесс $\omega_{t_0}(\tau, \lambda)$, $\tau \in \Gamma$ может быть, вообще говоря, не эргодическим. Но для доказательства важно то, что он будет иметь лишь конечное число эргодических компонент.

Замечание 2. Если в место условия (1.1) требовать более сильное условие $\|z(\tau; t_0, z_0, \xi) - z(\tau; t_0, z_1, \xi)\| \leq \alpha(\tau) \|z_0 - z_1\|$ как в работе [2], то диссипативность устанавливается непосредственно из результатов [8]. В частности, в условиях теоремы 1 из [2] и теоремы 2.1 [3] требования диссипативности оказываются излишними.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Брусин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 7, 1013 (1969).
2. В. А. Брусин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 11, 1632 (1969).
3. В. А. Брусин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 4, 491 (1970).
4. К. Морен, Методы Гильбертова пространства, изд. Мир, М., 1965
5. Л. Люмис, Введение в абстрактный гармонический анализ, ИЛ, М., 1956
6. Н. М. Кгулов, Н. Н. Боголюбов, Ann. of math., 38, 65, (1937).
7. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956
8. Ю. И. Неймарк, Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, 2, изд. Наука, М., 1965.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 сентября 1970 г.

ON NONAUTONOMOUS DYNAMIC SYSTEMS' DISSIPATION UNDER ALMOST PERIODIC INPUT FUNCTIONS

V. A. Broosin

Based on the results of works [1-3] a theorem on dissipation of nonautonomous dynamic systems under almost periodic input functions is proved. This theorem makes it possible to strengthen a number of theorems on existence and absolute stability of forced almost periodic modes obtained in [2, 3].

УДК 62 — 501.1

НАБЛЮДЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КАК УПРАВЛЯЕМЫЙ ПРОЦЕСС

П. Д. Крутько

Показано, что задача синтеза оптимальных алгоритмов наблюдения может рассматриваться как задача синтеза управлений для соответствующих динамических систем

Рассматривается следующая задача. Задана система

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad Z(t) = HX(t) + \xi(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где X — матрица-столбец фазовых координат размерности n ; A , H — известные $(n \times n)$ - и $(m \times n)$ -матрицы, характеризующие динамические свойства объекта и измерителя; ξ_j ($j = 1, 2, \dots, m \leq n$) — случайные ошибки измерений, обладающие нормальным распределением и имеющие нулевые средние значения. Корреляционная матрица $D_\xi(t) = M[\xi(t) \xi^T(t)]$ известна. Система (1) предполагается наблюдаемой в смысле [1]. Требуется по измерениям $Z(t)$ при $t > t_0$ найти разрешающие операции, вычисляющие несмещенную оценку X с минимальной дисперсией.

Сформулированная задача называется задачей о наблюдении динамической системы [2].

Ограничимся рассмотрением случая, когда свойства A такие, что движение $X(t)$ устойчиво. Совокупность искомых разрешающих операций будем именовать алгоритмом наблюдения, представляя его в виде некоторой управляемой системы. Поскольку ξ — гауссовский случайный процесс, структуру оптимального алгоритма следует искать в классе линейных систем [3]. Используя модель изучаемого процесса, уравнение системы запишем в виде

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + U(t), \quad (2)$$

определенное управление следующим образом:

$$U(t) = P(t)[HY(t) - Z(t)], \quad (3)$$

где $P = \|p_{\nu\mu}\|$, $\nu = [1, n]$, $\mu = [1, m]$. Введем новую переменную $v = Y - X$. Тогда с учетом (1) на основании (2) и (3) получим уравнения для центрированной случайной составляющей v_0

$$\dot{v}_0(t) = Av_0(t) + P(t)[Hv_0(t) - \xi(t)]. \quad (4)$$

Параметры $p_{\nu\mu}$ определим из условия

$$V(t, P) = Sp(D_v(t)) = \min.$$

Здесь $D_v(t) = M[v_0(t) v_0^T(t)]$ есть корреляционная матрица ошибок наблюдения.

Уравнение для $D_v(t)$ можно найти следующим образом. Продиф-

ференцируем квадратичную форму $v_0(t) v_0^T(t)$, в силу уравнения (4). Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (v_0(t) v_0^T(t)) &= \dot{v}_0(t) v_0^T(t) + v_0(t) \dot{v}_0^T(t) = \\ &= C(t) v_0(t) v_0^T(t) + v_0(t) v_0^T(t) C^T(t) - \\ &- P(t) \xi(t) v_0^T(t) - v_0(t) \xi^T(t) P^T(t), \end{aligned}$$

где принято обозначение

$$C(t) = A + P(t) H.$$

Усредняя по множеству обе части этого равенства, получим

$$\begin{aligned} \bar{D}_v(t) &= C(t) D_v(t) + D_v(t) C^T(t) - \\ &- P(t) \overline{\xi(t) v_0^T(t)} - \overline{v_0(t) \xi^T(t) P^T(t)}. \end{aligned}$$

Найдем теперь $\overline{v_0(t) \xi^T(t)}$ и $\overline{\xi(t) v_0^T(t)}$. С этой целью запишем решение (4) при нулевых начальных условиях

$$v_0(t) = - \int_0^t \Phi(t, \tau) P(\tau) \xi(\tau) d\tau, \quad (5)$$

где $\Phi(t, \tau)$ — фундаментальная матрица, отвечающая (4) и являющаяся решением уравнения

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, \tau) = A \Phi(t, \tau), \quad \Phi(t, t) = E. \quad (6)$$

Здесь E — единичная матрица. Умножая справа обе части (5) на $\xi^T(t)$ и принимая во внимание, что $\xi(\tau) \xi^T(t) = D_\xi(\tau) \delta(\tau - t)$, получим с учетом (6)

$$\begin{aligned} \overline{v_0(t) \xi^T(t)} &= - \int_0^t \Phi(t, \tau) P(\tau) D_\xi(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = \\ &= - 1/2 \Phi(t, t) P(t) D_\xi(t) = - 1/2 P(t) D_\xi(t). \end{aligned}$$

Множитель $1/2$ появляется здесь вследствие симметрии δ -функции, в аргумент которой входит верхний предел интегрирования. Точно так же можно найти

$$\overline{\xi(t) v_0^T(t)} = - 1/2 D_\xi(t) P^T(t).$$

Таким образом, с учетом полученных равенств имеем окончательный вид уравнения

$$\bar{D}_v(t) = C(t) D_v(t) + D_v(t) C^T(t) + P(t) D_\xi(t) P^T(t), \quad (7)$$

решением которого является корреляционная матрица ошибок оценивания.

Возвратимся к задаче определения оптимальных параметров p_{up} , минимизирующих функционал $V(t, P)$. При любых свойствах A минимум функционала достигается в случае, когда для каждого $t > t_0$ $\bar{D}_v(t)$ принимает экстремальное значение в пространстве $\|p_{\text{up}}\|$. В свою очередь, это имеет место, если $P(t)$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dP} \dot{D}_v(t) = 0.$$

Из этого условия на основании (7) находим

$$P(t) = -D_v(t) H^T D_\xi^{-1}(t). \quad (8)$$

Подстановка этого выражения в (7) приводит к уравнению

$$\dot{D}_v(t) = A D_v(t) + D_v(t) A^T - D_v(t) H^T D_\xi^{-1}(t) H D_v(t), \quad (9)$$

из которого определяются минимальные дисперсии оцениваемых координат.

При сделанных предположениях относительно A производная определено положительной функции $V(t, P)$ по t , найденная в силу (9), отрицательна. Отсюда следует статистическая устойчивость (9), что влечет за собой [4] устойчивость невозмущенного движения системы

$$\dot{\bar{v}}(t) = (A + P(t) H) \bar{v}(t),$$

где \bar{v} — математическое ожидание ошибки оценивания.

Таким образом, сформулированная задача разрешается с помощью алгоритма, основанного на интегрировании уравнений (2), (3), где $P(t)$ определяется в соответствии с (8).

Найденный алгоритм синтезирован из условия минимума дисперсии ошибок наблюдения. Он является наилучшим из всех возможных в классе линейных систем, поскольку по условию помехи ξ , имеют гауссов распределение. При сделанных предположениях алгоритм наблюдения совпадает с известными алгоритмами Винера — Калмана [5].

В заключение заметим, что в отличие от известных методов решения аналогичных задач, использующих специальные построения, например, ортогональное проектирование [5], изложенная процедура позволяет синтезировать оптимальные алгоритмы наблюдения методами теории систем автоматического управления. Это оказывается особенно важным в тех случаях, когда необходимо синтезировать алгоритмы наблюдения (обработки информации) для различных условий их функционирования.

Можно различать возмущенные режимы наблюдения, характеризуемые существенными отклонениями математических ожиданий оценок y , от истинных координат x , и невозмущенные режимы наблюдения, имеющие место при $\bar{v} = \bar{y} = x \approx 0$. Тогда, если для невозмущенного режима параметры p_{vp} необходимо выбирать из условия достижения минимума случайных ошибок, например, в соответствии с (8), то для возмущенного режима эти параметры должны быть такими, чтобы возможно за более короткий промежуток времени ликвидировать существенные отклонения y — x . Величины p_{vp} , трактуемые как коэффициенты усиления в каналах регулятора, а в общем случае — операторы, могут определяться хорошо развитыми методами теории регулирования.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. Е. Калман, Тр I конгресса ИФАК, 2, изд. АН СССР, М, 1961.
2. Н. Н. Красовский, Теория управления движением, изд. Наука, М, 1968.
3. В. С. Пугачев, Теория случайных функций, Физматгиз, М, 1962.

- 4 A. A. Красовский, Статистическая теория переходных процессов в системах управления, изд. Наука, М., 1968.
5. R. E. Kalman, A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans. ASME, J. Basic Eng., March 1960.

Поступила в редакцию
15 сентября 1970 г.

DYNAMIC SYSTEM'S OBSERVATION AS
CONTROLLABLE PROCESS

P. D. Krootko

It is shown that the problem of observation optimal algorithms synthesis can be considered as a problem of synthesis of controls for corresponding dynamic systems.

УДК 621.391.13

ОБ ИНФОРМАЦИОННОЙ ОЦЕНКЕ НЕОБХОДИМОГО СОСТАВА ИЗМЕРЕНИЙ

Ю. М.-Л. Костюковский

На основе введенного понятия представительности и степени представительности информации о траекториях нелинейной динамической системы предлагается информационная оценка, с помощью которой можно определить, когда между статистическими ансамблями траекторий динамической системы в фазовом пространстве и траекториями состояний наблюдателя не существует взаимно однозначного соответствия. Полученные результаты могут быть использованы для выбора необходимого состава измерений.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ДОПУЩЕНИЯ

Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$x^{(1)} = f(t, x, u) \quad (t_0 \leq t \leq t_1; x(t_0) = x_0; x^{(1)} = \frac{d}{dt} x), \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор состояния системы в фазовом пространстве R_x^n ; $u = (u_1, \dots, u_r)$ — вектор управляющих воздействий в пространстве R_u^r , t — время.

С вектором x связан вектор y , характеризующий состояние наблюдателя,

$$y(t) = \varphi(t, x) + \eta(t). \quad (1.2)$$

Здесь $y = (y_1, \dots, y_m)$ — вектор в пространстве R_y^m , где $m \leq n$; $\eta(t)$ — ошибка измерения с известными или неизвестными статистическими свойствами. Можно считать, что уравнение (1.2) описывает процесс измерения координат x_1, \dots, x_n с помощью m измерителей. При этом существенно, что $m \leq n$.

Задача восстановления движения системы (1.1) заключается в том, чтобы однозначно оценить неизвестное начальное состояние $x(t_0) = x_0$ (либо $x(t)$), всяя $y = y(t)$ и $u = u(t)$ на отрезке времени $[t_0, t_1]$ и рассматривая f и φ как известные функции своих аргументов.

Будем считать, что любые решения дифференциальной системы (1.1), интересующие нас в процессе дальнейшего рассмотрения, удовлетворяют условиям теоремы единственности и продолжаемости на весь отрезок $[t_0, t_1]$.

Введем следующие обозначения: $T = \{t : t_0 \leq t \leq t_1\}$, $\bar{x}(x_0, u)$ — траектория вектора $x = x(t, x_0, t_0)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) в $R_x^n \times T$, соответствующая некоторой траектории управляющего воздействия $\bar{u} = u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) в $R_u^r \times T$ и выходящая из $x_0 = x(t_0, x_0, t_0)$; $\bar{y}(x_0, \bar{u})$ — траектория вектора $y = \varphi(t, x(t, x_0, t_0) + \eta(t))$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) в $R_y^m \times T$, соответствующая \bar{u} и $x(x_0, \bar{u})$.

Выбрав траекторию управляющего воздействия $\bar{u} = u(t)$

$(t_0 \leq t \leq t_1)$, рассмотрим множества траекторий $\bar{x}(x_0, \bar{u})$ и $\bar{y}(x_0, \bar{u})$, которые определим следующими ограничительными условиями:

$$P_{\bar{u}}(K) \stackrel{\Delta}{=} \{\bar{x}(x_0, \bar{u}) : \bar{x}(x_0, \bar{u}) \text{ для всех } x_0 \in K \text{ и выбранного } \bar{u}\},$$

$$Q_{\bar{u}}(K) \stackrel{\Delta}{=} \{\bar{y}(x_0, \bar{u}) : \bar{y}(x_0, \bar{u}) \text{ для всех } x_0 \in K \text{ и выбранного } \bar{u}\},$$

где $K = \{x_0\}$ — открытая ограниченная связная область в R_x^n . Обозначим через $\bar{V} = \{u(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ множество всех допустимых воздействий u .

Определение. Будем называть пару $[f, \varphi]$ представительной при любом управляющем воздействии $u \in V$ в области $K = \{x_0\}$ на отрезке времени $[t_0, t_1]$, если для любого $\bar{u} \in \bar{V}$ между множествами K и $Q_{\bar{u}}(K)$ существует взаимно однозначное соответствие.

Очевидно, что если наблюдается вектор (1.2), то представительность пары $[f, \varphi]$ при любом $\bar{u} \in \bar{V}$ в области K на отрезке $[t_0, t_1]$ является необходимым условием, чтобы решение задачи однозначного восстановления движения системы (1.1) было возможным. Иначе говоря, измерители (1.2) следует выбирать так, чтобы пара $[f, \varphi]$ была представительной в области K на отрезке $[t_0, t_1]$.

Пусть $u(t)$ — гладкая функция t в T вместе со всеми своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно; f и φ имеют непрерывные частные производные в $R_x^n \times R_u' \times T$ по всем своим аргументам соответственно до $(n-1)$ -го и n -го порядка включительно и непрерывные смешанные производные того же порядка; $\eta(t)$ имеет непрерывные производные в T до n -го порядка включительно.

Обозначим k -ю координату вектора (1.2) через

$$y_k = F_{k,0}(t, x) + \eta_k(t). \quad (1.3)$$

Дифференцируя (1.3) по t , в силу уравнения (1.1), образуем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} y_k &= F_{k,0}(t, x) + \eta_k(t); \\ y_k^{(1)} &\stackrel{(1.1)}{=} (\nabla_x F_{k,0}) f + \nabla_t F_{k,0} + \eta_k^{(1)} \equiv F_{k,1}(t, x; u) + \eta_k^{(1)}, \dots, \\ y_k^{(n-1)} &\stackrel{(1.1)}{=} (\nabla_x F_{k,n-2}) f + \sum_{p=0}^{n-3} (\nabla_{u^{(p)}} F_{k,n-2}) u^{(p+1)} + \\ &+ \nabla_t F_{k,n-2} + \eta_k^{(n-1)} \equiv F_{k,n-1}(t, x, u, u^{(1)}, \dots) + \eta_k^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\nabla_x F_{k,i} = \left(\frac{\partial F_{k,i}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_{k,i}}{\partial x_n} \right)$; $\Delta_t F_{k,i} = \frac{\partial F_{k,i}}{\partial t}$;

$$\nabla_{u^{(p)}} F_{k,i} = \left(\frac{\partial F_{k,i}}{\partial u_1^{(p)}}, \dots, \frac{\partial F_{k,i}}{\partial u_r^{(p)}} \right); \quad u^{(t)} = \frac{du}{dt}; \quad \eta_k^{(t)} = \frac{d^t \eta_k}{dt^t}.$$

Пусть все $F_{k,i}$ в (1.4) можно представить в виде суммы

$$F_{k,i} = \alpha_{k,i}(x) + \beta_{k,i}(t).$$

Рассмотрим $n \times n$ -матрицы Якоби

$$I_k = \frac{\partial (F_{k,0}, F_{k,1}, \dots, F_{k,n-1})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (k = 1, \dots, m). \quad (1.5)$$

Образуем $m \times n$ -матрицу

$$I = \text{colon}(I_1, I_2, \dots, I_m), \quad (1.6)$$

полагая, что ранг матриц (1.5)

$$\text{rank } I_k \geq 1 \quad (1.7)$$

для каждого $k = 1, \dots, m$. Обозначим через $M_{\bar{u}}$ множество всех начальных состояний x_0 в пространстве R_x^n , таких, что если траектория $\bar{x}(x_0, \bar{u})$ берет начало на множестве $M_{\bar{u}}$ ($x_0 \in M_{\bar{u}}$), то все определители $\det I_k$ ($k = 1, \dots, m$) равны нулю тождественно по t вдоль этой траектории $\bar{x}(x_0, \bar{u})$ ($x_0 \in M_{\bar{u}}$)

$$M_{\bar{u}} = \{\bar{x}_0 : \det I_k^t \equiv 0 \ (t_0 \leq t \leq t_1; k = 1, \dots, m)\} \quad (1.8)$$

вдоль траектории $\bar{x}(x_0, \bar{u})$.

Далее везде будем считать, что выполняется следующее условие.

Условие 1. Если существует управляющее воздействие $\bar{u} \in \bar{V}$, такое, что $M_{\bar{u}} \cap K \neq \emptyset$ (\emptyset — пустое множество), то в этом множестве $M_{\bar{u}} \cap K$ существует непустое открытое ограниченное связное множество H ($H \subseteq M_{\bar{u}} \cap K$), такое, что в каждой из матриц I_k ($k = 1, \dots, m$) можно выделить такой минор D_{k, r_k} порядка r_k ($1 \leq r_k \leq n-1$), который имел бы максимальный порядок среди всех миноров в матрице I_k , не обращающихся в нуль никогда на отрезке $[t_0, t_1]$ вдоль любой траектории $\bar{x}(x_0, \bar{u})$ ($x_0 \in H$) и окаймляемых главным минором $\det I_k \equiv D_{k, n}$, в то время, как все миноры в матрице I_k , окаймляющие минор D_r , равны нулю тождественно по t вдоль $\bar{x}(x_0, \bar{u})$ ($x_0 \in H$).

Пусть строки минора D_{k, r_k} соответствуют первым r_k вектор-строкам

$$\nabla_x F_{k, 0}(t, x, u_+, u_+^{(1)}, \dots), \nabla_x F_{k, 1}(t, x, u_+, u_+^{(1)}, \dots), \dots, \quad (1.9)$$

$$\nabla_x F_{k, r_k-1}(t, x, u_+, u_+^{(1)}, \dots).$$

Заметим, что это предположение не ограничивает общности рассмотрения. Рассмотрим в R_x^n многообразия N вида

$$N: F_{k, i}(t_0, x_0, u_+(t_0), u_+^{(1)}(t_0), \dots) = c_{ik} \quad (1.10)$$

$$(i = 0, 1, \dots, r_k - 1; k = 1, \dots, m),$$

где c_{ik} — произвольные постоянные.

Ограничиваая класс рассматриваемых систем (1.1), (1.2), допустим, что обеспечиваются следующие условия.

Условие 2. Если выполняется условие 1, то среди многообразий N в (1.10) можно выбрать некоторое многообразие N , соответствующее постоянным $c_{ik} = c_{ik}$, такое, что пересечение $\bar{N} \cap H \neq \emptyset$ (и, следовательно, поскольку H — открытое множество, то $\bar{N} \cap H$ содержит не менее двух начальных точек $x_0 = x_0^j$ ($j = 1, 2$)).

Условие 3. Если $M_{\bar{u}} \cap K = \emptyset$ для некоторого $\bar{u} \in \bar{V}$, то существует момент времени $t = t^* \in [t_0, t_1]$, такой, что

$$\operatorname{rank} I \Big|_{t=t^*} = n$$

одновременно для всех $x_0 \in K$.*

2. КРИТЕРИЙ ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОСТИ

Сформулируем необходимое и достаточное условие представительности пары $[f, \varphi]$.

Теорема 1 (критерий представительности). Пусть выполняются условия раздела 1. Тогда для того, чтобы пара $[f, \varphi]$ при любом управляющем воздействии $u \in \bar{V}$ была представительной в открытоей ограниченной связной области $K = \{x_0\}$ на отрезке времени $[t_0, t_1]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$M_{\bar{u}} \cap K = \emptyset \quad (2.1)$$

для любого $\bar{u} \in \bar{V}$.

Доказательство. а) Необходимое условие. Рассуждая от противного, предположим, что $M_{\bar{u}_+} \cap K \neq \emptyset$ для некоторого $\bar{u}_+ \in \bar{V}$. Тогда, согласно условию 1, существует множество H со свойствами, описанными в разделе 1. В силу непрерывной зависимости $x = x(t, x_0, t_0)$ от t, x_0 и $\varphi(t, x)$ от t, x , а также благодаря условиям на f , обеспечивающим продолжаемость на $[t_0, t_1]$ любого решения $x = x(t, x_0, t_0)$, которое берет начало в области $K (x_0 \in K)$, множество точек $X_T = \{(x, t)\}$ в $R_x^n \times T$, где $X_T = \{(x, t) : x = x(t, x_0, t_0), \text{ для некоторого } \bar{u}_+ \in \bar{V} \text{ для всех } x_0 \in H \text{ и для всех } t \in T\}$, является так же, как и множество H , ограниченным открытым связным множеством ([1], стр. 84). Очевидно, что $\operatorname{rank} I_k = r_k < n$ для любой точки $(x, t) \in X_T$. Поэтому на основании [2] (теорема 5) величина F_{k, r_k} функционально зависит от $F_{k, 0}, F_{k, 1}, \dots, F_{k, r_k-1}$

$$F_{k, r_k} = \Phi_k(F_{k, 0}, F_{k, 1}, \dots, F_{k, r_k-1}, t), \quad (2.2)$$

где Φ_k — дифференцируемая функция, а $F_{k, 0}, F_{k, 1}, \dots, F_{k, r_k-1}$ соответствуют вектор-строкам (1.9) минора D_{k, r_k} . Принимая во внимание (1.4), запишем (2.2) в виде

$$y_k^{(k)} = \Phi_k(y_k - \eta_k, y_k^{(1)} - \eta_k^{(1)}, \dots, y_k^{(r_k-1)} - \eta_k^{(r_k-1)}, t) + \eta_k^{(r_k)}(t). \quad (2.3)$$

Благодаря условию 2, существует, по крайней мере, две начальные точки x_0^1 и x_0^2 , такие, что

$$y_k^{(i)}(t_0) = \bar{c}_{ik} + \eta_k^{(i)}(t_0) = F_{k, i}(t_0, x_0^i, u_+(t_0), u_+^{(1)}(t_0), \dots) + \\ + \eta_k^{(i)}(t_0) \quad (i = 0, 1, \dots, r_k - 1; j = 1, 2; k = 1, \dots, m). \quad (2.4)$$

Следовательно, точкам $x_0^j \in \bar{V} \cap H$ ($j = 1, 2$) соответствует одна и та же траектория $y_k = y_k(t, x(t, x_0, t_0))$ ($t_0 \leq t \leq t_1; k = 1, \dots, m$), которая является решением дифференциального уравнения (2.3). А это противоречит тому, что пара $[f, \varphi]$ при любом $\bar{u} \in \bar{V}$ представительна в K на $[t_0, t_1]$.

б) Достаточное условие. Допустим, что (2.1) выполняется. Согласно условию 3, для любого $x_0 = x_0 \in K$, любого $u = \bar{u}_+ \in \bar{V}$ и не-

* В общем случае t^* функционально зависит от \bar{u} ; $t^* = t^*(\bar{u})$.

которого $t^* \in [t_0, t_1]$, $\text{rank } I = n$. Следует помнить, что $y^{(i)}(t^*)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) — известные величины, соответствующие траектории $\bar{y}(x_0, \bar{u}_+) \in Q_{\bar{u}+}(K)$. Элементы матрицы I являются дифференцируемыми функциями t и x_0 в $R_x^n \times T$. Поэтому из (2.1) следует, что существует окрестность $U[(x(t^*), t^*)] \subseteq R_x^n \times T$ точки $(x(t^*), t^*)$, такая, что $\text{rank } I = n$ в $U[(x(t^*), t^*)]$. Следовательно, система уравнений (1.4), рассматриваемая в момент $t = t^*$, может быть однозначно разрешена относительно $x(t^*)$. Иначе говоря, в окрестности $U[(x(t^*), t^*)]$ величина $x(t^*)$ может быть определена единственным образом как гладкая функция переменных $y^{(i)}(t^*)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) ([1], стр. 311).

Покажем, что для всякого набора производных $y^{(i)}(t^*)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), соответствующих траектории $\bar{y}(x_0, \bar{u}_+) \in Q_{\bar{u}+}(K)$, существует единственное значение $x(t^*)$. Рассмотрим те n уравнений из (1.4), которые функционально независимы в момент $t = t^*$, или, иначе говоря, которые в момент $t = t^*$ соответствуют линейно независимым вектор-строкам $\nabla_x F_{k,0}, \nabla_x F_{k,1}, \dots, \nabla_x F_{k,r_k-1}$ ($k = 1, \dots, m$) матрицы I (см. (1.5), (1.6)). Без ограничения общности будем считать, что эти уравнения соответствуют первым r_k производным в левой части соотношений (1.4)

$$y_k^{(i)}(t^*) \quad (i = 0, 1, \dots; \lambda_k; k = 1, \dots, m). \quad (2.4)$$

Очевидно, что здесь $\sum_{k=1}^m \lambda_k = n$. Обозначим через

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \quad y_1^{(1)} = z_2, \dots, y_1^{(\lambda_1)} = z_{\lambda_1}; \\ y_2 &= z_{\lambda_1+1}, \quad y_2^{(1)} = z_{\lambda_1+2}, \dots, y_2^{(\lambda_m)} = z_n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пространство векторов $z = (z_1, \dots, z_n)$ обозначим R_z^n . Пусть $L^n(\bar{u}_+)$ — множество векторов $z(t^*) = (z_1(t^*), \dots, z_n(t^*))$ в R_z^n , соответствующих всевозможным траекториям $\bar{y}(x_0, \bar{u}_+) \in Q_{\bar{u}+}(K)$. Очевидно, что $L^n(\bar{u}_+)$ — открытая ограниченная и связная область в R_z^n ([1], стр. 84). Так как рассматриваются только те уравнения (1.4), которые функционально независимы, то для любой точки $z(t^*) = \tilde{z}(t^*)$ существует окрестность $\tilde{U}[z(t^*)]$, такая, что

$$x(t^*) = \tilde{\Psi}(z(t^*), t^*), \quad z(t^*) \in \tilde{U}[z(t^*)], \quad (2.6)$$

где $\tilde{\Psi}$ — гладкая функция. Покажем, что для любой точки $z(t^*) \in L^n(\bar{u}_+)$ существует единственное значение $x(t^*)$. Для этого возьмем любые две точки $z'(t^*), z''(t^*) \in L^n(\bar{u}_+)$. Соединим эти точки непрерывной кривой $\gamma \in L^n(\bar{u}_+)$. Согласно лемме о конечном покрытии, существует система окрестностей

$$U[z^1(t^*)], U[z^2(t^*)], \dots, U[z^*(t^*)]$$

$$(z'(t^*) = z^1(t^*), z''(t^*) = z^*(t^*); z^1, z^2, \dots, z^* \in \gamma),$$

покрывающих непрерывную кривую

$$\gamma \subseteq U[z^1(t^*)] \cup U[z^2(t^*)] \cup \dots \cup U[z^*(t^*)] \quad (2.7)$$

и пересекающихся так, что

$$U[z^i(t^*)] \cap U[z^{i+1}(t^*)] = \emptyset \quad (i = 1, \dots, x-1). \quad (2.8)$$

А в каждой из окрестностей $U[z^i(t^*)]$ существует единственная гладкая функция Ψ^i , такая, что любой точке $z(t^*) \in U[z^i(t^*)]$ соответствует единственная точка $x(t^*) = \Psi^i(z(t^*), t^*)$. Рассмотрим окрестности точек $z^1(t^*)$ и $z^2(t^*)$. Так как для всех $z(t^*) \in U[z^1(t^*)]$ существует единственная гладкая функция $x(t^*) = \Psi^1[z(t^*)]$, а для всех $z(t^*) \in U[z^2(t^*)]$ — единственная гладкая функция $x(t^*) = \Psi^2[z(t^*)]$, то

$$\Psi^1[z(t^*)] \equiv \Psi^2[z(t^*)] \text{ в } U[z^1(t^*)] \cap U[z^2(t^*)]. \quad (2.9)$$

Тогда в силу единственности функций Ψ^1 в $U[z^1(t^*)]$ и Ψ^2 в $U[z^2(t^*)]$,

$$\Psi^1[z(t^*)] \equiv \Psi^2[z(t^*)] \text{ в } U[z^1(t^*)] \cup U[z^2(t^*)]. \quad (2.10)$$

Рассуждая по индукции, приходим к тому, что $\Psi^1 \equiv \Psi^2 \equiv \dots \equiv \Psi^x \equiv \Psi$ для всех $z(t^*) \in U[z^1(t^*)] \cup \dots \cup U[z^x(t^*)]$. Этим самым доказано, что существует гладкая функция Ψ , которая каждому $z(t^*) \in L^n(\bar{u}_+)$ ставит в соответствие единственное значение $x(t^*)$. В силу единственности решений уравнения (1.1) существует функция χ , такая, что $x_0 = \chi(x(t^*), t^*)$ для всевозможных значений $x(t^*) = x(t^*, x_0, t_0), x_0 \in K$. Следовательно, существует однозначное соответствие между множествами $L^n(\bar{u}_+) = \{z(t^*)\}$ и $K = \{x_0\}$, что и требовалось доказать.

3. О СТЕПЕНИ ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим систему (1.1) со скалярной величиной наблюдаемого выхода (1.2) ($m = 1$). Далее без дополнительных уговорок будем считать, что в этом случае наблюдатель представляет собой некий измеритель, преобразующий вектор $x(t)$ в скалярную величину $y(t)$.

Выберем некоторое управляющее воздействие $u = u_0(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$). Тогда в уравнении (1.1) $f(t, x, u_0(t)) \equiv f_0(t, x)$. Обозначим через

$$y^{(i)} = F_{1,i}(t, x, u_0, u_0^{(1)}, \dots) \equiv F_i(t, x); \quad (3.1)$$

$$I_1 \equiv I \equiv \frac{\partial(F_0, F_1, \dots, F_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad (3.2)$$

$$J \equiv \det I_1 \equiv \left| \frac{\partial(F_0, F_1, \dots, F_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|.$$

Определение. Назовем степенью представительности пары $[f, \varphi]$ квадрат от величины J . Таким образом, степень представительности Δ пары $[f, \varphi]$ равна

$$\Delta \equiv J^2 \equiv \left| \frac{\partial(F_0, F_1, \dots, F_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|^2. \quad (3.3)$$

Очевидно, что если в рассматриваемом случае ($m = 1$) степень представительности $\Delta \equiv 0$ для любых $x_0 \in K$, то, согласно доказанной теореме 1, пара $[f, \varphi]$ не будет представительной для управляющего воздействия $u_0(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) в области K на рассматриваемом отрезке времени $[t_0, t_1]$. Введем еще одно ограничение. Пусть выполняется следующее условие.

Условие 4. а) $J \neq 0$ и, следовательно, степень представительности $\Delta > 0$ в любой момент времени $t \in [t_0, t_1]$ для любой траектории $x = x(t, x_0, t_0)$ ($x \in K$), соответствующей выбранному воздействию

$u = u_0(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$); б) $\frac{\partial F_i}{\partial x_j \partial x_s} \neq 0$, по крайней мере, для одного из $i = 0, 1, \dots, n-1; j, s = 1, \dots, n$.

Производная от определителя J равна сумме n определителей, которые получаются из J заменой, поочередно, его 1-й, 2-й, ..., n -й строки их производными. Вычислим производную от (3.3), в силу уравнения (1.1),

$$\Delta^{(1)} = 2JJ^{(1)} = 2J \sum_{s=1}^n E_s. \quad (3.4)$$

Здесь E_s — определитель, который получается дифференцированием строки $\frac{\partial F_{s-1}}{\partial x_1}, \frac{\partial F_{s-1}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F_{s-1}}{\partial x_n}$ определителя J , в силу уравнения (1.1). Так как

$$\left(\frac{d}{dt} \right) \left(\frac{\partial F_{s-1}}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(\frac{d}{dt} F_{s-1} \right)$$

и на основании (1.4) выполняется соотношение

$$\frac{d}{dt} F_{s-1} = F_{s-1}^{(1)} \underset{(1.1)}{=} F_s,$$

то среди определителей E_1, \dots, E_n , отличным от нуля, может быть только определитель

$$E_n = \left| \frac{\partial (F_0, F_1, \dots, F_{n-2}, F_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)} \right|. \quad (3.5)$$

Поэтому из (3.4) получим

$$\Delta^{(1)} \underset{(1.1)}{=} 2JE_n. \quad (3.6)$$

Согласно условию 4, $J \neq 0$. Поэтому F_n функционально зависит от F_0, F_1, \dots, F_{n-1} [2]

$$F_n = \Phi(F_0, F_1, \dots, F_{n-1}, t), \quad (3.7)$$

где Φ — дифференцируемая функция. Используя (3.7), представим каждый член $\frac{\partial F_n}{\partial x_j}$ ($j = 1, \dots, n$) последней строки определителя (3.5) в виде суммы

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_j} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial F_i} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}. \quad (3.8)$$

Тогда с учетом (3.2) найдем величину определителя (3.5)

$$E_n = \frac{\partial \Phi}{\partial F_{n-1}} \left| \frac{\partial (F_0, F_1, \dots, F_{n-1})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| = \frac{\partial \Phi}{\partial F_{n-1}} J. \quad (3.9)$$

Принимая во внимание (3.9), перепишем (3.6), причем уравнение (3.6) будем рассматривать совместно с уравнением (1.1),

$$\Delta^{(1)} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial F_{n-1}} \Delta \quad (\Delta > 0), \quad (3.10)$$

где

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_{n-1}} = \frac{\partial}{\partial F_{n-1}} \Phi(F_0(t, x), \dots, F_{n-1}(t, x), t);$$

$$\Delta(t_0) = \Delta_0 = J^2 \Big|_{\substack{t=t_0 \\ x=x_0}} > 0.$$

Правая часть уравнения (3.10), если рассматривать его изолированно от (1.1), в общем случае не является тождеством по t , благодаря предположению б) в условии 4.

Если $\frac{\partial \Phi}{\partial F_{n-1}} \geq 0$ (или ≤ 0), то из (3.10) следует, что степень представительности $\Delta = \Delta(t)$ — монотонно растущая (или убывающая) функция времени t .

Можно считать, что $x = x(t, x_0, t_0)$ (при управляемом воздействии $u = u_0(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$)) — фиксированная функция времени t . Тогда из (3.10) получим

$$\Delta = \Delta_0 \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\partial \Phi}{\partial F_{n-1}} \right) d\tau.$$

4. ЭНТРОПИЙНАЯ ОЦЕНКА ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОСТИ ИНФОРМАЦИИ

Рассмотрим систему (1.1), выбрав некоторое управляемое воздействие $u = u_0(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$). Тогда, обозначая $f(t, x, u_0(t)) \equiv f_0(t, x)$, перепишем (1.1) в виде

$$x^{(1)} = f_0(t, x), \quad (4.1)$$

где

$$x(t_0) = x_0(e) = (x_{01}(e), \dots, x_{0n}(e)), \quad (4.2)$$

$x_{0i}(e)$ ($i = 1, \dots, n$) — случайные величины известной совместной плотности вероятностей $p_0(\lambda)$; ($\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — реализация случайного вектора $x_0(e)$); e — элемент множества случайных событий; $p_0(\lambda)$ — гладкая функция λ .

Если условия существования, единственности и продолжаемости решений уравнения (4.1) удовлетворяются на отрезке $[t_0, t_1]$ для всевозможных начальных векторов (4.2), то решение начальной задачи (4.1) (4.2) может быть записано в виде

$$x(t, e) = \Psi(t, x_0(e), t_0) \quad (t_0 \leq t \leq t_1), \quad (4.3)$$

где $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)$. Функция Ψ в (4.3) в любой момент $t \in [t_0, t_1]$ преобразует случайный вектор $x_0(e)$ в случайный вектор $x(t, e)$. Статистическое распределение вектора $x(t, e)$ является единственным в любой момент $t \in (t_0, t_1)$ и характеризуется распределением вектора $x_0(e)$.

Обозначим через $p(t, \mu)$ совместную плотность вероятностей случайного вектора $x(t, e)$ в момент $t \in [t_0, t_1]$, где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — реализация вектора $x(t, e)$.

Пусть Ψ_i — непрерывные функции, имеющие непрерывные частотные производные $\frac{\partial \Psi_i}{\partial \lambda_j}$. Тогда совместные плотности вероятностей $p(t, \mu)$ и $p_0(\lambda)$ связаны известным соотношением [3]

$$p_0(\lambda) = |\dot{I}(t, \lambda, \mu)| p(t, \mu), \quad (4.4)$$

где $|\hat{I}(t, \lambda, \mu)|$ — модуль якобиана $\left| \frac{\partial (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)}{\partial (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})} \right| = \frac{\partial (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)}{\partial (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)}$.

Состояние наблюдателя (1.2) характеризуется величиной $y(t)$ и ее производными по t , в силу системы (1.1), заданными системой уравнений (1.4).

Для левых и правых частей уравнений (1.4) введем обозначения

$$z_1 = y, z_2 = y^{(1)}, \dots, z_n = y^{(n-1)}, z = (z_1, z_2, \dots, z_n); \quad (4.5)$$

$$\Omega_l(t, x) = F_l(t, x, u_0, u_0^{(1)}, \dots) + \eta^{(l)}(t) \quad (l = 0, 1, \dots, n-1), \quad (4.6)$$

$$\Omega = (\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{n-1}).$$

Тогда уравнения (1.4) можно записать в виде

$$z(t) = \Omega(t, x), \quad (4.7)$$

где z — вектор в пространстве R_z^n , $\Omega = \Omega(t, x)$ — функция t и x .

Обозначим через $p(t, v)$ плотность распределения случайного вектора $z(t, e)$, где $v = (v_1, \dots, v_n)$ — реализация вектора $z(t, e) = \Omega(t, x(t, e))$, а через $p(t, \mu, v)$ — совместную плотность вероятностей $x(t, e)$ и $z(t, e)$.

Следуя [4] (стр. 299), обозначим энтропии непрерывно распределенных случайных величин x , z , x_0 и средние условные энтропии величин x и z через

$$H[x] = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mu) \ln p(t, \mu) d\mu,$$

$$H[z] = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, v) \ln p(t, v) dv, \quad H[x_0] = - \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\lambda) \times$$

$$\times \ln p_0(\lambda) d\lambda, \quad H_x[z] = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mu, v) \ln \frac{p(t, \mu, v)}{p(t, \mu)} dv, \quad (4.8)$$

$$H_z[x] = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mu, v) \ln \frac{p(t, \mu, v)}{p(t, v)} d\mu,$$

где $\int_{-\infty}^{+\infty}$ — мерный интеграл, распространенный на все пространство R_x^n .

Теорема 2. Пусть в (4.1), (4.7) функции f_0 и Ω — такие, что для любого $t_* \in [t_0, t_1]$ и любых реализаций μ_* и v_* векторов $x = x(t_*, e)$ и $\Omega = \Omega(t_*, x(t_*, e))$ существует гладкая функция h , обратная к функции Ω ,

$$h[\Omega(t_*, x(t_*, e))] = x(t_*, e), \quad (4.9)$$

причем

$$a) \quad 0 < H_z[x] \leq H[x_0] = - \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\lambda) \ln p_0(\lambda) d\lambda \leq Q;$$

$$-S \leq H_x[z] \leq S, \quad (4.10)$$

где Q и S — заданные положительные числа;

б) для всякого $t \in [t_0, t_1]$ и любых μ и ν выполняется соотношение

$$|J(t, x(t, e), z(t, e))| < 1, \quad (4.11)$$

где $|J(\dots)|$ — модуль якобиана $J = \left| \frac{\partial (\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{n-1})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|$.

Тогда в пространстве $R_x^n (x \in R_x^n)$ не существует открытого ограниченного связного множества $K^* = K^*(t)$, таково, что

в) $K_0 \subseteq K^*(t) \subseteq K_1$ для любого $t \in [t_0, t_1]$, (4.12)

где K_0 и K_1 — фиксированные непустые ограниченные открытые связные множества в R_x^n ;

г) $|J(t, \mu, \nu)| \leq \delta(t)$ вдоль траекторий системы (4.1), (4.13)

где $\delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_* \in [t_0, t_1]$ для всех $\mu \in K^*(t)$;

д) $0 < \epsilon \leq p(t, \mu) < 1$ для всех $t < t_*$, достаточно близких к t_* , и всех $\mu \in K^*(t)$, где ϵ — положительное число. (4.14)

Смысл сформулированного утверждения состоит в том, что если между множеством состояний наблюдателя (4.7) $z(t_*, e)$ и множеством состояний системы (4.1) $x(t_*, e)$ существует однозначное соответствие для любого $t_* \in [t_0, t_1]$, согласно условию (4.9) теоремы, а вероятность пребывания динамической системы (4.1) в области $K^*(t)$ в соответствии с (4.14) достаточно велика, то модуль якобиана $|J(t, \mu, \nu)|$ не может стремиться к нулю с ростом $t \rightarrow t_*$ равномерно по $\mu \in K^*(t)$.

Величина t_* — это любое число на отрезке $[t_0, t_1]$. Поэтому существование функции h обеспечивает представительность пары $[f_0, \varphi]$ при управляющем воздействии $u_0 = u_0(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) в пространстве R_x^n на любом промежутке, принадлежащем отрезку $[t_0, t_1]$, тогда как теорема 2 дает необходимое условие существования этой функции h .

Замечание 1. Из (4.6) видно, что

$$J = \left| \frac{\partial (\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{n-1})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| = \left| \frac{\partial (F_0, F_1, \dots, F_{n-1})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|.$$

Чтобы доказать теорему 2, сначала докажем лемму.

Лемма. Даны наборы различных символов, составляющих алфавиты:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_{\omega_1}], B = [b_1, b_2, \dots, b_{\omega_2}], C = [c_1, c_2, \dots, c_{\omega_3}].$$

Алфавитам A, B, C приписаны распределения вероятностей

$$p(a) = [p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_{\omega_1})],$$

$$p(b) = [p(b_1), p(b_2), \dots, p(b_{\omega_2})],$$

$$p(c) = [p(c_1), p(c_2), \dots, p(c_{\omega_3})],$$

где

$$\sum_i p(a_i) = \sum_j p(b_j) = \sum_k p(c_k) = 1.$$

Пусть выполняются условия:

а) $H[C] \geq H_A[B] + L; \quad -S \leq H_B[A] \leq S,$

где $H_A[C]$, $H_A[B]$, $H_B[A]$ — средние условные энтропии; L и S — положительные числа*.

б) $0 < H[C] < Q,$

* Неравенство $-S \leq H_B[A] \leq S$ в условии а) леммы соблюдается автоматически, так как для дискретных случайных величин $H_B[A] \geq 0$.

где $H[C]$ — энтропия алфавита C ; Q — положительное число.

Тогда

$$H[B] - H[A] \leq Q - L + S. \quad (4.15)$$

Доказательство леммы. Известно ([4], стр. 263), что

$$H[B] + H_B[A] = H[B, A] = H[A, B] = H[A] + H_A[B].$$

Отсюда, принимая во внимание условие а) леммы, получим

$$H[B] + H_B[A] \leq H[A] + H[C] - L.$$

Поэтому в соответствии с условием б) леммы

$$H[B] + H_B[A] \leq H[A] + H[C] - L \leq H[A] + Q - L.$$

Иначе говоря,

$$H[B] \leq H[A] + Q - L - H_B[A].$$

Отсюда на основании условия а) леммы

$$H[B] \leq H[A] + Q - L + S,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2. Используя свойства энтропии непрерывно распределенных случайных величин ([4], стр. 296), можно сформулировать предложение, дословно такое же, как в лемме. В этом случае в формулировке леммы вместо слова «энтропия» следует мысленно читать «дифференциальная энтропия».

Теперь, основываясь на доказанной лемме, дадим

Доказательство теоремы 2. Пусть множество начальных состояний $x_0(e)$, которые заполняют все пространство R_x^n — это алфавит C , множество состояний динамической системы (4.1) $x(t, e) \in R_x^n$ образует алфавит B , а множество возможных состояний наблюдателя (4.7) $z(t, e) \in R_z^n$ составляет алфавит A .

Принимая во внимание условие (4.9) теоремы 2, согласно правилу преобразования энтропии непрерывно распределенной случайной величины при переходе от одной системы координат к другой ([4], стр. 299), получим

$$\begin{aligned} \delta H(t) &= H[B] - H[A] = \\ &= H[z(t)] - H[x(t)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mu) \ln |J| d\mu. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Воспользуемся доказанной леммой. Сравнивая условие а) теоремы 2 с условием а) леммы, нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае можно принять $L = 0$. Тогда, применяя неравенство (4.15) к (4.16) в момент $t = t_*$, получим

$$\delta H(t_*) = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(t_*, \mu_*) \ln |J(t_*, \mu_*, v_*)| d\mu_* \leq Q + S \quad (4.17)$$

или

$$\delta H(t_*) \leq Q + S. \quad (4.18)$$

Рассуждая от противного, предположим, вопреки утверждению теоремы 2, что множество $K^* = K^*(t)$ (со свойствами в), г) и д), о которых идет речь в формулировке теоремы 2) существует. Напишем очевидные неравенства

$$\begin{aligned}
 - \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mu) \ln |J| d\mu &= - \left(\int_K + \int_{R_x^n \setminus K} \right) \stackrel{(4.11)}{\geq} \\
 &\stackrel{(4.12)}{\geq} - \left(\int_{K_0} + \int_{R_x^n \setminus K_0} \right) \stackrel{(4.13)}{\geq} - \int_{K_0} \stackrel{(4.14)}{\geq} - \varepsilon (\text{mes } K_0) \ln \delta(t),
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

где $\text{mes } K_0$ — мера Лебега множества $K_0 \subset R_x^n$. По условию г) теоремы 2 $\delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_*$. Поэтому

$$-\varepsilon (\text{mes } K_0) \ln \delta(t) \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow t_*). \tag{4.20}$$

Однако (4.20) невыполнимо из-за (4.19) и (4.18). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание 3. Теорема 2 формулирует условия, при наличии которых приращение энтропии $\delta H(t)$ может служить признаком отсутствия представительности информации. Для установления представительности пары $[f_0, \varphi]$ в пространстве R_x^n на отрезке времени $[t_0, t_1]$ можно воспользоваться неравенствами (4.17) (или (4.18)) непосредственно. Как следует из доказательства теоремы 2, если выполняется условие (4.9) теоремы 2 при наличии условий а) и б) этой теоремы, и, следовательно, пара $[f_0, \varphi]$ является представительной в R_x^n на любом промежутке, принадлежащем отрезку $[t_0, t_1]$, то неравенство (4.17) (или, что то же самое, (4.18)), при этом обязательно выполняется.

5. ОЦЕНКА ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОСТИ ИНФОРМАЦИИ ПО СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ РАЗНОСТИ ЭНТРОПИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И НАБЛЮДАТЕЛЯ

Согласно очевидному равенству

$$\delta H(t) = \delta H(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} \delta H(\tau) d\tau,$$

величина δH функционально зависит от $\frac{d}{dt} \delta H \equiv \delta H^{(1)}$. Чтобы вычислить $\delta H^{(1)}$, сначала с учетом (3.3) перепишем (4.16) в виде

$$\delta H = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mu) \ln |J| d\mu = - 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mu) \ln \Delta d\mu, \tag{5.1}$$

считая, что условие 4 а) выполняется ($\Delta > 0$).

Возьмем точку $x_0 \in R_x^n$ и решение $x(t) = x(t, x_0, t_0)$, выходящее из x_0 при $u_0 = u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$). Функция $x(t, x_0, t_0)$ определяет отображение T_t пространства начальных состояний x_0 в пространство состояний $x(t)$. Благодаря принятым предположениям относительно существования, единственности и продолжаемости решений уравнения (4.1) на весь отрезок $[t_0, t_1]$ для любых $x_0 \in R_x^n$,

$$T_t(R_x^n) = R_x^n, \quad R_x^n = T_t^{-1}(R_x^n), \tag{5.2}$$

где $T_t(T_t^{-1}) = T_t^{-1}(T_t) = E_n$, E_n — единичная $n \times n$ -матрица.

Используя (4.4) и (5.2), запишем (5.1) в виде

$$\begin{aligned}\delta H &= -1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mu) \ln \Delta d\mu = \\ &= -1/2 \int_{\tau_t^{-1}(R_x^n)} p(t, \mu) (\ln \Delta) \left\| \frac{\partial(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)} \right\| d\lambda = \\ &= -1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\lambda) (\ln \Delta) d\lambda.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\delta H = -1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\lambda) \ln \Delta d\lambda. \quad (5.3)$$

Дифференцируем (5.3) по t под знаком интеграла с учетом (3.10):

$$\delta H^{(1)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\lambda) \frac{\partial \Phi}{\partial F_{n-1}} d\lambda. \quad (5.4)$$

Отсюда, принимая во внимание (4.4), получим

$$\delta H^{(1)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, \mu) \frac{\partial \Phi}{\partial F_{n-1}} d\mu, \quad (5.5)$$

где плотность распределения вероятностей $p(t, \mu)$ удовлетворяет уравнению типа Фоккера—Планка

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mu} (f_0 p) = 0. \quad (5.6)$$

Заметим, что для всевозможных гладких начальных распределений $p_0(\lambda)$ и соответствующих им распределений $p = p(t, \mu)$, удовлетворяющих уравнению (5.6), условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial F_{n-1}} \equiv 0 \quad (5.7)$$

является достаточным, чтобы

$$\delta H = \text{const.} \quad (5.8)$$

Очевидно, что если к (5.8) присоединить еще условие

$$\delta H(t_0) = -1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\lambda) \ln \Delta(t_0) d\lambda = 0, \quad (5.9)$$

то совместное выполнение условий (5.7), (5.9) является достаточным, чтобы

$$\delta H(t) \equiv 0. \quad (5.10)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Дьедонне, Основы современного анализа, изд. Мир, М., 1964.
2. Т. Sato, Proc. Japan. Acad., 41, № 9, 785 (1965).
3. Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948.
4. К. Шенон, Работы по теории информации и кибернетике, ИЛ, М., 1963.

Всесоюзный заочный институт текстильной
и легкой промышленности

Поступила в редакцию
8 октября 1970 г.

ON INFORMATIONAL ESTIMATE OF NECESSARY
MEASUREMENTS LIST

Yu. M.-L. Kostyukovskiy

Based on the introduced concept of representativity and representativity degree of information on trajectories of a nonlinear dynamic system an informational estimate is advanced with the aid of which the absence of one-to-one relation between the statistical ensembles of trajectories in phase space of dynamic system and the trajectories of observer states becomes determinable. The obtained results may be used for making the necessary measurements list.

УДК 62 — 50

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ШУМОВ НА ТОЧНОСТЬ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА СИСТЕМОЙ С ИНЕРЦИОННЫМ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМ УСТРОЙСТВОМ

В. П. Марков

Задача о точности функционирования рассматриваемой системы с аддитивным шумом на выходе объекта сводится к задаче о воздействии на линейную систему эквивалентного шума. Матрица спектральных плотностей эквивалентного шума находится через спектральную плотность искомого шума и коэффициенты разложения в ряд Фурье функций, определяющих конкретный вид алгоритма вычисления градиента. Рассмотрены конкретные примеры. Проведено сравнение аналитических результатов с результатами, полученными методом математического эксперимента.

1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА СИСТЕМЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование динамики экстремальных систем посвящено уже достаточно много работ [1—3]. В данной работе излагается динамика экстремальной системы для алгоритма определения градиента, представленного в общем виде, так что полученное решение, охватывая целый класс конкретных алгоритмов, позволяет проводить сравнение различных алгоритмов по эффективности их применения.

Рассматривается система, функциональная схема которой приведена на рис. 1. Система состоит из объекта О с параболической характеристикой, генератора пробных движений Г, измерителя отклонений ИО, инерционного исполнительного устройства ИУ.

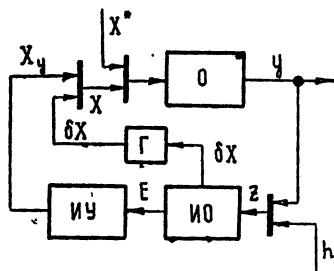


Рис. 1.

Назначением системы является слежение за изменяющимся по заданному закону $X^*(t)$ экстремумом характеристики объекта на основании измерений на выходе этого объекта. На точность слежения сильное влияние будет оказывать шум h , с которым замеряется выход объекта y . Исследованию его влияния на точность слежения при различных алгоритмах получения отклонения E посвящена настоящая работа. Рассматривается многомерная система, так что $X_y, X^*, \delta X, X, E$ есть n -мерные векторы, выход объекта $y = a((X^* - X)^T(X^* - X))^*$ измеряемая величина на выходе объекта $z = y + h$, h — шум с известной функцией корреляции $R_h(\tau)$ и нулевым средним.

2. ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАССМАТРИВАЕМОЙ СИСТЕМЫ

К ошибке определения отклонения $E - (X^* - X_y) = G(t)$ приводит шум на выходе объекта h и дрейф экстремума $X^*(t)$. Если рассматриваются алгоритмы, для которых при отсутствии шума h можно считать,

* Здесь и в дальнейшем знаком $(\dots)^T$ обозначаем операцию транспонирования.

что равенство $E = X^* - X_y$ выполняется точно при всех дрейфах экстремума $X^*(t)$, то ошибку $G(t)$ можно рассматривать как некоторый шум на входе системы, эквивалентный, в смысле влияния на процесс сопровождения, шуму h на выходе объекта. Таким образом, задача сводится к рассмотрению влияния входных воздействий $X^*(t)$ и $G(t)$ на линейную систему (рис. 2). Ошибка слежения $\Delta = X^* - X_y$ в такой системе

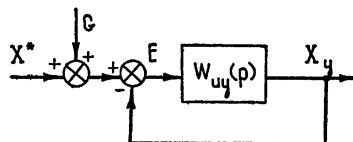


Рис. 2.

состоит из динамической ошибки Δ_d и шумовой Δ_w . При взаимно независимых дрейфе $X^*(t)$, шуме $h(t)$ и пробном движении $\delta X(t)$ средний выход объекта будет равен

$$\bar{y} = a \sum_{i=1}^n (\bar{\Delta}_{d,i}^2 + \bar{\Delta}_{w,i}^2 + \bar{(\delta x_i)}^2). \quad (2.1)$$

Поскольку известен алгоритм, нахождение среднеквадратических значений динамической и шумовой ошибок при заданных характеристиках дрейфа экстремума $X^*(t)$ и известной корреляционной матрице (или матрице спектральных плотностей) шума $G(t)$, то вся задача сводится к нахождению эквивалентного входного шума $G(t)$ и определению его матрицы спектральных плотностей для различных алгоритмов определения отклонения E .

3. ОБЩАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ОБЪЕКТА С ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Для определения отклонения выхода объекта X_y от значения X^* , соответствующего экстремуму, вводятся пробные изменения входа объекта $\delta X(t)$. При этом выход объекта равен

$$y(t) = a \{(X^* - X_y - \delta X(t))^T (X^* - X_y - \delta X(t))\}. \quad (3.1)$$

Для общности полагаем, что отклонение E в момент времени t вычисляется на основании значений выхода объекта $y(\tau)$ на интервале наблюдения $0 \leq \tau \leq t$, взятых с весом $\rho(t, \tau)$. Проведем следующие преобразования.

Введем вектор C с компонентами $c_i = \int_0^t \rho(t, \tau) \delta x_i(\tau) d\tau \left[\int_0^t \rho(t, \tau) d\tau \right]^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, который определим как

$$C = \int_0^t \rho(t, \tau) \delta X(\tau) d\tau \left[\int_0^t \rho(t, \tau) d\tau \right]^{-1}. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) запишем в виде

$$y(\tau) = a^T \{(\Delta_c - \delta X_c(\tau))^T (\Delta_c - \delta X_c(\tau))\}, \quad (3.3)$$

где

$$\Delta_c = \Delta - C, \quad \Delta = X^* - X_y, \quad \delta X_c(\tau) = \delta X(\tau) - C.$$

Далее перейдем к системе новых входных переменных объекта, образующих соответственно векторы $\delta X_0(\tau)$ и Δ_0 так, что

$$\begin{aligned}\delta X_0(\tau) &= A\delta X_c(\tau), \quad \Delta_0 = A\Delta_c, \quad \Delta_0 - \delta X_0(\tau) = \\ &= A(\Delta_c - \delta X_c(\tau)),\end{aligned}\tag{3.4}$$

где A — ортогональная матрица.

Выражение для выхода объекта в новых координатах записывается в той же форме [4]

$$y(\tau) = a \{ (\Delta_0 - \delta X_0(\tau))^T (\Delta_0 - \delta X_0(\tau)) \}.\tag{3.5}$$

Из всевозможных ортогональных преобразований, определяемых матрицей A , выберем такое, чтобы

$$\int_0^t \rho(t, \tau) \delta x_{0_i}(\tau) \delta x_{0_j}(\tau) d\tau = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n).\tag{3.6}$$

Тогда, после умножения обеих частей выражения для выхода объекта (3.5) на $\rho(t, \tau) \delta x_{0_k}(\tau)$, $k = 1, 2, \dots, n$, и интегрирования по τ в пределах от нуля до t , получим уравнения, из которых компоненты вектора Δ_0 находятся как

$$\Delta_{0_k} = \left[\beta_k - \int_0^t \rho(t, \tau) y(\tau) \delta x_{0_k}(\tau) d\tau \right] d_k^{-1},\tag{3.7}$$

где

$$\beta_k = a \int_0^t \rho(t, \tau) \delta x_{0_k}(\tau) \sum_{i=1}^n \delta x_{0_i}^2(\tau) d\tau,$$

$$d_k = 2a \int_0^t \rho(t, \tau) \delta x_{0_k}^2(\tau) d\tau.$$

Определить все компоненты вектора Δ_0 в форме (3.7) можно лишь при том условии, что ни один из d_k , $k = 1, 2, \dots, n$, не обращается в нуль. Но, как не трудно видеть, элементы d_k , $k = 1, 2, \dots, n$, лежат на главной диагонали диагональной матрицы

$$D = APA^T,\tag{3.8}$$

где P — матрица с элементами $p_{ij} = 2a \int_0^t \rho(t, \tau) \delta x_{c_i}(\tau) \delta x_{c_j}(\tau) d\tau$ и ни один

из d_k , $k = 1, 2, \dots, n$, не будет равен нулю, если матрица P неособая и, по крайней мере, один из элементов обращается в нуль, если матрица P особая. Можно показать, что при любой $\rho(t, \tau)$ матрица P оказывается особой, если компоненты вектора $\delta X_c(\tau)$ представляют собой систему функций, линейно зависимых на интервале наблюдения $(0, t)$.

Переход от вектора Δ_0 к отклонению в исходной системе входных переменных осуществляется по формуле

$$\Delta = A^T \Delta_0 + C.\tag{3.9}$$

Выделим класс алгоритмов, для которых $\delta X(t)$ есть периодическая функция с периодом T , а $\rho(t, \tau) = E(\tau - t + T) \varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau)$ есть также периодическая функция с периодом T , а

$$E(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}.$$

В этом случае, как легко видеть, компоненты вектора C , матрицы A и величины $\alpha_k, \beta_k, k = 1, 2, \dots, n$, не зависят от времени, что существенно упрощает реализацию таких алгоритмов. Кроме того, отклонение Δ в каждый момент времени вычисляется по предыстории значения выхода объекта, ограниченной по длительности величиной T . Поэтому равенства (3.7), (3.9) полученные для случая неизменных координат экстремума, можно считать справедливыми и для случая дрейфа экстремума при том лишь ограничении, что за время T изменением координат экстремума, можно пренебречь при ограничении тем менее жестким, чем меньшее величина T .

Во всем последующем изложении ограничиваемся рассмотрением данного класса алгоритмов.

4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ШУМ $G(t)$. МАТРИЦА СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ШУМА

В случае, когда выход объекта y измеряется с шумом h , вместо отклонения Δ_0 вычисляется его оценка E_0 с компонентами

$$e_{0k} = \left[\beta_k - \int_{t-T}^t \varphi(\tau) z(\tau) \delta x_{0k}(\tau) d\tau \right] d_k^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

и вместо отклонения Δ получается его оценка

$$E = A^T E_0 + C. \quad (4.2)$$

Тогда эквивалентный входной шум $G(t) = E - \Delta$ находится в виде

$$G(t) = A^T G_0(t), \quad (4.3)$$

где $G_0(t)$ — погрешность определения отклонения Δ_0 , равная $E_0 - \Delta_0$ с компонентами

$$g_{0k}(t) = -d_k^{-1} \int_{t-T}^t \varphi(\tau) h(\tau) \delta x_{0k}(\tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4.4)$$

Элементы корреляционной матрицы R_0 шума $G_0(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} R_{0ij}(\tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \int_0^{nT} g_{0i}(t) g_{0j}(t + \tau) dt = \\ &= \int_{-T}^0 \int_{-T}^0 R_h(\rho_1 - \rho_2 - \tau) R_{\psi_{ij}}(\rho_1 - \rho_2 - \tau) d\rho_1 d\rho_2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$. Здесь $R_h(x) = \overline{h(t) h(t+x)}$ есть функция корреляции шума $h(t)$, $R_{\psi_{ij}}(x) = (1/T) \int_0^T \psi_i(t) \psi_j(t+x) dt$, где $\psi_i(t) = d_i^{-1} \varphi(t) \times \delta x_{0i}(t)$.

Функции $\psi_i(t) = d_i^{-1} \varphi(t) \delta x_{0i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, являются функциями

периодическими с периодом T . Поэтому их можно разложить в ряд Фурье вида

$$\psi_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{ik} \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_{ik} \sin k \frac{2\pi}{T} t \right). \quad (4.6)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} R_{\psi_{ij}}(x) &= \frac{1}{T} \int_0^T \psi_i(t) \psi_j(t+x) dt = \\ &= (1/2) \sum_{k=1}^{\infty} \left[(a_{ik} a_{jk} + b_{ik} b_{jk}) \cos k \frac{2\pi}{T} x - \right. \\ &\quad \left. - (a_{ik} b_{jk} - a_{jk} b_{ik}) \sin k \frac{2\pi}{T} x \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Элементы матрицы спектральных плотностей шума $G_0(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} S_{0_{ij}}(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{0_{ij}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= 2 \int_{-T}^0 \int_{-T}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h(\rho_1 - \rho_2 - \tau) R_{\psi_{ij}}(\rho_1 - \rho_2 - \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau d\rho_1 d\rho_2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подставив в последний интеграл выражение для $R_{\psi_{ij}}(\rho_1 - \rho_2 - \tau)$ в форме (4.7) и используя формулу Эйлера $e^{-i\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau$, получим

$$\begin{aligned} S_{0_{ij}}(\omega) &= \sum_{k=1}^{\infty} [(a_{ik} a_{jk} + b_{ik} b_{jk}) \times \\ &\quad \times (J_{1k} - j J_{2k}) - (a_{ik} b_{jk} - a_{jk} b_{ik}) (J_{3k} - j J_{4k})], \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} J_{1k} &= \int_{-T}^0 \int_{-T}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h(\rho_1 - \rho_2 - \tau) \cos k \frac{2\pi}{T} (\rho_1 - \rho_2 - \tau) \times \\ &\quad \times \cos \omega\tau d\tau d\rho_1 d\rho_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{2k} &= \int_{-T}^0 \int_{-T}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h(\rho_1 - \rho_2 - \tau) \cos k \frac{2\pi}{T} (\rho_1 - \rho_2 - \tau) \times \\ &\quad \times \sin \omega\tau d\tau d\rho_1 d\rho_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{3k} &= \int_{-T}^0 \int_{-T}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h(\rho_1 - \rho_2 - \tau) \sin k \frac{2\pi}{T} (\rho_1 - \rho_2 - \tau) \times \\ &\quad \times \cos \omega\tau d\tau d\rho_1 d\rho_2, \end{aligned}$$

$$J_{4k} = \int_{-T}^0 \int_{-T}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} R_h(\rho_1 - \rho_2 - \tau) \sin k \frac{2\pi}{T} (\rho_1 - \rho_2 - \tau) \times \\ \times \sin \omega \tau d\tau d\rho_1 d\rho_2.$$

Произведя вычисления этих интегралов, получим

$$J_{1k}(\omega) = [(1 - \cos \omega T)/2\omega^2] \left[S_h \left(k \frac{2\pi}{T} - \omega \right) + \right. \\ \left. + S_h \left(k \frac{2\pi}{T} + \omega \right) \right], \quad (4.10)$$

$$J_{2k}(\omega) = 0,$$

$$J_{3k}(\omega) = 0,$$

$$J_{4k}(\omega) = [(1 - \cos \omega T)/2\omega^2] \left[S_h \left(k \frac{2\pi}{T} + \omega \right) - S_h \left(k \frac{2\pi}{T} - \omega \right) \right],$$

где $S_h(\omega)$ — спектральная плотность шума $h(t)$.

После подстановки (4.10) в (4.9) элементы матрицы спектральных плотностей шума $G_0(t)$ записываются в виде

$$S_{0ij}(\omega) = [(1 - \cos \omega T)/2\omega^2] \sum_{k=1}^{\infty} \left[(a_{ik} a_{jk} + b_{ik} b_{jk}) \times \right. \\ \times \left(S_h \left(k \frac{2\pi}{T} + \omega \right) + S_h \left(k \frac{2\pi}{T} - \omega \right) \right) - \\ - j(a_{ik} b_{jk} - a_{jk} b_{ik}) \left(S_h \left(k \frac{2\pi}{T} - \omega \right) - S_h \left(k \frac{2\pi}{T} + \omega \right) \right) \right], \quad (4.11)$$

Матрица спектральных плотностей $S(\omega)$ шума $G(t)$ (4.3) выражается через матрицу спектральных плотностей $S_0(\omega)$ шума $G_0(t)$ в виде

$$S(\omega) = A^T S_0(\omega) A. \quad (4.12)$$

Если $W(p)$ есть матрица, элементами которой $W_{ij}(p)$, $i, j = 1; 2, \dots, n$, являются передаточные функции между i -м входом и j -м выходом линейной системы, на вход которой поступает шум $G_0(t)$, то среднеквадратичное значение ошибки сопровождения по i -й координате

$$\overline{\Delta_{w_i}^2} = (1/2\pi) \int_0^\infty \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n W_{si}^*(j\omega) W_{ki}(j\omega) S_{sk}(\omega) d\omega. \quad (4.13)$$

Здесь * есть знак комплексного сопряжения.

5. НЕКОТОРЫЕ КОНКРЕТНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАЧИ

В дальнейшем рассмотрим систему без перекрестных связей и ограничимся рассмотрением алгоритмов, в которых траектория пробного движения уже надлежащим образом ориентирована, то есть матрица A является единичной и $\delta X_0 = \delta X$, $\Delta_0 = \Delta$.

Тогда, в силу соотношений (4.11), (4.12), (4.13):

$$\overline{\Delta_{\text{ш},v}^2} = (1/2\pi) \int_0^\infty \left\{ |W_v(j\omega)|^2 (1 - \cos \omega T)/2\omega^2 \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{\infty} A_{vk}^2 \left[S_h\left(k \frac{2\pi}{T} + \omega\right) + S_h\left(k \frac{2\pi}{T} - \omega\right) \right] \right\} d\omega, \quad (5.1)$$

здесь

$$W_v(j\omega) = \frac{W_{\text{иу},v}(j\omega)}{1 + W_{\text{иу}}(j\omega)}, \quad A_{vk}^2 = a_{vk}^2 + b_{vk}^2, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Если полосы пропускания каналов следящей системы достаточно малы, то выражение (5.1) можно записать как

$$\overline{\Delta_{\text{ш},v}^2} \approx F_{\text{ш},v}(T^2/2) \sum_{k=1}^{\infty} A_{vk}^2 S_h\left(k \frac{2\pi}{T}\right), \quad (5.2)$$

где $F_{\text{ш},v} = (1/2\pi) \int_0^\infty |W_v(j\omega)|^2 d\omega$ есть эффективная полоса пропускания следящей системы.

В случае белого шума со спектральной плотностью S_0 формула (5.1) с учетом вытекающего из разложения (4.6) равенства $\sum_{k=1}^{\infty} A_{vk}^2 = (2/T) \int_0^T \psi_v^2(\tau) d\tau$ преобразуется к виду

$$\overline{\Delta_{\text{ш},v}^2} = \frac{S_0}{2a^2\pi T} \frac{\int_0^T [\varphi(\tau) \delta x_{0,v}(\tau)]^2 d\tau}{\left[\int_0^T \varphi(\tau) \delta x_{0,v}^2(\tau) d\tau \right]^2} \int_0^\infty |W_v(j\omega)|^2 \times \\ \times [(1 - \cos \omega T)/2\omega^2] d\omega, \quad (5.3)$$

из которой вытекает, что для случая белого шума на выходе объекта справедливы следующие выводы.

1) Для дискретных алгоритмов, т. е. алгоритмов, в которых отключение от экстремума определяется по измерениям выхода объекта в дискретные моменты времени $t_i = kT$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; i = 1, 2, \dots, L$, L — число измерений за период, взятый с весами c_i , среднеквадратические значения ошибок и, следовательно, средний выход объекта, оказываются бесконечно большими. Этот вывод следует из того, что при $\varphi(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^L c_i \delta(\tau - t_i - kT)$ (здесь $\delta(x)$ — дельта-функция) $\overline{\Delta_{\text{ш}}^2}$ ($v = 1, 2, \dots, n$); определяемые по формулам (5.3), обращаются в бесконечность, что приводит также к бесконечно большому y , определяемому формулой (2.1).

2) Для непрерывных алгоритмов с $\varphi(\tau) \equiv 1$, как следует из формул (5.3) и (2.1), среднеквадратические значения ошибок и средний выход объекта при заданном периоде T определяются энергиями пробных движений за период T и не зависят от их конкретного вида. Средний выход

объекта, определяемый по формуле (2.1) с учетом (5.3), будет иметь минимальное значение при

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^T \delta x_{0v}^2(\tau) d\tau \right\}_{\text{опт}} = \\ & = \left\{ S_0 / 2a^2 \pi \int_0^\infty |W, (j\omega)|^2 [(1 - \cos \omega T) / 2\omega^2] d\omega \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Для узкополосных систем, для которых справедливо приближение (5.2), т. е. приближение вида $(1/2\pi) \int_0^\infty |W, (j\omega)|^2 [(1 - \cos \omega T) / 2\omega^2] d\omega \approx F_w, T^2/4$, зависимости среднеквадратических значений ошибок и среднего выхода объекта от периода пробных движений T и их энергий за период превращаются в зависимости от средних мощностей пробных движений, при этом конкретный вид пробных движений (в том числе и величина периода T) безразличен. Оптимальными значениями средних мощностей пробных движений, при которых среднее значение выхода объекта принимает минимальное значение, в этом случае будут

$$\left\{ (1/T) \int_0^T \delta x_{0v}^2(\tau) d\tau \right\}_{\text{опт}} = [S_0 F_w / 4a^2]^{1/2}. \quad (5.5)$$

Для случая произвольного шума $h(t)$ рассмотрим два конкретных алгоритма получения сигнала рассогласования в наиболее простой многомерной системе — двумерной. Полагаем, что система достаточно узкополосна, так что можно использовать формулу (5.2).

1) *Синхронное детектирование* (коническое сканирование) получается при

$$\delta x_1(t) = r_1 \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad \delta x_2(t) = r_2 \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad \varphi(t) \equiv 1. \quad (5.6)$$

В этом случае $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $d_1 = ar_1^2 T$, $d_2 = ar_2^2 T$. Функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{1}{aTr_1} \cos \frac{2\pi}{T} t = A_{11} \cos \frac{2\pi}{T} t, \\ \psi_2(t) &= \frac{1}{aTr_2} \sin \frac{2\pi}{T} t = A_{21} \sin \frac{2\pi}{T} t. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для среднеквадратических значений ошибок $\overline{\Delta_{wv}^2}$, $v = 1, 2$; из формулы (5.2) с учетом (5.7) непосредственно получаем

$$\overline{\Delta_{wv}^2} = \frac{F_w S_h \left(\frac{2\pi}{T} \right)}{2a^2 r_v^2}. \quad (5.8)$$

Средний выход объекта

$$\bar{y} = a \sum_{v=1}^2 \left(\overline{\Delta_{dv}^2} + (1/2) r_v^2 + (1/r_v^2) F_{wv} S_h \left(\frac{2\pi}{T} \right) \Big| 2a^2 \right) \quad (5.9)$$

будет иметь минимальное значение при

$$r_{\text{вопт}} = \left[F_{\text{ш},v} S_h \left(\frac{2\pi}{T} \right) / a^2 \right]^{1/4}. \quad (5.10)$$

2) *Дискретный градиентный метод* получается при

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= r_1 \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad dx_2(t) = r_2 \sin \frac{2\pi}{T} t, \\ \varphi(t) &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta \left(t - i \frac{T}{4} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

В этом случае $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $d_1 = 4ar_1^2$, $d_2 = 4ar_2^2$. Функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ принимают вид

$$\psi_1(t) = (1/4ar_1) \cos \frac{2\pi}{T} t \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta \left(t - i \frac{T}{4} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} \cos k \frac{2\pi}{T} t, \quad (5.12)$$

$$\psi_2(t) = (1/4ar_2) \sin \frac{2\pi}{T} t \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta \left(t - i \frac{T}{4} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \sin k \frac{2\pi}{T} t,$$

где

$$A_{1k} = \begin{cases} 1/ar_1 T & (k = 2n+1), \\ 0 & (k = 2n) \end{cases}, \quad A_{2k} = \begin{cases} 1/ar_2 T & (k = 2n+1), \\ 0 & (k = 2n) \end{cases}.$$

Для среднеквадратических значений ошибок получаем

$$\overline{A_{\text{ш},v}^2} = \frac{F_{\text{ш},v}}{2a^2 r_v^2} \sum_{n=0}^{\infty} S_h \left[(2n+1) \frac{2\pi}{T} \right] \quad (v = 1, 2). \quad (5.13)$$

Здесь также легко можем получить выражение для среднего выхода объекта и определить $r_{1\text{опт}}$ и $r_{2\text{опт}}$.

6. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Для проверки полученных результатов было проведено математическое моделирование на УЦВМ работы двумерной системы с характеристикой объекта $y = 0,2 [(x_1^* - x_1)^2 + (x_2^* - x_2)^2]$, шумом h на выходе объекта, имеющим спектральную плотность $S_h(\omega) = 4\sigma^2\omega_k/(\omega^2 + \omega_k^2)$, где $\omega_k = 2\pi f_k$, $f_k = 50$ Гц. Исполнительные устройства системы имеют передаточные функции

$$W_{uy_1}(p) = W_{uy_2} = \frac{450}{pA(p) + p(152 + 10p) \left(\frac{0,88p}{1 + 0,88p} \right)^2},$$

где $A(p) = (1 + 0,75p + 0,75 \cdot 0,2p^2)[1 + 2 \cdot 0,6 \cdot 0,006p + (0,006)^2p^2]$. Скорость дрейфа экстремума была взята постоянной и равной 0,33 по каждой координате, т. е. $x_v^*(t) = x_v^*(0) + 0,33t$, $v = 1, 2$. При этом установившиеся динамическими ошибками сопровождения $\Delta_d = \frac{0,33}{450} \approx 0,0007$

можно было пренебречь и считалось, что ошибки сопровождения вызваны одним шумом $h(t)$.

На рис. 3 приведены реализации процесса сопровождения (вместе с переходным процессом) экстремума (по одной координате), снятые на модели для метода синхронного детектирования (кривая 1) и дискретного градиентного (кривая 2) при $r = 1$, $\delta = 0,18$, $f = 1/T = 25$.

В качестве оценок для среднеквадратических значений ошибок сопровождения брались усредненные за время наблюдения квадраты наблюдавших на модели значений ошибок.

На рис. 4 для метода синхронного детектирования (кривая 1) и дискретного градиентного (кривая 2) нанесены полученные таким образом

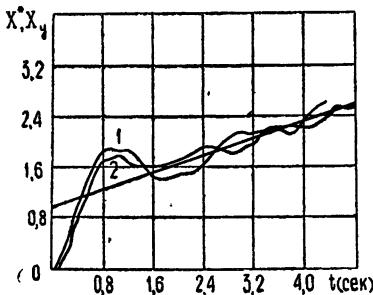


Рис. 3.

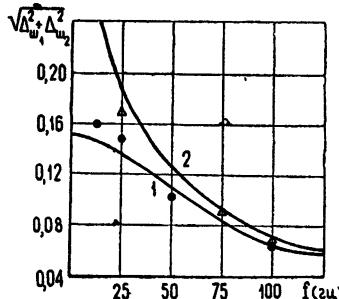


Рис. 4.

значения среднеквадратической ошибки $(\overline{\Delta_{w_1}^2} + \overline{\Delta_{w_2}^2})^{1/2}$ для ряда значений частот пробных движений $f = 1/T$, при $\sigma = 0,18$, $r = 1$ и приведены зависимости этих величин от частоты f , вычисленные для каждого случая с использованием соответственно формул (5.8) и (5.13), где $F_{w_1} = F_{w_2} = F_w \approx 2,25$.

Из сопоставления экспериментальных результатов с результатами, вычисленными по соответствующим формулам, можно сделать вывод о том, что аналитические результаты, полученные в работе, достаточно хорошо подтверждаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Красовский, Динамика непрерывных самонастраивающихся систем, Госэнергоиздат, М., 1963.
2. Г. А. Медведев, В. П. Тарасенко, Вероятностные методы исследования экспериментальных систем, изд. Наука, М., 1967.
3. А. А. Первозванский, Случайные процессы в нелинейных автоматических системах, Физматгиз, М., 1962.
4. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953.

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
10 апреля 1970 г.

ANALYSIS OF NOISE INFLUENCE UPON ACCURACY OF EXTREMUM FOLLOW — UP BY SYSTEM WITH INERTIAL EXECUTIVE COMPONENT

V. P. Markov

The problem of functioning accuracy for the considered system with a plant output additive noise is reduced to the problem of equivalent noise influence upon a linear system. The matrix of equivalent noise spectral densities is found through the spectral density of the sought noise and coefficients of expansion in the Fourier series for functions determining the particular form of gradient calculation algorithm. Specific examples are studied. The analytic results are compared with those obtained by the mathematic experiments method.

УДК 62 — 505

О ПРАКТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ СТАТИСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

А. Ф. Бочаров, А. В. Костров

Показано, что в большинстве реальных задач синтеза статистически оптимальных систем известный аналитический метод [6] непосредственно реализуемой системы не дает. Предлагается аналитический метод, позволяющий получить реализуемую квазиоптимальную систему, близкую к оптимальной.

1. Будем называть практической реализуемой систему, передаточная функция которой дробно-рациональна, имеет неотрицательный избыток (разность степеней знаменателя и числителя) и полюса в левой полуплоскости или в начале координат. При этом имеется в виду, что реализация осуществляется в классе следящих систем, т. е. систем с единичной отрицательной обратной связью. В составе следящей системы обычно бывает задана неизменяемая часть, избыток передаточной функции $W_{\text{нч}}(s)$ которой

$$\xi_{\text{нч}} \geqslant 1. \quad (1)$$

В этом случае требование практической реализуемости в смысле введенного определения предъявляется к корректирующему устройству, имеющему передаточную функцию

$$W_k(s) = \frac{K(s)}{1 - K(s)} \cdot \frac{1}{W_{\text{нч}}(s)}, \quad (2)$$

где $K(s)$ — передаточная функция замкнутой системы.

Предполагается, что следящая система воспроизводит сигнал

$$m(t) = \sum_{i=0}^r g_i t^i \quad (3)$$

в присутствии случайной стационарной помехи со спектральной плотностью

$$S_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \zeta \frac{\sum_{i=0}^m d_{2i} \omega^{2i}}{\sum_{j=0}^n h_{2j} \omega^{2j}}, \quad (4)$$

где d_{2i} , h_{2j} ($d_{2m} = h_{2n} = 1$), ζ — постоянные величины. Синтез системы, оптимальной в этих условиях по квадратичному статистическому критерию, можно осуществить методом аналитического конструирования регуляторов [1] на классе систем с бесконечной памятью и с использованием методов, основанных на задаче Заде—Рагаззини [2, 3], т. е. в классе систем с конечной памятью.

Метод аналитического конструирования регуляторов дает здесь дробно-рациональную передаточную функцию $K(s)$ оптимальной системы с избытком $\xi_0 = 0$. На основании (2) можно заключить, что $W_k(s)$ будет реализуемой, т. е. будет $\xi_k \geq 0$, только при $\xi_0 \geq \xi_{nn}$, что с учетом (1) в данном случае невыполнимо. Кроме того, параметры оптимальной системы определяются абсолютными значениями коэффициентов g_i в (2), а также должно удовлетворяться условие несмешенности, т. е. система должна иметь $(r+1)$ -й порядок астатизма. Метод допускает обобщение, если желаемое преобразование ввести весовой функцией

$$l(t) = l_0(t) - \sum_{i=0}^r \frac{c_i^*}{i!} \delta^{(i)}(t), \quad (5)$$

где $l_0(t)$ — весовая функция желаемого преобразования для случая, когда выполняется условие несмешенности; c_i^* — коэффициенты ошибок; $\delta^{(i)}(t)$ есть i -я производная юльта-функции. При этом оптимальная система может иметь порядок астатизма, меньший $r+1$, однако зависимость от абсолютных значений параметров сигнала не устраняется.

Получаемая методами оптимальной фильтрации система имеет весовую и передаточную функции, систематическую ошибку и дисперсию случайной погрешности соответственно в виде [4]:

$$k(t) = \sum_{i=0}^r A_i t^i + \sum_{i=1}^{2m} B_i \exp(\alpha_i t) + \sum_{j=1}^{n-m} [C_j \delta^{(j-1)}(t) + D_j \delta^{(j-1)}(t-T)] \\ (0 \leq t \leq T); \quad k(t) = 0, \quad (t < 0 \quad t > T), \quad (6)$$

$$K(s) = \sum_{i=0}^r A_i \int_0^T t^i \exp(-st) dt + \sum_{i=1}^{2m} B_i \int_0^T \exp[(\alpha_i - s)t] dt + \\ + \sum_{j=1}^{n-m} s^{j-1} (C_j + D_j \exp(-sT)), \quad (7)$$

$$\varepsilon^* = \sum_{i=0}^r \frac{c_i^*}{i!} m^{(i)}(t), \quad (8)$$

$$D_0 = \sum_{i=0}^r \mu_i \varphi_i, \quad (9)$$

где α_i — корни уравнения, полученного из числителя (4) заменой $j\omega$ на s ; A_i , B_i , C_j , D_j — постоянные коэффициенты; T — время памяти; $m^{(i)}(t)$ есть i -я производная полезного сигнала (3); μ_i — моменты весовой функции $l(t)$ желаемого преобразования; φ_i — множители Лагранжа.

Не затрагивая процедуры определения параметров оптимальной системы, рассмотрим метод практической реализации, основанный на аналитической аппроксимации передаточной функции оптимальной системы с конечной памятью.

2. Системы с конечной памятью удовлетворяют разнообразным требованиям: имеют заданное время переходного процесса, требуемый порядок астатизма, допустимую систематическую погрешность, минимальную дисперсию случайной погрешности в установленном режиме. В то

же время при практической реализации непрерывных систем с конечной памятью возникают затруднения, столь значительные, что имеются многочисленные указания на нереализуемость таких систем, хотя проблема детально не исследована. Реализация в смысле принятого определения вызывает следующие трудности:

1) благодаря конечности памяти $K(s)$ содержит оператор чистого сдвига $\exp(-sT)$;

2) трансцендентный характер $K(s)$ при дробно-рациональной $W_{\text{нч}}(s)$ исключает получение по (2) реализуемой $W_k(s)$:

3) характер сигнала (3) обусловливает в $K(s)$ нулевой полюс $(r+1)$ -й кратности;

4) при $m > 0$ в составе весовой функции будут отрезки экспоненциальных функций $\exp(\alpha_l t)$ ($\operatorname{Re} \alpha_l \geq 0$);

5) при $m \neq n$ в составе $k(t)$ будут дельта-функции и производные дельта-функции до порядка $n - m - 1$ включительно, тогда в $K(s)$ существует оператор идеального дифференцирования в соответствующей степени.

Первый из указанных факторов в литературе обсуждался [2, 4–9], в [6] предложен метод аналитической аппроксимации трансцендентного выражения $K(s)$ путем замены $\exp(-sT)$ дробно-рациональной функцией Паде вида [10–13]

$$\exp(-sT) \approx \frac{F(-sT, v)}{G(-sT, v)}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} G(-sT, v) &= \sum_{i=0}^v a_i s^i = \\ &= 1 + \frac{T}{2} + \dots + \frac{(v-\eta)(v-\eta-1)\dots 1}{(2v-1)(2v-3)\dots(v+1)v! 2^n}, \end{aligned} \quad (11)$$

$F(-sT, v)$ — знакопеременный ряд вида $G(-sT, v)$; v — количество нечетных чисел до v включительно; v — порядок аппроксимации. Получаемая подстановкой (10) в (7) передаточная функция $K_a(s)$ будет дробно-рациональной. Для того, чтобы исключить в $K(s)$ нулевой полюс $(r+1)$ -й кратности (третий фактор) необходимо в (10) принимать

$$v \geq r + 1, \quad (12)$$

тогда нулевой полюс компенсируется нулем соответствующей кратности. Однако условия (12) недостаточно для получения реализуемой системы, поскольку проблема дельта-функций и отрезков экспоненциальных функций при этом не разрешается. Покажем это.

3. Пусть $m = 0$, при $n \neq 0$ в $K(s)$ будут дельта-функции и производные дельта-функции. При выполнении (12) при аппроксимации будет получена в знаменателе $K_a(s)$ функция $G(s)$, т. е. знаменатель функции Паде, избыток

$$\xi_a = 1 - n. \quad (13)$$

На основании (2) условием физической реализуемости здесь будет $\xi_a \geq \xi_{\text{нч}}$, что с учетом (1) в общем случае невыполнимо. Более того, при $\xi_a < 0$ корректирующее устройство должно быть структурно неустойчивым, поэтому рассмотренный в литературе [4–7, 14–18] случай $n = 0$ («белый» шум) и $\xi_{\text{нч}} = 1$ является единственным, когда метод [6] непосредственно дает реализуемую систему.

Для получения реализуемой в общем случае системы нужно умножить знаменатель $K_a(s)$ на полином

$$\Gamma(s) = \sum_{p=0}^l \gamma_p s^p \quad (l \geq \xi_{\text{нч}} + n - 1), \quad (14)$$

при этом можно получить только первый порядок астатизма, для чего необходимо принять $\gamma_0 = 1$. Тогда

$$K_n(s) = \frac{K_a(s)}{\Gamma(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{v+n-1} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{v+l} \sum_{q=0}^{i+1} a_q \gamma_{i-q+1} s^i} \quad (15)$$

дает по (2) реализуемую $W_k(s)$. Нижняя граница для коэффициентов γ_p дается необходимым условием устойчивости корректирующего звена.

$$b_i - \sum_{q=0}^{i+1} a_q \gamma_{i-q+1} < 0 \quad (i = v + 1, v + 2, \dots, v + n - 1), \quad (16)$$

верхняя — условием устойчивости $K_n(s)$. Можно $\Gamma(s)$ принимать также в виде бинома Ньютона степени l .

Система $K_n(s)$ имеет коэффициент позиционной ошибки $c_{n0} = c_0^*$; при $c_0^* = 0$ (первый порядок астатизма) остальные коэффициенты ошибок c_{nj} системы $K_n(s)$ по сравнению с коэффициентами c_{aj} системы $K_a(s)$ получат приращения

$$\begin{aligned} \Delta c_j = c_{nj} - c_{aj} &= a_j (1 - \gamma_1) \sum_{q=0}^{j+1} a_q \gamma_{j-q+1} - \\ &- \sum_{k=1}^{j-1} \left(c_{ak} a_{j-k} - c_{nk} \sum_{q=0}^{j-k+1} a_q \gamma_{j-k-q+1} \right) \\ (j &= 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (17)$$

При $\xi_a = 0$ ($n = 1$ есть широкополосная шумовая помеха) или при получении $\xi_n = 0$, для чего в (14) следует принимать $l = n - 1$ (при $n > 1$), и при минимально-фазовой неизменяемой части корректирующее устройство будет устойчивым, но избыток его передаточной функции на основании (1) и (2) будет $\xi_k = -\xi_{\text{нч}} < 0$. В этом случае можно получить реализуемую функцию $W_{kn}(s)$, умножая ее знаменатель на полином

$$\Gamma_k(s) = \sum_{p=0}^{\xi_{\text{нч}}} \gamma_{kp} s^p \quad (18)$$

или на бином Ньютона степени $\xi_{\text{нч}}$. Верхняя граница для коэффициентов γ_{kp} дается границей устойчивости замкнутой системы. При этом не изменяются коэффициенты ошибок до номера, равного числу нулевых полюсов разомкнутой системы, т. е. в квазиоптимальной системе можно сохранить порядок астатизма.

Пример 1. При $n = 2$, $\zeta = 4 \mu (\mu^2 + \lambda^2)^{1/2}$, $h_2 = 2(\mu^2 - \lambda^2)$, $h_0 = (\mu^2 + \lambda^2)^2$, где σ , μ и λ — параметры помехи [19], и $r = 1$ будет $\xi_a = -1$. Тогда при $\xi_{\text{нч}} = 1$ и $v = 2$ на основании (14) выражение (16) принимает вид одногого условия $\gamma_1 > b_{v+1}/a_v$ ($\gamma_0 = 1$). В этом случае при $c_0^* = c_{n0} = 0$ будет

$c_{n1} = c_{a1} + \gamma_1$. Для $\lambda = 6 \text{ сек}^{-1}$, $\mu = 0,6 \text{ сек}^{-1}$, $T = 30 \text{ сек}$, $c_{a1} = 0,3 \text{ сек}$ после определения оптимальной системы (см. [19]) можно получить $\gamma_1 = 0,00554 \text{ сек}$.

Пример 2. При $n = 1$, $\zeta = 2\sigma^2\beta$, $h_0 = \beta^2$, где σ и β — параметры шума, $r = 1$, $c_0^* = 0$ и $W_{\text{нч}}(s) = 1/Hs$ будет с учетом результатов [4]

$$W_k(s) = \frac{H}{c_1^*} W_{\text{кл}}(s), \text{ где } \xi_k = -1. \text{ Для } \nu = 2, \beta = 0,5 \text{ сек}^{-1}, c_1^* = 0,3 \text{ сек},$$

$T = 30 \text{ сек}$ характеристика $|W_{\text{кл}}(j\omega)|$ дана на рис. 1, здесь же показан спектр помехи. Видно, что включение звена с постоянной времени $T_k \approx 0,025 \text{ сек}$ существенно показателей системы не изменит.

Примеры показывают, что в условиях, близких к реальным, введение дополнительного запаздывания вызывает лишь деформацию высокочастотной области характеристики системы, т. е. $1/\gamma_1 \gg 1$ и $1/T_k \gg \beta$. Блок-схема операций получения реализуемой системы дана на рис. 2.

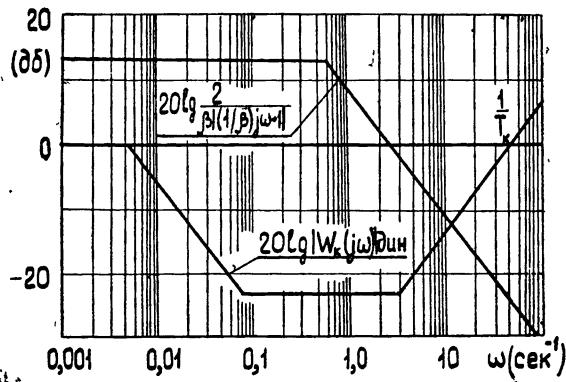


Рис. 1.

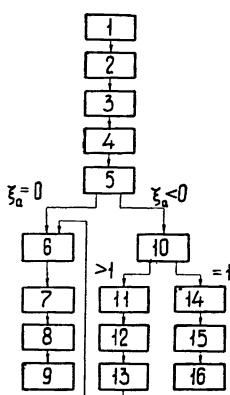


Рис. 2. 1) — определение $K(s)$, 2) — $\nu \geq r + 1$, 3) — расчет функции Паде, 4) — аппроксимация $e^{-sT} b K(s)$, 5) — анализ $\zeta_a = 1 - n$, 6) — определение $W_k(s)$, 7) — определение $\Gamma_k(s)$, 8) — получение $W_{\text{нч}}(s)$, 9) — восстановление $K_n(s)$, 10) — анализ порядка астатизма, 11) — определение $l = n - 1$, 12) — определение $\Gamma_0(s)$, 13) — определение $K_{\text{но}}(s)$, 14) — определение $l > \zeta_{\text{нч}} + n - 1$, 15) — определение $\Gamma(s)$, 16) — определение $K_n(s)$.

4. Пусть $m = n$, т. е. в составе помехи есть достаточно широкополосная составляющая. При этом в $k(t)$ будут входить отрезки экспоненциальных функций. Следует подчеркнуть, что

$$\int_0^\infty |k(t)| dt < \infty, \quad (19)$$

т. е. $K(s) = \int_0^\infty k(t) \exp(-st) dt$ не имеет полюсов в правой полуплоскости

и в начале координат. Кроме того, $K(s)$ не содержит также и полюсов α_i (α_i — вещественные или комплексные сопряженные числа), поскольку в изображениях отрезков экспонент полюса компенсируются соответствующими нулями. При аппроксимации с соблюдением (12) нулевые полюса в $K_a(s)$ компенсируются, компенсация же полюсов α_i наруша-

ется. Полученные после замены $\exp(-sT)$ в изображениях отрезков экспонент функцией Паде выражение можно привести к виду

$$N_{a_{ij}}(s) = N_{n_{ij}}(s) \prod_{k=1}^l 1 - \Delta\lambda_k(s - \lambda_k)^{-1} \quad (20)$$

$$(i = 1, j = 1, 2; i = 2, j = 1, 2, 3, 4),$$

где $N_{n_{ij}}(s) = M_{ij}(s) G^{-1}(s)$ — дробно-рациональная функция с избытком $\xi_N = 1$ для всех i и j , все полюса которой в левой полуплоскости; λ_k — корни a_i ($i = 1$ соответствует вещественным корням вида $\pm \alpha_1$, $i = 2$ — комплексным сопряженным вида $\pm \alpha_2 \pm \beta_2$); $\lambda_k + \Delta\lambda_k$ — нули, соответствующие λ_k , здесь $\Delta\lambda_k$ — погрешность компенсации. За счет $\Delta\lambda_k$ при $m = n \neq 0$ соответствующая функция распространяется до бесконечности, при этом система после аппроксимации $\exp(-sT)$ получается всегда неустойчивой.

При $v \rightarrow \infty$ точность аппроксимации повышается, поэтому при конечном v можно принять

$$N_{a_{ij}}(s) \approx N_{n_{ij}}(s), \quad (21)$$

для чего нужно пренебречь погрешностями компенсации полюсов. Для получения выражений $N_{n_{ij}}(s)$ нужно в изображениях отрезков экспонент $N_{ij}(s)$ определить нули $\lambda_k + \Delta\lambda_k$ и компенсировать ими соответствующие полюса λ_k . Получаемая при этом передаточная функция $K_a(s)$ с учетом (11) имеет вид

$$K_a(s) = \frac{\sum_{i=0}^{v-1} b_i s^i}{\sum_{i=0}^v a_i s^i}, \quad (22)$$

ее избыток $\xi_a = 1$ по (7), (10) и (20), что позволяет получить практически реализуемое корректирующее устройство.

При $m = n = 0$ («белый» шум) $K_a(s)$ получается непосредственно после аппроксимации $\exp(-sT)$, ее коэффициенты ошибок удовлетворяют равенствам

$$c_{aj} = c_j^* \quad (j = 0, 1, 2, \dots, r), \quad (23)$$

откуда следует метод непосредственного определения $(r+1)$ -го коэффициента b_i^* числителя $K_a(s)$ по коэффициентам c_j^* и a_i [16] или всех b_i^* при $v = r+1$. Однако в общем случае ($m = n \neq 0$) равенства (23) не выполняются, система $K_a(s)$ имеет нулевой порядок астатизма, ее коэффициенты b_i отличаются от b_i^* при любых v , удовлетворяющих (12). В этом случае при наличии в $W_{n\chi}(s)$ интегрирующих звеньев $W_k(s)$ должна содержать операторы идеального дифференцирования, во избежание чего и для сохранения астатизма следует принимать соответствующее количество $b_i = b_i^*$. При определении таким образом $(r+1)$ -го коэффициента b_i вместо (12) следует принимать

$$v \geq r + 2 \quad (24)$$

для сохранения в коэффициентах информации о помехе, тогда передаточная функция примет вид

$$K_{\text{на}}(s) = \frac{b_{v-1}s^{v-1} + \dots + b_{r+1}s^{r+1} + b_r^*s^r + \dots + b_1^*s + b_0^*}{G(s)}, \quad (25)$$

где $b_0 = 1 - c_0^*$, $b_1^* = T/2 - c_1^*$ при $c_0^* = 0$ и т. д.

Отношение

$$x_i = (D_i/D_0)^{1/2}, \quad (26)$$

где D_i — дисперсия ошибки квазиоптимальной системы, также является оценкой близости квазиоптимальной и оптимальной систем.

Пример 3. При $m = n = 1$, $r = 1$, $c_0^* = c_1^* = 0$, $T = 1$ сек, $\zeta = c$, $d_0 = 16 \text{ сек}^{-2}$, $h_0 = 1 \text{ сек}^{-2}$ с учетом результатов [20] можно получить для $K_{\text{на}}(s)$ вида (25) при $v = 2, 3, 4, 5$ величину x_i , соответственно равной 1,07; 1,06; 1,045; 1,03; соответствующие переходные процессы показаны на рис. 3, кривые здесь помечены числом v , о — оптимальная система, 2а — процесс при $v = 2$ в системе вида (22).

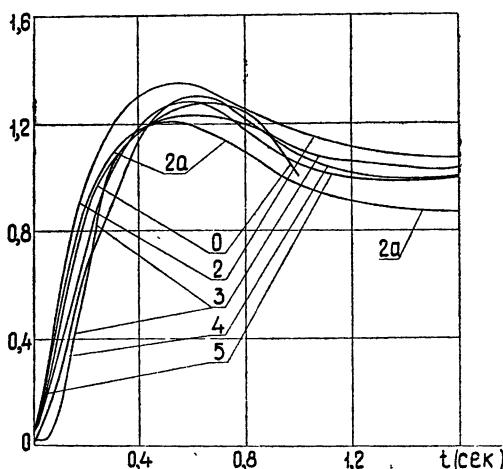


Рис. 3.

1) Аппроксимация $\exp(-sT)$ в $K(s)$ функцией Паде практически реализуемой системы непосредственно не дает, за исключением небольшого числа случаев.

2) Свойства функции Паде и передаточной функции оптимальной системы позволяют разработать метод.

3) Предлагаемый аналитический метод дает реализуемую квазиоптимальную систему, близкую к оптимальной в смысле принятого критерия.

Авторы весьма признательны Т. П. Рыловой и Л. Г. Журавину.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Зайцев, Автоматика и телемеханика, 24, № 2, 143 (1963).
2. В. В. Соловьевников, П. С. Матвеев, Автоматика и телемеханика, 16, № 3, 233 (1955).
3. Л. Н. Волков, Г. М. Коновалова, Изв. АН СССР—Техническая кибернетика, № 4, 123 (1968).
4. В. В. Соловьевников, Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, М., 1960.
5. К. И. Куракин, Следящие системы малой мощности, изд. Машиностроение, М., 1965.

6. К. И. Куракин, Автоматика и телемеханика, 19, № 5, 408 (1958).
7. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования, Кн. 2. Анализ и синтез линейных непрерывных и дискретных систем автоматического регулирования, под редакцией В. В. Соловникова, изд. Машиностроение, М., 1967.
8. Б. Я. Коган, Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования, Физматгиз, М., 1963.
9. В. Н. Жовинский, Схемы запоминания напряжений и блоки запаздывания, Госэнергоиздат, М.—Л., 1963.
10. Н. Раде, Апп, ес. п., (3) 16, (1899).
11. О. Реггон, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band 2. Analytisch—Funktionen theoretische Kettenbrüche, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1957.
12. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
13. У. Д.ж. Уолш, Интерполяция и аппроксимация функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961.
14. Е. Б. Франк, Изв. высш. уч. зав.—Приборостроение, 10, № 8, 28 (1967).
15. Е. Б. Франк, Изв. высш. уч. зав.—Приборостроение, 10, № 12, 49 (1967).
16. В. А. Окунев, Информационно-справочный листок, № 014129, 1967.
17. С. С. Ривкин, А. В. Костров, Изв. высш. уч. зав.—Приборостроение, 11, № 3, 74 (1968).
18. А. В. Костров, Вопросы машиностроения и приборостроения, сб. трудов Пермского политехнического института, Пермь, 1968.
19. Ш. С. Костров, С. С. Ривкин, Изв. АН СССР — Мех. тв. тела, № 5, 54 (1969).
20. Ш. С. Л. Чанг, Синтез оптимальных систем автоматического управления, Машиностроение, М., 1964.

Пермский политехнический институт

Поступила в редакцию
4 января 1970 г.

ON FEASIBILITY OF STATISTICALLY OPTIMAL FOLLOW-UP SYSTEMS

A. F. Bocharov, A. V. Kostrov

It is shown that in the majority of real problems of statistically optimal systems synthesis the known analytical method [6] yields no directly feasible system. An analytical method is proposed for synthesis of a feasible quasi-optimal system which is close to optimal one.

УДК 62—505.7

СОВМЕЩЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО С МЕТОДАМИ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

C. B. Шильман

Излагаются алгоритмы нахождения градиента статистической целевой функции, основанные на совмещении метода Монте-Карло с методами случайных проб*. Предлагаемые алгоритмы в отличие от «разностных» методов характеризуются существенно меньшими потерями на поиск и более слабой зависимостью потерь от числа переменных.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим проблему оптимизации сложной стохастической системы, характеризуемой целевой функцией вида

$$Q(\alpha) = M[\varphi(\xi_\alpha, \alpha)]. \quad (1)$$

Задача заключается в минимизации $Q(\alpha)$ по переменным $\alpha (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

В выражении (1) M означает математическое ожидание $\varphi(\cdot)$ — функцию потерь, знак α при случайному векторе ξ_α указывает на зависимость его распределений от параметров α_k , $k = 1, \dots, n$.

В форме (1) можно представить многие, широко используемые критерии качества систем. Укажем на следующие: среднеквадратическое уклонение, вероятность надежного функционирования, среднее время выполнения некоторой задачи и др.

Будем предполагать, что априорные распределения ξ_α не заданы, поэтому градиент $Q(\alpha)$ не может быть найден непосредственным дифференцированием выражения (1) по α [1]. В условиях указанной неопределенности для вычисления $Q(\alpha)$ широко используется метод статистического моделирования системы (метод Монте-Карло) [2]. Этот метод предусматривает получение путем статистически независимых испытаний модели набора выборочных значений функции потерь $\zeta_v = \varphi(\xi_\alpha, \alpha)$. На основе этих данных можно найти статистическую оценку $Q(\alpha)$ по формуле

$$\widetilde{Q}(\alpha) = 1/N \sum_{v=1}^N \zeta_v.$$

В этих условиях задачу минимизации $Q(\alpha)$ в принципе можно рассматривать как задачу поиска экстремума при наличии помех. Для ее решения можно использовать известные алгоритмы поиска [3], [4]. При этом естественно затраты на поиск включить число статистических испытаний, необходимых для оценки целевой функции или ее разностей. Ясно, что указанные затраты для всех известных методов сильно возрастают. Так, вычисление градиента на основе центральных разностей требует не менее $(n + 1)$ серии из N статистических испытаний. Число

* Изложение указанных алгоритмов содержал доклад автора на IV Всесоюзном симпозиуме по экстремальным задачам в Каунасе, 1969 г.

это столь значительно, что практическая реализация градиентного метода поиска становится во многих случаях невозможной.

В работах ряда авторов оптимизация сложных систем производится за счет отказа от градиентного метода. В [5] используется поисковый поиск, выполненный методом исключения, в [6] — случайный поиск. В [7] предложен метод зависимых испытаний, позволяющий повысить точность оценки разностей минимизируемой функции.

В данной работе предлагаются способы определения градиента целевой функции вида (1), которые отличаются от других используемых методов существенно меньшими потерями на поиск и более слабой зависимостью потерь от числа переменных. Эти методы основаны на использовании вероятностной природы целевой функции и предполагают совмещение метода статистических испытаний с методами случайных проб по переменным α . За счет этого удается вычислить градиент за одну серию из N испытаний статистической модели.

I. СОВМЕЩЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО С МЕТОДАМИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОБ

Предлагаемые методы основаны на замене операции вычисления разностей при определении градиента вычислением математических ожиданий. Этого можно достичь путем использования замеров $Q(\alpha)$ в случайных точках пространства α (методом случайных проб). Указанная замена операций позволяет с помощью ниже описанных алгоритмов объединить в одну две задачи: а) оценку целевой функции и б) оценку ее градиента. При этом, как это обычно принято, мы будем исходить из предположения, что целевая функция в окрестности исследуемой точки $\alpha = \alpha_0$ точно описывается линейной зависимостью от параметров

$$Q(\alpha_0 + \mu x) = J(x) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k x_k, \quad (2)$$

$$\text{grad } J(0) [b_1, \dots, b_n], \quad x [x_1, \dots, x_n].$$

Здесь x_k нормированные, безразмерные изменения параметров α_k , $x_k = \mu_k^{-1} (\alpha_k - \alpha_{k,0})$, $\mu [\mu_1, \dots, \mu_n]$ — нормирующий вектор, под произведением векторов μx понимается их скалярное произведение.

1. АЛГОРИТМ СОВМЕЩЕНИЯ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО С КОРРЕЛЯЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Предположим, что замеры $Q(\alpha)$ производятся в случайных точках пространства α , причем пусть эти точки определяются случайным центрированным вектором η_1 с независимыми, симметрично относительно нуля распределенными компонентами, $M[\eta_{1k}^2] = 1$, $k = 1, \dots, n$. Тогда, если (1) последовательно умножать на η_{1k} , $k = 1, \dots, n$, а затем вычислять математические ожидания от левой и правой частей полученных выражений, то можно найти, что

$$b_k = M[J(\eta_1) \eta_{1k}]. \quad (3)$$

Величина b_0 определяется равенством

$$b_0 = M[J(\eta_1)]. \quad (4)$$

Способ определения градиента с помощью формул (3) будет называться корреляционным методом.

Теперь обратимся к выражению (1), в силу которого $J(x)$ можно рассматривать как условное математическое ожидание от $\phi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_1}, \alpha_0 + \mu \eta_1)$.

$$J(x) = M [\varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_1}, \alpha_0 + \mu \eta_1) / \eta_1 = x]. \quad (5)$$

При этом правую часть (2) можно трактовать как уравнение линейной регрессии для $\varphi(\xi_\alpha, \alpha)$. Объединяя формулы (3) и (5), получим, что

$$\text{grad } J(0) = M [\varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_1}, \alpha_0 + \mu \eta_1) \eta_1]$$

или

$$\text{grad } J(0) = M \{[\varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_1}, \alpha_0 + \mu \eta_1) - b_0] \eta_1\}. \quad (6)$$

Введением b_0 уменьшается дисперсия выражения стоящего под знаком математического ожидания. Равенство (6) дает следующий алгоритм определения градиента.

А) При статистическом моделировании в число случайных факторов нужно включить смешения параметров $\alpha = \alpha_0 + \mu \eta_1$, причем эти смешения должны быть статистически независимы от случайных возмущений исходной модели.

Б) На основе статистически независимых испытаний найдем последовательность выборочных значений:

$$\zeta_v = \varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_1^{(v)}}, \alpha_0 + \mu \eta_1^{(v)})$$

и $\eta_1^{(v)}, v = 1, \dots, N$.

С) Оценим $b_0 = M [\varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_1}, \alpha_0 + \mu \eta_1)]$,

$$\tilde{b}_0 = 1/N \sum_{v=1}^N \zeta_v.$$

Д) Тогда несмешенная оценка градиента по данным этой одной серии испытаний будет равна

$$\text{grad } J(0) \approx 1/(N-1) \sum_{v=1}^N (\zeta_v - \tilde{b}_0) \eta_1^{(v)}. \quad (7)$$

2. СОВМЕЩЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО С МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОБ

Известно, что метод случайных проб в виде, изложенном выше, не достаточно эффективно использует исследуемую область пространства параметров α [8]. С этой точки зрения целесообразно использовать измерения не в случайных точках, а заранее планируемых. В качестве последних возьмем точки, образующие ортогональный план [8]. Эти точки определяются равенствами

$$\sum_{u=1}^m x_{ku} = 0, \quad \sum_{u=1}^m x_{ku} x_{lu} = 0 \quad (k \neq l), \quad \sum_{u=1}^m x_{ku}^2 = m,$$

где $k = 1, \dots, n$, $|x_{ku}| < 1$, $m \geq n+1$. В данном случае $\mu_k = (\alpha_k)_{\max} - \alpha_{k0}$.

Подставим в (2) x_{ku} , затем умножим полученное выражение слева и справа на x_{ku} . Сложив равенства по всем $u = 1, \dots, m$, получим

$$b_k = 1/m \sum_{u=1}^m J(x_u) x_{ku}.$$

Для b_0 справедлива формула $b_0 = 1/m \sum_{u=1}^m J(x_u)$.

Видоизменим этот метод следующим образом. Введем случайный вектор η_2 , принимающий дискретные значения, равные x_u , с одинаковы-

ми вероятностями $p(\eta_2 = x_u) = 1/m$. Нетрудно убедиться в том, что

$$b_k = M[J(\eta_2) \eta_{2k}] = 1/m \sum_{u=1}^m J(x_u) x_{ku}, \quad (8)$$

$$b_0 = M[J(\eta_2)] = 1/m \sum_{u=1}^m J(x_u) \quad (9).$$

Если $J(x)$ в виде

$$J(x) = M[\varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_2}, \alpha_0 + \mu \eta_2) / \eta_2 = x]$$

подставить в (8), то получим

$$b_k = M[\varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_2}, \alpha_0 + \mu \eta_2) \eta_{2k}] = M[[\varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_2}, \alpha_0 + \mu \eta_2) - b_0] \eta_{2k}], \quad b_0 = M[\varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_2}, \alpha_0 + \mu \eta_2)].$$

Отсюда получаем алгоритм вычисления градиента, аналогичный предыдущему. Отличие заключается лишь в том, что случайные смещения переменных α в процессе статистического моделирования принимают дискретные значения. Так же как и в предыдущем случае оценка градиента и самой целевой функции производится по одной серии испытаний.

II. АЛГОРИТМЫ СОВМЕЩЕНИЯ И ЗАВИСИМЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ

Точность вычисления градиента по формулам типа (7) существенно зависит от характера случайных колебаний случайного вектора $\zeta_i = \varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_i}, \alpha_0 + \mu \eta_i) \eta_i$, $i = 1, 2$, относительно его математического ожидания. Эти колебания во многих случаях могут быть уменьшены за счет последовательного чередования зависимых и независимых испытаний. Зависимые испытания в целях оптимизации впервые, по-видимому, использовались в [7].

Будем предполагать, что имеется возможность проведения испытаний статистической модели при одних и тех же значениях случайных воздействий. Это позволяет находить выборочные значения ξ_α и ξ_{α_0} при одних и тех же значениях случайных факторов. Последнее означает, что ξ_α и ξ_{α_0} будут функционально связаны, т. е.

$$\xi_\alpha = f(\alpha, \xi_{\alpha_0}),$$

где $f(\cdot)$ — детерминированная функция. Такие случайные векторы будем называть строго связанными, иначе связь такого рода будем указывать значком «с».

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$M[\varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_i}, \alpha_0 + \mu \eta_i) \eta_i] = M[[\varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_i}, \alpha_0 + \mu \eta_i) - \varphi(\xi_{\alpha_0}, \alpha_0)] \eta_i]. \quad (10)$$

Отсюда следует, что при вычислениях градиента можно использовать разности функции φ по α . Однако, если измерения $\varphi(\xi_{\alpha_0 + \mu \eta_i}, \alpha_0 + \mu \eta_i)$ и $\varphi(\xi_{\alpha_0}, \alpha_0)$, будут производиться независимо, то статистическая точность оценок градиента упадет. Мы же будем находить выборочные значения разности $\Delta_\alpha \varphi$ с помощью зависимых испытаний, т. е.

$$\Delta_\alpha^\text{c} \varphi = \varphi(\xi_{\alpha_0 + \eta_i \mu}^\text{c}, \alpha_0 + \mu \eta_i) - \varphi(\xi_{\alpha_0}^\text{c}, \alpha_0),$$

где η_i ($i = 1, 2$) — введенные выше случайные векторы. Тогда при усло-

вии последовательного чередования независимых и зависимых испытаний градиент можно оценивать по формуле

$$\text{grad } J(0) \approx 1/N_1 \sum_{v=1}^{N_1} \Delta_x^c \varphi^{(v)} \eta_2^{(v)}. \quad (11)$$

Здесь N_1 —число независимых испытаний. Всего должно быть N_1 независимых испытаний при случайных значениях α и N_1 соответствующих зависимых испытаний при фиксированном $\alpha = \alpha_0$.

Ниже будет показано, что, как правило, такой способ оценки градиента позволяет существенно повысить точность его вычисления при том же числе испытаний.

III. СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПОТЕРЬ НА ПОИСК АЛГОРИТМОВ СОВМЕЩЕНИЯ

Принципиальной особенностью предложенных методов является возможность выбора числа испытаний N , хотя и значительно, но независимого от размерности α . В силу этого мы можем не менять затраты на поиск при изменении числа регулируемых переменных. При этом условии потери на поиск [4] этих методов зависят более слабо от размерности α по сравнению с другими известными методами. Кроме того, абсолютная величина потерь оказывается примерно в $2(n+1)$ раз меньшей по сравнению с разностным методом.

Из соображений краткости все это покажем на примере второго алгоритма, как алгоритма наиболее точного.

A) Случай независимых испытаний.

Согласно (7), градиент будет оцениваться по формуле

$$\text{grad } J(0) \approx \tilde{b} = 1/(N-1) \sum_{v=1}^N (\zeta_v - \tilde{b}_0) \eta_2^{(v)}, \quad (12)$$

где

$$\tilde{b}_0 = 1/N \sum_{v=1}^N \zeta_v.$$

Будем предполагать, что компоненты случайного вектора ζ имеют ограниченную дисперсию. Тогда, как нетрудно убедиться, будет выполняться условие Линдерберга [9] и, следовательно, при достаточно больших N закон распределения \tilde{b} будет близок к гауссовскому. Отсюда естественно предположение о том, что \tilde{b} является нормальным случаем вектором. При этой гипотезе для оценки точности вычисления градиента достаточно найти его корреляционную матрицу.

Заметим, что компоненты градиента b_k имеют тот же порядок, что и нормирующие множители μ_k , а величина $2\mu_k$ равна интервалу вариирования параметра α_k .

Элементы корреляционной матрицы могут быть найдены как средние от условных математических ожиданий

$$M[(\tilde{b}_i - b_i)(\tilde{b}_j - b_j)/\eta_2^{(v)}].$$

Если пренебречь величинами второго порядка малости относительно μ_k ($k = 1, \dots, n$), то

$$M[(\tilde{b}_i - b_i)(\tilde{b}_j - b_j)/\eta_2^{(v)}] \approx 1/(N-1)^2 \left[\sum_{v=1}^N D_\varphi(\eta_2^{(v)}) \eta_{2i}^{(v)} \eta_{2j}^{(v)} - \right]$$

$$= 1/N \sum_{z=1}^N \sum_{v=1}^N D_\varphi(\eta_2^{(v)}) \eta_{2i}^{(v)} \eta_{2j}^{(z)} + \\ + 1/N \sum_{v=1}^N D_\varphi(\eta_2^{(v)}) \eta_{2i}^{(v)} \eta_{2j}^{(v)}.$$

Здесь

$$D_\varphi(x) = M[\varphi^2(\xi_{\alpha_0+\mu\eta_2}, \alpha_0 + \mu\eta_2)/\eta_2 = x] - J^2(x).$$

Отсюда

$$M[(\tilde{b}_i - b_i)(\tilde{b}_j - b_j)] \approx \frac{1}{N-1} \sum_{u=1}^m \frac{D_\varphi(x_u) x_{iu} x_{ju}}{m}.$$

Предположим, что $D_\varphi(x)$ дважды дифференцируется по всем переменным, тогда

$$D_\varphi(x_u) = D_\varphi(0) + \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial D}{\partial x_l} \right)_0 x_{lu} + \text{члены второго порядка от } x_{lu}$$

Заметим, что производные второго порядка имеют второй порядок малости относительно μ_k .

Пренебрегая членами второго порядка малости и учитывая, что моменты третьего порядка для ортогональных планов равны нулю, получим

$$M[(\tilde{b}_i - b_i)(\tilde{b}_j - b_j)] \approx 0 \quad (i \neq j), \\ M[(\tilde{b}_i - b_i)^2] \approx \frac{D_\varphi(0)}{N-1}.$$

Естественно считать в нашей задаче $D_\varphi(0)$ величиной достаточно большой.

Если мы будем искать градиент разностным методом с той же точностью, то при грубой оценке для этого потребуется $2(N-1)(n+1)$ измерений. Отсюда следует, что потери на поиск разностного метода будут примерно в $2(n+1)(N-1)/N$ раз больше, чем потери исследуемого алгоритма.

На основе полученных соотношений нетрудно оценить преимущества предлагаемого метода поиска экстремума по сравнению с любыми другими, основанными на вычислении разностей $Q(\alpha)$ [5], [6]. Сравнение данного метода с каким-либо способом накопления информации с другими методами накопления можно осуществить с помощью исследований [10, 11].

Б) Случай чередования зависимых и независимых испытаний.

В этом случае оценка градиента производится по формуле

$$\tilde{b} = 1/N_1 \sum_{v=1}^{N_1} \Delta_c^\varphi \eta_2^{(v)}.$$

Считая N_1 достаточно большим, найдем корреляционную матрицу \tilde{b}

$$M[(\tilde{b}_i - b_i)(\tilde{b}_j - b_j)/\eta_2^{(v)}] = 1/N_1^2 \left[\sum_{v=1}^{N_1} D_{\Delta\varphi}(\eta_2^{(v)}) \eta_{2i}^{(v)} \eta_{2j}^{(v)} + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^{N_1} \sum_{v=1}^{N_1} (J(\eta_2^{(v)}) - J(0)) (J(\eta_2^{(v)}) - J(0)) \eta_{2i}^{(v)} \eta_{2j}^{(v)} \right] - b_i b_j.$$

Здесь

$$D_{\Delta\varphi}(x) = M [(\Delta_a^c \varphi)^2 / \eta_2 = x] - [J(x) - J(0)]^2.$$

Отсюда, учитывая, что $M[J(\eta_2) \eta_{2i}] = b_i$, найдем

$$\begin{aligned} M[(\tilde{b}_i - b_i)(\tilde{b}_j - b_j)] &= \frac{1}{N_1} \sum_{u=1}^m \frac{D_{\Delta\varphi}(x_u) x_{iu} x_{ju}}{m} + \\ &+ \frac{1}{N_1} \sum_{u=1}^m (J(x_u) - J(0))^2 x_{iu} x_{ju}. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее, предполагая $D_{\Delta\varphi}(x)$ дважды дифференцируемой по x , представим эту величину в виде

$$D_{\Delta\varphi}(x_u) = D_{\Delta\varphi}(0) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial D_{\Delta\varphi}}{\partial x_k} \right)_{x=0} x_{ku} + \quad (14)$$

+ члены второго порядка относительно x_{ku} .

Поскольку при вычислении разностей используются строго связанные случайные величины, то

$$D_{\Delta\varphi}(0) = M \{ [\varphi(\xi_{\alpha_0}^c, \alpha_0) - \varphi(\xi_{\alpha_0}^c, \alpha_0)]^2 \} = 0.$$

Подставив $D_{\Delta\varphi}$ в виде (14) в (13), с учетом равенства $\sum_{u=1}^m x_{ku} x_{iu} x_{ju} = 0$, получим, что при любых $i, j = 1, \dots, n$

$$M[(\tilde{b}_i - b_i)(\tilde{b}_j - b_j)] = \frac{\Psi(\mu)}{N_1},$$

где $\Psi(\mu)$ является квадратичной формой относительно μ_k ($k = 1, \dots, n$).

Отсюда следует, что величины $M[(\tilde{b}_i - b_i)(\tilde{b}_j - b_j)]$ имеют второй порядок малости относительно интервалов варьирования параметров α_k . Уменьшением этих интервалов статистическая погрешность вычисления градиента может быть сделана сколь угодно малой. В случае полностью независимых испытаний дисперсии компонент градиента, даже при достаточно малых интервалах варьирования, конечны. Ясно отсюда, что метод чередования зависимых и независимых испытаний позволяет существенно повысить точность вычисления градиента при тех же затратах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Александров, В. И. Сысоев, В. В. Шеменева, Техническая кибернетика, № 5, (1968).
2. Н. П. Бусленко, Ю. А. Шрейдер, Метод статистических испытаний, ГИФМЛ, М., 1961.
3. Д. Дж. Уэйлд, Методы поиска экстремума, изд. Наука, М., 1967.
4. Л. А. Растигин, Статистические методы поиска, изд. Наука, М., 1968.
5. Н. П. Бусленко, Г. А. Соколов, Экономика и математические методы, 1, № 1, 123 (1965).
6. Л. С. Гурин, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 4, № 2, 267 (1964).
7. Ю. Г. Полляк, Тр. III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению, Оптимальные системы. Статистические методы. М., изд. Наука, стр. 321, 1967.
8. В. Б. Налимов, Н. А. Чернова, Статистические методы планирования экстремальных экспериментов, изд. Наука, 1965.

9. М. Лоэв, Теория вероятностей, ИЛ, М., 1962.
10. Л. С. Гурин, Л. А. Растигин, Автоматика и телемеханика, № 9, 1546 (1965).
11. Л. А. Растигин, Автоматика и вычислительная техника, № 4, 25 (1970).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
5 сентября 1970 г.

COMBINING MONTE-CARLO METHOD WITH EXTREMUM
SEARCH METHODS IN STOCHASTIC SYSTEMS OPTIMIZATION
PROBLEMS

S. V. Shilman

Algorithms*, based on combining the Monte-Carlo method with the random trials methods, to determine a gradient of a statistical target function are presented. The proposed algorithms, unlike the "difference" methods, are characterized by considerably lower search losses and a weaker losses dependence upon the number of variables.

* These algorithms were described in the author's report at the IV-th All-Union Symposium on Extremal Problems in Kaunas, 1969.

УДК 62 — 501.7 : 519.24

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ УСЛОВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Ю. П. Свирин

Рассмотрены ошибки, имеющие место при построении ортонормированного разложений условного математического ожидания по экспериментальным данным. Показана возможность их сравнения, что позволяет проводить анализ по упрощению вида разложения.

Определение математического описания объектов в ряде случаев может быть основано на использовании ортогонального разложения условного математического ожидания $M[Y|X]$, где Y и X — имеющие определенный смысл в конкретной задаче зависимая и независимая переменные [1, 2]. Построение этого разложения по экспериментальным данным, осуществляющее с помощью метода наименьших квадратов [3], сопровождается ошибкой в определении $M[Y|X]$, состоящей из ошибки из-за ограниченного объема выборки и методической ошибки, связанной с неправильным выбором числа членов разложения. В работе рассмотрены составляющие общей ошибки и показана возможность их сравнения, что позволяет применять при построении $M[Y|X]$ критерий, учитывающий заданное соотношение между этими составляющими. В общем случае это может привести к упрощению вида $M[Y|X]$ при незначительном увеличении ошибки.

Пусть имеется выборка из N независимых испытаний, т. е. заданы N пар $(Y_1, X_1), \dots, (Y_N, X_N)$. Известно, что для каждого X из заданной области изменения аргумента Y распределено нормально. Параметры условной дисперсии $D[Y|X] = \sigma^2 h^2(X)$ заданы.

Пусть известно, что $M[Y|X]$ может быть достаточно точно представлено с помощью n членов ряда

$$M[Y|X] = \sum_{i=0}^n a_i \Psi_i(X), \quad (1)$$

где $\{\Psi_i(X), i=0, 1, \dots, n\}$ — система ортонормированных полиномов, a_i — коэффициенты разложения ($i = 0, 1, \dots, n$). Тогда по имеющейся выборке, ограничиваясь числом членов ряда m ($m \leq n$), можно получить

$$\hat{M}[Y|X] = \sum_{i=0}^m \hat{a}_i \Psi_i(X), \quad (2)$$

где \hat{a}_i — оценка a_i , полученная по данной выборке. Ошибку в определении $\hat{M}[Y|X]$ для некоторого X , определим как

$$e(X_v) = M[Y|X_v] - \hat{M}[Y|X_v] = \sum_{i=0}^m (a_i - \hat{a}_i) \Psi_i(X_v) + \sum_{i=m+1}^n a_i \Psi_i(X_v). \quad (3)$$

Обозначим через $e_1(X_v)$ ошибку в определении $M[Y|X_v]$ из-за конечного объема выборки, а через $e_2(X_v)$ — методическую ошибку в определении $M[Y|X_v]$. Тогда из (3) имеем

$$e_1(X_v) = \sum_{i=0}^m (a_i - \hat{a}_i) \Psi_i(X_v), \quad (4)$$

$$e_2(X_v) = \sum_{i=m+1}^n a_i \Psi_i(X_v). \quad (5)$$

Перейдем теперь от ошибок $e_1(X_v)$ и $e_2(X_v)$ к ошибкам в определении $M[Y | X]$ для всей заданной в данной выборке области изменения аргумента. Определим ошибку от конечного объема выборки E_1 и методическую ошибку E_2 выражениями

$$E_1 = \frac{1}{N-m} \sum_{j=1}^N \varphi(X_j) e_1^2(X_j), \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{1}{N-n+m+1} \sum_{j=1}^N \varphi(X_j) e_2^2(X_j), \quad (7)$$

где $\varphi(X_j)$ — значение в j -м испытании «весовой» функции $\varphi(X)$, определяемой выражением $\varphi(X) = \frac{1}{h^2(X)}$ [3]. Из (6) и (4), учитывая ортонормированность системы полиномов, путем несложных преобразований получаем

$$E_1 = \frac{1}{N-m} \sum_{i=0}^m (a_i - \hat{a}_i)^2. \quad (8)$$

Соответственно из (7) и (5) получаем

$$E_2 = \frac{1}{N-n+m+1} \sum_{i=m+1}^n a_i^2. \quad (9)$$

Рассмотрим более подробно ошибки E_1 и E_2 . Так как оценки \hat{a}_i имеют распределение $N(a_i, \sigma)$ и статистически независимы [3], то из (8) следует, что случайная величина E_1 будет распределена по закону $\frac{\sigma^2}{N-m} \chi_{m+1}^2$ [4].

Непосредственное применение (9) для определения E_2 затруднительно, так как значения a_i ($i = 0, \dots, n$) в общем случае неизвестны. Поэтому рассмотрим возможность замены E_2 на \hat{E}_2 , где

$$\hat{E}_2 = \frac{1}{N-n+m+1} \sum_{i=m+1}^n \hat{a}_i^2. \quad (10)$$

Обозначим $U = \sum_{i=m+1}^n \left(\frac{\hat{a}_i}{\sigma} \right)^2$, тогда (10) можно представить в виде

$$\hat{E}_2 = \frac{\sigma^2}{N-n+m+1} U. \quad (11)$$

Так как $\frac{\hat{a}_i}{\sigma}$ имеют распределение $N\left(\frac{a_i}{\sigma}, 1\right)$ и статистически независи-

мы, то U распределена как нецентральный χ^2_{n-m} с параметром нецентральности δ [4], равным в этом случае

$$\delta = \frac{1}{\sigma} \left[\sum_{i=m+1}^n a_i^2 \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Учитывая выражение для $M[U]$ [4], из (11), (12), (9) имеем

$$M[\hat{E}_2] = \frac{\sigma^2}{N-n+m+1} M[U] = \frac{\sigma^2}{N-n+m+1} [(n-m) + \\ + \delta^2] = \frac{\sigma^2(n-m)}{N-n+m+1} + E_2, \quad (13)$$

т.е. оценка \hat{E}_2 оказывается смещенной относительно E_2 . Потребуем выполнения для некоторого заданного β условия

$$M[\hat{E}_2] = \beta D[\hat{E}_2]. \quad (14)$$

При достаточно большом β из (14) следует приближенное равенство

$$\hat{E}_2 = M[\hat{E}_2]. \quad (15)$$

Тогда, учитывая (13), окончательно получаем

$$E_2 = \hat{E}_2 - \frac{n-m}{N-n+m+1} \sigma^2. \quad (16)$$

Преобразуем условие (14) к более удобному виду. Из (11), учитывая выражения для $M[U]$ и $D[U]$ [4], получаем

$$\frac{M[\hat{E}_2]}{G[\hat{E}_2]} \frac{\frac{\sigma^2}{N-n+m+1} [(n-m)+\delta^2]}{\left[\frac{\sigma^2}{N-n+m+1} \right]^2 [2(n-m)+4\delta^2]} = \frac{N-n+m+1}{2\sigma^2} \frac{(n-m)+\delta^2}{(n-m)+2\delta^2}. \quad (17)$$

Так как

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{(n-m)+\delta^2}{(n-m)+2\delta^2} \leqslant 1, \quad (18)$$

то имеет место

$$\frac{M[\hat{E}_2]}{D[\hat{E}_2]} \geqslant \frac{N-n+m+1}{4\sigma^2}. \quad (19)$$

Использование выражения (16) возможно тогда при выполнении условия

$$\frac{N-n+m+1}{4\sigma^2} \geqslant \beta. \quad (20)$$

Условие (14) является довольно грубым, что приводит в общем случае к необходимости, согласно (20), иметь выборку большого объема. В то же время его применение удобно ввиду своей простоты. При больших N , кроме этого, полученные результаты можно использовать при нарушении

нормальности исходных предпосылок, так как при этом оценки a_i распределены по закону, близкому к нормальному [3].

Знание закона распределения ошибки E_1 и использование (16) для определения E_2 позволяет производить проверку выполнения заданного соотношения между E_1 и E_2 . Такое соотношение можно задать, например, потребовав одновременного выполнения условий

$$P\{E_1 > E_2\} \geq A, \quad (21)$$

$$P\{E_1 < E_2\} \geq A \quad (22)$$

и задавая некоторое положительное A .

При использовании полученных результатов, например, в пошаговой процедуре построения $M[Y|X]$, под величиной $n-m$ будем понимать глубину прогноза в определении $M[Y|X]$ на m -шаге. Тогда, задавшись некоторым $n-m$ и проверяя выполнение (21) и (22) на каждом шаге, можно определить при данном объеме выборки такое число членов разложения, при котором значения ошибок E_1 и E_2 будут достаточно близки. Ограничеваясь этим числом членов, мы будем получать, в общем случае более простой вид разложения $M[Y|X]$ по сравнению с разложением, полученным без анализа E_1 и E_2 . При этом выбор достаточно большой величины $n-m$ позволяет избежать значительного увеличения общей ошибки.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Т. Куллик, Алгоритмизация объектов управления, Киев, «Наукова думка», 1968.
2. В. А. Птичкин, Ю. П. Свирин, Г. Т. Кулаков, А. Н. Вексин, Тезисы III республиканской конференции по применению вычислительной техники в энергетике, Минск, 1970.
3. Ю. В. Линник, Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, М., Физматгиз, 1962.
4. Г. Шеффе, Дисперсионный анализ, М., Физматгиз, 1963.

Минский радиотехнический институт

Поступила в редакцию
14 сентября 1970 г.

ON CONSTRUCTION OF CONDITIONAL MATHEMATICAL EXPECTATION BY LEAST-SQUARES METHOD

Yu. P. Svirin

Errors occurring when constructing orthonormal expansions of a conditional mathematical expectation on the basis of experimental data are considered. Their comparability is shown and this permits to simplify the type of expansion.

УДК 62—507

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ СИСТЕМ, РЕАЛИЗОВАННЫХ В ВИДЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ АВТОМАТОВ*

В. П. Григоренко, А. Н. Рапопорт, Е. И. Ронин

Проведено изучение и сравнительный анализ двух моделей обучающихся систем, реализованных в виде стохастического автомата с линейной тактикой и в виде коллектива независимо работающих автоматов. Для обеих моделей найдены предельные распределения вероятностей состояний систем, на основе которых определены характеристики поиска, реализуемого в обеих моделях.

Математические модели процесса обучения имеют важное значение в теории управляющих систем, поскольку они помогают конструировать сложные управляющие системы, предназначенные для управления объектами, для которых не найдено достаточно полного описания или на которые могут действовать непредвиденные сложные взаимодействия. Среди работ, посвященных изучению математических моделей обучающихся систем, можно отметить монографии Буша и Мостеллера [1], М. Л. Цетлина [2]. В работах [3, 4] Срагович и Шмуклер рассматривают задачу построения самообучающейся системы, предназначенной для управления нестационарными производственными процессами с неизвестной кинетикой, реализованной в виде вероятностного автомата.

В настоящей работе проведено изучение и сравнительный анализ двух моделей обучающихся систем, реализованных в виде стохастического автомата с линейной тактикой $\Delta_{2m, 2n}^{(p)}$ (модель I) и в виде коллектива независимо работающих автоматов $B_{2m, 2}$ [5] (модель II). Для обоих моделей найдены предельные распределения вероятностей состояний систем, на основе которых определены характеристики поиска, реализуемого в обеих моделях. Сравнительный анализ зависимости полученных характеристик от параметров систем и от параметров, характеризующих внешние взаимодействия, показал преимущество коллектива независимых автоматов как аддитивной управляющей системы перед одним автоматом.

1. *Модель I.* Рассмотрим работу системы оптимизации, структурная схема которой изображена на рис. 1. Здесь ОУ—объект управления, ди-

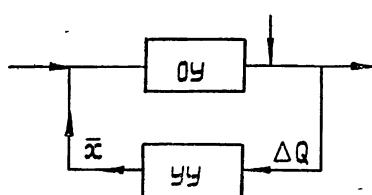


Рис. 1. Блок-схема системы оптимизации:
1)—объект управления (ОУ) $Q(x_1, \dots, x_n)$,

* В работе содержатся некоторые результаты, полученные в дипломной работе А. В. Белякова, выполненной в 1969 г.

намикой процессов в котором будем в дальнейшем пренебрегать. Это предположение справедливо для объектов с достаточно малой инерционностью или для случая, когда интервалы времени между управляющими сигналами достаточноны для завершения всех переходных процессов в объекте. В этом случае, как известно, задача управления сводится к минимизации некоторой функции многих переменных $Q(x_1, \dots, x_n)$, зависящей от параметров, отражающих условия, в которых находится объект управления. В качестве управляющего устройства (УУ) будем использовать стохастический автомат типа $L_{2nm, 2n}^{(p)}$ [2] (модель I). Входным сигналом автомата, который реализует аддитивную управляющую систему, является выпрыг или проигрыш (поощрение или штраф), т. е. все реакции управляемого объекта разделены на два класса. Поскольку в задачу УУ входит нахождение и поддержание минимального значения функции $Q(x_1, \dots, x_n)$, к классу поощрений будем относить отрицательные приращения функции качества $\Delta Q < 0$, а к классу штрафов — положительные $\Delta Q > 0^*$. Автомат совершает действия $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2n}\}$, которые однозначно определяются его состояниями памяти,

$$\sigma_j(t) = F(\varphi_j) = \begin{cases} 1 & (1 \leq j \leq n) \\ -1 & (n+1 \leq j \leq 2n) \end{cases} \quad (1.1)$$

причем $\sigma_{n+1} = -\sigma_j$, где φ_j — номер состояния памяти на j -й итерации автомата $L_{2nm, 2n}$, m — величина глубины его памяти. Изменение управляющих переменных объекта автоматом $L_{2nm, 2n}^{(p)}$ происходит согласно соотношениям

$$x_k(t) = x_k(t-1) + h_k \delta_j(t) \delta_{kj} \quad (1.2)$$

$$(k=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots),$$

где h_k — величина шага изменения k -й переменной x_k , δ_{kj} — символ Кронекера.

Для оценки эффективности поисковой процедуры, реализуемой в рассматриваемой системе, необходимо задать ситуацию, в которой будет действовать данная система. Ситуация в значительной степени определяется путем задания функции качества объекта оптимизации. Мы будем рассматривать линейную модель объекта, которая является наиболее простой и хорошо отражает локальные свойства объекта вдали от экстремума или при достаточно малых шагах поиска [6]. Тогда функция качества имеет вид

$$Q(x_1, \dots, x_n) = Q_0 + \sum_{i=1}^n a_i (x_i - x_i^0) \quad (1.3)$$

Из (1.1) — (1.3) следует, что знак и величина приращения $\Delta Q(x_1, \dots, x_n)$ однозначно определяются состоянием автомата $L_{2nm, 2n}^{(p)}$.

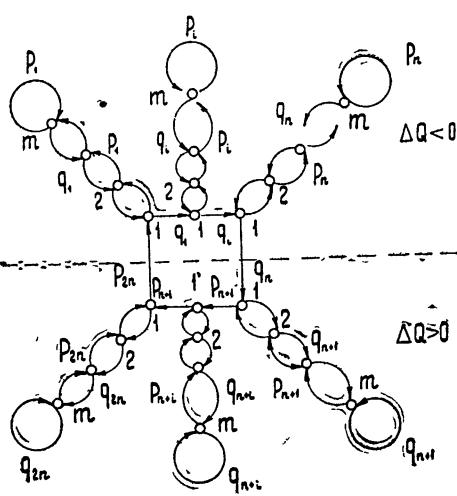


Рис. 2. Граф автомата $L_{2nm, 2n}^{(p)}$.

* Случай, когда $\Delta Q = 0$, для простоты не рассматривается, это справедливо, когда ни одно поисковое направление движения не совпадает с линиями уровня функции $Q(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$.

Для удобства перенумеруем ветви автомата таким образом, чтобы для ветвей с номерами $j = 1, 2, \dots, n$ $\Delta Q_j < 0$, а для $j = n+1, \dots, 2n$ $\Delta Q_j > 0$, причем $\Delta Q_i = -\Delta Q_{n+j}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Граф переходов автомата в этом случае имеет вид, изображенный на рис. 2.

За состояние системы примем состояние памяти автомата $L_{2nm, 2n}^{(p)}$. Из графа, изображенного на рис. 2, следует, что переход системы из состояния в состояние является марковским стационарным процессом, причем, если все $0 < p_i < 1$, то этот процесс является эргодическим. Отсюда следует, что существуют предельные вероятности $U_\alpha(i)$ ($\alpha = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$) состояний системы.

Запишем систему уравнений Маркова, которой удовлетворяют величины $U_\alpha(i)$

$$\begin{aligned} U_\alpha(i) &= p_i U_{\alpha-1}(i) + q_i U_{\alpha+1}(i) (\alpha = \overline{2, m-1}; i = \overline{1, n}); \\ U_1(1) &= p_{2n} U_1(2n) + q_1 U_2(1), \\ U_m(i) &= p_i U_m(i) + p_{i-1} U_{m-1}(i) \quad (i = \overline{1, n}), \\ U_1(i) &= q_{i-1} U_1(i-1) + q_i U_2(i) \quad (i = \overline{2, n}), \\ U_\alpha(n+i) &= q_i U_{\alpha-1}(n+i) + p_i U_{\alpha+1}(n+i) \quad (\alpha = \overline{2, m-1}; i = \overline{1, n}), \\ U_1(n+1) &= q_n U_1(n) + p_1 U_2(n+1), \\ U_m(n+i) &= q_i U_m(n+i) + q_{i-1} U_{m-1}(n+i) \quad (i = \overline{1, n}), \\ U_1(n+i) &= p_{i-1} U_1(n+i-1) + p_i U_2(n+i) \quad (i = \overline{2, n}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Предельные вероятности $P(i)$ нахождения системы в состояниях, соответствующих i -му действию, определяются выражениями

$$P(i) = \sum_{\alpha=1}^m U_\alpha(i) \quad (i = 1, 2, \dots, 1n). \quad (1.5)$$

Подставив в (1.5) решение системы (1.4), получим

$$P(i) = \frac{(p_i^m - q_i^m)[q_i^m(p_i - q_i)]^{-1}}{\sum_{j=1}^n [(p_j^m - q_j^m)(p_j - q_j)^{-1}(q_j^{-m} + p_j^{-m})]}, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} P(n+i) &= P(i)(q_i/p_i)^m \\ (i &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Из (1.6) следует, что

$$P(i^*) = \max_i \{P(i)\}, \text{ если } q_{i^*} = \min_i \{q_i\}. \quad (1.7)$$

Далее легко показать, что при $m \rightarrow \infty$ $P(i^*) \rightarrow 1$, а $P(i) \rightarrow 0$, для $i \neq i^*$, $i = \overline{1, 2n}$, т. е. при достаточно-большой глубине памяти, с вероятностью, близкой к единице, система будет двигаться вдоль координаты x_i в сторону уменьшения функции $Q(x_1, \dots, x_n)$. Если имеется возможность оценивать в процессе поиска величины ΔQ_i , то можно организовать обучение автомата движению вдоль градиента увеличением или уменьшением соответствующих значений p_i . Ниже будет показано, что при учете действия помех в канале измерения ΔQ_i такое обучение имеет место автоматически.

Используя (1.6), определим некоторые характеристики поиска. Одной из существенных характеристик являются потери на поиск, которая определяет среднее количество шагов, необходимое для единичного смещения вдоль градиента функции качества, и среднюю локальную скорость оптимизации, т. е. быстродействие поиска. Численно потери на поиск можно представить в виде отношения числа шагов к полученному эффекту (среднему смещению). Для алгоритма поиска, реализованного в автомате $L_{2nm, 2n}^{(p)}$, потери на поиск K имеют вид

$$K = \frac{1}{|M(\Delta Q)|}. \quad (1.8)$$

Величина $M(\Delta Q)$ называется средним смещением за один шаг

$$M(\Delta Q) = \sum_{i=1}^{2n} P(i) \Delta Q_i / h_i. \quad (1.9)$$

Из (1.6) следует, что величина среднего смещения

$$M(\Delta Q) = - \sum_{i=1}^n \Delta Q_i / h_i P(i) [1 - (q_i/p_i)^m] \quad (1.10)$$

отрицательна и при достаточно большой глубине памяти автомата

$$L_{2nm, 2n}^{(p)} M(\Delta Q) \simeq -|a_{i^*}|.$$

Другой существенной локальной характеристикой поиска является вероятность ошибки. Эта характеристика определяет вероятность появления в процессе поиска ошибочного рабочего шага.

$$\nu = P\{Q(\bar{X}) < Q(\bar{X} + h)\} = \\ \frac{\sum_{j=1}^n (p_j^m - q_j^m) [p_j^m (p_j - q_j)]^{-1}}{\sum_{j=1}^n (p_j^m - q_j^m) (p_j - q_j)^{-1} (p_j^{-m} + q_j^{-m})} \quad (1.11)$$

Поскольку обычно априори бывает неизвестно значение величин ΔQ_i , кроме того, эти величины могут изменяться во время поиска (в случае нелинейной модели $Q(x_1, \dots, x_n)$), то имеет смысл не выделять какие-либо действия автомата $L_{2nm, 2n}^{(p)}$, а сделать вероятность переходов на каждой ветви одной и той же $p_i = p$; $q_i = q$ ($i = 1, 2, \dots, n$) $p + q = 1$. В этом случае решение (1.6) примет вид

$$P(i) = p^m/n (p^m + q^m), \quad P(n+i) = q^m/n (p^m + q^m) \quad (1.12) \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

На рис. 3 а, б приведены графики зависимостей характеристик поиска

$$K = \frac{n(p^m + q^m)}{(p^m - q^m) \sum_{i=1}^n |a_i|}; \quad \nu = \frac{q^m}{p^m + q^m} \quad (1.13)$$

от параметров автомата p и m .

Рассмотрим влияние помех, действующих в канале измерения вели-

чины приращения функции качества ΔQ , на работу системы. Пусть помеха ξ , накладываемая на систему, является случайной величиной с математическим ожиданием, равным нулю, и симметричной функцией плотности вероятности. Тогда из-за возможных ошибок в определении знака ΔQ в состояниях, соответствующих ветвям

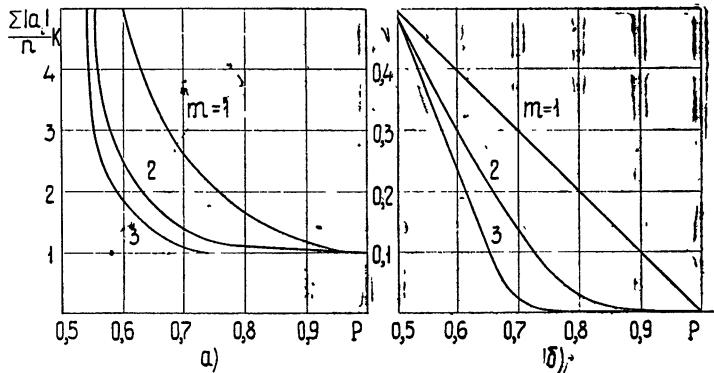


Рис. 3 а, б. Зависимость потерь на поиск K и вероятности ошибочного шага ν от параметров автоматов p и m .

с номерами $j = 1, 2, \dots, n$ ($\Delta Q_j < 0$), автомат будет прощаться с вероятностью r_j , а на ветвях с номерами $j = n + 1, \dots, 2n$ ($\Delta Q_j > 0$) будет с той же вероятностью штрафоваться. Возможные вследствие помех сбои в определении знака ΔQ могут быть отнесены к автомата $L_{2nm, 2n}^{(p)}$. Если пересчитать вероятности переходов автомата $L_{2nm, 2n}^{(p)}$ с учетом возможных сбоев, то задача функционирования автомата $L_{2nm, 2n}^{(p)}$ в случайной среде сводится к эквивалентной задаче функционирования в детерминированной среде автомата $\tilde{L}_{2nm, 2n}$ с вероятностями перехода

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i &= p_i r_i + q_i (1 - r_i), & \tilde{q}_i &= \tilde{p}_{n+i}, \\ \tilde{q}_i &= p_i (1 - r_i) + q_i r_i, & \tilde{p}_i &= \tilde{q}_{n+i}, \\ (i &= 1, 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Стационарные вероятности состояний автомата $\tilde{L}_{2nm, 2n}^{(p)}$ определяются аналогичным образом и получаются из (1.6) заменой p_i и q_i соответственно на \tilde{p}_i и \tilde{q}_i .

Пусть помеха ξ является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией σ^2 . Тогда вероятность r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) равна

$$r_i = 1/2 \left[1 + \Phi \left(\frac{|\Delta Q_i|}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right], \quad (1.15)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей: $\Phi(x) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^x \exp(-u^2) du$.

Из (1.14) и (1.15) следует, что на предельное распределение существенно влияет уровень помех: при $\sigma \rightarrow \infty$ все $P(i) \rightarrow 1/2$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) — распределение стремится к равномерному, и поиск перестает работать.

Далее, из (1.14) и (1.15) следует, что если

$$|\Delta Q_{i^*}| = \max_i \{ |\Delta Q_i| \}, \text{ то } \tilde{p}_{i^*} = \max_i \{ p_i \}.$$

Учитывая (1.7), получаем, что наибольшую вероятность имеют состояния, соответствующие движению вдоль градиента функции $Q(x_1, \dots, x_n)$, причем с увеличением глубины памяти m автомата $L_{2m, 2n}^{(p)}$ вероятность градиентного направления $\dot{P}(i^*) \rightarrow 1$. Поэтому на поиск K и вероятность ющийбочного шага v в этом случае будут равны

$$K \simeq 1/|a_{i^*}|, \quad v \simeq 0.$$

Напомним, что без помех для достаточно больших m было справедливо выражение (рис. 3)

$$K \simeq n / \sum_i |a_i|, \quad v \simeq 0,$$

т. е. действие помех улучшило поисковые характеристики системы.

Таким образом, можно сделать вывод, что аддитивное управляемое устройство (УУ), реализованное в виде вероятностного автомата, обладает асимптотически-оптимальным поведением. Кроме того, при работе в обстановке помех автоматически имеет место самообучение автомата к движению вдоль градиентного направления.

2.. Модель II. В данном пункте будет рассмотрен случай, когда УУ реализовано в виде коллектива независимых вероятностных автоматов. Способ оптимизации многомерных объектов коллективом независимых автоматов был рассмотрен в работах [7, 8]. Для оптимизации будут использованы стохастические автоматы $B_{2m, 2}$ [5] с $2m$ состояниями памяти.

Каждый автомат $B_{2m, 2}^1, \dots, B_{2m, 2}^n$ перерабатывает значения $\Delta Q(x_1, \dots, x_n)$, поступающие на его вход, в значения управляемых координат x_1, \dots, x_n , согласно соотношениям

$$x_k(t) = x_k(t-1) + h_k \sigma_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Здесь $\sigma_k(t)$ — выходное действие k -го автомата $B_{2m, 2}^k$.

$$\sigma_k(t) = F(\varphi_{i_k, j_k}) = \begin{cases} -1 & (i_k = 1) \\ +1 & (i_k = 2) \end{cases} \quad (1 \leq j_k \leq m).$$

За состояние системы примем совокупность векторов $(i_1, \dots, i_n; j_1, \dots, j_n)$, компоненты которых (i_k, j_k) означают, что k -й автомат коллектива $B_{2m, 2}^k$ находится в состоянии φ_{i_k, j_k} , которое находится на i_k -ой ветви автомата и имеет номер j_k . Для удобства пронумеруем все возможные значения вектора (i_1, i_2, \dots, i_n) (таких значений 2^n). Номера от 1 до 2^{n-1} присваиваются состояниями, в которых система движется в сторону уменьшения функции качества, т. е. $\Delta Q < 0$ (в случае линейной модели объекта $Q(x_1, \dots, x_n)$ из 2^n возможных поисковых движений половина обеспечивает $\Delta Q < 0$ и половина $\Delta Q > 0$). Остальным значениям вектора (i_1, \dots, i_n) номера присваиваются следующим образом. Если одно из значений вектора (i_1, \dots, i_n) имеет номер $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ ($\Delta Q < 0$), то номер $2^{n-1} + k$ присваивается тому значению, для которого $\Delta Q_{2^{n-1}+k} = -\Delta Q_k$.

Будем рассматривать работу системы в обстановке помех, которые действуют в канале измерения $\Delta Q(x_1, \dots, x_n)$. Пусть помеха ξ является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией σ^2 . Тогда в состояниях

$(i; j_1, \dots, j_n)$, $i = 1, \dots, 2^{n-1}$, коллектив автоматов поощряется с вероятностью $r_i = 0,5 \left[1 + \Phi \frac{|\Delta Q_i|}{\sqrt{2} \sigma} \right]$ и штрафуется с вероятностью $\bar{r}_i = 1 - r_i$, а в состояниях $(i; j_1, \dots, j_n)$ $i = 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n$, соответственно с \bar{r}_i и r_i , т. е. $\bar{r}_i = r_{i+2^{n-1}}$; $r_i = r_{i+2^{n-1}}$, $i = 1, \dots, 2^{n-1}$. Переход системы из состояния в состояние является марковским стационарным процессом, причем, если все $r_i > 0$, то этот процесс является эргодическим. Отсюда следует, что существуют предельные вероятности $U(i; j_1, \dots, j_n)$ состояний системы. Отметим, что все состояния системы, за исключением состояний, удовлетворяющих условию $j_1 = j_2, \dots, j_n$, являются несущественными, поэтому для этих состояний соответствующие $u(i; j_1, \dots, j_n) = 0$. Обозначим через $U(i, \alpha)$ предельную вероятность состояния $(i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $i = 1, \dots, 2^n$, $\alpha = 1, \dots, m$, и запишем систему уравнений Маркова, которой удовлетворяют величины $U(i, \alpha)$

$$U(i, \alpha) = r_i U(i, \alpha-1) + \bar{r}_i U(i, \alpha+1) \quad (\alpha = \overline{2, m-1}),$$

$$U(i, m) = r_i U(i, m-1) + \bar{r}_i U(i, m),$$

$$U(i, 1) = \bar{r}_i U(i, 2) + 1/2^n \sum_{j=1}^{2^{n-1}} [r_j U(j, 1) + \bar{r}_j U(2^{n-1} + j, 1)],$$

$$U(2^{n-1} + i, \alpha) = \bar{r}_i U(2^{n-1} + i, \alpha-1) + r_i U(2^{n-1} + i, \alpha+1) \quad (\alpha = \overline{2, m-1}), \quad (2.1)$$

$$U(2^{n-1} + i, m) = \bar{r}_i U(2^{n-1} + i, m-1) + r_i U(2^{n-1} + i, m),$$

$$U(2^{n-1} + i, 1) = \bar{r}_i U(i, 2) + 1/2^n \sum_{j=1}^{2^{n-1}} [r_j U(j, 1) + \bar{r}_j U(2^{n-1} + j, 1)] \\ (i = 1, 2, \dots, 2^{n-1}).$$

Решив систему (2.1), найдем предельные вероятности $P(i)$ нахождения системы в состояниях, соответствующих i -му действию

$$P(i) = \frac{r_i^m - \bar{r}_i^m}{r_i^m (r_i - \bar{r}_i) A}, \quad P(2^{n-1} + i) = P(i) \left(\frac{\bar{r}_i}{r_i} \right)^m, \quad (2.2)$$

$$A = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{r_j^m - \bar{r}_j^m}{r_j - \bar{r}_j} (r_j^m + \bar{r}_j^m)^{-1} \right].$$

Для модели II исходя из решения (2.2) легко показать, что при росте уровня помех $\sigma \rightarrow \infty$ все $P(i) \rightarrow 1/2^n$, $i = 1, \dots, 2^n$, т. е. распределение (2.2) стремится к равномерному, вследствие чего поиск перестает работать.

Далее, если $|\Delta Q_{i^*}| = \max_i \{ |\Delta Q_i| \}$, то $r_{i^*} = \max_i \{ r_i \}$ и при $m \rightarrow \infty$ $P(i^*) \rightarrow 1$; $P(i) \rightarrow 0$, $i \neq i^*$, т. е. имеет место асимптотическая оптимальная по глубине памяти оптимизирующих автоматов: при достаточно большом m система с вероятностью, близкой к единице, будет двигаться вдоль градиента функции качества. Характеристика поиска в этом случае имеет следующий вид:

$$K = 1/|\Delta Q_{i^*}|; \quad v \simeq 0.$$

Для сравнения работы моделей обучающихся систем I и II в обстановке помех на рис. 4 приведены графики зависимостей потерь на поиск K от дисперсии помех σ^2 для различных значений глубин памяти автоматов m , вычисленные для функции $Q = x_1 + x_2 + x_3$. Автомат $L_{2mn}^{(p)}$, 2п (модель I) предполагался детерминированным. Пунктирюмы изображены кривые, соответствующие модели I. Как следует из графиков, при всех m потери на поиски модели II ниже, чем в модели I.

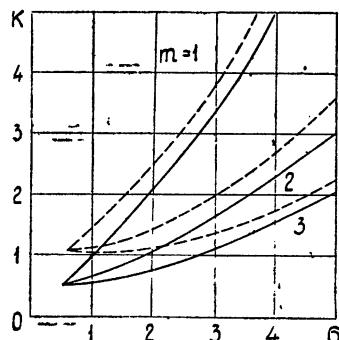


Рис. 4. Зависимость потерь на поиск K от величины дисперсии помех σ^2 .
Пунктирные линии соответствуют модели I, сплошные—модели II.

Таким образом, из сравнения моделей I и II можно сделать вывод, что коллектив автоматов $B_{2m}, 2$ как аддитивная управляющая система обладает следующими преимуществами перед автоматом $L_{2mn}^{(p)}, 2n$. Во-первых, коллектив автоматов при одинаковой размерности оптимизируемых объектов обеспечивает большее число возможных поисковых движений (2^n против n), далее алгоритм поиска, реализуемый коллективом автоматов, имеет лучшие характеристики. Помимо этого модель II обладает еще и преимуществами конструктивного характера: конструкция каждого автомата $B_{2m}, 2$ очень проста, автономность работы автоматов в коллективе позволяет подключать любое число новых автоматов при увеличении числа оптимизирующих параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Буш, Ф. Мостеллер, Стохастические модели обучаемости, Физматгиз, 1962.
2. М. Л. Цетлин, Автоматика и телемеханика, 22, № 10, 1345 (1961).
3. В. Г. Срагович, Ю. А. Флеров, Изв. АН СССР—Техническая кибернетика, № 2, 66 (1965).
4. В. Г. Срагович, В. И. Шмуклер, Изв. АН СССР—Техническая кибернетика, № 6, 3 (1968).
5. Э. М. Вайсборт, Автоматика и телемеханика, № 3, 91 (1968).
6. Л. А. Растигин, Статистические методы поиска, изд. Наука, М., 1968.
7. Ю. И. Неймарк, В. П. Григоренко, А. Н. Рапопорт, Уч. зап. НИИ ПМК и факультета ВМК ГГУ, Горький, 1967.
8. В. П. Григоренко, Ю. И. Неймарк, А. Н. Рапопорт, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 7, 1019 (1968).

**INVESTIGATION OF LEARNING SYSTEMS IMPLEMENTED AS
STOCHASTIC AUTOMATA***V. P. Grigorenko, A. N. Rapoport, Ye. I. Ronin*

A study and comparative analysis for two models of learning systems implemented as linear tactics stochastic automaton and as an autonomous automata collective are carried out. The limit distributions of systems' states probabilities are found for both models. The search characteristics for the above models are determined using these distributions.

УДК 621.396.078.6

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХПЕТЛЕВЫХ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

B. B. Шахгильдян, Ю. И. Савватеев

Исследуются условия устойчивой работы двухпетлевых систем фазовой синхронизации без фильтров нижних частот и с пропорционально-интегрирующими фильтрами в цепях управления. Определяется топология особых точек исследуемых систем и по уравнениям первого приближения исследуется их характер. В общем случае исследование устойчивости ведется с помощью периодических функций Ляпунова.

Многочисленные задачи, связанные с повышением точности работы следящих систем, приводят к структурам, которые можно интерпретировать как две взаимосвязанные модифицированные системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ).

Примерами таких структур могут быть многопетлевые системы фазовой синхронизации [1], а также системы совместного измерения информативных параметров сигналов, синтезированные в [2, 3].

Исследование динамики работы таких систем является трудной задачей, сложность которой определяется как размерностью системы, так и периодичностью нелинейных функций, входящих в уравнения их динамики.

Данная работа посвящена вопросу определения условий устойчивости работы некоторых видов двухпетлевых систем фазовой синхронизации.

Определение характера особых точек стационарного состояния исследуемых систем производится по уравнениям первого приближения. В более общем случае исследование проводится с помощью периодических функций Ляпунова, для построения которых используется метод, предложенный в [4], обобщенный на системы с многими нелинейностями. Критерии устойчивости исследуемых систем в последнем случае следуют из [5].

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Блок-схема двухпетлевой системы фазовой синхронизации представлена на рис. 1.

Динамика работы такой системы, в предположении, что фазовые детекторы являются перемножителями, а характеристики управляющих элементов линейны, описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -H_1(p) \sin x_1 - H_2(p) \sin x_2 + \lambda_1, \\ \dot{x}_2 &= -H_2(p) \sin x_1 - H_1(p) \sin x_2 + \lambda_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где* x_1 — разность фаз эталонного (ЭГ) и подстраиваемого (ПГ 1) ген-

* При $H_2(p) = 0$ из (1) следуют уравнения типовых систем ФАПЧ [6, 7].

раторов, x_2 — разность фаз эталонного и подстраиваемого (ПГ2) генераторов, λ_i — начальные разности частот ($i = 1, 2$), $H_i(p)$ — передаточ-

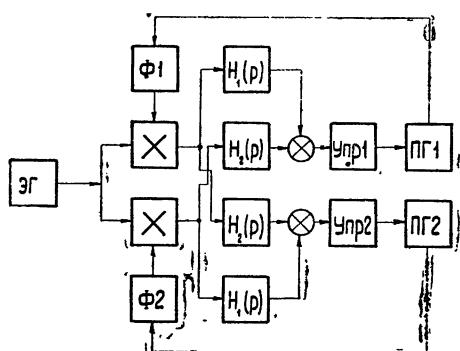


Рис. 1. Блок-схема двухпетлевой системы фазовой синхронизации. Упр i — управители частот, ПГ i — перестраиваемые генераторы, Φi — фазовращатели на $\pi/2$, $H_i(p)$ — фильтры низких частот, ЭГ — эталонный генератор ($i = 1, 2$).

ные функции фильтров низких частот в операторной форме ($p = \frac{d}{dt}$).

В дальнейшем будем полагать, что $H_i(p)$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} H_1(p) &= 1/2 [\alpha K_1(p) + \beta K_2(p)], \\ H_2(p) &= 1/2 [\alpha K_1(p) - \beta K_2(p)], \end{aligned} \quad (2)$$

где $K_i(p)$ — передаточные функции фильтров низких частот*. Из (1) при $K_i(p) = 1$ ($i = 1, 2$) получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 \sin x_1 - a_2 \sin x_2 + \lambda_1, \\ \dot{x}_2 &= -a_2 \sin x_1 - a_1 \sin x_2 + \lambda_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$a_1 = 1/2 (\alpha + \beta), \quad a_2 = 1/2 (\alpha - \beta).$$

В случае использования широко применяемых в практике пропорционально-интегрирующих фильтров низких частот с коэффициентами передачи

$$K_i(p) = (m_i T_i p + 1) (T_i p + 1)^{-1}$$

из (1) получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 \sin x_1 - a_2 \sin x_2 + x_3 + \lambda_1, \\ \dot{x}_2 &= -a_2 \sin x_1 - a_1 \sin x_2 + x_4 + \lambda_2, \\ \dot{x}_3 &= -a_3 \sin x_1 - a_4 \sin x_2 - a_5 x_3 - a_6 x_4 + \lambda_3; \\ \dot{x}_4 &= -a_4 \sin x_1 - a_3 \sin x_2 - a_6 x_3 - a_5 x_4 + \lambda_4, \end{aligned} \quad (4)$$

* Линейным преобразованием координат

$$x = 1/2 (x_1 + x_2), \quad y = 1/2 (x_1 - x_2)$$

исходная система (1) приводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha K_1(p) \sin x \cos y + \gamma_1, \\ \dot{y} &= -\beta K_2(p) \sin y \cos x + \gamma_2, \end{aligned}$$

которой в некоторых случаях описывается динамика следящих систем, синтезированных в [2, 3].

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 1/2(\alpha m_1 + \beta m_2), \quad a_2 = 1/2(\alpha m_1 - \beta m_2), \\ a_3 &= \frac{1}{2T_1 T_2} [\alpha T_2(1 - m_1) + \beta T_1(1 - m_2)], \quad a_5 = \frac{1}{2T_1 T_2} (T_2 + T_1), \\ a_4 &= \frac{1}{2T_1 T_2} [\alpha T_2(1 - m_1) - \beta T_1(1 - m_2)], \quad a_6 = \frac{1}{2T_1 T_2} (T_2 - T_1). \end{aligned}$$

Дальнейшее изложение посвятим вопросу устойчивости работы следящих систем, описываемых (3) и (4).

2. СЛЕДЯЩАЯ СИСТЕМА БЕЗ ФИЛЬТРОВ НИЖНИХ ЧАСТОТ В ЦЕПЯХ УПРАВЛЕНИЯ ($K_t(p)=1$)

Исследуем характер особых точек системы, описываемой (3). Из (3) следует, что на участке $(0 \div 2\pi, 0 \div 2\pi)$ фазовой плоскости (x_1, x_2) особые точки будут иметь координаты

$$\begin{aligned} P_1(x_{11}, x_{21}), \quad P_2(x_{11}, x_{22}), \quad P_3(x_{12}, x_{21}), \\ P_4(x_{12}, x_{22}), \end{aligned}$$

где

$$x_{11} = \arcsin [(a_1 \lambda_1 - a_2 \lambda_2) (a_1^2 - a_2^2)^{-1}],$$

$$x_{21} = \arcsin [(a_1 \lambda_2 - a_2 \lambda_1) (a_1^2 - a_2^2)^{-1}],$$

$$x_{12} = \pi - x_{11},$$

$$x_{22} = \pi - x_{21}.$$

Характеристический полином системы первого приближения имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \quad (5)$$

где

$$a = a_1 [f'(x_{1k}) + f'(x_{2n})],$$

$$b = (a_1^2 - a_2^2) f'(x_{1k}) f'(x_{2n})$$

$$f'(x_{ij}) = \left. \frac{d \sin x_i}{dx_i} \right|_{(x_i=x_{ij})}.$$

Из (5) следует, что особая точка P_1 является асимптотически устойчивой и условия Рэусса—Гурвица имеют вид

$$a > 0, \quad b > 0.$$

Остальные особые точки являются точками неустойчивого равновесия.

Определим условия устойчивости работы системы, описываемой (3), в случае больших отклонений фазовых координат от точки устойчивого равновесия.

Положив

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_1 \Delta_1 + a_2 \Delta_2, \\ \lambda_2 &= a_2 \Delta_1 + a_1 \Delta_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где Δ_i — постоянные величины, представим (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a_1 f_1(x_1) - a_2 f_2(x_2), \\ \dot{x}_2 &= -a_2 f_1(x_1) - a_1 f_2(x_2),\end{aligned}\tag{7}$$

где

$$f_i(x_i) = \sin x_i - \Delta_i \quad (i = 1, 2).$$

Введем в рассмотрение следующую функцию от x_1 и x_2 , являющуюся обобщением V -функции, предложенной в [4], на исследуемый случай

$$V = 2 \int_{x_{11}}^{x_1} N_1(x_1) f_1(x_1) dx_1 + 2 \int_{x_{21}}^{x_2} N_2(x_2) f_2(x_2) dx_2,\tag{8}$$

где

$$x_{ii} = \arcsin \Delta_i.$$

Как и в [4], вспомогательные функции

$$\begin{aligned}N_i(x_i) &= 1 + n_i \quad (x_{ii} \leq x_i \leq \pi - x_{ii}), \\ N_i(x_i) &= 1 - n_i \quad (\pi - x_{ii} \leq x_i \leq 2\pi + x_{ii})\end{aligned}\tag{9}$$

определим так, чтобы

$$(1 + n_i) \int_{x_{ii}}^{\pi - x_{ii}} f_i(x_i) dx_i + (1 - n_i) \int_{\pi - x_{ii}}^{2\pi + x_{ii}} f_i(x_i) dx_i = 0,$$

т. е., чтобы функция V была периодической.

Условие периодичности позволяет следующим образом связать величины n_i и Δ_i :

$$n_i = \frac{\pi \Delta_i}{2(\Delta_i \arcsin \Delta_i + \sqrt{1 - \Delta_i^2})}.\tag{10}$$

Если выполняется (10) и $\Delta_i < 1$, V -функция является положительно определенной.

Вычисляя производную $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$ вдоль траекторий движения системы (7), получим

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -2 \left\{ a_1 N_1 \left[f_1 + \frac{a_2}{2a_1 N_1} (N_1 + N_2) f_2 \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[a_1 N_2 \frac{a_2^2 (N_1 + N_2)^2}{4a_1 N_1} \right] f_2^2 \right\},\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$N_i = N_i(x_i) = 1 \pm n_i, \quad f_i = f_i(x_i).$$

Следующие из (11) достаточные условия устойчивости имеют вид

$$a_1 N_1 > 0,$$

$$4a_1^2 N_1 N_2 - a_2^2 (N_1 + N_2)^2 > 0.\tag{12}$$

Ясно, что при $\Delta_i < 1$ и выполнении условий устойчивости в «малом» первое неравенство из (12) выполняется всегда и для определения условий устойчивости исследуемой системы в целом достаточно рассмотреть лишь последнее неравенство.

Если $\Delta_i \ll 1$, то из (10) имеем

$$n_i = \pi/2 \Delta_i. \quad (13)$$

Подставив (13) во второе неравенство из (12) и произведя необходимые преобразования, получим

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 - c_1 \Delta_1 \Delta_2 - c_2 (\Delta_1 + \Delta_2) - c_3 < 0, \quad (14)$$

где

$$c_1 = 2(2c^2 - 1), \quad c_2 = \frac{4}{\pi} (2c^2 - 1 \pm 1), \quad c_3 = \frac{16}{\pi^2} (c^2 - 1),$$

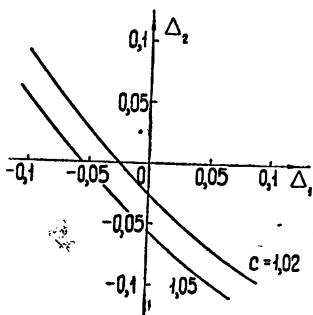
$$c = \frac{a_1}{a_2}.$$

При фиксированных значениях параметров a_i и заданном Δ_j из (13) можно найти допустимые значения Δ_i ($i = 1, 2; j = 1, 2; i \neq j$), гарантирующие устойчивость работы исследуемой системы.

Приравнивая левую часть неравенства (14) нулю и разрешая полученное квадратное уравнение относительно Δ_i , получим

$$\Delta_i^{(1,2)} = \frac{c_2 + c_1 \Delta_j}{2} \pm \sqrt{\frac{(c_1^2 - 4)}{4} \Delta_j^2 + c_2 \left(1 + \frac{c_1}{2}\right) \Delta_j + c_3 + \frac{c_2^2}{4}}. \quad (14a)$$

Если выбрать Δ_i так, чтобы выполнялось соотношение $\Delta_i^{(2)} < \Delta_i < \Delta_i^{(1)}$, то исследуемая система будет удовлетворять достаточным условиям



асимптотической устойчивости в целом, сформулированным в [5]. Результаты расчета допустимых значений $\Delta_i \ll 1$ при некоторых значениях c приведены на рис. 2. Допустимые значения λ_i при данных Δ_i ($i=1, 2$) легко найти, используя (6).

Рис. 2. Максимально допустимые значения постоянных Δ_i

3. СЛЕДЯЩАЯ СИСТЕМА С ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРИРУЩИМИ ФИЛЬТРАМИ НИЖНИХ ЧАСТОТ В КАЖДОМ ИЗ КАНАЛОВ УПРАВЛЕНИЯ

Полагая

$$(\Delta_1 + \Delta_2)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$

$$(\Delta_1 - \Delta_2)(a_1 - a_2 + a_3 - a_4) = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4,$$

перепишем (4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 f_1(x_1) - a_2 f_2(x_2) + x_3, \\ \dot{x}_2 &= -a_2 f_1(x_1) - a_1 f_2(x_2) + x_4, \\ \dot{x}_3 &= -a_3 f_1(x_1) - a_4 f_2(x_2) - a_5 x_3 - a_6 x_4, \\ \dot{x}_4 &= -a_4 f_1(x_1) - a_3 f_2(x_2) - a_6 x_3 - a_5 x_4, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$f_i(x_i) = \sin x_i - \Delta_i,$$

a_n определены в (4) ($n = 1, \dots, 6$). Исследование системы уравнений (15) в общем случае существенно усложняется в связи с ее многомерностью.

Произведем сначала анализ особых точек системы, описываемой (15).

Легко показать, что в интервалах $(0 \div 2\pi, 0 \div 2\pi, x_{30}, x_{40})$ четырехмерного фазового пространства (x_1, x_2, x_3, x_4) особые точки будут иметь координаты $P_1(x_{11}, x_{21}, 0, 0)$,

$$P_2(x_{12}, x_{22}, 0, 0), P_3(x_{12}, x_{21}, 0, 0), P_4(x_{12}, x_{22}, 0, 0),$$

где

$$x_{12} = \pi - x_{11}, \quad x_{22} = \pi - x_{21},$$

$$x_{ii} = \arcsin \Delta_i \quad (i = 1, 2).$$

Характеристический полином системы первого приближения в малой окрестности особой точки P_j имеет вид

$$\lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4 = 0,$$

где

$$b_1 = 2a_5 - a_1(f'_1 + f'_2),$$

$$b_2 = (a_5^2 - a_6^2) - (2a_1 a_5 + a_3)(f'_1 + f'_2) + \\ + (a_1^2 - a_2^2)f'_1 f'_2,$$

$$b_3 = a_1 a_3 (f'_1)^2 + [a_4 a_6 - a_3 a_5 - a_1 (a_5^2 - a_6^2)] \times \\ \times (f'_1 + f'_2) + [2a_5 (a_1^2 - a_2^2) + a_1 a_3] f'_1 f'_2,$$

$$b_4 = [(a_5^2 - a_6^2)(a_1^2 - a_2^2) + 2a_1(a_3 a_5 - a_4 a_6) + a_3^2 - a_4^2] f'_1 f'_2,$$

$$f_i = \left. \frac{d \sin x_i}{dx_i} \right|_{(x_i=x_{ik})},$$

x_{ik} — координата исследуемой особой точки.

Можно показать, что устойчивая особая точка будет иметь координаты $P_1(x_{11}, x_{21}, 0, 0)$, для чего необходимо и достаточно, чтобы определитель Рауффса—Гурвица D_4 исследуемой системы

$$D_4 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 \\ 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix} > 0,$$

и все его диагональные миноры удовлетворяли бы этому же неравенству.

Для исследования устойчивости следящей системы (15) в случае больших отклонений фазовых координат системы относительно точки устойчивого равновесия, введем в рассмотрение функцию

$$V = 2 \int_{x_{11}}^{x_1} N_1(x_1) f_1(x_1) dx_1 + 2 \int_{x_{21}}^{x_2} N_2(x_2) f_2(x_2) dx_2 + \\ + 1/2 (x_3^2 + x_4^2), \quad (16)$$

где вспомогательные функции $N_i(x_i)$ определим так же, как в (9) и (10). Вычислив производную $\dot{V} = \frac{dV}{dt}$ в силу системы (15) получим

$$\dot{V} = - [A_1 f_1^2 + 2A_2 f_1 f_2 + 2A_3 f_1 x_3 + 2A_4 f_1 x_4 + A_5 f_2^2 + 2A_6 f_2 x_3 + 2A_7 f_2 x_4 + A_8 x_3^2 + A_9 x_3 x_4 + A_{10} x_4^2],$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 2a_1 N_1, \quad A_2 = a_2 (N_1 + N_2), \\ A_3 &= a_3/2 - N_1, \quad A_4 = A_6 = a_4/2, \\ A_5 &= 2a_1 N_2, \quad A_7 = a_3/2 - N_2, \quad A_8 = A_{10} = a_5, \\ A_9 &= a_6, \quad f_i = f_i(x_i), \quad N_i = N_i(x_i) \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Составим из коэффициентов квадратичной формы, стоящей в фигурных скобках (17), ее определитель и с помощью критерия Сильвестра найдем условия ее положительной определенности в некоторой окрестности точки устойчивого равновесия. В итоге получим (см. [8])

$$\begin{aligned} d_1 &= A_1 > 0, \\ d_2 &= A_1 A_5 - A_2^2 > 0, \\ d_3 &= A_1 A_5 A_8 + 2A_2 A_3 A_6 - A_1 A_6^2 - A_2^2 A_8 - A_3^2 A_5 > 0, \\ d_4 &= A_{10} d_3 + (A_1 + A_2) A_6 A_7 A_9 + 2A_3 A_4 A_5 A_9 + \\ &+ (A_2 + A_5) (A_4 A_7 A_8 - A_3 A_7 A_9) + (A_3 A_7^2 + A_4^2 A_6) A_6 - A_9^2 d_2 - \\ &- 2A_2 A_4 A_6 A_9 - (A_3 + A_6) A_4 A_6 A_7 - A_2 A_7^2 A_8 - A_4^2 A_5 A_8 > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В некоторых частных случаях условия (18) можно упростить. Например, пусть $\Delta_i \ll 1$ и

$$n_i = \pi/2\Delta_i.$$

Кроме того, пусть $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$, т. е.

$$N_1 = N_2 = N.$$

С учетом сказанного, (18) будет иметь вид

$$\begin{aligned} a_1 N &> 0, \\ (a_1^2 - a_2^2) N^2 &> 0, \\ h_3 + h_2 N - h_1 N^2 &> 0, \\ H_1 + H_2 N + H_3 N^2 - H_4 N^3 &> 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} h_1 &= 2a_1, \quad h_2 = 4a_5 (a_1^2 - a_2^2) + 2(a_1 a_3 - a_2 a_4), \\ h_3 &= a_2 a_3 a_4 - a_1/2 (a_3^2 + a_4^2), \\ H_1 &= a_1 a_3 a_4 a_6 + a_4/16 [a_4^3 - a_3 a_4^2 + a_3^3 (1 - a_4)], \\ H_2 &= a_5 h_3 + 1/2 [a_3 (a_4 a_6 + a_4 a_5 - a_3 a_6) (a_1 + a_2) - \\ &- a_3^2 a_2 a_5] + \frac{a_4^3}{8} - (2a_1 + a_2 a_4) a_4 a_6, \\ H_3 &= a_5 h_2 + (a_1 + a_2) (2a_3 a_6 - a_4 a_5 - a_4 a_6) + \end{aligned}$$

$$+ 2a_2 a_3 a_4 - 4a_6^2 (a_1^2 - a_2^2) + 3/4 a_3 a_4 (1 - a_4),$$

$$H_4 = 2(a_1 + a_2)(a_5 + a_6) - a_4/2(1 - a_4).$$

Т. к., в силу сделанных предположений $n_i \ll 1$, то $N^k \approx 1$ ($k = 2, 3$) и из (19) для этого случая получим оценки для Δ

$$\begin{aligned} |\Delta| &< \left| \frac{2}{\pi h_2} (h_3 + h_5 - h_1) \right|, \\ |\Delta| &< \left| \frac{2}{\pi H_2} (H_1 + H_2 + H_3 - H_4) \right|, \end{aligned} \quad (20)$$

из которых выбираем наиболее ограничительную.

Таким образом, выполнение условий (20) и (18) обеспечивает в соответствующих случаях достаточные условия асимптотической устойчивости в «целом» системы, описываемой (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Шахгильдян, Некоторые вопросы теории и расчета непрерывных систем фазовой автоподстройки частоты. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, М., 1966.
2. А. И. Алексеев, А. Т. Шереметьев, Г. И. Тузов, В. И. Глазов, Теория и применение псевдослучайных сигналов, изд. Наука, М., 1969.
3. А. Н. Детинов, Радиотехника и электроника, 13, № 3, 455 (1968).
4. Ю. Н. Бакаев, А. А. Гуж, Радиотехника и электроника, 10, № 1, 171 (1965).
5. Ю. Н. Бакаев, Изв. АН СССР ОТН, Энергетика и автоматика, № 2, 132 (1960).
6. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1966.
7. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 2, 277 (1959).
8. И. М. Бабаков, Теория колебаний, изд. Наука, М., 1965.

Московский электротехнический
институт связи

Поступила в редакцию
6 мая 1970 г.

ON ANALYSIS OF PHASE SYNCHRONIZATION TWO-LOOP SYSTEMS STABILITY CONDITIONS

V. V. Shakhgildyan, Yu. I. Savvateyev

Stable operation conditions for two-loop systems of phase synchronization without low-pass filters and with proportionally integrating filters in control circuits are investigated. The topology of the analysed systems' singularities is determined and using first approximation equations the nature of these singularities is investigated. In the general case the stability analysis is carried out with the aid of the Liapunov periodic functions.

УДК 621.396.078.6

ДИНАМИКА СОВМЕСТНОЙ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ И СЛЕЖЕНИЯ ЗА ЗАДЕРЖКОЙ. I

B. P. Пономаренко

Установлена динамика бесфильтровой совместной системы фазовой автоподстройки частоты и слежения за задержкой псевдошумового сигнала в предположении бесконечного периода видеопоследовательности с помощью качественного исследования соответствующей нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка. Определены возможные режимы работы системы.

1. Задача о выделении псевдошумового радиосигнала с флюктуирующими параметрами — фазой и задержкой приводит к оптимальному устройству, включающему в себя две следящие системы: систему фазовой автоподстройки частоты генератора синусоидальных колебаний (ФАП) и систему слежения за задержкой принимаемого сигнала (ССЗ), связанных между собой схемой, представленной на рис. 1. В результате взаимодействия следящих систем псевдошумовой сигнал на входе ФАП преобразуется в гармонический сигнал, а на входе ССЗ — в видеопоследовательность максимального периода; преобразованные сигналы отслеживаются соответствующими следящими системами.

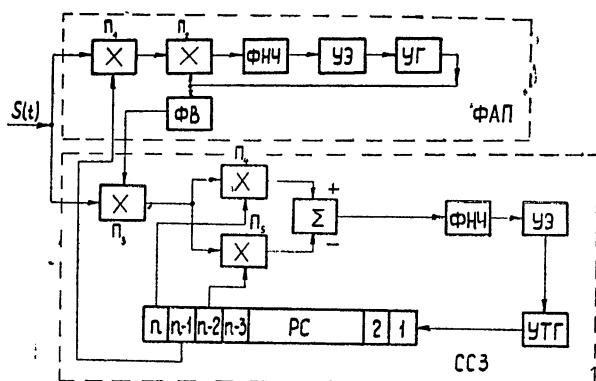


Рис. 1.

П₁—П₅—умножители,
ФНЧ—фильтр низких частот,
УЭ — управляющий элемент,
УГ—управляемый генератор,
УТГ—управляемый тактовый генератор,
ФВ—фазовращатель,
РС—регистр сдвига с обратной связью.

Впервые такая схема обработки псевдошумового сигнала была синтезирована в [1] и названа системой с перекрестными связями. При практической реализации системы [1] первостепенным является вопрос об устойчивых режимах работы и условиях их осуществления. В связи с этим приобретает интерес изучение общей динамики этой системы.

Вопросам динамики систем ФАП посвящена обширная литература, достаточно полный перечень которой содержится, например, в [2, 3]. Исследование динамики ССЗ посвящены работы [4, 5]. Задача о динамике совместной системы ФАП и ССЗ в литературе не рассматривалась.

Уравнения, описывающие рассматриваемую систему, без учета действия помех в операторной форме имеют вид [1]

$$\begin{aligned} p \varphi + k_1 F_1(p) R(\tau) \sin \varphi &= p \varphi_0, \\ p \tau + k_2 F_2(p) D(\tau) \cos \varphi &= p \tau_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где φ — разность между истинным φ_0 и оценочным φ значением фазы сигнала, τ — разность между истинным τ_0 и оценочным τ значением задержки сигнала, $F_1(p)$ и $F_2(p)$ ($p \equiv \frac{d}{dt}$) — коэффициенты передачи фильтров нижних частот в цепи ФАП и ССЗ соответственно, k_1 и k_2 — параметры, характеризующие усиление в цепи ФАП и ССЗ соответственно, $R(\tau)$ — автокорреляционная функция видеопоследовательности, $D(\tau)$ — дискриминаторная характеристика ССЗ; $(D(\tau))$ нормирована так, что ее максимальное значение равно единице.

Характеристики $R(\tau)$ и $D(\tau)$ являются периодическими функциями τ с периодом $L = M\Delta = (2^n - 1)\Delta$ (Δ — длительность одного элемента видеопоследовательности, n — число каскадов генератора псевдошумового сигнала в ССЗ). Обычно для устранения неоднозначности при определении задержки псевдошумовые сигналы формируются так, что $M \gg 1$ [1, 4, 6], и требуется обеспечить вхождение в синхронизм на первом периоде характеристик $R(\tau)$ и $D(\tau)$ [7]. Поэтому, в первую очередь, уравнения (1) следует рассмотреть на одном периоде характеристик $R(\tau)$ и $D(\tau)$. Следуя [1, 4], характеристики $R(\tau)$ и $D(\tau)$ полагаются кусочно-линейными вида (рис. 2)

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - (1+\mu) \frac{\tau}{\Delta} & \left(0 \leq \frac{\tau}{\Delta} \leq 1 \right) \\ -\mu & \left(\frac{\tau}{\Delta} \geq 1, \frac{\tau}{\Delta} \leq -1 \right), \\ 1 + (1+\mu) \frac{\tau}{\Delta} & \left(-1 \leq \frac{\tau}{\Delta} \leq 0 \right) \end{cases}, \quad (2)$$

$$D(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\Delta} & \left(-1 \leq \frac{\tau}{\Delta} \leq 1 \right) \\ 2 - \frac{\tau}{\Delta} & \left(1 \leq \frac{\tau}{\Delta} \leq 2 \right) \\ -\left(2 + \frac{\tau}{\Delta} \right) & \left(-2 \leq \frac{\tau}{\Delta} \leq -1 \right) \\ 0 & \left(\frac{\tau}{\Delta} \geq 2, \frac{\tau}{\Delta} \leq -2 \right) \end{cases}, \quad (3)$$

где $\mu = 1/M \ll 1$.

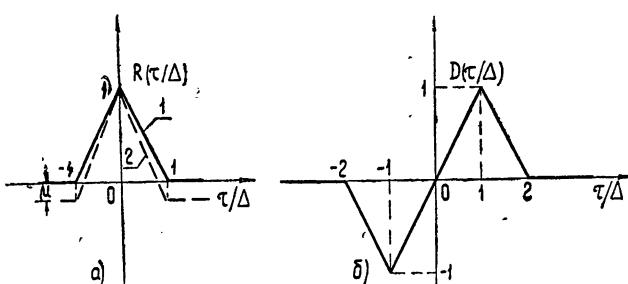


Рис. 2.

Исследование динамики совместной системы ФАП и ССЗ даже при наиболее простых типах фильтров нижних частот в цепях управления представляет собой сложную задачу из-за высокого порядка системы дифференциальных уравнений, соответствующей (1), и наличия в уравнениях (1) четырех нелинейных зависимостей от координат. В настоящей работе изучается динамика рассматриваемой системы в случае, когда фильтры в колыце ФАП и ССЗ отсутствуют, т. е. $F_1(p) = F_2(p) = 1$. Именно такая система является оптимальной для выделения псевдослучайного сигнала, когда случайные колебания фазы и задержки являются процессами с независимыми приращениями [1]. Предполагается, что число элементов псевдошумового сигнала $M = 2^n - 1 \rightarrow \infty$, т. е. параметр μ пренебрежимо мал ($\mu \approx 0$). Полагая $\mu = 0$, мы заменяем реальную характеристику $R(\tau)$ (кривая 2 на рис. 2 а) идеализированной (кривая 1 на рис. 2 а)*. Для исследования применяются методы качественной теории дифференциальных уравнений, являющиеся здесь наиболее адекватными и общими, благодаря которым устанавливаются все возможные режимы работы рассматриваемой системы и переходные процессы.

После введения безразмерного времени $t' = k_1 t$, параметров, $\gamma = \frac{p \varphi_0}{k_1}$, $\beta = \frac{p \tau_0}{k_1}$, $b = \frac{k_2}{k_1}$, переменного $x = \frac{\tau}{\Delta}$ вместо уравнений (1) получаем систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt'} &= \gamma - R(x) \sin \varphi, \\ \frac{dx}{dt'} &= \beta - bD(x) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

эквивалентную одному уравнению

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\beta - bD(x) \cos \varphi}{\gamma - R(x) \sin \varphi}, \quad (5)$$

где $R(x)$ и $D(x)$ определены равенствами (2) и (3) соответственно, в которых $\mu = 0$.

В силу периодичности правых частей системы (4) по координате φ за фазовое пространство системы (4) может быть принята поверхность цилиндра (φ, x) . Цилиндр рассматриваем развернутым на часть плоскости $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Подставляя $R(x)$ и $D(x)$ в (4), получим склоненную систему

$$\dot{\varphi} = \gamma - (1-x) \sin \varphi \quad \dot{x} = \beta - bx \cos \varphi \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (6a)$$

$$\dot{\varphi} = \gamma \quad \dot{x} = \beta - b(2-x) \cos \varphi \quad (1 \leq x \leq 2), \quad (6b)$$

$$\dot{\varphi} = \gamma \quad x = \beta \quad (x \geq 2, x \leq -2), \quad (6c)$$

$$\dot{\varphi} = \gamma - (1+x) \sin \varphi \quad \dot{x} = \beta - bx \cos \varphi \quad (-1 \leq x \leq 0), \quad (6d)$$

$$\dot{\varphi} = \gamma \quad \dot{x} = \beta + b(2+x) \cos \varphi \quad (-2 \leq x \leq -1), \quad (6e)$$

* Динамика системы при значениях $\mu \neq 0$ рассмотрена в части II работы, публикуемой отдельно.

которая получена от склейки пяти нелинейных систем второго порядка, однозначно определенных в областях $x \leq -2$, $-2 \leq x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq x \leq 2$, $x \geq 2$ фазового цилиндра (φ, x) . На линиях склейки $x = \pm 2$, $x = 0$, $x = \pm 1$ переменные φ и x , $\frac{d\varphi}{dt}$ и $\frac{dx}{dt}$ непрерывны.

Входящий в систему (4) параметр b по физическому смыслу является положительным. Что касается параметров γ и β , то в силу замечания 1, достаточно рассмотреть только их положительные значения.

Разбиение цилиндрической фазовой поверхности на траектории определяют [8] состояния равновесия, сепаратрисы седел, предельные циклы первого и второго рода. Качественная структура разбиения на траектории системы (4) всей поверхности фазового цилиндра (φ, x) в силу замечания 2 может быть получена в результате установления разбиения на траектории ее части $x \geq 0$.

Замечание 1. Уравнение (5) не изменяется от замены переменного φ на $-\varphi$ и параметра γ на $-\gamma$, а также от замены переменного x на $-x$ и параметра β на $-\beta$. Поэтому достаточно установить поведение фазовых траекторий при положительных значениях параметров γ и β .

Замечание 2. Уравнение (5) не изменяется при замене переменных φ на $\pi - \varphi$ и x на $-x$. Отсюда следует, что уравнение (5) достаточно рассмотреть в области $x \geq 0$ фазовой поверхности, так как фазовые траектории в области $x < 0$ могут быть получены с помощью зеркального отображения траекторий в области $x \geq 0$ относительно прямой $x = 0$, сдвига полученных траекторий по φ на величину $-\pi$ и зеркального отображения этих сдвинутых траекторий относительно прямой $\varphi = 0$.

Изучение системы (6а)–(6д) будет проведено в зависимости от параметра β отдельно для случаев $\beta = 0$ и $\beta > 0$.

2. Случай 1. $\beta = 0$. Фазовые траектории зеркально симметричны относительно линий $x = 0$, $\varphi = \pm \pi/2$. В областях $x \geq 2$, $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq x \leq 1$ соответствующие уравнения интегрируются. Уравнения интегральных кривых имеют вид

$$\begin{aligned} x &= C_1 \quad (x \geq 2), \\ x &= 2 - C_2 e^{b/\gamma \cdot \sin \varphi} \quad (1 \leq x \leq 2), \\ x^{1/b} e^{-x^{1/b}} \left(C_3 - \gamma \int e^{x^{1/b}} x^{-(1+b)/b} dx \right) &= b \sin \varphi \quad (0 \leq x \leq 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Главными изоклиниами уравнения (5) при $\gamma < 1$ являются интегральные прямые $x = 0$, $x = \pm 2$, прямые $\varphi = \pm \pi/2$ (изоклины горизонтальных наклонов) и кривая $\gamma - R(x) \sin \varphi = 0$ (изоклина вертикальных наклонов). При значениях параметра $0 < \gamma < 1$ система имеет на фазовой поверхности четыре состояния равновесия: $A_1(\arcsin \gamma, 0)$, $A_2\left(\frac{\pi}{2}, 1 - \gamma\right)$, $A'_1(\pi - \arcsin \gamma, 0)$, $A'_2\left(\frac{\pi}{2}, -(1 - \gamma)\right)$.

Состояние равновесия A_1 является устойчивым узлом A'_1 — неустойчивым узлом, состояния равновесия A_2 и A'_2 — седла, критические направления сепаратрис в которых равны $x_{1,2} = \pm \sqrt{b(1 - \gamma)}$. При $\gamma = 1$ состояния равновесия A_1 , A_2 , A'_1 , A'_2 сливаются, образуя сложную особую точку; при $\gamma > 1$ состояний равновесия нет.

С помощью изучения общего интеграла (7) и расположения главных изоклинов однозначно устанавливаем поведение фазовых траекторий при $\beta = 0$.

Расположение фазовых траекторий для значений $0 < \gamma < 1$ и $\gamma > 1$ представлено на рис. 3 а и 3 б соответственно (пунктирной линией проведена изоклина вертикальных наклонов). При $\gamma < 1$ сепаратрисы S_{10} и S_{20} идут из седла A_2 в то же самое седло, охватывая цилиндр при $x > 0$. В силу симметрии фазовых траекторий относительно оси $x = 0$ сепаратрисы \tilde{S}_{10} и \tilde{S}_{20} идут из седла A'_2 в то же самое седло, охватывая цилиндр при $x < 0$. Фазовые траектории, расположенные выше сепаратрис S_{10} и S_{20} седла A_2 и ниже сепаратрис \tilde{S}_{10} и \tilde{S}_{20} седла A'_2 , являются замкнутыми, охватывающими фазовый цилиндр. Фазовые траектории, расположенные в области, заключенной между сепаратрисами S_{10} , S_{20} седла A_2 и \tilde{S}_{10} , \tilde{S}_{20} седла A'_2 , за исключением сепаратрис, входящих в седла, с ростом времени t' приближаются к устойчивому состоянию равновесия A_1 . При $\gamma > 1$ все траектории являются замкнутыми, охватывающими фазовый цилиндр.

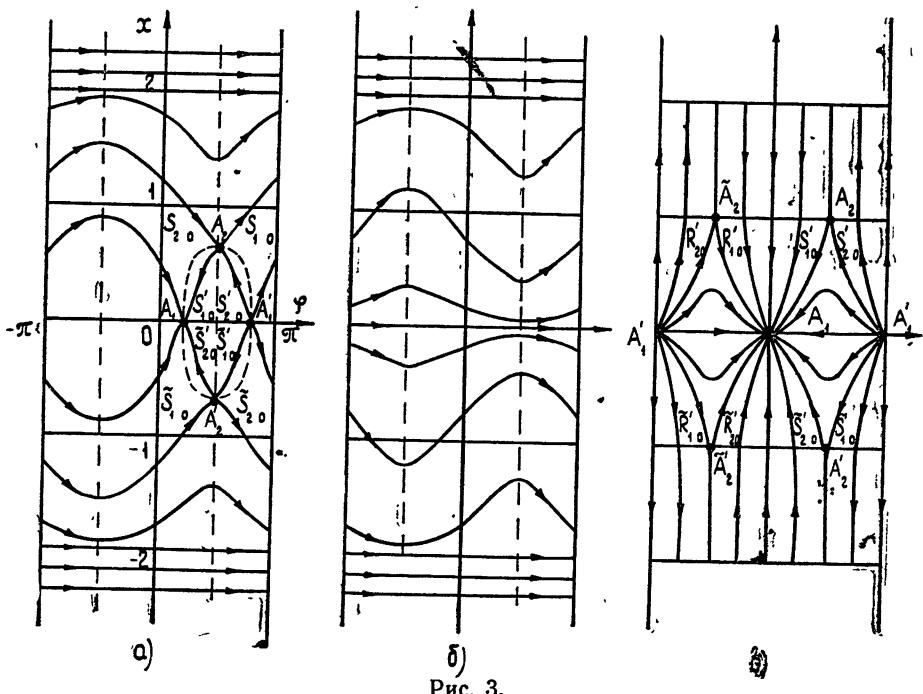


Рис. 3.

Для значений $\beta = \gamma = 0$ система (4) имеет в области $-1 \leq x \leq 1$ шесть состояний равновесия: $A_1(0, 0)$ —устойчивый узел, $A'_1(\pm \pi, 0)$ —неустойчивый узел и состояния равновесия $A_2\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $A'_2\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$, $\tilde{A}_2\left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $\tilde{A}'_2\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$, расположенные на линиях склейки $x = \pm 1$. Расположение фазовых траекторий представлено на рис. 3 в. В областях $x \geq 2$, $x \leq -2$ и на прямых $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ($1 \leq x \leq 2$, $-2 \leq x \leq -1$) фазовой поверхности все точки являются состояниями равновесия системы.

Случай 2. $\beta > 0$. Состояния равновесия. Пересечения кривых

$$\beta - bD(x) \cos \varphi = 0,$$

$$\gamma - R(x) \sin \varphi = 0,$$

являющихся соответственно изоклиниами горизонтальных и вертикальных наклонов системы (4), определяют на фазовом цилиндре при значениях параметров, удовлетворяющих неравенствам $0 < \beta < b(1 - \gamma^{2/3})^{3/2}$, $\gamma > 0$, четыре состояния равновесия: $A_1(\varphi_1, x_1)$, $A_2(\varphi_2, x_2)$, $A'_1(\pi - \varphi_1, -x_1)$, $A'_2(\pi - \varphi_2, -x_2)$. Координаты состояний равновесия определяются уравнениями

$$\beta - bx \cos \varphi = 0, \quad \gamma - (1-x) \sin \varphi = 0. \quad (8)$$

Состояние равновесия A_1 является устойчивым узлом, A'_1 — неустойчивым узлом, состояния равновесия A_2 и A'_2 — седла. При $\beta = b(1 - \gamma^{2/3})^{3/2}$ состояния равновесия A_1 и A_2 , A'_1 и A'_2 сливаются, образуя сложные состояния равновесия типа седло-узел, при $\beta > b(1 - \gamma^{2/3})^{3/2}$ состояний равновесия нет. На рис. 4 представлена поверхность $\beta - b(1 - \gamma^{2/3})^{3/2} = 0$, отделяющая область A пространства параметров (β, γ, b) , для точек которой система (4) имеет четыре состояния равновесия, от области B , для точек которой состояний равновесия нет. Для значений $\gamma = 0$, $\beta < b$ система (4) имеет в области $-1 \leq x \leq 1$ шесть состояний равновесия: $A_1(0, \beta/b)$ — устойчивый узел, $A'_1(\pm \pi, -\beta/b)$ — неустойчивый узел, и состояния равновесия $A_2(\arccos \beta/b, 1)$, $\tilde{A}_2(-\arccos \beta/b, 1)$, $A'_2(\pi - \arccos \beta/b, -1)$, $\tilde{A}'_2(-\pi + \arccos \beta/b, -1)$, расположенные на линиях склейки $x = \pm 1$ (рис. 7 г, д).

Сепаратрисы седел и их бифуркации. Для исследования поведения интегральных кривых при $\beta > 0$ определим поворот векторного поля

системы (4) при возрастании параметра β ($\beta_2 > \beta_1$) и остальных параметрах фиксированных. Разность направлений векторных полей в каждой точке фазовой поверхности определяется равенством

$$R = \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\beta=\beta_2} - \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\beta=\beta_1} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\gamma - R(x) \sin \varphi}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что в области фазовой поверхности, определенной неравенством $\gamma - R(x) \sin \varphi > 0$, поворот векторного поля происходит против часовой стрелки ($R > 0$). В области, определенной неравенством $\gamma - R(x) \sin \varphi < 0$, поворот поля происходит по часовой стрелке ($R < 0$).

Пользуясь свойством (9) поворота векторного поля с изменением параметра β и, учитывая характер расположения интегральных кривых при $\beta=0$ и характер расположения главных изоклинов, устанавливаем возможное расположение сепаратрис седел для значений $\beta \neq 0$, но достаточно малых. При возрастании параметра β от значений $\beta=0$ седло A_2 смещается так, что его координаты удовлетворяют неравенствам $\varphi_2 < \frac{\pi}{2}$, $x_2 < 1 - \gamma$. Сепаратриса S'_1 седла A_2 с положительным наклоном (рис. 5 а) с ростом времени t' приближается к устойчивому узлу A_1 , не выходя за пределы области, ограниченной частями $A_1 A_2$ изоклинов горизонтальных и вертикальных наклонов (на рис. 5 эти изоклины проведены пунктирными линиями). Сепаратриса S_1 при возрастании t' выходит из седла A_2 с положительным наклоном в область, где $\frac{d\varphi}{dt'} > 0$

и $\frac{dx}{dt'} < 0$.

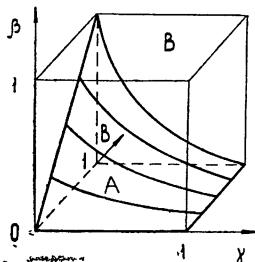


Рис. 4.

и $\frac{dx}{dt'} > 0$ и пересекает линию $\varphi = \frac{\pi}{2}$ в точке с ординатой, большей чем $(1 - \gamma)$. Отсюда, пользуясь свойством (9), заключаем, что сепаратриса S_1 в полосе $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ фазовой поверхности проходит выше, чем сепаратриса S_{10} седла A_2 при $\beta = 0$. Сепаратриса S'_2 при $t \rightarrow -\infty$ выходит из неустойчивого узла A'_1 . Для определения расположения сепаратрисы S_2 рассмотрим траекторию L системы (4) при $\beta=0$, пересекающую изоклину вертикальных наклонов в точке A_2 (рис. 5 а). Сравнивая наклон сепаратрисы S_2 в седле A_2 с наклоном касательной к кривой L в точке A_2 и, учитывая свойство (9) поворота векторного поля

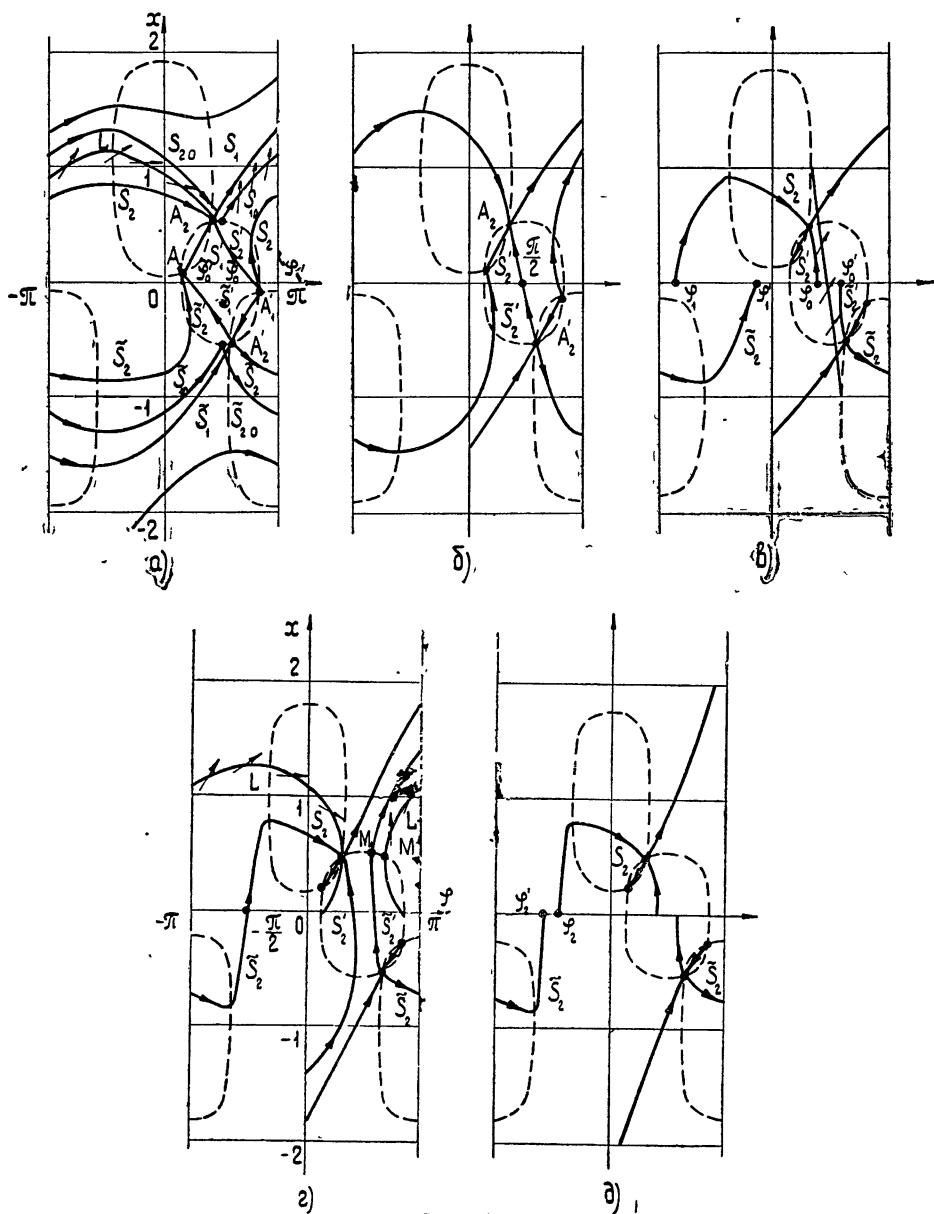


Рис. 5.

устанавливаем, что сепаратриса S_2 в полюсе $-\pi \leq \varphi \leq \varphi_2$ проходит ниже сепаратрисы S_{20} седла A_2 при $\beta = 0$ и при $t' \rightarrow -\infty$ выходит из неустойчивого узла A'_1 . Таким образом, при $\beta = 0$ сепаратрисы S_{10} и S_{20} седла A_2 совпадают, а при $\beta \neq 0$, но достаточно малых, сепаратрица S_1 проходит над сепаратрисой S_{10} , а сепаратриса S_2 проходит под сепаратрисой S_{20} . Исходя из расположения сепаратрис седла A_2 , на основании замечания 2 устанавливаем при $\beta \neq 0$, но достаточно малых, расположение сепаратрис седла A'_2 . Сепаратриса \widetilde{S}_1 при $t' \rightarrow -\infty$ выходит из неустойчивого узла A'_1 , сепаратриса \widetilde{S}_2 при возрастании t' стремится к устойчивому узлу A_1 , сепаратриса \widetilde{S}_1 проходит ниже сепаратрисы \widetilde{S}_{10} , сепаратриса \widetilde{S}_2 проходит выше сепаратрисы \widetilde{S}_{20} и с ростом времени t' приближается к устойчивому узлу A_1 (рис. 5 а).

При последнем за изменением расположения сепаратрис седел при возрастании параметра β . Сепаратриса S_1 для значений $\beta > \beta_0$, где β_0 достаточно мало, проходит выше сепаратрисы S_1 при $\beta = \beta_0$, а сепаратриса S_2 для $\beta > \beta_0$ проходит ниже сепаратрисы S_2 при $\beta = \beta_0$. Сепаратриса \widetilde{S}_1 седла A'_2 для значений $\beta > \beta_0$, проходит ниже сепаратрисы \widetilde{S}_1 при $\beta = \beta_0$, сепаратриса \widetilde{S}_2 при $\beta > \beta_0$ проходит выше сепаратрисы \widetilde{S}_2 при $\beta = \beta_0$.

Для определения взаимного расположения сепаратрис S'_2 и \widetilde{S}'_2 при $\beta > \beta_0$ рассмотрим вспомогательную прямую $l: x = \frac{\pi/2 - \varphi}{\arcsin \beta/b}$. Определяя на этой прямой разность направлений, определяемых уравнением (5) и наклоном прямой l , устанавливаем, что при условии

$$\beta \arcsin \beta/b > 1 - \gamma \quad \left(b > \frac{2}{\pi} \right) \quad (10)$$

сепаратриса S'_2 (\widetilde{S}'_2) проходит ниже (выше) прямой l и пересекает ось $x = 0$ в точке $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ ($\varphi'_0 > \frac{\pi}{2}$) (рис. 5 в). При $\beta = \beta_0$, где β_0 достаточно мало, $\gamma < 1$, сепаратриса S'_2 (\widetilde{S}'_2) пересекает ось $x = 0$ в точке $\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$ ($\varphi'_0 < \frac{\pi}{2}$) (рис. 5 а). На основании свойства (9) поворота векторного поля с ростом параметра β устанавливаем, что при переходе от значений $\beta = \beta_0$ к значениям β , удовлетворяющим неравенству (10), система (4) обязательно и при том единственный раз при $\beta = \beta^*(\gamma, b)$ проходит через бифуркационное состояние, при котором сепаратрисы S'_2 и \widetilde{S}'_2 пересекают ось $x = 0$ в точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. совпадают (рис. 5 б).

Бифуркационное значение параметра $\beta = \beta^*(\gamma, b)$ определялось приближенно с помощью построения численными методами на ЭВМ сепаратрис близких грубых систем [9, 10].

Взаимное расположение сепаратрис S_2 и \widetilde{S}_2 при $\beta > \beta_0$ в зависимости от параметров устанавливается численными методами с помощью построения сепаратрис на ЭВМ. Для фиксированных значений параметров $b = b_0$ и $\gamma = \gamma_0 > 0$ устанавливалось существование значения параметра $\beta = \beta_1$, при котором сепаратриса S_2 (\widetilde{S}_2) пересекает ось $x = 0$ в точке $\varphi_1 < -\frac{\pi}{2}$ ($\varphi'_1 > -\frac{\pi}{2}$) (рис. 5 в) и $\beta = \beta_2$, при котором сепаратриса S_2 (\widetilde{S}_2) пересекает ось $x = 0$ в точке $\varphi_2 > -\frac{\pi}{2}$ ($\varphi'_2 < -\frac{\pi}{2}$) (рис. 5 д).

Пользуясь свойством (9) векторного поля системы (4) с изменением параметра β , устанавливаем, что при переходе от значения $\beta = \beta_1$ к значению $\beta = \beta_2$ при значениях параметров $b = b_0$, $\gamma = \gamma_0$ существует единственное значение параметра $\beta = \beta_0$, при котором сепаратрисы S_2 и \widetilde{S}_2 пересекают ось $x = 0$ в точке $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, т. е. совпадают (рис. 5 г). Бифуркационное значение параметра $\beta = \beta_0(\gamma, b)$ определялось, как и ранее, приближенно с помощью построения численными методами на ЭВМ сепаратрис близких грубых систем*. Для значений параметров $\beta = \beta^*(\gamma, b)$ и $\beta = \beta_0(\gamma, b)$ система (4) является негрубой [8, 9], сепаратрисы идут из седла в седло, не охватывая фазовый цилиндр.

Рассматривая для значений $\beta > \beta^*(\gamma, b)$ расположение сепаратрис \widetilde{S}_2 и S_2 относительно кривых L и L_1 (L и L_1 — интегральные кривые системы (1) при $\beta = 0$), проходящих через точки $A_2(\varphi_2, x_2)$ и $M(\pi - \varphi_2, x_2)$ (рис. 5 г), устанавливаем отсутствие бифуркаций, связанных с совпадением сепаратрис \widetilde{S}_2 и S_2 (S'_2 и \widetilde{S}_2) седел A_2 и A'_2 . Следовательно, других бифуркаций сепаратрис система (4) не имеет.

На основании установленного расположения сепаратрис седел при $\beta > 0$ делаем заключение о том, что ни одна фазовая траектория не может замкнуться на фазовом цилиндре, т. е. система (4) не имеет предельных циклов первого и второго рода ни при каких значениях параметров. Бифуркационные кривые, соответствующие совпадению сепаратрис, представлены на рис. 6 в координатах $(\gamma, \frac{\beta}{b})$ для ряда фиксированных значений параметра b . Эти кривые проходят в области существования состояний равновесия (область A на рис. 4). Границы области $\frac{\beta}{b} = (1 - \gamma^{2/3})^{3/2}$ представлены на рис. 6 пунктирной линией.

Для точек области G_1 пространства параметров, определенной нера-

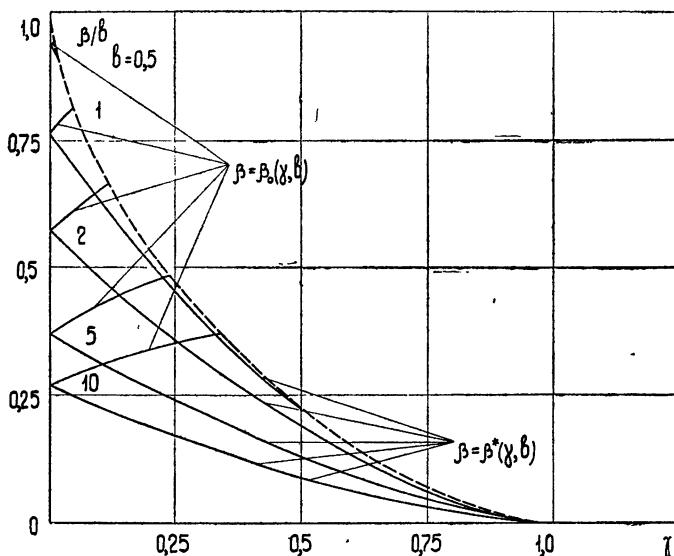


Рис. 6.

* Счет по приближенному построению сепаратрис спрограммирован и проведен К. Г. Кивелевой на ЭЦВМ БЭСМ-3М.

венствами $0 < \beta < \beta^*(\gamma, b)$, $\gamma > 0$, разбиение фазовой поверхности на траектории представлено на рис. 7 а). Фазовые траектории, расположенные в области ниже сепаратрис S_2 и S'_2 седла A_2 с ростом времени t' приближаются к устойчивому узлу A_1 . Фазовые траектории, расположенные в области выше сепаратрис S_2 и S'_2 , с ростом времени t' поднима-

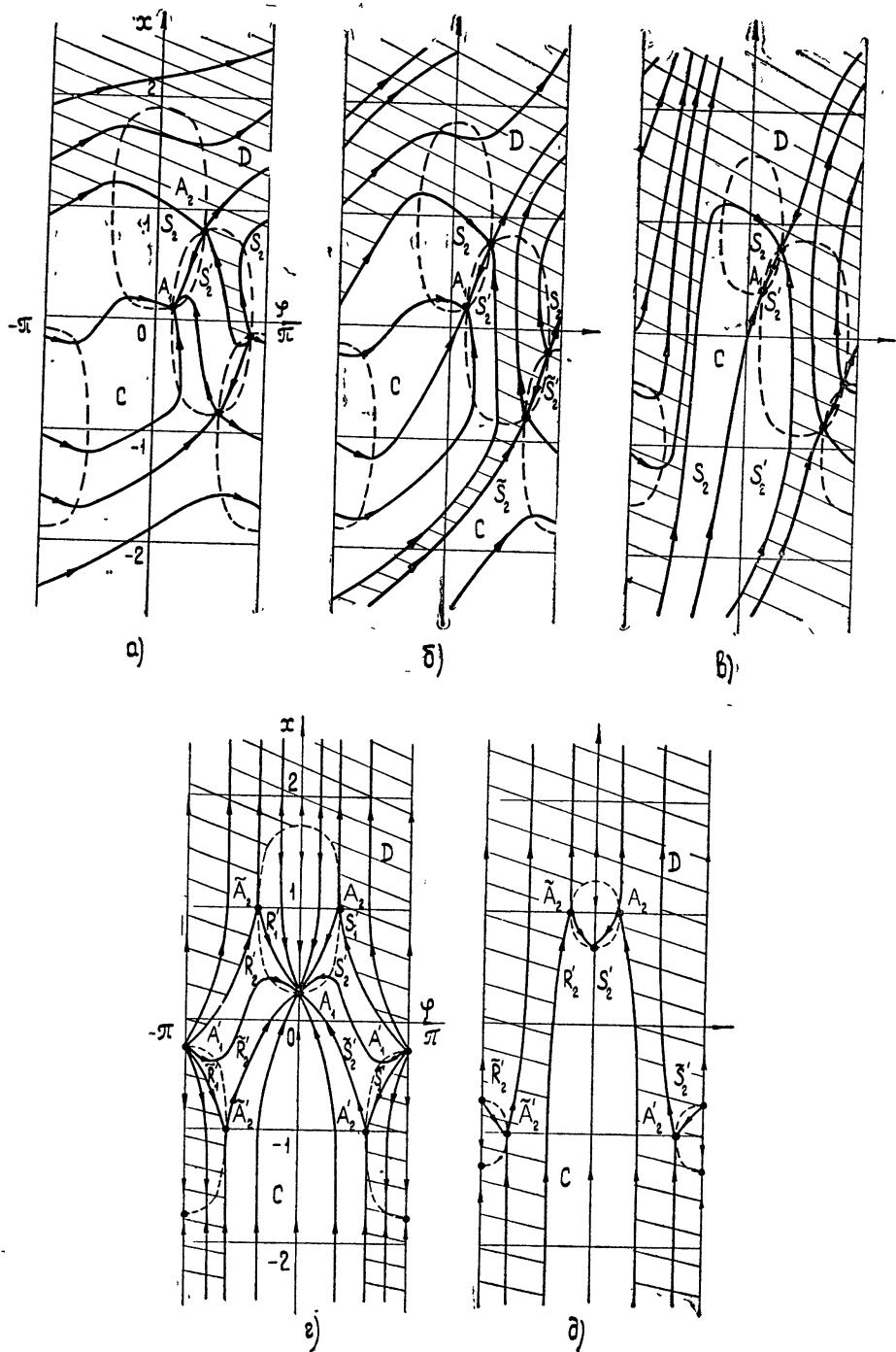


Рис. 7.

ются вверх по цилиндру. Для точек области G_2 пространства параметров, определенной неравенствами $\beta^*(\gamma, b) < \beta < \beta_0(\gamma, b)$, $\frac{\beta}{b} < (1 - \gamma^{2/3})^{3/2}$,

$\gamma > 0$, расположение фазовых траекторий представлено на рис. 7 б, для точек области G_3 , определенной неравенствами $\beta_0(\gamma, b) < \beta < b(1 - \gamma^{2/3})^{3/2}$, $\gamma > 0$, поведение фазовых траекторий представлено на рис. 7 в. Фазовые траектории, расположенные в незаштрихованной области фазовой поверхности, при возрастании времени t' приближаются к устойчивому узлу A_1 ; траектории, расположенные в заштрихованной области фазовой поверхности, с ростом t' поднимаются вверх по цилиндру, не попадая в состояние равновесия A_1 .

Для точек прямой $\gamma = 0$ при $0 < \beta < \beta^*(0, b)$ расположение фазовых траекторий представлено на рис. 7 г, а при $\beta^*(0, b) < \beta < b$ — на рис. 7 д.

Из установленного разбиения фазовой поверхности на траектории системы (4) следует, что при начальных значениях x , удовлетворяющих условию $x \leq -2^*$ для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $0 < \beta < \beta^*(\gamma, b)$, $\gamma > 0$, все траектории с ростом времени t' приближаются к устойчивому состоянию равновесия A_1 при любых начальных значениях φ . Для остальных значений параметров всегда существуют интервалы начальных значений φ , для которых траектории с ростом времени t' не попадают в область притяжения устойчивого состояния равновесия A_1 .

3. Проведенное качественное исследование системы уравнений (4) устанавливает качественную структуру разбиения цилиндрической фазовой поверхности на траектории и ее зависимость от параметров. Качественная структура полностью определяется расположением и бифуркациями состояний равновесия и сепаратрис седел; предельные циклы первого и второго рода отсутствуют.

Качественное исследование системы уравнений (4) позволяет сделать выводы о возможных режимах работы бесфильтровой системы ФАП и ССЗ и их зависимости от параметров и начальных условий.

1) Стационарный режим синхронизма возможен при выполнении неравенства $\beta/b < (1 - \gamma^{2/3})^{3/2}$ и определяется единственным устойчивым состоянием равновесия системы (4) A_1 типа узел с координатами, удовлетворяющими уравнениям (8). В режиме синхронизма разность фаз φ и разность задержек x имеют при $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ остаточные, отличные от нуля значения. С увеличением параметра b эти значения уменьшаются, следовательно, возрастает точность в определении информативных параметров φ_0 и x_0 принимаемого сигнала. При значениях параметров, удовлетворяющих неравенству $\beta/b > (1 - \gamma^{2/3})^{3/2}$, устойчивое состояние равновесия A_1 системы (4) не существует; установление режима синхронизма невозможно ни при каких начальных значениях разности фаз φ и разности задержек x .

Стационарных режимов биений первого и второго рода нет.

2) Переходные процессы к состоянию синхронизма определяются на фазовой поверхности траекториями, расположенными в областях притяжения устойчивого состояния равновесия A_1 (области вхождения в синхронизм — области C на рис. 7). Границами этих областей являются сепаратрисы седел системы (4). При всех значениях параметров системы (4) всегда существуют области начальных условий, начиная с которых установление режима синхронизма невозможно (области невхождения в синхронизм — области D на рис. 7). Размеры областей C и D за-

* На практическую важность таких начальных условий в ССЗ было указано в [4, 6].

висят от параметров системы; при возрастании параметра β область C уменьшается, область D увеличивается.

3) Для наиболее интересного для практики случая, когда в результате осуществления процесса поиска в ССЗ начальная разность задержек $x \leq -2$, вхождение системы в синхронизм при любых начальных значениях разности фаз φ происходит только для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $0 < \beta < \beta^*(\gamma, b)$, $\gamma > 0$ (рис. 6). Для остальных значений параметров всегда существуют такие значения разности фаз φ , при которых не происходит вхождение в синхронизм. Бифуркационная кривая $\beta = \beta^*(\gamma, b)$, соответствующая совпадению сепаратрис S_2' и \widetilde{S}_2' седел A_2 и A_2' системы (4), определяет область значений параметров (область синхронизации), для которой при любых начальных значениях φ и $x \leq -2$ в системе устанавливается режим синхронизма. Эта область уменьшается при увеличении параметра b .

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Алексеев, А. Г. Шереметьев, Г. И. Тузов, Б. И. Глазов, Теория и применение псевдослучайных сигналов, изд. Наука, М., 1969.
2. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, Фазовая автоподстройка частоты, изд. Связь, М., 1966
3. Г. И. Тузов, Выделение и обработка информации в допплеровских системах, изд. Сов. радио, М., 1967.
4. J. J. Spilker, IEEE Trans. on Space Electron and Telemetry, SET-9, № 1, 1 (1963).
5. Л. Н. Белюстина, В. П. Пономаренко, В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 11, 1669 (1970).
6. R. B. Ward, IEEE Trans. on Space Electron. and Telemetry, SET-10, № 2, 49 (1964).
7. Дж. Спрингет, Сб. Статистическая теория связи и ее приложение, под ред. А. В. Балакришнана, изд. Мир, М., 1967.
8. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
9. Е. А. Андронова-Леонович, Л. Н. Белюстина, Тр. международного симпозиума по нелинейным колебаниям, изд. АН УССР, Киев, 1963.
10. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 4, 639 (1959).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 октября 1970 г.

DYNAMICS OF A JOINT SYSTEM OF PHASE-LOCKING AND DELAY-FOLLOWING. I

V. P. Ponomarenko

Dynamics of a filter-free joint system of phase-locking and delay-following for a pseudonoise signal on the assumption of a videosequence infinite period is found by a qualitative analysis of a corresponding second order differential equations nonlinear system. Possible operational modes of the system are determined.

УДК 621.396.078.6

**ДИНАМИКА СОВМЕСТНОЙ СИСТЕМЫ
ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ И СЛЕЖЕНИЯ
ЗА ЗАДЕРЖКОЙ. II**

B. П. Пономаренко

Исследуется динамика бесфильтровой совместной системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) и слежения за задержкой (ССЗ) псевдошумового сигнала в случае достаточно большого, но конечного периода видеопоследовательности. Определены возможные режимы работы системы и их зависимость от параметров.

В [1] установлена в зависимости от параметров динамика бесфильтровой совместной системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) и слежения за задержкой (ССЗ) псевдошумового сигнала, описываемой системой дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d\varphi}{dt_1} = \gamma - R(x) \sin \varphi, \quad \frac{dx}{dt'} = \beta - bD(x) \cos \varphi, \quad (1)$$

где φ — разность фаз, x — разность задержек, γ, β, b — параметры системы, $R(x)$ и $D(x)$ — кусочно-линейные характеристики вида (рис. 1):

$$R(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \mu)x & (0 \leq x \leq 1) \\ -\mu & (x \geq 1, x \leq -1), \\ 1 + (1 + \mu)x & (-1 \leq x \leq 0) \end{cases} \quad (2)$$

$$D(x) = \begin{cases} x & (-1 \leq x \leq 1) \\ 2 - x & (1 \leq x \leq 2) \\ -(2 + x) & (-2 \leq x \leq -1) \\ 0 & (x \geq 2, x \leq -2) \end{cases} \quad (3)$$

в предельном случае, когда параметр $\mu = 1/M$ полагался равным нулю ($M \rightarrow \infty$).

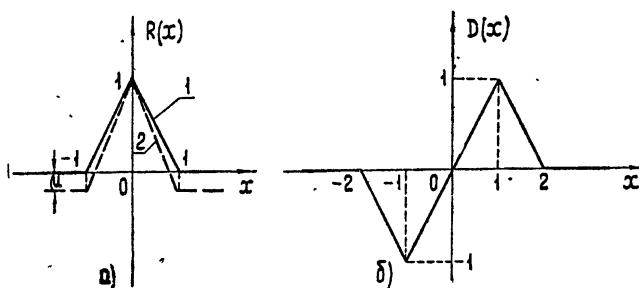


Рис. 1.

В реальных системах число элементов M используемого псевдошумового сигнала хотя и достаточно велико, но конечно (см., например, [2]). В силу этого параметр μ принимает небольшие, но положительные равные нулю значения. В настоящей работе изучается динамика совместной системы ФАП и ССЗ, описываемой уравнениями (1) при значениях параметра $\mu \neq 0$, в результате чего устанавливается влияние параметра μ на работу системы и выясняются новые явления, возникающие в системе при значениях $\mu \neq 0$.

Подставляя в систему (1) $R(x)$ и $D(x)$, определяемые равенствами (2) и (3), в которых $\mu \neq 0$, получим склейенную систему вида:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \gamma - [1 - (1 + \mu)x] \sin \varphi \\ \dot{x} = \beta - bx \cos \varphi \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (4a)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \gamma + \mu \sin \varphi \\ \dot{x} = \beta - b(2-x) \cos \varphi \end{cases} \quad (1 \leq x \leq 2), \quad (4b)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \gamma + \mu \sin \varphi \\ \dot{x} = \beta \end{cases} \quad (x \geq 2, \quad x \leq -2), \quad (4c)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \gamma - [1 + (1 + \mu)x] \sin \varphi \\ \dot{x} = \beta - bx \cos \varphi \end{cases} \quad (-1 \leq x \leq 0), \quad (4d)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \gamma + \mu \sin \varphi \\ \dot{x} = \beta + b(2+x) \cos \varphi \end{cases} \quad (-2 \leq x \leq -1). \quad (4e)$$

На линиях склейки $x = \pm 2$, $x = \pm 1$, $x = 0$ переменные φ и x , а также $\frac{d\varphi}{dt'}$ и $\frac{dx}{dt'}$ непрерывны. Замечания 1 и 2, сделанные в [1] для системы (1) при $\mu = 0$, остаются справедливыми и при $\mu \neq 0$. В силу сделанного предположения относительно параметра μ , следует, как и в [1], рассмотреть систему (1) на одном периоде характеристики $R(x)$ и $D(x)$. Фазовым пространством системы (1) является поверхность цилиндра (φ, x) , который рассматривается развернутым на часть плоскости $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Качественную картину поведения траекторий на фазовой поверхности определяют [3] состояния равновесия, сепаратрисы седел и предельные циклы. Исследование системы (4а) — (4д) проводится, как и в [1], отдельно для значений параметра $\beta = 0$ и $\beta > 0$.

1. Случай $\beta = 0$. Интегральные кривые системы (1) вертикально симметричны относительно оси $x = 0$ и прямых $\varphi = \pm \pi/2$. Уравнения интегральных кривых для $x \geq 0$ имеют вид

$$x = C_1 \quad (x \geq 2),$$

$$x = 2 - C_2 (\gamma + \mu \sin \varphi)^{b/\mu} \quad (1 \leq x \leq 2), \quad (5)$$

$$x^{1/b} \exp\left(-\frac{1+\mu}{b}x\right) \left[C_3 - \gamma \int \exp\left(\frac{1+\mu}{b}x\right) x^{-(1+b)/b} dx \right] = b \sin \varphi \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Изоклинами горизонтальных наклонов системы (1) при $\beta = 0$ являются интегральные прямые $x = 0$ и $x = \pm 2$ и прямые $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, изоклиной вертикальных наклонов — кривая $\gamma = R(x) \sin \varphi = 0$.

Для значений $\mu < \gamma < 1$ система (1) имеет четыре состояния равновесия: $A_1(\arcsin \gamma, 0)$ — устойчивый узел, $A'_1(\pi - \arcsin \gamma, 0)$ — неустойчивый узел, $A_2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1-\gamma}{1+\mu}\right)$ и $A'_2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1-\gamma}{1+\mu}\right)$ — седла; при $\gamma = 1$ эти состояния равновесия сливаются, образуя сложную особую точку; при $\gamma > 1$ состояний равновесия нет. С помощью изучения общего интеграла (5) и расположения главных изоклинов устанавливаем, что качественная структура разбиения фазовой поверхности на траектории системы (1) при $\beta = 0$, $\gamma > \mu$ аналогична качественной структуре системы (1) в случае $\mu = 0$ при $\beta = 0$, $\gamma > 0$, установленной в [1] (см. рис. 3а—3б [1]). Для значений параметра $0 \leq \gamma < \mu$ система (1) имеет на фазовой поверхности, кроме состояний равновесия A_1, A'_1, A_2 и A'_2 , еще шесть состояний равновесия: $A_3\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{1+\gamma}{1+\mu}\right)$, $A_4(-\arcsin \gamma/\mu, 2)$, $A_5(-\pi + \arcsin \gamma/\mu, 2)$, $A'_3\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{1+\gamma}{1+\mu}\right)$, $A'_4(-\pi + \arcsin \gamma/\mu, -2)$, $A'_5(-\arcsin \gamma/\mu, -2)$.

В областях $x \geq 2$ и $x \leq -2$ прямые $\varphi_1 = -\arcsin \gamma/\mu$ и $\varphi_2 = -\pi + \arcsin \gamma/\mu$ являются особыми линиями, все точки которых есть соответственно неустойчивые и устойчивые состояния равновесия. Состояния равновесия A_3, A'_3 являются седлами, A_4, A_5, A'_4, A'_5 — сложными состояниями равновесия, находящимися на линиях склейки. При $\gamma = \mu$ прямые $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ совпадают, состояния равновесия A_4 и A_5 (A_4 и A'_5) сливаются.

Определим расположение сепаратрис седел в области $x \geq 0$ для значений $0 < \gamma < \mu$. Критические направления сепаратрис в седле A_2 равны $k_{1,2} = \pm \sqrt{b(1-\gamma)/(1+\mu)}$, в седле A_3 $k_{1,2} = \pm \sqrt{b(1+\gamma)/(1+\mu)}$. Сепаратрица $S'_{10}(R'_{20})$ седла $A_2(A_3)$ при возрастании времени t' приближается к устойчивому состоянию равновесия $A_1(A_5)$; сепаратрица $S'_{20}(R'_{10})$ седла $A_2(A_3)$ при $t' \rightarrow -\infty$ выходит из неустойчивого состояния равновесия $A'_1(A_4)$ (рис. 2). Для определения взаимного расположения сепаратрис S_{20} и R_{20} , R_{10} и S_{10} седел A_2 и A_3 рассмотрим в области $0 < x < 1$ вспомогательную прямую l : $x = 2\gamma(\pi/2\gamma - \varphi)/\pi(1+\mu)$ при $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Находя на прямой l знак разности направлений, определяемых уравнением $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{-bx \cos \varphi}{\gamma - [1 - (1+\mu)x] \sin \varphi}$, и наклона этой прямой и, учитывая критические направления в седлах A_2 и A_3 , устанавливаем, что при условии

$$b < 4\gamma^2/\pi^2(1+\mu) \quad (0 \leq \gamma < \mu < 1) \quad (6)$$

сепаратрица S_{20} седла A_2 пересечет прямую $\varphi = 0$ ниже, чем сепаратрица R_{20} седла A_3 . Из свойства симметрии интегральных кривых относительно прямых $\varphi = \pm \pi/2$ следует, что при условии (6) сепаратрица S_{10} седла A_2 пересечет прямую $\varphi = \pm \pi$ ниже, чем сепаратрица R_{10} седла A_3 . С помощью изучения общего интеграла (5) устанавливаем, что при условии (6) имеет место расположение сепаратрис, представленное на рис. 2а: сепаратрицы S_{10} и S_{20} (R_{10} и R_{20}) идут из седла $A_2(A_3)$ в то же самое седло, охватывая цилиндр. При условии

$$b > \gamma \quad (0 \leq \gamma < \mu < 1) \quad (7)$$

сепаратрица S_{20} седла A_2 пересекает прямую $\varphi = 0$ выше, чем сепаратрица R_{20} седла A_3 , сепаратрица S_{10} седла A_2 пересечет прямую $\varphi = \pm \pi$

выше, чем сепаратриса R_{10} седла A_3 *. Следовательно, при условии (7) имеет место расположение сепаратрис, представленное на рис. 2в: сепаратриса $S_{10}(R_{20})$ с ростом времени t' приближается к состоянию равновесия A_3 .

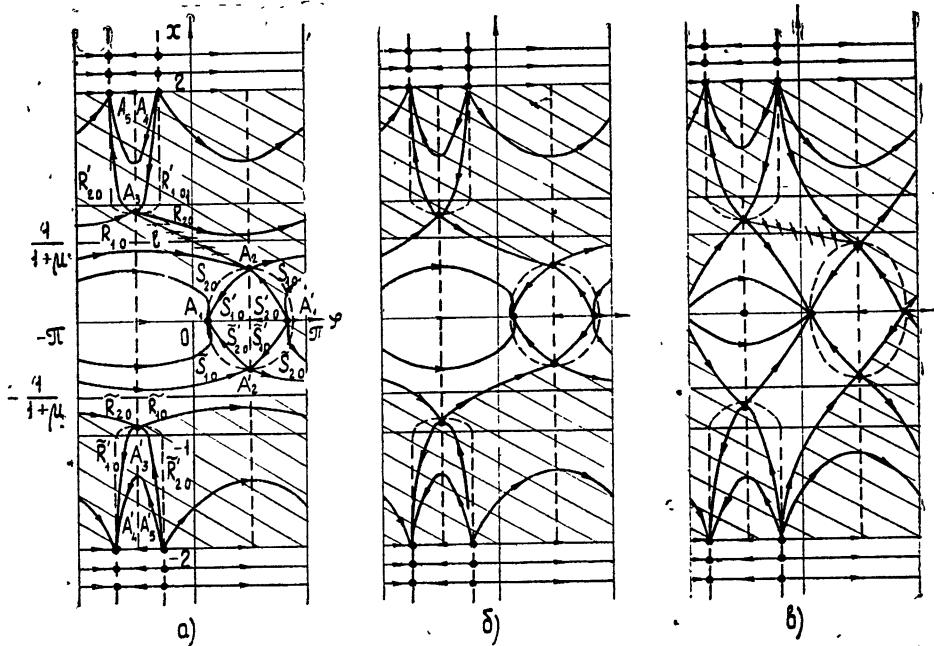


Рис. 2.

весия $A_5(A_1)$, сепаратриса $S_{20}(R_{10})$ при $t' \rightarrow -\infty$ выходит из неустойчивого состояния равновесия $A_4(A_1)$. При непрерывном увеличении параметра b ($b_2 > b_1$) (параметры γ и μ фиксированы), повторяют векторного поля системы (4 а) в области $\gamma - [1 - (1 + \mu)x] \sin \varphi > 0$ происходит по часовой стрелке в полосе $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ и против часовой стрелки вне полосы $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Это следует из того, что величина

$$R = \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{b=b_2} - \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{b=b_1} = \frac{-(b_2 - b_1)x \cos \varphi}{\gamma - [1 - (1 + \mu)x] \sin \varphi} \quad (8)$$

отрицательна в полосе $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ и положительна вне полосы $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Отсюда следует, что при переходе от значений b , удовлетворяющих условию (6), к значениям b , удовлетворяющим условию (7), система (1) обязательно и при том единственный раз при $b = b^*(\gamma, \mu)$ проходит через бифуркационное состояние, при котором сепаратрисы S_{20} и R_{20} , S_{10} и R_{10} совпадают, образуя петлю, охватывающую цилиндр (рис. 2б). В силу симметрии фазовых траекторий относительно оси $x = 0$ при значениях $b = b^*(\gamma, \mu)$ совпадают сепаратрисы S_{20} и R_{20} , S_{10} и R_{10} седел A'_2 и A'_3 в области $x < 0$ фазового цилиндра. Бифуркационное значение параметра $b = b^*(\gamma, \mu)$ определяется приближенно с помощью построения на ЭВМ сепаратрис близких грубых систем [4, 5].

* При рассматриваемых значениях параметров γ и μ кривые $b = \gamma$ и $b = 4\gamma^2/\pi^2(1 + \mu)$ не имеют точек пересечения, отличных от точки $\gamma = b = 0$.

Для примера бифуркационная кривая $b = b^*(\gamma, \mu)$ представлена на рис. 3 для значения $\mu = 1/31^*$.

2. Случай $\beta > 0$. Состояния равновесия. Состояния равновесия системы (1) при $\beta > 0$ определяются пересечением на фазовой плоскости кривых $\beta - bD(x) \cos \varphi = 0$, $\gamma - R(x) \sin \varphi = 0$, являющихся соответственно изоклиниами горизонтальных и вертикальных наклонов. Кривые

$$\beta/b = (1 - \gamma^{2/3})^{3/2}/(1 + \mu), \quad \beta/b = (1 - \gamma^2/\mu^2)^{1/2} \quad (9)$$

разделяют пространство параметров $(\gamma, \beta/b)$ на четыре области I—IV с различным числом состояний равновесия (рис. 4). Для точек области I

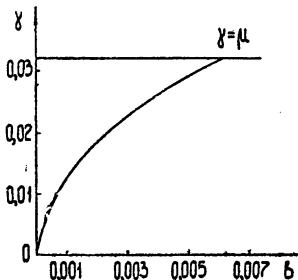


Рис. 3.

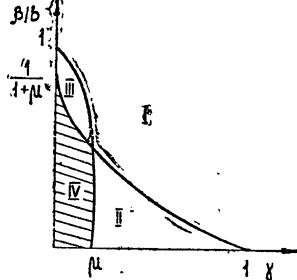


Рис. 4.

система (1) не имеет состояний равновесия; для точек области II на фазовой плоскости существует четыре состояния равновесия:

$$A_1(\varphi_1, x_1), A_2(\varphi_2, x_2), A'_1(\pi - \varphi_1, -x_1), \\ A'_2(\pi - \varphi_2, -x_2) \quad (0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi/2; \quad 0 < x_1 < x_2 < 1/(1+\mu)).$$

В отличие от случая $\mu = 0$ при значениях $\mu \neq 0$ в пространстве параметров существует область III, для точек которой система (1) имеет другие четыре состояния равновесия: $A_3(-\varphi_3, x_3)$,

$$A_4(-\arcsin \gamma/\mu, 2 - \beta/b(1 - \gamma^2/\mu^2)^{1/2}), \\ A'_3(-\pi + \varphi_3, -x_3), A'_4(-\pi + \arcsin \gamma/\mu, -2 + \\ + \beta/b(1 - \gamma^2/\mu^2)^{1/2}) \quad (-\pi/2 < \varphi_3 < 0, \quad 1/(1+\mu) < x_3 < 1),$$

и, кроме того, область IV, для которой система (1) имеет восемь состояний равновесия $A_1(\varphi_1, x_1), A_2(\varphi_2, x_2), A'_1(\pi - \varphi_1, -x_1), A'_2(\pi -$

$\varphi_2, -x_2), A_3(-\varphi_3, x_3), A_4(-\arcsin \gamma/\mu, 2 - \beta/b(1 - \gamma^2/\mu^2)^{1/2}), A'_3(-\pi + \varphi_3, -x_3), A'_4(-\pi + \arcsin \gamma/\mu, -2 + \beta/b(1 - \gamma^2/\mu^2)^{1/2}).$

Координаты состояний равновесия $A_1, A_2, A'_1, A'_2, A_3$ и A'_4 определяются из уравнений

$$\beta - bx \cos \varphi = 0, \quad \gamma - [1 - (1 + \mu)x] \sin \varphi = 0. \quad (10)$$

Состояния равновесия A_1 и A'_4 являются устойчивыми узлами, A'_1 и A_4 — неустойчивыми узлами, состояния равновесия A_2, A_3, A'_2, A'_3 являются седлами. При $\beta/b = (1 - \gamma^{2/3})^{3/2}(1 + \mu)^{-1}$ сливаются узел A_1 и седло A_2 ,

* Это значение μ соответствует числу каскадов генератора псевдошумового сигнала $n = 5$, т. е. $M = 2^n - 1 = 31$ [2].

узел A'_1 и седло A'_2 ; при $\frac{\beta}{b} = \sqrt{1 - \gamma^2/\mu^2}$ сливаются узел A_4 и седло A_3 , узел A'_4 и седло A'_3 . При этих значениях параметров на фазовой поверхности существуют два негрубых состояния равновесия типа седло—узел.

Расположение сепаратрис седел. Определяя разность векторных полей системы (1) при возрастаании параметра β ($\beta_2 < \beta_1$)

$$R = \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\beta=\beta_2} - \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)_{\beta=\beta_1} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\gamma - R(x) \sin \varphi}, \quad (11)$$

устанавливаем, что поворот векторного поля с пространством параметра β проходит против часовой стрелки в области $\gamma - R(x) \sin \varphi > 0$ и по часовой стрелке в области $\gamma - R(x) \sin \varphi < 0$ фазовой плоскости.

Пользуясь свойством (11) поворота векторного поля и, учитывая характер расположения интегральных кривых при $\beta = 0$ аналогично тому, как это было сделано для случая $\mu = 0$, устанавливаем возможное расположение сепаратрис седел для случая $\mu \neq 0$ при $\beta > 0$. Рассмотрение поведения сепаратрис седел проведем для каждой из областей II, III, IV пространства параметров.

а) Область II пространства параметров. Качественный характер расположения сепаратрис седел A_2 и A'_2 остается таким же, как и в случае $\mu = 0, \gamma > 0$ (см. рис. 7а—7в [1]). В силу расположения сепаратрис седел, так же, как и в случае $\mu = 0$, следует отсутствие предельных циклов первого и второго рода. Аналогично тому, как это сделано для случая $\mu = 0$, устанавливаем существование бифуркаций, связанных с совпадением сепаратрис S'_2 и \tilde{S}'_2 , S_2 и \tilde{S}_2 и отсутствие бифуркации, связанной с совпадением сепаратрис \tilde{S}'_2 и S_2 (\tilde{S}'_2 и \tilde{S}_2) седел A_2 и A'_2 . Бифуркация, связанная с совпадением сепаратрис S'_2 и \tilde{S}'_2 (она имеет место и для значений параметров, принадлежащих области IV) проходит при $\beta = \beta^*(\gamma, b, \mu)$; бифуркация, связанная с совпадением сепаратрис S_2 и \tilde{S}_2 , имеет место для $\beta = \beta_0(\gamma, b, \mu)$. Бифуркационные значения $\beta = \beta^*(\gamma, b, \mu)$ и $\beta = \beta_0(\gamma, b, \mu)$ определяются для значений параметров $\mu = 1/31; 1/127^*$ и ряда фиксированных значений параметра b приближенно с помощью построения численными методами на ЭВМ сепаратрис близких грубых систем**. Для примера на рис. 5 полученные бифуркационные кривые представлены для значений параметров $\mu = 1/31, b = 0.5; 1.0; 2.0; 5.0; 10$. Для сравнения на рис. 5 эти кривые приведены и для значений параметров $\mu = 0$ и $b = 5$. Пунктирной линией на рис. 5 приведены кривые (9), соответствующие бифуркациям состояний равновесия. Для значений параметров $\beta = \beta^*(\gamma, b, \mu)$ и $\beta = \beta_0(\gamma, b, \mu)$ система (1) является негрубой [3, 4], сепаратрисы идут из седла в седло, не охватывая фазовый цилиндр.

Кривые $\beta = \beta^*(b, \gamma, \mu)$ и $\beta = \beta_0(\gamma, b, \mu)$ разбивают область II пространства параметров на области $\bar{G}_1 \{ \gamma > \mu(1 - \beta^2/b^2)^{1/2}, 0 < \beta < \beta^*(\gamma, b, \mu) \}$, $\bar{G}_2 \{ \gamma > \mu(1 - \beta^2/b^2)^{1/2}, \beta^*(\gamma, b, \mu) < \beta < \beta_0(\gamma, b, \mu), \beta/b < (1 - \gamma^{2/3})^{3/2}(1 + \mu)^{-1} \}$, $\bar{G}_3 \{ \gamma > \mu(1 - \beta^2/b^2)^{1/2}, \beta_0(\gamma, b, \mu) < \beta < b(1 - \gamma^{2/3})^{3/2}(1 + \mu)^{-1} \}$. Качественная структура разбиения фазовой плоскости на траектории системы (1) для точек областей \bar{G}_1, \bar{G}_2 и \bar{G}_3 аналогична структуре при $\mu = 0$ для точек областей G_1, G_2, G_3 соответственно. При всех значениях параметров, принадлежащих области II, существуют как области начальных значений φ и x , начиная с которых фазовые траектории с пространством

* Значение $\mu = 1/127$ соответствует числу каскадов генератора псевдошумового сигнала $n = 7$, т. е. $M = 2^n - 1 = 127$.

** Счет по приближенному построению сепаратрис спрограммирован и проведен К. Г. Кивелевой на ЭЦВМ БЭСМ-ЗМ.

времени t' приближаются к устойчивому состоянию равновесия A_1 , так и области начальных значений, для которых фазовые траектории при возрастании времени поднимаются вверх по цилиндру, не попадая в состояние равновесия A_1 .

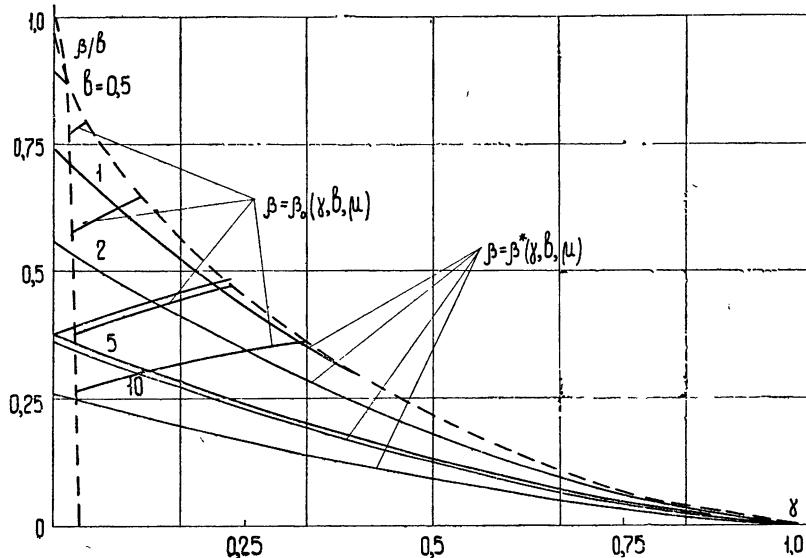


Рис. 5.

Из сравнения кривых, приведенных на рис. 5, следует, что область \bar{G}_1 , для точек которой при начальных значениях $x \leq -2$ все фазовые траектории с ростом времени приближаются к устойчивому состоянию равновесия A_1 , уменьшается при возрастании параметров μ и b .

б) Область IV пространства параметров. Для значений параметров, принадлежащих области IV, существующей только при значениях параметра $\mu \neq 0$, отличительной особенностью является наличие двух устойчивых состояний равновесия A_1 и A'_4 . Рассмотрим взаимное расположение сепаратрис седел A_2 , A'_2 , A_3 , A'_3 , которое определяет области притяжения устойчивых состояний равновесия A_1 и A'_4 .

Пользуясь установленным выше характером расположения сепаратрис седел при $\beta = 0$ (рис. 2) и свойством (11) поворота векторного поля системы (1) при возрастании параметра β , устанавливаем расположение сепаратрис седел при значениях $\beta \neq 0$, но достаточно малых. Это расположение сепаратрис представлено на рис. 6а для значений $\gamma < \gamma^*(b, \mu)$ (рис. 3) и на рис. 6б для $\gamma > \gamma^*(b, \mu)$. Характер расположения сепаратрис S'_1 , S'_2 , \tilde{S}'_1 , \tilde{S}'_2 седел A_2 и A'_2 остается таким же, как и для области \bar{G}_1 .

Для значений $\gamma < \gamma^*(b, \mu)$ и малых β сепаратрисы S_1 и R'_2 седел A_2 и A_3 при возрастании времени t' приближаются к изоклине вертикальных наклонов $\varphi = -\pi + \arcsin \gamma/\mu$; сепаратрисы S_2 и R'_1 седел A_2 и A_3 при $t' \rightarrow -\infty$ выходят из неустойчивого узла A_4 ; сепаратрисы R_2 и \tilde{R}_1 седел A_3 и A'_3 с ростом времени t' стремятся к устойчивому узлу A_1 ; сепаратрисы R_1 и \tilde{R}_2 седел A_3 и A'_3 при $t' \rightarrow -\infty$ выходят из неустойчивого узла A'_1 ; сепаратрисы \tilde{S}_1 и \tilde{R}'_2 седел A'_2 и A'_3 при убывании времени t' приближаются к изоклине вертикальных наклонов $\varphi = -\arcsin \gamma/\mu$.

сепаратрисы \tilde{S}_2' и \tilde{R}_1' седел A_2' , A_3' при возрастании времени t' стремятся к устойчивому состоянию равновесия A_4' (рис. 6а).

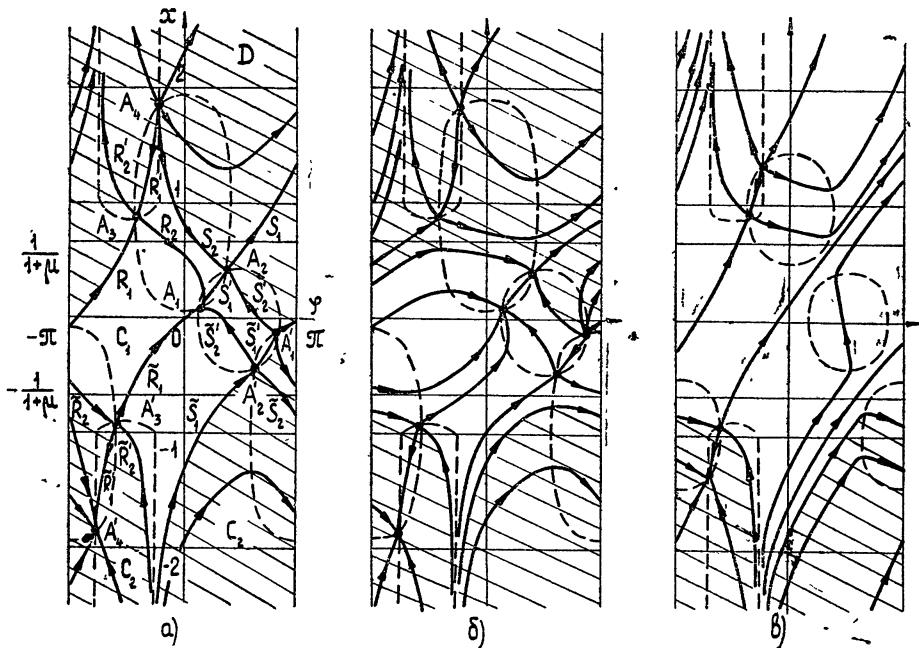


Рис. 6.

Для значений $\gamma > \gamma^*(b, \mu)$ и малых β сепаратрисы R_2 и R_2' (\tilde{R}_2 и \tilde{R}_2') седла A_3 (A_3') при возрастании (убывании) времени t' приближаются к изоклине $\varphi = -\pi + \arcsin \gamma/\mu$ ($\varphi = -\arcsin \gamma/\mu$); сепаратриса S_2 (\tilde{S}_2) седла A_2 (A_2') при $t' \rightarrow -\infty$ ($t' \rightarrow +\infty$) выходит из неустойчивого узла A_1' (приближается к устойчивому узлу A_1) (рис. 6б). Для взаимного расположения сепаратрис S_1 и R_1 (\tilde{S}_1 и \tilde{R}_1) седел A_2 и A_3 (A_2' и A_3') осуществляется одна из следующих возможностей: 1) сепаратрица S_1 (\tilde{S}_1) при возрастании (убывании) времени t' приближается к изоклине $\varphi = -\pi + \arcsin \gamma/\mu$ ($\varphi = -\arcsin \gamma/\mu$), сепаратрица R_1 (\tilde{R}_1) при $t' \rightarrow -\infty$ ($t' \rightarrow +\infty$) выходит из неустойчивого узла A_1' (стремится к устойчивому узлу A_1) (рис. 6б); 2) сепаратрисы S_1 (\tilde{S}_1) и R_1 (\tilde{R}_1) совпадают, либо не охватывая фазовый цилиндр, либо охватывая его один или большее число раз. На рис. 6б представлено расположение сепаратрис S_1 и R_1 (\tilde{S}_1 и \tilde{R}_1), соответствующее возможности 1).

Рассматривая взаимное расположение сепаратрис S_2' и \tilde{S}_2' седел A_2 и A_2' устанавливаем так же, как и в [1], что при возрастании параметра β система (1) при $\beta = \beta^*(\gamma, b, \mu)$ (рис. 5) проходит через бифуркационное состояние, при котором эти сепаратрисы совпадают.

Кроме установленной бифуркации, в системе (1) логически возможны бифуркации, связанные с совпадением сепаратрис седел A_2 , A_2' , A_3 ,

A'_3 , которые (если они существуют) приводят к изменению областей притяжения устойчивых состояний равновесия A_1 и A'_4 . Подробно вопрос о существовании этих бифуркаций сепаратрис и определении значений параметров,шим соответствующих, в работе не рассматривается*.

На основании изучения расположения сепаратрис делаем вывод об отсутствии для рассматриваемых значений параметров предельных циклов первого и второго рода.

Таким образом, при значениях $\mu \neq 0$ в отличие от случая $\mu = 0$ для значений параметров, принадлежащих области II, фазовая поверхность разбивается сепаратрисами седел на области: C_1 — область притяжения устойчивого состояния равновесия A_1 , C_2 — область притяжения устойчивого состояния равновесия A'_4 , D — область, для которой траектории при возрастании времени t' поднимаются вверх по цилиндуру, не попадая в области притяжения устойчивых состояний равновесия A_1 и A'_4 (на рис. 6а — 6б области C и D заштрихованы).

в) Область III пространства параметров. Для точек области III существует одно устойчивое состояние равновесия A'_4 . Характер расположения сепаратрис R'_1 , R'_2 , \tilde{R}'_1 , \tilde{R}'_2 седел A_3 и A'_3 остается таким же, как и для точек области IV. Сепаратриса $R_2(\tilde{R}_2)$ при возрастании (убывании) времени t' приближается к изоклине $\varphi = -\pi + \arcsin \gamma/\mu$ ($\varphi = -\arcsin \gamma/\mu$). Сепаратриса $R_1(\tilde{R}_1)$ седла $A_3(A'_3)$ при убывании (возрастании) времени t' либо приближается к изоклине $\varphi = -\arcsin \gamma/\mu$, $x \leq 1$ ($\varphi = -\pi + \arcsin \gamma/\mu$, $x \geq 1$), проходя при $-\pi < \varphi < 0$ выше (ниже) сепаратрисы $\tilde{R}_1(\tilde{R}_1)$; либо совпадает с сепаратрисой $\tilde{R}_1(\tilde{R}_1)$; либо приближается к изоклине $\varphi = -\arcsin \gamma/\mu$, $x \leq -1$ ($\varphi = -\pi + \arcsin \gamma/\mu$, $x \geq 1$) проходя ниже (выше) сепаратрисы $\tilde{R}_1(\tilde{R}_1)$. Бифуркация, связанная с совпадением сепаратрис R_1 и \tilde{R}_1 , не приводит к изменению области притяжения устойчивого состояния равновесия A'_4 и в работе не определялась. Одно из возможных расположений сепаратрис представлено на рис. 6 в.

3. Проведенное качественное исследование устанавливает структуру разбиения цилиндрической фазовой поверхности (φ x) на траектории системы (1) при значениях параметра $\mu \neq 0$ и ее зависимость от параметров β , γ , b , μ системы. Качественная структура полностью определяется, как и в случае $\mu = 0$, расположением и бифуркациями состояний равновесия и сепаратрис седел; предельные циклы первого и второго рода отсутствуют.

Качественное исследование системы (1) позволяет сделать выводы о возможных режимах работы бесфильтровой совместной системы ФАП и ССЗ и выяснить новые явления, возникающие в системе при значениях параметра $\mu \neq 0$.

1) Стационарные режимы совместной системы ФАП и ССЗ определяются устойчивыми состояниями равновесия системы (1). Для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $\gamma > \mu(1 - \beta^2/b^2)^{1/2}$, $\beta/b < (1 - \gamma^2/3)^{3/2}(1 + \mu)^{-1}$, единственный стационарный режим синхронизма, как и в случае $\mu = 0$, определяется устойчивым состоянием равновесия $A_1(\varphi_1, x_1)$ системы (1) типа узел с координатами, удовлетворяющими уравнениям (10) (режим I). В режиме синхронизма I разность

* В силу неоднозначного входления системы в синхронизм для значений параметров, принадлежащих области IV, эта область является по существу нерабочей.

фаз φ и разность задержек x имеют при $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ остаточные значения φ_1 и x_1 , отличные от нуля. При увеличении параметра μ эти значения увеличиваются, следовательно, ухудшается точность в определении информативных параметров сигнала. Область значений параметров, для которой в системе существует только режим I, уменьшается при возрастании параметра μ .

Для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $\gamma < \mu(1 - \beta^2/b^2)^{1/2}$, $(1 - \gamma^{2/3})^{3/2}(1 + \mu)^{-1} < \beta/b < (1 - \gamma^2/\mu^2)^{1/2}$, в совместной системе существует также единственный, но отличный от режима I стационарный режим синхронизма. Этот режим определяется состоянием равновесия $A'_4(\varphi'_4, x'_4)$ системы (1) типа узел с координатами $\varphi'_4 = -\pi + \arg \sin \gamma/\mu$ ($-\pi < \varphi'_4 < -\pi/2$); $x'_4 = -2 + \beta/b(1 - \gamma^2/\mu^2)^{1/2}$ ($-2 < x'_4 < -1$) (режим II). В режиме синхронизма II разность фаз φ и разность задержек x имеют так же, как и в режиме I, остаточные отличные от нуля значения φ'_4 и x'_4 , удовлетворяющие неравенствам $|\varphi'_4| > \varphi_1$, $|x'_4| > x_1$. Последнее свидетельствует о том, что точность в определении параметров принимаемого сигнала в режиме II ниже, чем в режиме I. Область значений параметров, для которой в системе существует только режим II, увеличивается при возрастании параметра μ .

Для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам $0 < \gamma < \mu(1 - \beta^2/b^2)^{1/2}$, $0 < \beta/b < (1 - \gamma^{2/3})^{3/2}(1 + \mu)^{-1}$, в совместной системе существуют два различных стационарных режима синхронизма, определяемые устойчивыми состояниями равновесия $A_1(\varphi_1, x_1)$ и $A'_4(\varphi'_4, x'_4)$ системы (1) (режим I и режим II). Наименьшие остаточные значения разности фаз и разности задержек x обеспечиваются при работе системы в режиме синхронизма I. Неоднозначность стационарных режимов в системе приводит к неоднозначности в определении параметров принимаемого сигнала. Область значений параметров, для которой в системе всегда существуют два стационарных режима синхронизма, увеличивается при возрастании параметра μ .

Стационарных режимов биений первого и второго рода в системе нет.

2). Переходные процессы к состоянию синхронизма определяются на фазовой поверхности системы (1) траекториями, расположеными в областях притяжения соответствующего устойчивого состояния равновесия системы (1) (области вхождения в синхронизм—области C_1 и C_2 на рис. 6). Границами этих областей являются сепаратрисы седел системы (1). При всех значениях параметров системы всегда существуют области начальных значений φ и x , начиная с которых невозможно установление ни режима I, ни режима II (область невхождения в синхронизм—область D на рис. 6 а, б). Размеры областей C_1 , C_2 , D зависят от параметров системы.

3) Для значений параметров, при которых в системе существует только основной режим I, бифуркационная кривая $\beta = \beta^*(\gamma, b, \mu)$ (рис. 5), соответствующая совпадению сепаратрис S'_2 и \tilde{S}'_2 седел A_2 и A'_2 системы (1), определяет область значений параметров (область синхронизации), для которой при любых начальных значениях φ и $x \leq -2$ (эти условия обычно имеют место в случае осуществления процесса поиска в ССЗ), в системе устанавливается режим I. При возрастании параметров μ и b эта область уменьшается.

Таким образом, при учете параметра μ следует считаться с существованием области параметров системы (области III), для которой возможно установление неэффективного с точки зрения точного определения параметров сигнала режима работы совместной системы, и, кроме

того, с существованием области параметров (области IV), для которой, в силу существования нескольких стационарных режимов, существует неоднозначность вхождения системы в синхронизм.

Автор благодарен Г. И. Тузову, предложившему задачу об исследовании совместной системы ФАП и ССЗ с перекрестными связями и Л. Н. Белюстиной за руководство и помощь в работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. П. Пономаренко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 7, (1971),
2. R. B. Ward, IEEE Trans. on Space Electronics and Telemetry, SET-10, № 2, 49 (1964).
3. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
4. Е. А. Андронова-Леонтович, Л. Н. Белюстина, Тр. международного симпозиума по нелинейным колебаниям, изд. АН УССР, Киев, 1963.
5. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 4, 639 (1959).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 октября 1970 г.

DYNAMICS OF A JOINT SYSTEM OF PHASE-LOCKING AND DELAY-FOLLOWING. II

V. P. Ponomarenko

Dynamics of a phase-locking and delay-following filter-free joint system for a pseudonoise signal is studied in case of a videosequence with a sufficiently long but finite period. Possible operational modes of the system and their dependence on the system's parameters are determined.

УДК 62 — 251

**ПЕРЕХОД ВЕРТИКАЛЬНОГО РОТОРА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ
В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ, ЧЕРЕЗ ЗОНУ
АВТОКОЛЕБАНИЙ**

A. С. Кельзон, B. И. Яковлев

Решена задача о колебаниях вертикального ротора, установленного в упругие подшипники скольжения в нелинейной постановке. Рассмотрен класс круговых асинхронных движений, т. е. движений с угловой скоростью, не совпадающей с угловой скоростью вращения. Построены графики изменения основных параметров системы. Исследована устойчивость полученных движений. На основании анализа полученного решения установлена возможность легкого прохождения зоны автоколебаний вертикального ротора при надлежащем выборе жесткости упругих опор.

В силу специфических свойств гидродинамических сил действующих в смазочном слое подшипников скольжения, при вращении ротора могут возникать автоколебания, развивающиеся в широком диапазоне скоростей, препятствующие эксплуатации высокооборотных роторов. В современном машиностроении заметилось два различных способа борьбы с вибрацией роторов. Первый способ основывается на применении новых виброустойчивых подшипников, улучшающих гидродинамику течения масла путем изменения формы подшипника. Этот путь, во-первых, сопряжен с большими осложнениями при выполнении подшипников, во-вторых, позволяет лишь несколько удалить границу возникновения автоколебаний, через которую при дальнейшем увеличении скорости придется невозможно, в-третьих, при этом методе не устраняется опасность появления вынужденных колебаний большой амплитуды, вызванных неуравновешенностью вала.

В настоящей статье рассматривается другой путь устранения опасной вибрации роторов, вращающихся в подшипниках скольжения. Исследуется динамика ненагруженного ротора, вращающегося в упругих подшипниках скольжения, определяются пути сужения зоны автоколебаний и способы уменьшения амплитуд самовозбуждающихся колебаний, позволяющих обеспечить легкий переход через зону автоколебаний.

Анализ устойчивости ненагруженного ротора [1] с учетом демпфирующих свойств упругих опор показывает, что на скоростях вращения, превышающих удвоенную критическую скорость ротора, возможно появление зон устойчивости. Однако граница устойчивости, получаемая обычно теоретическим путем из линеаризованных уравнений, представляет ограниченный интерес, так как колебания, возникающие после потери устойчивости равновесного положения (т. е. устойчивости «в малом»), имеют незначительные амплитуды и для ротора не опасны. Как показывает опыт, наибольшую опасность представляют автоколебания, возникающие обычно в области удвоенной критической скорости ротора или выше этой скорости.

В связи с этим колебания, вызываемые смазочным слоем подшипников, должны изучаться на базе нелинейных уравнений.

Попытки решения задачи методами малого параметра (т. е. как

системы «слабо» (нелинейной) привели к установлению лишь указанных выше малых автоколебаний [2].

Большие же автоколебания, рассмотрение которых имеет основной практический интерес, могут быть получены на основе толстых уравнений для силового поля в зазоре подшипника, и пренебрежение какими-либо нелинейными членами в разложении сил смазочного слоя недопустимо.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖЕСТКОГО РОТОРА В УПРУГИХ ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

Рассмотрим сбалансированный вертикальный жесткий ротор (рис. 1) массы m , установленный в упругие опоры жесткостью c . Будем пренебречь массой упругих опор. Коэффициент демпфирования упругих опор κ .

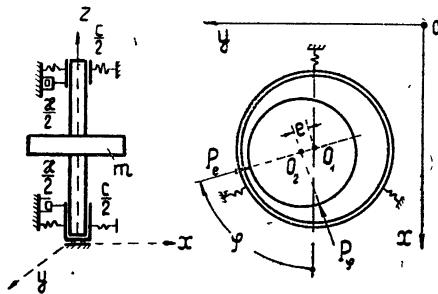


Рис. 1. Расчетная схема и основные обозначения

Введем неподвижную систему координат Oxy . Пусть в этой системе x_1, y_1 — координаты O_1 центра упругой опоры x_2, y_2 — координаты O_2 центра тяжести ротора; φ — полярный угол, e — эксцентриситет центра шипа.

При действии сил смазочного слоя P_e и P_φ уравнения движения ротора и опор будут иметь вид

$$\begin{aligned} cx_1 + \kappa \dot{x}_1 - P_e \cos \varphi - P_\varphi \sin \varphi &= 0, \\ cy_1 + \kappa \dot{y}_1 - P_e \sin \varphi + P_\varphi \cos \varphi &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + P_e \cos \varphi + P_\varphi \sin \varphi &= 0, \\ m\ddot{y}_2 + P_e \sin \varphi - P_\varphi \cos \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где P_e и P_φ — радиальная и касательная составляющая реакции смазочного слоя.

Воспользуемся выражениями для сил слоя, полученными Коровчинским [3],

$$\begin{aligned} P_e &= 12 \mu L \frac{r^3}{\delta^2} [(\omega - 2\dot{\varphi}) F_1(\chi) + 2\dot{\chi} F_2(\chi)], \\ P_\varphi &= 12 \mu L \frac{r^3}{\delta^2} [(\omega - 2\dot{\varphi}) F_3(\chi) + 2\dot{\chi} F_4(\chi)], \end{aligned} \quad (2)$$

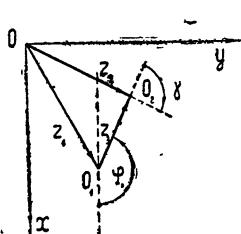
где $\delta = R - r$ — радиальный зазор, $\chi = \frac{e}{\delta}$ — относительный эксцентриситет центра шипа, r , L — радиус и длина подшипника, μ — коэффициент динамической вязкости, ω — угловая скорость вращения,

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{2\chi^2}{(2+\chi^2)(1-\chi^2)}; \quad F_2 = \frac{1}{(1-\chi^2)^{3/2}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2+\chi^2)} \right]; \\ F_3 &= \frac{\pi\chi}{(2+\chi^2)(1-\chi^2)^{1/2}}; \quad F_4 = \frac{2\chi}{(2+\chi^2)(1-\chi^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем комплексные подстановки

$$z_1 = x_1 + iy_1; \quad z_2 = x_2 + iy_2; \quad z_3 = \delta\chi \exp(i\varphi). \quad (4)$$

Комплексные числа z_1, z_2, z_3 являются векторами, определяющими положение центра тяжести ротора и центра упругой опоры (рис. 2). Умножим далее второе и четвертое уравнение системы (1) на i и сложим первое уравнение со вторым, а третье — с четвертым. Тогда, с учетом комплексной подстановки (4), система уравнений (1) примет вид



$$\begin{aligned} cz_1 + x\dot{z}_1 &= (P_e - iP_\varphi) \exp(i\varphi), \\ m\ddot{z}_2 &= -(P_e - iP_\varphi) \exp(i\varphi). \end{aligned} \quad (5)$$

Из рис. 2 имеем

$$z_1 = z_2 - z_3. \quad (6)$$

Рис. 2 К выводу уравнений движения.

С учетом (6) система (5) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{z}_2 + \frac{c}{m}(z_2 - z_3) + \frac{x}{m}(z_2 - \dot{z}_3) &= 0, \\ c(z_2 - z_3) + x(z_2 - \dot{z}_3) &= (P_e - iP_\varphi) \exp(i\varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

2. ОТЫСКАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ

В силу круговой симметрии, среди решений уравнений (7) будем отыскивать, следуя Тондлю [4], класс стационарных решений, соответствующий асинхронной прецессии, т. е. круговому движению оси вала с постоянными амплитудами и угловой скоростью Ω , не совпадающей со скоростью вращения ротора ω . Такое предположение для вертикального ротора является естественным и соответствует опыту [4].

Возвратимся вновь к рис. 2. При сделанном предположении о характере движения центра масс ротора и центра упругой опоры векторы z_1, z_2, z_3 будут вращаться с угловой скоростью Ω , имея постоянную длину. Предположим далее, что в первоначальный момент времени вектор z_3 совпадал с осью x . Тогда с учетом угла сдвига γ между векторами z_2 и z_3 решение комплексной системы (7) следует разыскивать в виде

$$\begin{aligned} z_3 &= \delta \chi \exp(i\Omega t), \\ z_2 &= \delta \rho \exp[i(\Omega t - \gamma)], \end{aligned} \quad (8)$$

где $\rho = A/\delta$ — безразмерная амплитуда колебаний центра масс ротора.

Значения радиальной и касательной составляющей сил смазочного слоя при установившемся круговом движении примут вид

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{12\mu Lr^3}{\delta^2} (\omega - 2\Omega) F_1(\chi), \\ P_\varphi &= \frac{12\mu Lr^3}{\delta^2} (\omega - 2\Omega) F_3(\chi). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя далее (8) и (9) в (7) и сокращая на $\exp(i\Omega t)$, находим

$$\begin{aligned} -m\Omega^2 \delta \rho \exp(-i\gamma) + \delta c [\rho \exp(-i\gamma) - \chi] + i\chi \delta [\rho \exp(-i\gamma) - \chi] &= 0, \\ c \delta [\rho \exp(-i\gamma) - \chi] + i\chi \delta \Omega [\rho \exp(-i\gamma) - \chi] &= \\ = \frac{12\mu Lr^3}{\delta^2} [(\omega - 2\Omega) F_1(\chi) - i(\omega - 2\Omega) F_3(\chi)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем следующие обозначения: $\omega_0^2 = c/m$ — квадрат первой критической скорости симметричного ротора без учета податливости смазочного слоя, $D = \kappa/m \omega_0$ — безразмерный коэффициент демпфирования, $\psi = \delta/r$ — относительный зазор, $\alpha = \omega/\omega_0$ — безразмерная частота автоколебаний, $\beta = \omega/\omega_0$ — безразмерная угловая скорость вращения, $K = \frac{4\mu L}{\omega_0 m \psi^3}$ — характеристическая постоянная Тондля.

Характеристическая постоянная Тондля является обобщенной конструктивной характеристикой всей системы (ротор — подшипник — опоры), так как она зависит не только от параметров подшипника, но и от параметров ротора и упругих опор.

С учетом принятых обозначений система принимает вид

$$\begin{aligned} -\rho\alpha^2 \exp(-i\gamma) + [\rho \exp(-i\gamma) - \chi] + iD\alpha [\rho \exp(-i\gamma) - \chi] &= 0, \\ [\rho \exp(-i\gamma) - \chi] + iD\alpha [\rho \exp(-i\gamma) - \chi] + & \\ + 3K [-(\beta - 2\alpha) F_1(\chi) + i(\beta - 2\alpha) F_3(\chi)] &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Приравнивая нулю мнимые и действительные части в первом уравнении системы (11), получим

$$\begin{aligned} -\rho\alpha^2 \cos\gamma + \rho \cos\gamma - \chi + D\alpha\rho \sin\gamma &= 0, \\ \rho\alpha^2 \sin\gamma - \rho \sin\gamma + D\alpha\rho \cos\gamma - D\alpha\chi &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

После несложных преобразований из системы (12) получим

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{\chi^2(1 + D^2\alpha^2)^2}{(1 - \alpha^2 + D^2\alpha^2)^2 + D^2\alpha^6}, \\ \cos\gamma &= \frac{\rho}{\chi} \frac{1 - \alpha^2 + D^2\alpha^2}{(1 + D^2\alpha^2)}, \\ \sin\gamma &= \frac{\rho}{\chi} \frac{D\alpha^3}{1 + D^2\alpha^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Приравнивая далее нулю действительные и мнимые части второго уравнения системы (11), имеем

$$\begin{aligned} \rho \cos\gamma - \chi + D\alpha\rho \sin\gamma &= 3K(\beta - 2\alpha)F_1(\chi), \\ -\rho \sin\gamma + D\alpha\rho \cos\gamma - D\alpha\chi &= -3K(\beta - 2\alpha)F_3(\chi). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (13) в соотношения (14) и производя преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{6KF_1(\chi)} \left[\frac{(1 + D^2\alpha^2)(1 - \alpha^2 + D^2\alpha^2 + D^2\alpha^4)}{(1 - \alpha^2 + D^2\alpha^2)^2 + D^2\alpha^6} - 1 \right] &= \frac{\beta}{2} - \alpha, \\ \frac{\chi}{6KF_3(\chi)} \frac{D\alpha^5(1 + D^2\alpha^2)}{(1 - \alpha^2 + D^2\alpha^2)^2 + D^2\alpha^6} &= \frac{\beta}{2} - \alpha. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} \Phi_1(\chi, \alpha) &= \frac{\chi}{6KF_1(\chi)} \left[\frac{(1 + D^2\alpha^2)(1 - \alpha^2 + D^2\alpha^2 + D^2\alpha^4)}{(1 - \alpha^2 + D^2\alpha^2)^2 + D^2\alpha^6} - 1 \right] \\ \Phi_2(\chi, \alpha) &= \frac{\chi}{6KF_3(\chi)} \frac{D\alpha^5(1 + D^2\alpha^2)}{(1 - \alpha^2 + D^2\alpha^2)^2 + D^2\alpha^6} \end{aligned}$$

левые части уравнений (15), тогда система (15) примет вид

$$\Phi_1(\chi, \alpha) = \frac{\beta}{2} - \alpha,$$

$$\Phi_2(\chi, \alpha) = \frac{\beta}{2} - \alpha.$$
(16)

Решение системы (16) производилось графически. Для удобства расчета выбиралось фиксированное значение безразмерной частоты автоколебаний α_i . При этом значении строились две кривые $\Phi_1(\chi, \alpha_i) = \frac{\beta}{2} - \alpha_i$ и $\Phi_2(\chi, \alpha_i) = \frac{\beta}{2} - \alpha_i$. Пересечение этих кривых определяло решение системы $\beta_i, \chi_i, \alpha_i$, а с использованием (13), следовательно, и ρ_i .

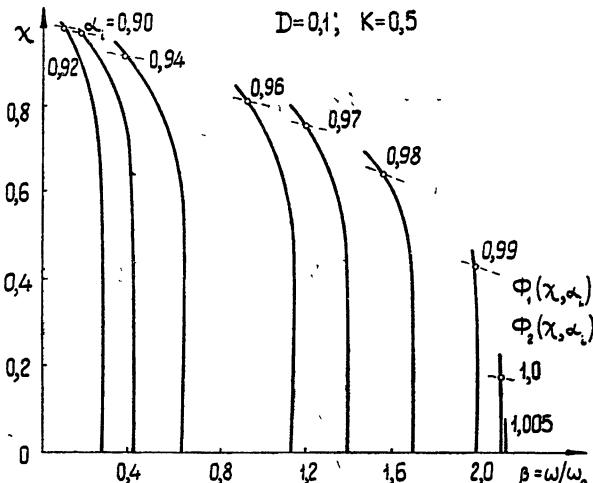


Рис. 3. Графическое решение системы (15) при $D=0,1$.

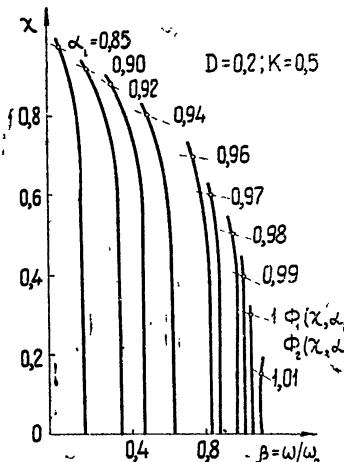


Рис. 4. Графическое решение системы (16) при $D=0,2$.

Все расчеты проводились для трех значений характеристической постоянной $K = 5 \div 0,5 \div 0,05$ при двух значениях относительного коэффициента демпфирования опор $D = 0,1$ и $D = 0,2$. Графическое решение систем (16) показано на рис. 3 и 4. Результаты решения иллюстрируются графиками на рис. 7, 8, 9, где построены зависимости безразмерной амплитуды автоколебаний и относительного эксцентриситета в зависимости от безразмерной частоты вращения.

3. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ

Для обсуждения полученных решений необходимо убедиться в их устойчивости по отношению к достаточно малым возмущениям.

Исследование устойчивости полученных ненулевых решений приводит к системе дифференциальных уравнений с периодическими коэффи-

циентами. Решение таких уравнений связано со значительными математическими трудностями.

Строгое исследование устойчивости можно заменить весьма простыми бифуркационными соображениями, которые позволяют судить об устойчивости лишь на основании вида бифуркационной диаграммы, представляющей собой зависимость положений динамического равновесия системы от параметра.

Для рассматриваемой задачи возьмем в качестве параметра безразмерную угловую скорость вращения ротора β , а в качестве координаты, определяющей положение равновесия, относительный эксцентриситет χ . Таким образом, бифуркационная диаграмма системы может быть проиллюстрирована кривой $f(\chi, \beta) = 0$, представленной на рис. 5. При этом, как следует из рисунка, бифуркационная диаграмма состоит из кривой $f_1(\chi, \beta) = 0$, представляющей собой зависимость автоколебаний системы от угловой скорости и прямой $\chi = 0$, определяющей тривидальное положение равновесия системы. Как показал Пуанкаре [5], при движении на бифуркационной диаграмме вдоль кривой $f(\chi, \beta) = 0$ характер состояния, т. е. его устойчивость или неустойчивость, будет сохраняться до тех пор, пока не будет достигнута точка пересечения кривых бифуркационной диаграммы (точка бифуркации — точка β_*). При этом если продолжать двигаться дальше по кривой, следуя направлению касательной (т. е. следуя за тем, чтобы касательная вращалась непрерывно), то в точке бифуркации устойчивое состояние становится неустойчивым и наоборот. Следуя этому правилу, будем двигаться на бифуркационной диаграмме вдоль участка $A\beta_*c$. Поскольку точка β_* является точкой бифуркации, то нулевое решение системы, устойчивое на участке $A\beta_*$, становится неустойчивым на участке β_*c и наоборот. Чтобы убедиться, который из этих участков соответствует устойчивым состояниям системы, обратимся к исследованию устойчивости тривидального решения системы в «малом». С этой целью рассмотрим линеаризованную систему, получаемую из полной следующим образом.

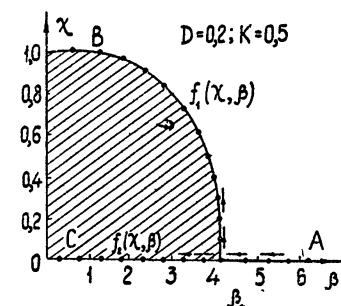


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма.

Разложим функции $F_i(\chi)$ в ряды в окрестности точки $\chi = 0$ и удержим в разложении лишь линейные члены. Тогда выражения для сил слоя P_e и P_φ примут вид:

$$P_e = \frac{12 \mu L \delta}{\psi^3} \{ (\omega - 2\varphi) [F_1(0) + \chi F'_1(0)] + 2\chi F_2(0) \}, \quad (17)$$

$$P_\varphi = \frac{12 \mu L \delta}{\psi^3} \{ (\omega - 2\varphi) [F_3(0) + \chi F'_3(0)] + 2\chi F_4(0) \}, \quad (18)$$

где с использованием соотношений (3)

$$F_1(0) = 0, \quad F'_1(0) = \left(\frac{\partial F_1(\chi)}{\partial \chi} \right)_0 = 0, \quad F_2(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}, \quad (19)$$

$$F_3(0) = 0, \quad F'_3(0) = \left(\frac{\partial F_3(\chi)}{\partial \chi} \right)_0 = \frac{\pi}{2}, \quad F_4(0) = 0.$$

Подставим выражения (17), (18) в систему комплексных уравнений (7). Тогда с учетом комплексной подстановки (4) эта система примет вид

$$m(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_3) + \alpha z_1 + c z_1 = 0, \quad (20)$$

$$\alpha \dot{z}_1 + c z_1 = \frac{12\mu L}{\psi^3} \{ 2 \delta \exp(i\varphi) F_2(0) - i F'_3(0) (\omega - 2\dot{\varphi}) \alpha \chi \exp(i\varphi) \}.$$

В силу подстановки (4), имеем

$$\begin{aligned} z_3 &= \delta \chi \exp(i\varphi), \\ \delta \chi &= (z_3 - i\varphi z_3) \exp(-i\varphi), \end{aligned} \quad (21)$$

где φ — частота колебаний системы.

Принимая во внимание цель последующего анализа, состоящую в отыскании уравнения границ устойчивости и частоты на этой границе, будем полагать

$$\dot{\varphi} = \Omega + \varphi_1, \quad (22)$$

где Ω — разыскиваемая частота колебаний системы на границе устойчивости, φ_1 — малые отклонения частоты от Ω .

Подставляя (21) и (22) в систему (20) и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$\begin{aligned} m(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_3) + \alpha \dot{z}_1 + c z_1 &= 0, \\ \alpha \dot{z}_1 + c z_1 &= \frac{12\mu L}{\psi^3} \{ 2 F_2(0) (z_3 - i\Omega z_3) - i F'_3(0) (\omega - 2\Omega) z_3 \}. \end{aligned} \quad (23)$$

Перейдем в уравнениях (23) к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, предварительно поделив первое уравнение этой системы на m , а второе — на $m\omega_0$. В результате получим окончательный вид линеаризованной комплексной системы уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + \ddot{z}_3 + D \dot{z}_1 + z_1 &= 0, \\ D \dot{z}_1 + z_1 + 3K \{ 2 F_2(0) (-z_2 + i\alpha z_3) + i F'_3(0) (\beta - 2\alpha) z_3 \}. \end{aligned} \quad (24)$$

Разыскивая решение этой системы в виде $z_1 = a_1 \exp(\lambda\tau)$, $z_3 = a_2 \exp(\lambda\tau)$, получим характеристическое уравнение системы

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda D + 1, & \lambda^2 \\ \lambda D + 1, & 6 K F_2(0) (-\lambda + i\alpha) + i 3 F'_3(0) (\beta - 2\alpha) \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Исследуемое решение будет устойчиво, если корни λ будут иметь отрицательную вещественную часть, и неустойчиво, если последняя положительна.

Используя для отыскания границ устойчивости метод D -разбиения [6], положим в характеристическом уравнении системы (23) $\lambda = i\alpha$. Тогда характеристическое уравнение системы примет вид

$$i(-\alpha^2 + i\alpha D + 1) 3 K F'_3(0) (\beta - 2\alpha) + i\alpha^3 D + \alpha^2 = 0. \quad (26)$$

Приравняем нулю действительные и мнимые части уравнения (26)

$$\begin{aligned} -\alpha D 3 K F'_3(0) (\beta - 2\alpha) + \alpha^2 &= 0, \\ (1 - \alpha^2) 3 K F'_3(0) (\beta - 2\alpha) + \alpha^3 D &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

После несложных преобразований системы (27) получаем выражение частоты колебаний на границе устойчивости

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - D^4}} \quad (28)$$

и уравнение границы устойчивости

$$1 = 3 K F'_3(0) D (\beta \sqrt{1 - D^2} - 2). \quad (29)$$

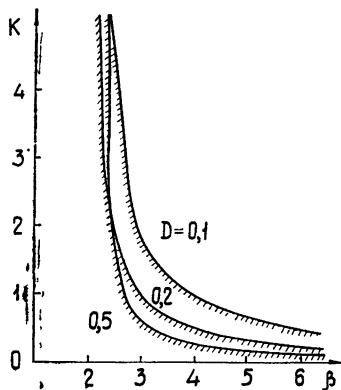
Подставляя в (29) значения производной $F'_3(0)$ из (19), получим

$$1 = \frac{3\pi}{2} K D (\beta \sqrt{1 - D^2} - 2). \quad (30)$$

Границы устойчивости системы в малом изображены на рис. 6. Из выражений (28) и (30) следует, во-первых, то, что частота колебаний системы на границе устойчивости превышает частоту собственных колебаний системы (ω_0), и во-вторых, что трехмерное демпфирование $D > 1$, может привести к полной потерне устойчивости. Эти результаты качественно совпадают с полученными Позняком [1].

Из выражения (30) найдем значение параметра β на границе устойчивости.

Рис. 6. Границы устойчивости системы в плоскости параметров $[K, \beta]$.



$$\beta_{**} = \frac{2(1 + 3K\pi D)}{\sqrt{1 - D^2} 3K\pi D}. \quad (31)$$

Используя критерий устойчивости Рауса — Гурвица для полиномов с комплексными коэффициентами, можно показать, что система будет устойчива при $\beta > \beta_{**}$.

Обращаясь вновь к бифуркационной диаграмме (рис. 5), найдем далее координаты бифуркационной точки β_{**} . Для этого рассмотрим выражения (15), определяющие периодические решения задачи об автоколебаниях, и перейдем в них к пределу при значении относительного эксцентриситета χ , стремящемся к нулю, тогда получим

$$\frac{(1 + D^2 \alpha^2)(1 - \alpha^2 + D^2 \alpha^2 + D^2 \alpha^4)}{(1 - \alpha^2 + D^2 \alpha^2)^2 + D^2 \alpha^6} - 1 = 0,$$

$$\frac{D \alpha^5 (1 + D^2 \alpha^2)}{(1 - \alpha^2 + D^2 \alpha^2)^2 + D^2 \alpha^6} = \frac{3\pi}{2} K (\beta - 2\alpha).$$

После несложных преобразований получим

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - D^2}},$$

$$\beta = \frac{2(1 + 3K\pi D)}{\sqrt{1 - D^2} 3K\pi D}. \quad (32)$$

Сопоставляя (32) и (31), приходим к выводу, что граница устойчивости в «малом» является точкой бифуркации и, следовательно, участок бифуркационной диаграммы $A \beta_*$ соответствует устойчивым состояниям равновесия, а участок $\beta_* C$ — неустойчивым. Заштрихуем бифуркационную диаграмму системы, следуя [7]. Заштрихованная область должна

лежать над неустойчивыми положениями равновесия бифуркационной диаграммы.

Ввиду того, что точки бифуркационной кривой, лежащие над заштрихованной областью, соответствуют устойчивому состоянию, участок бифуркационной кривой $B\beta_*$ будет определять режимы устойчивых автоколебаний системы.

Выражение (31), определяющее положение бифуркационной точки, кроме того, позволяет определить ширину зоны и частоту устойчивых автоколебаний на границе их исчезновения.

4. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

С целью анализа полученного решения, обратимся к амплитудно-частотным характеристикам системы, представленным на рис. 7, 8. Из приведенных на этих рисунках графиков, а также выражения (32) следует, что характеристическая постоянная K сильно влияет на форму кривых $\rho = f(\beta)$.

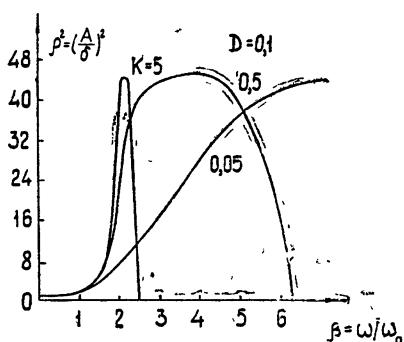


Рис. 7. Зависимость амплитуд и ширины зоны автоколебаний ротора при $D = 0,1$

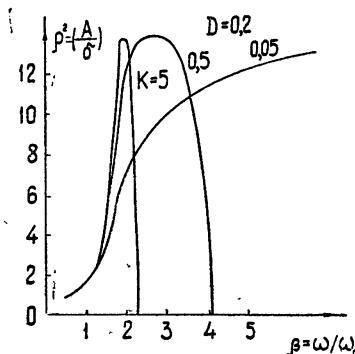


Рис. 8. Зависимость амплитуд и ширины зоны автоколебаний ротора от угловой скорости вращения при $D = 0,2$

Кривые для малых K показывают, что автоколебания ротора существуют в широком диапазоне скоростей. При этом чем меньше K , тем шире область их существования. Например, при $K = 0,05$ ширина зоны самовозбуждающихся колебаний равняется $\Delta\beta = 44$ при $D = 0,1$ и $\Delta\beta = 21$ при $D = 0,2$. Таким образом, при малых значениях K интервал существования автоколебаний настолько широк, что практически невозможно преодолеть их верхний предел.

При увеличении характеристической постоянной K диапазон существования автоколебанийзначинает сужаться и для достаточно больших значений K кривая $\rho = f(\beta)$ трансформируется в кривую, напоминающую характер резонансной кривой ($K = 5$). Таким образом, при некотором значении характеристической постоянной K зона автоколебаний сужается настолько, что можно не только обнаружить верхний предел существования автоколебаний, но и, по-видимому, успешно перейти его.

Вторым параметром, существенно воздействующим на амплитуду и ширину зоны автоколебаний, является относительный коэффициент демпфирования опор D .

Из приведенных на рис. 7 и 8 графиков следует, что увеличение этого коэффициента приводит, во-первых, к уменьшению амплитуды

автоколебаний и, во-вторых, к сужению интервала самовозбуждающихся колебаний.

Таким образом, изменения значения характеристических постоянных K и D надлежащим выбором конструктивных параметров системы, можно управлять характером автоколебаний, уменьшая одновременно их амплитуды и ширину области существования. Обратимся к анализу влияния на автоколебания ротора отдельных конструктивных параметров системы.

Влияние зазора подшипника и его длины. Из кривых изменения относительной амплитуды колебаний $\rho = f(\beta)$ следует, что максимум безразмерной амплитуды колебаний для различных значений K остается постоянным при одном и том же значении коэффициента D . Поскольку безразмерная амплитуда $\rho = \frac{A}{\delta}$ остается постоянной, то с уменьшением зазора действительная амплитуда колебаний будет также уменьшаться. С другой стороны, уменьшение радиального зазора, так же как и увеличение длины подшипника приводит к увеличению характеристической постоянной $K = \frac{4 \mu L r^3}{\omega_0 m \delta^3}$ и, следовательно, к сужению зоны автоколебаний.

Таким образом, при конструировании реальных подшипников с целью обеспечения успешного перехода через зону автоколебаний необходимо стремиться к уменьшению радиального зазора и увеличению длины подшипников, однако уменьшение зазора может привести к нагреву подшипника. При этом будет исключена опасность появления при увеличении длины подшипников больших давлений близ торцевых участков вкладыша (так называемого кромочного давления) т. к. при достаточной податливости упругих опор, подшипники будут самоустанавливаться.

Влияние податливости упругих опор на ширину зоны автоколебаний и их амплитуды. Как следует из выражений (11), изменение податливости опор приводит к изменению основных характеристик системы

$$K = \frac{4 \mu D}{\sqrt{cm} \psi^3}; \quad D = \frac{\kappa}{\sqrt{cm}}; \quad \beta = \frac{\omega \sqrt{m}}{\sqrt{c}}. \quad (33)$$

Из выражения (33) следует, что уменьшение жесткости упругих опор при неизменных остальных параметрах ротора и подшипников приводит к увеличению постоянной K , а при достаточно больших значениях постоянной K интервал существования автоколебаний сужается. Таким образом, увеличение податливости опор может привести к сужению зоны автоколебаний до значений, при которых возможен успешный переход через нее.

С другой стороны, уменьшение жесткости приводит к увеличению безразмерного коэффициента демпфирования упругих опор D , а это ведет к снижению амплитуды зоны автоколебаний.

Однако, как это следует из выражения (32), чрезмерное демпфирование может привести к увеличению ширины зоны автоколебаний, которая при $D = 1$ становится неограниченной сверху. Поэтому применение демпферов для подавления автоколебаний ненагруженных роторов помимо осложнений, связанных с конструированием, может привести к увеличению зоны автоколебаний за счет увеличения коэффициента демпфирования и массы упругих опор [1].

Поскольку при реальном конструктивном оформлении упругих опор [8] всегда существуют силы естественного демпфирования, то при над-

лежащем выборе податливости упругих опор можно ожидать легкого перехода через зону автоколебаний без применения демпферных устройств.

Как следует из графиков, представленных на рис. 7, 9, диапазон существования автоколебаний системы ограничен. При том ширина зоны автоколебаний на этих графиках измеряется в безразмерных единицах угловой скорости β . Как следует из выражений (15), зоны действительных скоростей ротора ω , при которых существуют автоколебания, будут тем меньше, чем более податливыми будут упругие опоры ротора.

Резюмируя результаты анализа влияния различных конструктивных параметров системы на автоколебания, приходим к выводу, что наиболее эффективным параметром, воздействующим на уменьшение амплитуд автоколебаний, является податливость упругих опор, при надлежащем выборе которых можно, переходя из зону автоколебаний, обеспечить устойчивую работу ротора на скоростях, при которых тот же ротор в жестких опорах был неустойчив.

Рис. 9. Зависимость относительного эксцентриситета от скорости вращения ротора при $D = 0,1$.

В заключение приведем некоторые рекомендации по выбору параметров упругих опор, позволяющих обеспечить легкий переход ротора через зону автоколебаний. Анализ автоколебаний ротора показывает, что наиболее обобщенный характеристикой системы является K -характеристическая постоянная Тондля. Выберем эту постоянную в качестве исходного критерия для выбора параметров упругих опор.

Пусть при проектировании ротора заданы максимальная скорость вращения ротора и его вес. Используя общепринятую методику, выберем оптимальные параметры подшипника (μ , L , r и δ), при этом рекомендации на длину подшипника, относящиеся к конструированию роторов на жестких подшипниках скольжения, могут быть пересмотрены в сторону увеличения последней. Обращаясь в формуле (33), получим

$$c_* < \frac{16 \mu^2 L^2 r^6}{K^2 m \delta^6}.$$

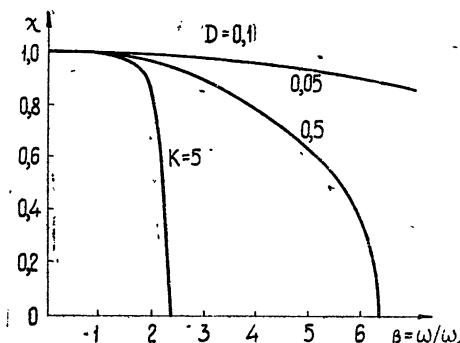
В качестве ориентировочного значения характеристической постоянной K можно принять $K \geq 2$. Итак:

1) анализ автоколебаний ненагруженного ротора, установленного в упругие опоры, показывает существование ограниченной зоны автоколебаний системы,

2) ширина зоны автоколебаний сужается с увеличением податливости упругих опор,

3) амплитуда колебаний ротора при переходе через зону автоколебаний ограничена и уменьшается с уменьшением жесткости упругих опор ротора,

4) уменьшение радиального зазора и увеличение длины подшипника приводит к сужению интервала автоколебаний и уменьшению их амплитуд, однако, уменьшение радиального зазора ведет к нагреву подшипника,



5) основным способом для сужения зоны и уровня автоколебаний следует признать уменьшение податливости упругих опор, надлежащий выбор которых должен обеспечить, даже при силах естественного демпфирования, условия для успешного преодоления зоны автоколебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Л. Позняк, Изв. АН СССР, ОТН, Механика, № 3, 68 (1965).
2. С. П. Максимов, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 133 (1964).
3. М. В. Коровчинский, Сб. Трение и износ в машинах, 12, 131 (1956).
4. Tondl A., Some problems of Rotor Dynamics. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha-London, 1965.
5. Poincaré H., Figures d'équilibre d'une masse fluid, Paris, 1903.
6. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных), ЛКБВИА, Л., 1949.
7. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, изд. Наука, 1959.
8. А. С. Кельзон, В. И. Прядилов, Авт. свид., № 182968, Официальный бюллетень комитета по делам изобретений и открытий при Совете Министров СССР, № 12, 1966.

Поступила в редакцию
20 марта 1970 г.

VERTICAL ROTOR WITH SLIDING BEARINGS TRANSITION THROUGH AUTOOSCILLATIONS ZONE

A. S. Kelson, V. I. Yakovlev

A problem of oscillations of a vertical rotor mounted in elastically supported sliding bearings is solved in a nonlinear consideration. A class of angular asynchronous motions i. e. of motions with angular velocity differing from rotation angular velocity is considered. Graphs for the system's main parameters changes are plotted. The stability of the obtained motions is investigated. Based on the analysis of the obtained solution a possibility is found of a vertical rotor transition through an autooscillations zone providing the rigidity of the elastic pillow is properly adjusted.

УДК 621.382.23 + 517.91

ДИНАМИКА СХЕМЫ НА ТУННЕЛЬНЫХ ДИОДАХ

Н. А. Гришкина, В. И. Королев

Рассматривается динамика схемы на туннельных диодах, характеристика которых аппроксимируется полиномом третьей степени. Показывается, что изменением параметров схемы легко осуществляется перестройка режима работы с одного вида на другой. Доказывается возможность существования в системе устойчивых предельных циклов.

Исследованием схем с нелинейными элементами, имеющими падающий участок характеристики занимались многие авторы [1–6]. Наиболее полные результаты получены в работах [1, 2], в которых проводилось исследование характеристики нелинейных элементов при кусочно-линейной аппроксимации.

В настоящей работе рассматривается динамика схемы, изображенной на рис. 1 а, в которой характеристика нелинейного элемента (туннельного диода) аппроксимируется полиномом третьей степени (рис. 1 б).

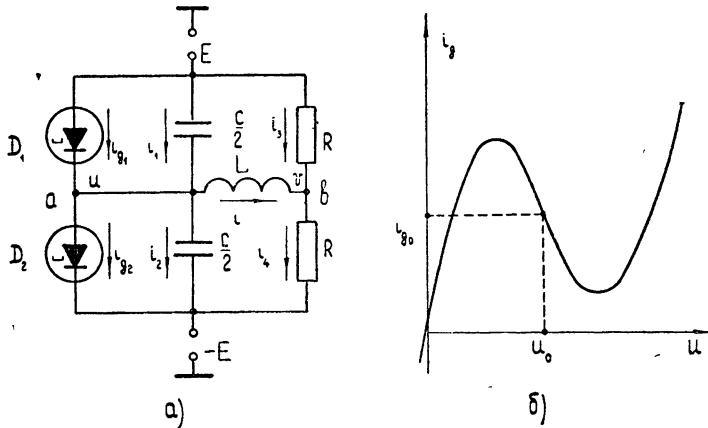


Рис. 1.

Составим уравнения движения исследуемой схемы, используя законы Кирхгофа. Для узлов a и b (рис. 1 а) имеем

$$\begin{aligned} C \frac{du}{dt} &= i_{g_1}(E - u) - i_{g_2}(E + u) - i, \\ L \frac{di}{dt} &= u - v, \\ \frac{E - v}{R} - \frac{v + E}{R} + i &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$i_{g_1}(E - u) = \alpha(u + u_0 - E) - \beta(u + u_0 - E)^3 + i_{g_0},$$

$$i_{g_2}(E + u) = -\alpha(u - u_0 + E) + \beta(u - u_0 + E)^3 + i_{g_0},$$

u_0 — напряжение смещения рабочей точки, лежащей на падающем участке характеристики диода.

Исключая из системы (1) напряжение v , запишем уравнения движения в виде

$$C \frac{du}{dt} = \varphi(u, E) - i, \quad (2)$$

$$L \frac{di}{dt} = 2u - Ri,$$

где

$$\varphi(u, E) = i_{g_1}(E - u) - i_{g_2}(E + u) = 2u[\alpha - 3\beta(E - u_0)^2 - \beta u^2]. \quad (3)$$

Приравнивая нуль правые части системы (2) и исключая из этих уравнений ток i , получим уравнение для нахождения состояний равновесия. Это уравнение имеет вид:

$$\varphi(\bar{u}, E) - 2g\bar{u} = 2\bar{u}[(\alpha - g) - 3\beta(E - u_0)^2 - \beta\bar{u}^2] = 0, \quad (4)$$

где \bar{u} — координата состояния равновесия, $g = R^{-1}$.

Из (4) следует, что значение $\bar{u} = 0$ является состоянием равновесия при любой величине параметра E . Другие состояния равновесия находятся из уравнения

$$\frac{3\beta}{\alpha - g}(E - u_0)^2 + \frac{\beta}{\alpha - g}\bar{u}^2 = 1. \quad (5)$$

Тип и устойчивость состояний равновесия определяются корнями характеристического уравнения системы (2), линеаризованной в окрестности состояния равновесия. Это уравнение имеет вид

$$LCp^2 + [RC - L\varphi'(u, E)]p + 2 - R\varphi'(u, E) = 0. \quad (6)$$

Из (6) следует, что состояние равновесия типа узла или фокуса будет устойчиво, если выполняются неравенства

$$RC - L\varphi'(u, E) > 0, \quad (7)$$

$$2 - R\varphi'(u, E) > 0, \quad (8)$$

и неустойчиво (типа узла или фокуса) при выполнении неравенства (8) и неравенства, обратного неравенству (7). Заменив в (7) знак неравенства знаком равенства, получим уравнение границы устойчивости

$$RC - L\varphi'(u, E) = 0. \quad (7a)$$

На рис. 2 приведена бифуркационная диаграмма, показывающая число и устойчивость состояний равновесия системы (2), и бифуркационные значения параметра E . Этими значениями параметра являются

$$E_1 = u_0 - \sqrt{(\alpha - g)(3\beta)^{-1}}, \quad E_2 = u_0 + \sqrt{(\alpha - g)(3\beta)^{-1}}.$$

На рис. 2 точками отмечены устойчивые, а крестиками неустойчивые состояния равновесия. В целях уменьшения числа параметров приведем в системе (2) замену переменных, полагая

$$\tau = \frac{R}{L} t, \quad u = xE, \quad R t = yE, \quad u_0 = z_0 E, \quad \delta = \frac{R^2 C}{L},$$

после чего система (2) и уравнение (6) примут вид

$$\delta \dot{x} = \varphi(x) - y, \quad (2a)$$

$$\dot{y} = 2x - y, \quad (6a)$$

$$\delta p^2 + [\delta - \varphi'(x_0)] p + 2 - \varphi'(x_0) = 0,$$

где $\varphi(x) = \alpha x - \beta x^3$, $\alpha = 2R [\alpha - 3\beta E^2 (1 - z_0)^2]$, $\beta = 2R \beta E^2$.

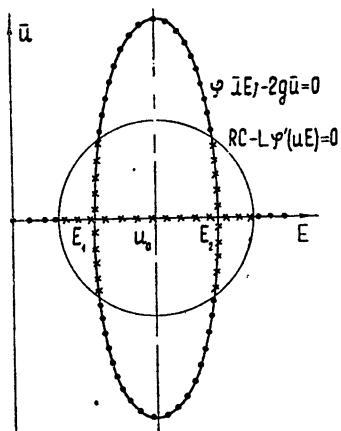


Рис. 2.

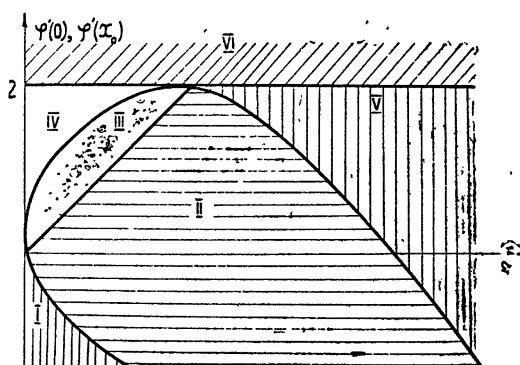


Рис. 3.

Характеристический полином (6 а) содержит два параметра δ и $\varphi'(x_0)$, от которых зависят корни этого полинома.

Разбиение плоскости параметров δ и $\varphi'(x_0)$ на области с различными типами состояний равновесия приведено на рис. 3, (I — устойчивые узлы, II — устойчивые фокусы, III — неустойчивые фокусы, IV — неустойчивые узлы, V — устойчивые узлы, VI — седла).

Рассмотрим возможные режимы схемы, задавая значения параметров δ и $\varphi'(x_0)$ в различных областях диаграммы рис. 3.

Следует заметить, что если $0 < \varphi'(0) < 2$, то система (2) имеет одно состояние равновесия ($x_0=0, y_0=0$), не являющееся седлом. Если же $\varphi'(0) > 2$, система (2) имеет три состояния равновесия, из которых одно является седлом, расположенным в начале координат плоскости xy (рис. 4).

Начнем исследование системы с изучения поведения фазовых траекторий в бесконечно удаленных точках фазовой плоскости xy . Как следует из уравнений (2), величина

$$\frac{1}{2} \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = \frac{\bar{\alpha}}{\delta} x^2 + 2xy - \frac{\bar{\beta}}{\delta} x^4 - \frac{1}{\delta} xy - y^2 < 0$$

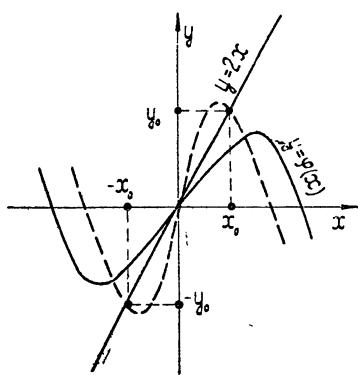


Рис. 4.

в точках окружности $x^2 + y^2 = R = \text{const}$ достаточно большого радиуса. Поэтому каждая такая окружность является циклом без контакта и все фазовые траектории идут из бесконечности в область внутри цикла без контакта, т. е. бесконечность является абсолютно неустойчивой [7].

Для случая одного состояния равновесия, $0 < \varphi'(0) < 2$, возможно задание параметров δ и $\varphi'(0)$ в II, III, IV и V областях диаграммы рис. 3.

Рассмотрим эти режимы.

1) Вид фазовых портретов для областей II и V, соответственно, приведены на рис. 5 а, б*. При значениях параметров, заданных в этих областях, схема работает как обычный усилитель с существующим законом процесса установления.

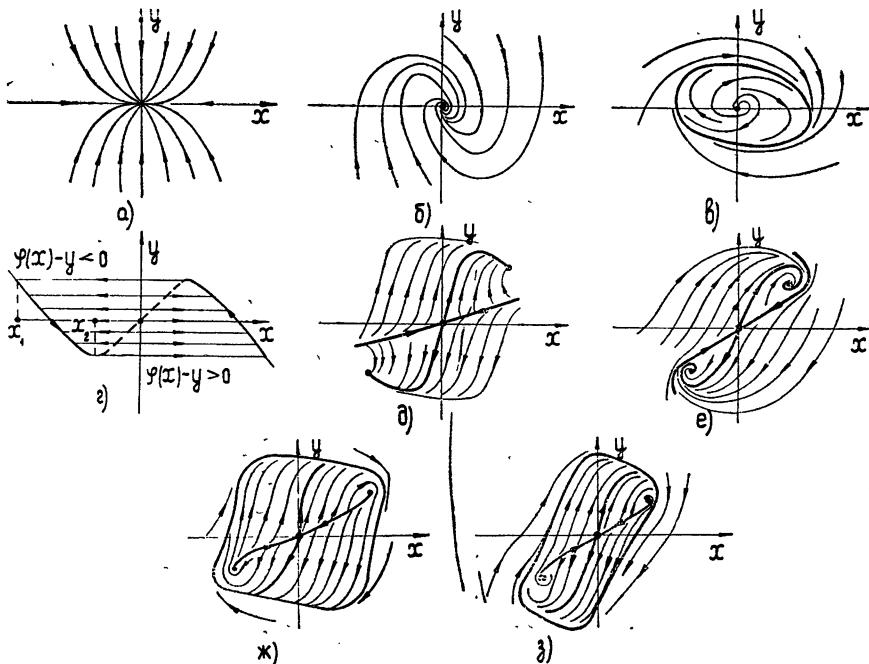


Рис. 5.

2) При задании параметров δ и $\varphi'(0)$ в области III в схеме возникают периодические движения. Фазовые траектории, идущие из бесконечности от состояния равновесия, асимптотически приближаются к единственному устойчивому предельному циклу. В зависимости от значений параметров δ и $\varphi'(0)$ форма колебаний может быть как близкой к синусоидальной, так и сильно отличающейся от таковой. Вид фазового портрета приведен на рис. 5 в.

3) В случае выбора параметров в области IV в схеме возникают периодические колебания, существенно отличающиеся по форме от синусоидальных. Если $\delta \ll 1$, то генерируются разрывные колебания и схема работает как мультивибратор. Покажем это.

Пусть в системе уравнений (2 а)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varphi(x) - y, \\ \dot{y} &= 2x - y \end{aligned} \quad (2a)$$

* Все фазовые портреты, приведенные в этой работе, получены в результате решения уравнений (2) на электронно-моделирующей установке типа ЭМУ-8.

выполняется неравенство $\delta \ll 1$. При $\delta = 0$ получаем систему уравнений, описывающих медленные движения

$$\begin{aligned}\varphi(x) - y &= 0, \\ \dot{y} &= 2x - y.\end{aligned}\tag{9}$$

Уравнения быстрых движений имеют вид

$$\begin{aligned}\delta \dot{x} &= \varphi(x) - y, \\ y &= y_0 = \text{const.}\end{aligned}\tag{10}$$

Направление движения изображающей точки по быстрым движениям определяется знаком правой части первого уравнения системы (10). Так, при $\varphi(x) - y_0 < 0$ изображающая точка движется справа налево, а при $\varphi(x) - y_0 > 0$ — слева направо. Вид фазового портрета приведен на рис. 5 т.

Период колебаний находится как время движения изображающей точки по линии медленных движений. Из (9) имеем

$$\begin{aligned}T &= 2 \int_0^t dt = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\varphi'(x)}{2x - \varphi(x)} dx = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\bar{\alpha} - 3\bar{\beta}x^2}{(2 - \bar{\alpha})x + \bar{\beta}x^3} dx = \\ &= \frac{2}{2 - \bar{\alpha}} \left\{ \bar{\alpha} \ln \frac{x_2}{x_1} - \ln \left[\frac{(2 - \bar{\alpha})x_2 + 3\bar{\beta}x_2^2}{(2 - \bar{\alpha})x_1 + 3\bar{\beta}x_1^2} \right]^{1/2} \right\}.\end{aligned}$$

Исследуем далее режимы работы схемы, когда в системе (2 а), при $\varphi'(0) > 2$ имеются три состояния равновесия, одно из которых ($x_0 = 0, y_0 = 0$) является седлом. Тип двух других состояний равновесия определяется по диаграмме рис. 3 и зависит от величин параметров δ и $\varphi'(x_0)$.

1) При задании параметров δ и $\varphi'(x_0)$ в областях I и II схема работает в режиме триггера. Вид фазового портрета приведен на рис. 5 г, е.

2) Значительный интерес представляют случаи, когда параметры δ и $\varphi'(x_0)$ заданы в III и IV областях диаграммы рис. 3. В этих случаях состояния равновесия (x_0, y_0) и $(-x_0, -y_0)$ неустойчивы, однако, суммарный индекс Пуанкаре всех трех состояний равновесия равен + 1. Поскольку бесконечность абсолютно неустойчива, то существует устойчивый предельный цикл, охватывающий все три состояния равновесия (рис. 5 ж, з). В случае кусочно-линейной аппроксимации подобный режим работы схемы не наблюдается.

Проведенная качественная проверка работы схемы на тунNELьных диодах типа АИ-301 Г, а именно условия самовозбуждения, влияние параметров на расположение состояний равновесия и предельных циклов, осциллограммы автоколебаний, подтвердила соответствие результатов расчета и эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Лисицкая, Радиофизика, 9, № 5, 1008 (1966).
2. И. Н. Лисицкая, Л. А. Синицкий, Математическое моделирование и теория электрических цепей, изд. Наукова думка, Киев, 1965.
3. И. Н. Лисицкая, Л. А. Синицкий, Автоматический контроль и измерительная техника, выпуск 7, Киев, 1963.
4. А. В. Нетушил, ЖТФ, 15, 12 (1945).

5. М. А. Айзerman, Ф. Р. Гантмакер, Автоматика и телемеханика, 18, № 11
1012 (1957).
6. М. А. Айзerman, Ф. Р. Гантмакер, ПММ, 20, 640 (1956).
7. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М.,
1959.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
19 сентября 1969 г.

DYNAMICS OF A TUNNEL-DIODE CIRCUIT

N. A. Grishkina, V. I. Korolev

Dynamics of a tunnel-diode circuit is considered using a third degree polynomial approximation for a diode's characteristic. It is shown that the circuit operational modes can easily be changed by variation of the circuit parameters. The possibility of existence of stable limit cycles in the system is proved.

УДК 517.9

ДИНАМИКА ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ ПРОСТЕЙШИХ ТИПОВ

М. И. Мотова

Рассмотрены химические системы «открытого» и «закрытого» типа с моно- и бимолекулярными реакциями, протекающими при постоянном объеме, давлении и температуре, без автокатализа. Представлены дифференциальные уравнения кинетики реакций, и найдены соотношения для констант скоростей реакций с n реагентами. Доказано существование единственного устойчивого состояния равновесия и отсутствие периодических изменений концентраций для «открытых» систем с двумя промежуточными центрами и для «закрытых» — с двумя и тремя реагентами.

Для химических процессов, проходящих в замкнутом объеме с идеальным перемешиванием, при постоянном давлении и температуре можно предположить две возможности осуществления реакции. 1) Исходные вещества вводятся в сосуд в виде заданных концентраций, а затем они претерпевают ряд химических превращений. В этом случае реагирующие вещества и продукты реакции остаются в пределах системы. Такие системы называют «закрытыми» (замкнутыми). 2) Системы с непрерывной подачей исходных веществ и отбором продуктов реакции естественно назвать «открытыми» (незамкнутыми) [1]. Реакции в «замкнутых» системах можно считать частным случаем процессов, проходящих в «открытых» системах. Рассматриваются «открытые» системы с двумя промежуточными центрами, «закрытые» — с двумя и тремя реагентами.

1. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ХИМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС С МОНО- И БИМОЛЕКУЛЯРНЫМИ РЕАКЦИЯМИ ПРИ ПОСТОЯННОМ ДАВЛЕНИИ И ТЕМПЕРАТУРЕ

Рассматривая процессы, проходящие в химической системе, сделаем следующие предположения. Во-первых, будем учитывать постоянство констант скоростей реакций, зависящих от температуры. Во-вторых, будем рассматривать только моно- и бимолекулярные реакции, так как вероятность трехмолекулярных реакций мала.

Для веществ $X_1, X_2, X_k, \dots, X_n$, участвующих в реакциях, могут осуществляться мономолекулярные реакции типа



или



в процессе которых получаются или расходуются реагенты X_k, X_s, X_t . Бимолекулярные реакции можно записать в виде



Будем обозначать концентрации реагентов X_1, X_2, \dots, X_n через x_1, x_2, \dots, x_n (в молях на литр). Тогда изменение концентраций веществ,

участвующих во всевозможных реакциях, можно записать при помощи следующих дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_s = (k^s x) + (K^s x, x) + A^s \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где $x(x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_n)$ — вектор концентраций $x_1, x_2, \dots, x_s, \dots, x_n$ реагентов $X_1, X_2, \dots, X_s, \dots, X_n$, присутствующих в реакционном сосуде. $k^s(k_1^s, k_2^s, \dots, k_{s-1}^s, k_s^s, k_{s+1}^s, \dots, k_n^s)$ — вектор, характеризующий константы скоростей мономолекулярных реакций типа (1), (2). Каждая компонента вектора k^s соответствует определенным реакциям, в которых получается или расходуется вещество X_s , где нижний индекс определяет вещество, расходующееся в реакции, а верхний — вещество, получающееся в ходе реакции, и может быть представлена в виде

$$k_l^s = \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq j, s}}^n k_j^{sl} + 2k_j^{ss}, \quad k_s = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq s}}^n \sum_{j=0}^n k_j^{ij} \quad (i, j \neq 0 \text{ одновременно}), \quad (6)$$

где k_j^{sl} , k_j^{ss} , k_j^{ij} — константы скоростей каждой отдельной реакции типа (1) и (2). Равенство нулю s, l, i или j означает, что вещество X_s , X_l , X_i или X_j соответственно в реакциях не участвует.

Для характеристики бимолекулярных реакций типа (3), (4) запишем матрицу, составленную из элементов, определяющих константы скоростей реакций

$$K^s = \begin{vmatrix} k_{11}^s & k_{12}^s & k_{13}^s & \dots & k_{1,s-1}^s & -k_{1s} & k_{1,s+1}^s & \dots & k_{1n}^s \\ 0 & k_{22}^s & k_{23}^s & \dots & k_{2,s-1}^s & -k_{2s} & k_{2,s+1}^s & \dots & k_{2n}^s \\ 0 & 0 & k_{33}^s & \dots & k_{3,s-1}^s & -k_{3s} & k_{3,s+1}^s & \dots & k_{3n}^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & k_{s-1,s-1}^s & -k_{s-1,s} & k_{s-1,s+1}^s & \dots & k_{s-1,n}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -k_{ss} & -k_{s,s+1}^s & \dots & -k_{s,n}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & k_{s+1,s+1}^s & \dots & k_{s+1,n}^s \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & k_{nn}^s \end{vmatrix}, \quad (7)$$

где k_{ij}^s соответствует константам скоростей реакции получения вещества X_s в реакциях типа (3), (4), причем

$$k_{ij}^s = \sum_{l=0}^n k_{il}^{sl} + 2k_{ij}^{ss} \quad (i, j, l \neq s), \quad (8)$$

а k_{ss} , k_{si} характеризуют расход вещества X_s в результате реакций типа (3), (4). Для этих коэффициентов выполняется соотношение

$$k_{si} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n k_{sj}^{ij} = k_{is} \quad (i, s \neq i, j, i, j \neq 0 \text{ одновременно})$$

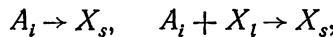
для реакций типа (3), соотношение

$$k_{ss} = 2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n k_{ss}^{ij} \quad (i, j \neq s, i, j \neq 0 \text{ одновременно})$$

— для реакций типа (4) и соотношения

$$k_{ls} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n k_{ij}^{ls}, \quad k_{ls}^{ij} = k_{ij}^{ls}.$$

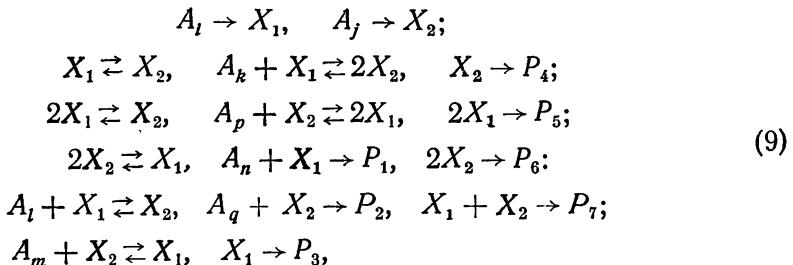
$A^s (A_1^s, A_2^s, \dots, A_n^s)$ — вектор, характеризующий образование вещества X_s из непрерывно поступающего продукта A_i в реакциях типа



причем концентрации веществ A_1, A_2, \dots, A_n остаются постоянными. Константы скоростей реакций образования промежуточного активного центра X_s из исходного продукта A_i обозначим через k_a^s, k_{al}^s , а концентрации исходного продукта — через a_i .

2. «ОТКРЫТАЯ» ХИМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С ДВУМЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ЦЕНТРАМИ

Исследуем химический процесс для двух реагирующих веществ, протекающий в незамкнутой системе при непрерывной подаче исходных и отборе полученных продуктов реакции, без автокатализа. В такой системе возможны любые из следующих реакций:



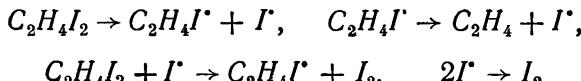
где A_i, A_j, A_l, \dots — исходные вещества, непрерывно поступающие в реакционный сосуд, чтобы их концентрации были постоянны, X_1, X_2 — промежуточные центры реакции, P_1, P_2, \dots, P_7 — конечные продукты реакций, которые больше в реакции не участвуют, например, выпадают в осадок.

Каждая осуществляемая реакция удовлетворяет определенным молекулярным соотношениям. Обозначим молекулярный (атомарный) вес вещества X_s через δ_s . Если идет реакция (1), то это значит, что $\delta_k = \delta_s + \delta_i$, для реакции (2) — $\delta_k = 2\delta_s$ и т. д. Вместе могут реализоваться только те группы реакций, которые отвечают одинаковым молекулярным соотношениям. Например, если идет реакция $X_1 \rightleftharpoons X_2$, то $\delta_1 = \delta_2$, но для реакции $X_1 \rightleftharpoons 2X_2$ $\delta_1 = 2\delta_2$, т. е. эти реакции несовместимы, так как выражения, определяющие молекулярные соотношения, противоречивы.

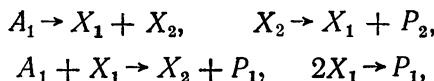
Однако при написании уравнений, для общности, мы будем учитывать все реакции, приравнивая затем между константы скоростей тех реакций, которые не реализуются в каком-то конкретном случае.

Можно привести примеры некоторых реакций, которые реализуются в «открытых» системах [2, 3].

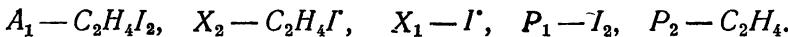
1) Распад иодистого этила:



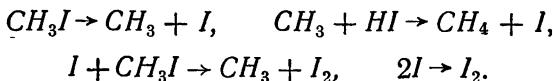
или



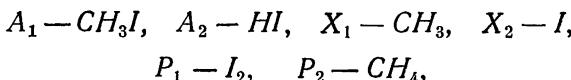
где



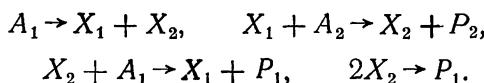
2) Реакция иодистого метила с иодистым водородом:



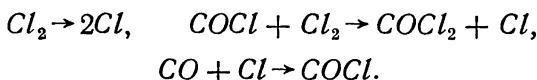
Обозначим:



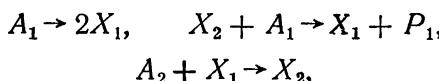
тогда эти реакции в наших обозначениях можно переписать в виде



3) Реакция соединения хлора и окиси углерода:



Это соответствует следующей общей записи:



где



Уравнения, описывающие систему всех возможных химических реакций (9), могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k_a^1 a - (k_1^2 + k_1^{22} + k_{1a}^2 a + k_1^{2a} + k_1^p + k_{1a}^p a + k_{1a}^{22} a) x_1 - \\ &- 2(k_{11}^2 + k_{11}^p + k_{11}^{2a}) x_1^2 + (k_2^1 + 2k_2^{11} + k_2^{1a} + k_{2a}^1 a + 2k_{2a}^{11} a) x_2 + \\ &+ (k_{22}^1 + k_{22}^{1a}) x_2^2 - k_{12}^p x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_a^2 a - (k_2^1 + k_2^{11} + k_2^{1a} + k_{2a}^1 a + k_2^p + k_{2a}^p a + \\ &+ k_{2a}^{11} a) x_2 - 2(k_{22}^1 + k_{22}^p + k_{22}^{1a}) x_2^2 + (k_1^2 + 2k_1^{22} + k_1^{2a} + \\ &+ k_{1a}^2 a + 2k_{1a}^{22} a) x_1 + (k_{11}^2 + k_{11}^{2a}) x_1^2 - k_{12}^p x_1 x_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь x_1, x_2 — концентрации продуктов X_1, X_2 , a — концентрация исходного вещества A (мы будем считать, что в реакционный сосуд поступает только одно начальное вещество A , так как это не влияет на общность доказательств), k_{ij}^s — константы скоростей реакций.

Уравнения (10) можно переписать в следующих обозначениях

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= B_{01} - (B_1 + b_1) x_1 - (2B_2 + b_2) x_1^2 + (B_3 + b_3) x_2 + \\ &+ B_4 x_2^2 - B_5 x_1 x_2 = P(x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 = & B_{02} + (B_1 + \beta_1)x_1 + B_2x_1^2 - (B_3 + \beta_3)x_2 - (2B_4 + \beta_4)x_2^2 - \\ & - B_5x_1x_2 = Q(x_1, x_2),\end{aligned}\quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}B_{01} = & k_a^1 a, \quad B_{02} = k_a^2 a, \quad B_1 = k_1^2 + k_1^{22} + k_1^{2a} + k_{1a}^2 a + k_{1a}^2 a, \\ B_2 = & k_{11}^2 + k_{11}^{2a}, \quad B_3 = k_2^1 + k_2^{11} + k_2^{1a} + k_{2a}^1 a + k_{2a}^{11} a, \\ B_4 = & k_{22}^1 + k_{22}^{1a}, \quad B_5 = k_{12}^0, \quad b_1 = k_1^0 + k_{1a}^0 a, \\ b_2 = & 2k_{11}^0, \quad b_3 = k_2^{11} + k_{2a}^{11} a, \quad \beta_1 = k_1^{22} + k_{1a}^{22} a, \\ \beta_3 = & k_2^0 + k_{2a}^0 a, \quad \beta_4 = 2k_{22}^0.\end{aligned}$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РЕАКЦИЙ В «ОТКРЫТОЙ» ХИМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Исследуем возможные движения в системе, описываемой уравнениями (11). Пусть примем, как идут траектории в фазовой плоскости x_1x_2 на границах положительного квадранта.

1) При $x_1 = 0$ имеем $\dot{x}_1 = B_{01} + (B_3 + b_3)x_2 + B_4x_2^2$, т. е. при $x_2 > 0$ скорость $\dot{x}_1 > 0$ и x_1 растет.

2) При $x_2 = 0$ $\dot{x}_2 = B_{02} + (B_1 + \beta_1)x_1 + B_2x_1^2$, т. е. при $x_1 > 0$; скорость $\dot{x}_2 > 0$, и, следовательно, x_2 растет.

Отсюда следует, что фазовые траектории входят внутрь положительного квадранта и оси x_1 и x_2 являются прямыми без контакта.

3) Возьмем некоторую знакопредeterminedную функцию $V = x_1 + x_2$. Можно представить себе в плоскости системы прямых $V(x_1, x_2) = c$.

Найдем производную $\frac{dV}{dt}$ учитывая (11),

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} = & (B_{01} + B_{02}) - (b_1 - \beta_1)x_1 + (b_3 - \beta_3)x_2 - (B_2 + b_2)x_1^2 - \\ & - (B_4 + \beta_4)x_2^2 - 2B_5x_1x_2.\end{aligned}$$

Для достаточно больших значений x_1 и x_2 можно пренебречь свободным членом и первыми степенями по x_1 и x_2 , тогда

$$\frac{dV}{dt} \approx -(B_2 + b_2)x_1^2 - (B_4 + \beta_4)x_2^2 - 2B_5x_1x_2,$$

т. е. $\frac{dV}{dt} < 0$ для достаточно больших c . Таким образом, видно, что прямые $V(x_1, x_2) = c$ являются прямыми без контакта и все траектории входят внутрь области D , ограниченной осьями и этой прямой. Это означает, что бесконечность системы (11) всегда неустойчива. Индекс Пуанкаре замкнутой кривой, ограничивающей область D , вдоль которой векторы, определяемые системой (11), направлены все внутрь, равен +1, т. е. внутри замкнутой кривой обязательно существует нечетное число состояний равновесий, причем число седел на единицу меньше числа остальных особых точек [4].

Чтобы найти состояния равновесия системы (11), построим кривые, определяемые уравнениями

$$(2B_2 + b_2)x_1^2 + B_5x_1x_2 - B_4x_2^2 + (B_1 + b_1)x_1 - (B_3 + b_3)x_2 - B_{01} = 0, \quad (12)$$

$$B_2x_1^2 - B_5x_1x_2 - (2B_4 + \beta_4)x_2^2 + (B_1 + \beta_1)x_1 - (B_3 + \beta_3)x_2 + B_{02} = 0.$$

Можно показать, что это — гиперболы, центры которых не лежат в положительном квадранте.

Первая кривая имеет единственное пересечение с осью x_1 для положительных значений x_1 и x_2 , а вторая кривая — единственное пересечение для положительных x_1 и x_2 с осью x_2 . Тогда при пересечении этих кривых в положительном квадранте возможны три варианта: 1) пересечений нет (не имеется положительных корней уравнений (12)); 2) одно пересечение (один положительный корень уравнений (12)); 3) два пересечения (два положительных корня уравнения (12)).

Согласно критерию Бендикусона, из уравнений (11) следует, что внутри области D отсутствуют замкнутые траектории, так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right) = -(B_1 + b_1) - (2B_2 + b_2)x_1 - B_5x_2 - (B_3 + \beta_3) - 2(2B_4 + \beta_4)x_2 - B_5x_1 < 0,$$

причем выражение $\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} \right)$ не меняет знака в положительном квадранте.

Так как в области D должно быть нечетное число состояний равновесия, то уравнения (12) имеют здесь только один положительный корень, а так как внутри области D нет замкнутых траекторий, то система (11) имеет одно состояние равновесия внутри области D , т. е. система реакций (9) имеет единственное состояние равновесия.

4. «ЗАМКНУТАЯ» ХИМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С ДВУМЯ И ТРЕМЯ АКТИВНЫМИ ЦЕНТРАМИ

Для «замкнутой» системы, кроме дифференциальных уравнений, описывающих изменение концентраций реагирующих веществ, необходимо учитывать еще и уравнение сохранения вещества в виде

$$\sum_{i=1}^n \delta_i x_i = c, \quad (13)$$

где δ_i — молекулярный (атомарный) вес вещества X_i . Константа c в этом соотношении определяется начальными условиями и может быть представлена в виде $c = \sum_{i=1}^n \delta_i x_i^0$, где x_i^0 — начальные концентрации веществ, помещенных в реакционный сосуд. Равенство (13) означает, что пространство фазовых переменных расщепляется на минимаритные подпространства, определяемые (13).

Условие сохранения вещества можно переписать в виде

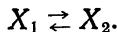
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + x_s = c \quad (i \neq s),$$

где

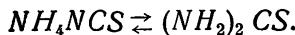
$$\alpha_i = \delta_i / \delta_s.$$

В «замкнутой» химической системе с двумя реагентами возможны следующие реакции.

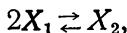
1) Реакция изомеризации



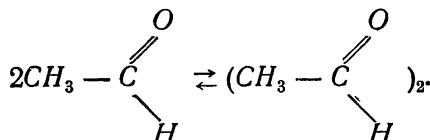
Например, превращение тиоцианата и тиомочевины



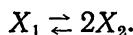
2) Реакция полимеризации



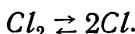
превращение уксусного альдегида в димер (паральдегид)



3) Реакция диссоциации



Пример — реакция разложения хлора



Для этих реакций изменение концентраций реагирующих веществ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(k_1^2 + k_1^{22})x_1 - 2k_{11}^2x_1^2 + (k_2^1 + 2k_2^{11})x_2 + k_{22}^1x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= (k_1^2 + 2k_1^{22})x_1 + k_{11}^2x_1^2 - (k_2^1 + k_2^{11})x_2 - 2k_{22}^1x_2^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициенты, соответствующие реакциям, в которых участвуют оба реагента, равны нулю, так как нет веществ, выходящих из реакции (система замкнута). К дифференциальным уравнениям следует добавить условие сохранения вещества, которое можно записать в виде

$$a_1x_1 + x_2 = c, \quad a_1 = \delta_1/\delta_2. \quad (15)$$

Выражение (15) показывает, что можно перейти к одному переменному, а фазовая плоскость соответственно раскалывается на прямые. Дифференциальное уравнение на прямой имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(k_1^2 + k_1^{22} + k_2^1 + 2k_2^{11} + 2k_{22}^1c\alpha_1)x_1 - (2k_{11}^2 - k_{22}^1\alpha_1^2)x_1^2 + \\ &\quad + (k_2^1 + 2k_2^{11})c + k_{22}^1c^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Для определения состояния равновесия химической системы воспользуемся уравнениями (14), тогда для x_1, x_2 получим уравнение

$$\bar{x}_2 = \frac{k_1^2}{k_2^1 + 3k_2^{11}} \bar{x}_1 + \frac{3k_{11}^2}{k_2^1 + 3k_2^{11}} \bar{x}_1^2.$$

Подставляя это соотношение в (15), будем иметь

$$3\bar{x}_1^2 \frac{k_{11}^2}{k_2^1 + 3k_2^{11}} + \left(\alpha_1 + \frac{k_1^2}{k_2^1 + 3k_2^{11}} \right) \bar{x}_1 - c = 0.$$

Такое уравнение имеет один положительный корень, следовательно, система (14) имеет единственное состоянное равновесия x_1x_2 в положительном квадранте x_1x_2 .

Устойчивость состояния равновесия $\bar{x}_1\bar{x}_2$ удобно показать из уравнения (16). Линеаризуя его, получим

$$\dot{x}_1 = -x_1 \{k_1^2 + k_1^{22} + k_1^2 + 2k_2^{11} + 4k_{11}^2 \bar{x}_1 + 2k_{22}^1 \alpha_1 (c - \alpha_1 \bar{x}_1)\}.$$

Так как $c - \alpha_1 \bar{x}_1 = \bar{x}_2 > 0$, то устойчивость очевидна.

Таким образом, в «замкнутой» химической системе с двумя активными центрами при постоянной температуре и объеме существует единственное состояние равновесия, определяемое начальными концентрациями.

Для трех реагирующих веществ при всевозможных мономолекулярных реакциях дифференциальные уравнения записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(k_1^2 + k_1^3 + k_1^{22} + k_1^{23} + k_1^{33}) x_1 + (k_2^1 + 2k_2^{11} + k_2^{13}) x_2 + \\ &+ (k_3^1 + 2k_3^{11} + k_3^{12}) x_3 - 2(k_{11}^2 + k_{11}^3 + k_{11}^{23}) x_1^2 + (k_{22}^1 + k_{22}^{13}) x_2^2 + \\ &+ (k_{33}^1 + k_{33}^{12}) x_3^2 + (2k_{23}^{11} + k_{23}^1) x_2 x_3 - (k_{12}^3 + k_{12}^{33}) x_1 x_2 - \\ &\quad - (k_{13}^2 + k_{13}^{22}) x_1 x_3, \\ \dot{x}_2 &= (k_1^2 + 2k_1^{22} + k_1^{23}) x_1 - (k_2^1 + k_2^3 + k_2^{11} + k_2^{13} + k_2^{33}) x_2 + \\ &+ (k_3^1 + k_3^{12} + 2k_3^{22}) x_3 + (k_{11}^2 + k_{11}^3) x_1^2 - 2(k_{22}^1 + k_{22}^3 + k_{22}^{13}) x_2^2 + \quad (17) \\ &+ (k_{33}^2 + k_{33}^{12}) x_3^2 - (k_{12}^3 + k_{12}^{33}) x_1 x_2 + (k_{13}^2 + 2k_{13}^{22}) x_1 x_3 - (k_{23}^1 + k_{23}^{11}) x_2 x_3, \\ \dot{x}_3 &= (k_1^3 + k_1^{23} + 2k_1^{33}) x_1 + (k_2^3 + k_2^{13} + 2k_2^{33}) x_2 - (k_3^1 + k_3^2 + k_3^{11} + \\ &+ k_3^{22} + k_3^{12}) x_3 + (k_{11}^3 + k_{11}^{23}) x_1^2 + (k_{22}^3 + k_{22}^{13}) x_2^2 - 2(k_{33}^1 + k_{33}^2 + \\ &+ k_{33}^{12}) x_3^2 + (k_{12}^3 + 2k_{12}^{33}) x_1 x_2 - (k_{13}^2 + k_{13}^{22}) x_1 x_3 - (k_{23}^1 + k_{23}^{11}) x_2 x_3. \end{aligned}$$

Кроме того, уравнение сохранения вещества для системы с тремя реагентами можно выразить соотношениями:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + x_3 = c, \quad \alpha_1 = \delta_1 / \delta_3, \quad \alpha_2 = \delta_2 / \delta_3,$$

используя которые, можно перейти к двум переменным x_1 и x_2 , т. е. к фазовой плоскости вместо фазового пространства:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\{k_1^2 + k_1^3 + k_1^{22} + k_1^{23} + k_1^{33} + c(k_{13}^2 + k_{13}^{22}) + \alpha_1 \times \\ &\times (k_3^1 + 2k_3^{11} + k_3^{12}) + 2c\alpha_1(k_{33}^1 + k_{33}^{12})\} x_1 - \{2(k_{11}^2 + k_{11}^3 + k_{11}^{23}) - \\ &- \alpha_1(k_{13}^2 + k_{13}^{22}) - \alpha_1^2(k_{33}^1 + k_{33}^{12})\} x_1^2 + \{k_2^1 + 2k_2^{11} + k_2^{13} - \\ &- \alpha_2(k_3^1 + 2k_3^{11} + k_3^{12}) + c(k_{23}^1 + 2k_{23}^{11}) - 2c\alpha_2(k_{33}^1 + k_{33}^{12})\} x_2 + \\ &+ \{k_{22}^1 + k_{22}^{13} - \alpha_2(k_{23}^1 + 2k_{23}^{11}) + \alpha_2^2(k_{33}^1 + k_{33}^{12})\} x_2^2 - \{k_{12}^3 + k_{12}^{33} - \\ &- \alpha_2(k_{13}^2 + k_{13}^{22}) + \alpha_1(k_{23}^1 + 2k_{23}^{11}) - 2\alpha_1\alpha_2(k_{33}^1 + k_{33}^{12})\} x_1 x_2 + \\ &+ \{c(k_3^1 + 2k_3^{11} + k_3^{12}) + c^2(k_{33}^1 + k_{33}^{12})\} = P(x_1 x_2), \quad (18) \\ \dot{x}_2 &= \{k_1^2 + 2k_1^{22} + k_1^{23} + c(k_{13}^2 + 2k_{13}^{22}) - \alpha_1(k_3^1 + k_3^{12} + 2k_3^{22}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2\alpha_1(k_{33}^2 + k_{33}^{12})\}x_1 + \{k_{11}^2 + k_{11}^{23} + (k_{33}^2 + k_{33}^{12})\alpha_1^2 - \alpha_1 \times \\
 & \times (k_{13}^2 + 2k_{13}^{22})\}x_1^2 - (k_1^1 + k_2^3 + k_2^{11} + k_2^{13} + k_2^{33} + \alpha_2(k_3^1 + k_3^{12} + 2k_3^{22}) + \\
 & + 2\alpha_2(k_{33}^2 + k_{33}^{12}) + c(k_{23}^1 + k_{23}^{11})\}x_2 - \{2(k_{22}^1 + k_{22}^3 + k_{22}^{13}) - \\
 & - (k_{33}^2 + k_{33}^{12})\alpha_2^2 - (k_{23}^1 + k_{23}^{11})\alpha_2\}x_2^2 - \{k_{12}^3 + k_{12}^{33} - 2\alpha_1\alpha_2(k_{33}^2 + \\
 & + k_{33}^{12} + \alpha_2(k_{13}^2 + 2k_{13}^{22}) - \alpha_1(k_{23}^1 + k_{23}^{11})\}x_1x_2 + \{(k_3^1 + k_3^{12} + \\
 & + 2k_3^{22})c + (k_{33}^2 + k_{33}^{12})c^2\} = Q(x_1x_2).
 \end{aligned}$$

Применяя критерий Бендиクсона, докажем, что система, описываемая этими уравнениями, не имеет замкнутых траекторий. Для этого найдем

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} = & -\{k_1^2 + k_1^3 + k_1^{22} + k_1^{23} + k_1^{33} + \alpha_1(k_3^1 + 2k_3^{11} + k_3^{12}) + \\
 & + 4x_1(k_{11}^2 + k_{11}^3 + k_{11}^{23}) + (k_{12}^3 + k_{12}^{33})x_2 + (k_{13}^2 + k_{13}^{23})(c - \alpha_1x_1 - \\
 & - \alpha_2x_2) + 2\alpha_1(k_{33}^2 + k_{33}^{12})(c - \alpha_1x_1 - \alpha_2x_2) + k_1^1 + k_2^3 + k_2^{11} + k_2^{13} + k_2^{33} + \\
 & + \alpha_2(k_3^1 + k_3^{12} + 2k_3^{22}) + 4x_2(k_{22}^1 + k_{22}^3 + k_{22}^{13}) + (k_{12}^3 + k_{12}^{33})x_1 + \quad (19) \\
 & + 2\alpha_2(k_{33}^2 + k_{33}^{12})(c - \alpha_1x_1 - \alpha_2x_2) + (k_{23}^1 + k_{23}^{11})(c - \alpha_1x_1 - \alpha_2x_2)\} + \\
 & + k_{23}^1x_1(\alpha_2 - \alpha_1) + k_{23}^{11}x_2(\alpha_2 - 2\alpha_1) + k_{13}^2x_1(\alpha_1 - \alpha_2) + \\
 & + k_{13}^{22}x_2(\alpha_1 - 2\alpha_2),
 \end{aligned}$$

причем $c - \alpha_1x_1 - \alpha_2x_2 = x_3 > 0$.

Если $k_{23}^1 \neq 0$, то это означает, что идет реакция $X_2 + X_3 \rightarrow X_1$, т. е. $\delta_2 + \delta_3 = \delta_1$, отсюда $\alpha_2 - \alpha_1 = -1$. Аналогично, если $k_{23}^{11} \neq 0$, то $\delta_2 + \delta_3 = -2\delta_1$ или $\alpha_2 - 2\alpha_1 = -1$; при $k_{13}^2 \neq 0$ $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2$, отсюда $\alpha_1 - \alpha_2 = -1$ и при $k_{13}^{22} \neq 0$ $\delta_1 + \delta_3 = 2\delta_2$, т. е. $\alpha_1 - 2\alpha_2 = -1$. Учитывая это, видно, что выражение (19) остается отрицательным при любых положительных значениях x_1, x_2 , т. е. система не имеет замкнутых траекторий в этом квадранте.

Исследование системы (18) не дает никаких конкретных результатов, так как коэффициенты этой системы имеют слишком общий вид и могут принимать любые по величине и знаку значения. Поэтому мы рассматриваем только те группы реакций, которые удовлетворяют определенным молекулярным соотношениям, т. е. могут идти одновременно.

Рассмотрим группы, где в каждой не более трех реакций.

1) $2X_2 \rightleftharpoons X_1, 2X_2 \rightleftharpoons X_3, X_1 \rightleftharpoons X_3$; в таких реакциях $2\delta_2 = \delta_1, 2\delta_2 = \delta_3, \delta_1 = \delta_3$.

2) $X_1 + X_2 \rightleftharpoons X_3, X_1 \rightleftharpoons X_2$; эта группа реакций реализуется для активных центров с молекулярными весами, выраженным соотношениями $\delta_1 + \delta_2 = \delta_3, \delta_1 = \delta_2$.

3) $2X_2 \rightleftharpoons X_1, 2X_3 \rightleftharpoons X_1, X_2 \rightleftharpoons X_3$; здесь $2\delta_2 = \delta_1, 2\delta_3 = \delta_1, \delta_2 = \delta_3$.

4) $X_2 + X_3 \rightleftharpoons X_1, 2X_2 \rightleftharpoons X_1$; в этом случае $\delta_2 + \delta_3 = \delta_1, 2\delta_2 = \delta_1$.

5) $2X_2 \rightleftharpoons X_1, 2X_3 \rightleftharpoons X_2$; соотношения для молекулярных весов: $2\delta_2 = \delta_1, 2\delta_3 = \delta_2$.

6) $X_1 + X_2 \rightleftharpoons 2X_3, X_1 + X_3 \rightleftharpoons 2X_2$; для этой группы $\delta_1 + \delta_2 = 2\delta_3, \delta_1 + \delta_3 = 2\delta_2$.

- 7) $X_1 \rightleftharpoons X_2 \rightleftharpoons X_3 \rightleftharpoons X_1$; здесь $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3$.
 8) $X_1 + X_2 \rightleftharpoons 2X_3$, $X_2 \rightleftharpoons X_3$; молекулярные веса этих реагентов $\delta_1 + \delta_2 = 2\delta_3$, $\delta_2 = \delta_3$.
 9) $X_1 + X_3 \rightleftharpoons 2X_2$, $2X_1 \rightleftharpoons X_2$; в этих реакциях участвуют вещества с молекулярными весами $\delta_1 + \delta_3 = 2\delta_2$, $2\delta_1 = \delta_2$.
 10) $X_1 + X_2 \rightleftharpoons 2X_3$, $X_1 \rightleftharpoons X_2$, где $\delta_1 + \delta_2 = 2\delta_3$, $\delta_1 = \delta_2$.
 11) $X_1 + X_2 \rightleftharpoons X_3$, $2X_2 \rightleftharpoons X_1$; в этом случае $\delta_1 + \delta_2 = \delta_3$, $2\delta_2 = \delta_1$.
 12) $X_1 + X_2 \rightleftharpoons X_3$, $X_1 + X_3 \rightleftharpoons 2X_2$; для этой группы реакций молекулярные веса веществ, участвующих в реакциях, должны быть $\delta_1 + \delta_2 = \delta_3$, $\delta_1 + \delta_3 = 2\delta_2$.

13) $2X_2 \rightleftharpoons X_1$, $2X_1 \rightleftharpoons X_3$, в таких реакциях $2\delta_2 = \delta_1$, $\delta_3 = 2\delta_1$.

14) $X_1 \rightleftharpoons 2X_2$, $X_2 + X_3 \rightleftharpoons 2X_1$; здесь $\delta_1 = 2\delta_2$, $\delta_2 + \delta_3 = 2\delta_1$.

15) $X_1 \rightleftharpoons 2X_2$, $X_1 + X_2 \rightleftharpoons 2X_3$; в этих реакциях могут участвовать реагенты с молекулярными весами, для которых выполнено $\delta_1 = 2\delta_2$, $\delta_1 + \delta_2 = 2\delta_3$.

Рассмотрим подробнее некоторые из приведенных групп реакций. Уравнения, описывающие реакции первого типа, можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(k_1^{2,2} + k_1^3)x_1 + k_{2,2}^1x_2^2 + k_3^1x_3, \\ \dot{x}_2 &= -2(k_{2,2}^1 + k_{2,2}^3)x_2^2 + 2k_1^{2,2}x_1 + 2k_3^{2,2}x_3, \\ \dot{x}_3 &= -(k_3^{2,2} + k_3^1)x_3 + k_1^3x_1 + k_{2,2}^3x_2.\end{aligned}\quad (20)$$

Условие сохранения массы в этом случае имеет вид

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + x_3 = c, \quad \alpha_i = \delta_i/\delta_3.$$

Перейдем с помощью этих соотношений к двум переменным

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(k_1^{2,2} + k_1^3 + k_3^1\alpha_1)x_1 - \alpha_2k_3^1x_2 + k_{2,2}^1x_2^2 + k_3^1c, \\ \dot{x}_2 &= 2(k_1^{2,2} - \alpha_1k_3^{2,2})x_1 - 2\alpha_2k_3^{2,2}x_2 - 2(k_{2,2}^1 + k_{2,2}^3)x_2^2 + 2k_3^{2,2}c.\end{aligned}\quad (21)$$

Состояние равновесия системы определим из этих уравнений, приравняв правые части:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{k_{2,2}^1}{k_1^{2,2} + k_1^3 + \alpha_1k_3^1}\bar{x}_2^2 - \frac{\alpha_2k_3^1}{k_1^{2,2} + k_1^3 + \alpha_1k_3^1}\bar{x}_2 + \frac{k_3^1c}{k_1^{2,2} + k_1^3 + \alpha_1k_3^1}, \\ \bar{x}_1 &= \frac{k_{2,2}^1 + k_{2,2}^3}{k_1^{2,2} - \alpha_1k_3^{2,2}}\bar{x}_2^2 + \frac{\alpha_2k_3^{2,2}}{k_1^{2,2} - \alpha_1k_3^{2,2}}\bar{x}_2 - \frac{k_3^{2,2}c}{k_1^{2,2} - \alpha_1k_3^{2,2}},\end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}\bar{x}_2^2 &\{k_{2,2}^1k_3^{2,2}\alpha_1 + k_{2,2}^3k_1^{2,2} + (k_{2,2}^1 + k_{2,2}^3)(k_1^3 + \alpha_1k_3^1)\} + \\ &+ \bar{x}_2\{k_1^{2,2}k_3^1\alpha_2 + k_3^{2,2}k_1^{2,2}\alpha_2 + k_1^3k_3^{2,2}\alpha_2\} - \{k_1^{2,2}k_3^1c + \\ &+ k_3^{2,2}c(k_1^{2,2} + k_1^3)\} = 0.\end{aligned}\quad (22)$$

Легко увидеть, что это уравнение имеет один корень в положительном квадранте, т. е. химическая система, описываемая уравнением (20), имеет одно состояние равновесия. Устойчивость его очевидна из характеристикического уравнения

$$\begin{aligned}p^2 + p &\{k_1^{2,2} + k_1^3 + \alpha_1k_3^1 + 2\alpha_2k_3^{2,2} + 4k_{2,2}^1\bar{x}_2 + 4k_{2,2}^3\bar{x}_2\} + \\ &+ \{2k_3^{2,2}\alpha_2(k_1^{2,2} + k_1^3) + 4k_{2,2}^1\bar{x}_2(k_1^3 + \alpha_1k_3^1) + 4k_{2,2}^3\bar{x}_2\} \times\end{aligned}\quad (23)$$

$$\times (k_1^2 + k_1^3 + \alpha_1 k_3^1) + 4k_{12}^1 k_3^2 \alpha_1 \bar{x}_2 + 2k_3^1 k_1^2 \alpha_2 \} = 0.$$

Рассмотрим реакции второго типа. Соответствующие уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1^2 x_1 - k_{12}^3 x_1 x_2 + k_3^1 x_3 + k_2^1 x, \\ \dot{x}_2 &= -k_2^1 x_2 - k_{12}^3 x_1 x_2 + k_3^1 x_3 + k_1^2 x_1, \\ \dot{x}_3 &= -k_3^1 x_3 = k_{12}^3 x_1 x_2.\end{aligned}\quad (24)$$

Условие сохранения массы запишем в виде

$$x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = c, \quad \alpha_i = \delta_i / \delta_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= - (k_2^1 + k_1^2 \alpha_2 + k_{12}^3 c) x_2 + (k_3^1 - k_1^2 \alpha_3) x_3 + \\ &\quad + k_{12}^3 \alpha_2 x_2^2 + k_{12}^3 \alpha_2 x_2 x_3 + k_1^2 c,\end{aligned}\quad (25a)$$

$$\dot{x}_3 = k_{12}^3 c x_2 - k_3^1 x_3 - k_{12}^3 \alpha_2 x_2^2 - k_{12}^3 \alpha_2 x_2 x_3. \quad (25b)$$

Для нахождения состояний равновесия приравняем члены правые части уравнений (25a), (25b).

Складывая эти алгебраические уравнения, получим

$$\bar{x}_3 = \frac{c}{\alpha_3} - \frac{k_2^1 + k_1^2 \alpha_2}{k_1^2 \alpha_3} \bar{x}_2 \quad (26)$$

и, подставляя (26) в (25b), имеем следующие уравнения для нахождения величины \bar{x}_2 :

$$\bar{x}_2^2 \frac{k_{12}^3 k_2^1}{k_1^2} + \bar{x}_2 \frac{k_3^1 (k_2^1 + \alpha_2 k_1^2)}{k_1^2 \alpha_3} - k_3^1 \frac{c}{\alpha_3} = 0,$$

откуда видно, что система имеет единственное состояние равновесия в положительном квадранте.

Характеристическое уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned}p^2 + p \{ k_2^1 + k_1^2 \alpha_2 + k_{12}^3 (c - \alpha_2 \bar{x}_2 - \alpha_3 \bar{x}_3) + k_3^1 + \\ + k_{12}^3 \bar{x}_2 (\alpha_3 - \alpha_2) \} + \{ (k_2^1 + k_1^2 \alpha_2) (k_3^1 + k_{12}^3 \alpha_2 \bar{x}_2) + \\ + k_1^2 k_{12}^3 \alpha_3 (c - \alpha_2 \bar{x}_2 - \alpha_3 \bar{x}_3) \} = 0.\end{aligned}$$

Оно показывает, что система устойчива, так как $c - \alpha_2 \bar{x}_2 - \alpha_3 \bar{x}_3 = x_1 > 0$, а $\alpha_3 - \alpha_2 = 1$ ($\delta_1 + \delta_2 = \delta_3$, $\alpha_2 = \delta_2 / \delta_1$, $\alpha_3 = \delta_3 / \delta_1$).

Найдем состояния равновесия системы реакций типа 10. Дифференциальные уравнения для этой группы реакций можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_{13}^2 x_1 x_3 - 2k_{11}^2 x_1^2 + k_{22}^3 x_2^2 + 2k_2^1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2k_{22}^3 x_2^2 - k_2^1 x_2 + 2k_{13}^2 x_1 x_3 + k_{11}^2 x_1^2, \\ \dot{x}_3 &= -k_{13}^2 x_1 x_3 + k_{22}^3 x_2^2.\end{aligned}\quad (27)$$

Для определения состояния равновесия из первого и второго уравнения системы (27) получим соотношение

$$\bar{x}_2^2 = \frac{k_{13}^{22}}{k_{22}^{13}} \bar{x}_1 \bar{x}_3,$$

из первого и третьего

$$\bar{x}_2 = \frac{k_{11}^2}{k_2^{11}} \bar{x}_1^2$$

и тогда

$$\bar{x}_3 = \frac{(k_{11}^2)^2 k_{22}^{13}}{(k_2^{11})^2 k_{13}^{22}} \bar{x}_1^3.$$

Для определения величины корней воспользуемся условием сохранения массы, которое имеет вид

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + x_3 = c. \quad (28)$$

Отсюда для \bar{x}_1 получим

$$\bar{x}_1^3 \frac{(k_{11}^2)^2 k_{22}^{13}}{(k_2^{11})^2 k_{13}^{22}} + \bar{x}_1^2 \frac{\alpha_2 k_{11}^2}{k_2^{11}} + \bar{x}_1 \alpha_1 - c = 0. \quad (29)$$

Согласно правилу Декарта [5], алгебраическое уравнение $P(x) = 0$ имеет положительных корней не больше числа перемен знаков в ряду коэффициентов многочлена $P(x)$ и может отличаться от него на четное число, поэтому уравнение (29) имеет лишь один положительный корень. Таким образом, химическая система имеет единственное состояние равновесия.

Перейдя к двум переменным с помощью (28), исследует устойчивость при помощи характеристического уравнения

$$\begin{aligned} & b^2 + p \{ 4k_{11}^2 \bar{x}_1 + k_{13}^{22} \bar{x}_3 + k_2^{11} + 4k_{22}^{13} \bar{x}_2 + k_{13}^{22} \bar{x}_1 (2\alpha_2 - \alpha_1) \} + \\ & + \left\{ 9(k_{11}^2)^2 \frac{k_{22}^{13}}{k_2^{11}} + 6k_{11}^2 k_{13}^{22} \alpha_2 \bar{x}_1^2 + 3k_2^{11} k_{13}^{22} \alpha_1 \bar{x}_1 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Так как $2\alpha_2 - \alpha_1 = 1$, то состояние равновесия, определяемое из (29), всегда устойчиво.

Аналогичные исследования для всех приведенных групп реакций показывают, что системы реакций с тремя реагентами имеют единственное состояние равновесия, которое всегда устойчиво.

Приведенные исследования позволяют сделать следующие выводы. Для «открытых» и «закрытых» химических систем с двумя промежуточными центрами и для «закрытых» с тремя реагентами существует единственное устойчивое состояние равновесия. Такие системы не могут иметь устанавлившегося периодического изменения концентраций, для них устанавливаются постоянные равновесные концентрации реагирующих веществ, определяемые начальными концентрациями и константами скоростей реакций.

Можно предположить, что аналогичные результаты будут получены и для систем с числом промежуточных продуктов более трех, однако, ввиду высокого порядка дифференциальных уравнений, требуется другие методы решения [6].

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Ю. И. Неймарку за постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Скибда, З. К. Майзус, Н. М. Эмануэль, Успехи химии, 38, 1, 3 (1969).
2. Г. М. Панченков, В. П. Лебедев, Химическая кинетика и катализ, изд. МГУ, М., 1961.
3. Н. Н. Семенов, О некоторых проблемах химической кинетики и реакционной способности, изд. АН СССР, М., 1958.
4. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ГИФМЛ, М., 1964.
5. И. Н. Бронштейн, К. А. Семеняев, Справочник по математике, изд. Наука, М., 1964.
6. O. Reiersol, Math. Scand., № 10, 25 (1962).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
17 июля 1970 г.

DYNAMICS OF SIMPLEST TYPE CHEMICAL REACTIONS

M. I. Motova

Chemical systems of "open" and "closed" type with mono-and bimolecular reactions are considered under constant volume, pressure and temperature and without autocatalysis. Differential equations for the reaction kinetics are presented and expressions for the rate constants of reactions with n reagents are found. Existence of a single stable equilibrium state and absence of periodic changes of concentrations are proved for "open" systems with two intermediate centres and for "closed" ones with two and three reagents.

УДК 517.944

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА ДЛЯ ОБЛАСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРОВ

П. В. Романов, А. С. Рошаль

Описан метод решения уравнения Пуассона с помощью преобразования Фурье и циклической редукции для областей взаимодействия распространенных электронных приборов.

При моделировании нелинейных процессов в мощных электронных приборах для учета поля пространственного заряда необходимо решение уравнения Пуассона. Поскольку уравнение решается на каждом шаге моделирования, очень существенна скорость решения. В работе [1] изложен метод сеток решения уравнения Пуассона с использованием гармонического анализа для случая квадратной сетки и нулевых краевых условий. Там же указываются преимущества этого метода перед некоторыми другими в отношении скорости и точности, что подтверждается также результатами, данными в [2].

Настоящая работа посвящена применению быстрого преобразования Фурье (БПФ) для решения уравнения Пуассона в некоторых более общих случаях, встречающихся при расчете электронных приборов. Предполагается, что в направлении одной из осей решение может быть продолжено по периодичности. Такая задача типична при исследовании электромагнитных волн и волн электронного потока в регулярных волноводах в приближении медленно меняющихся амплитуд.

1. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Рассмотрим сначала решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (1)$$

методом сеток в прямоугольной области $[0, H; 0, L]$ с краевыми условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, L) = \psi(x), \quad u(x, y) = y(x + H, y), \quad (2)$$

где H — период по оси x . Уравнению (1) удовлетворяет потенциал в некоторых электронных приборах с плоскими электродами (например, в планотроне).

Взяв прямоугольную сетку с шагами по осям x, y соответственно h и l , аппроксимируем (1) разностным уравнением [3]

$$\alpha^2(u_{i+1, k} - 2u_{ik} + u_{i-1, k}) + u_{i, k+1} - 2u_{ik} + u_{i, k-1} = f_{ik}^{(0)}, \quad (3)$$

$$f_{ik}^{(0)} \equiv \alpha h l f_{ik}, \quad \alpha \equiv \frac{l}{h}, \quad l = \frac{L}{M}, \quad h = \frac{H}{N} \quad (4)$$

$$(i = 0, 1, \dots, N - 1; \quad k = 1, 2, \dots, M - 1).$$

В соответствии с (2)

$$u_{l,0} = \varphi_l, \quad u_{l,M} = \psi_l, \quad (5)$$

а индекс i везде будем брать по модулю N .

Количество узлов M, N выберем следующим образом:

$$M = p2^R, \quad N = q2^T, \quad (6)$$

где p, q — простые, R, T — целые числа. Величина M, N определяется компромиссом между точностью и длительностью решения, а также требуемой емкостью оперативной памяти ЭВМ.

Исключим из системы (3) u_{ik} с нечетными k . Умножая для этого уравнение (3) для узла (i, k) ($k = 2, 4, \dots, M-2$) на $2(1+\alpha^2)$, складывая его с уравнениями для узлов $(i \pm 1, k)$, умноженными на $-\alpha^2$, и с уравнениями для узлов $(i, k \pm 1)$, получим

$$u_{l,k+2} + u_{l,k-2} - \alpha^4(u_{l+2,k} + u_{l-2,k}) + 4\alpha^2(1+\alpha^2)(u_{l+1,k} + u_{l-1,k}) - 2(1+\alpha^2)(1+3\alpha^2)u_{lk} = f_{lk}^{(1)}, \quad (7)$$

$$f_{lk}^{(1)} \equiv 2(1+\alpha^2)f_{lk}^{(0)} - \alpha^2(f_{l-1,k}^{(0)} + f_{l+1,k}^{(0)}) + f_{l,k-1}^{(0)} + f_{l,k+1}^{(0)} \quad (8)$$

$$(i = 0, 1, \dots, N-1; \quad k = 2, 4, \dots, M-2).$$

Разложим теперь u_{ik} в конечные ряды Фурье по четным горизонтальным линиям, рассматривая u_{ik} на этих линиях как значения периодических функций дискретного аргумента i с периодом N [1],

$$\bar{u}_{jk}^{(j)} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u_{ik} \cos \frac{2\pi ij}{N} \quad (j = 0, 1, \dots, N/2), \quad (9)$$

$$\bar{u}_{jk}^{(s)} = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u_{ik} \sin \frac{2\pi ij}{N} \quad (j = 1, 2, \dots, N/2-1) \quad (10)$$

$$(k = 2, 4, \dots, M-2).$$

Аналогично разложим $f_{lk}^{(1)}$ ($k = 2, 4, \dots, M-2$), φ_l, ψ_l . Разложение можно выполнить с помощью БПФ, которое резко сокращает количество операций [4].

Используя ортогональность тригонометрических функций [1], преобразуем (7) в уравнения для коэффициентов Фурье

$$u_{l,k+2} - \lambda_j^{(1)} u_{jk} + u_{l,k-2} = f_{lk}^{(1)} \quad (11)$$

$$(k = 2, 4, \dots, M-2; \quad j = 0, 1, \dots, N/2),$$

$$\lambda_j^{(1)} = 2(1+\alpha^2)(1+3\alpha^2) - 8\alpha^2(1+\alpha^2) \cos \frac{2\pi}{N} j + 2\alpha^4 \cos \frac{4\pi}{N} j. \quad (12)$$

В (11) подразумеваются косинусные или синусные коэффициенты Фурье; индекс (j или s) и черточку для краткости опускаем. Из краевых условий следует

$$u_{l,0} = \varphi_j, \quad u_{l,M} = \psi_j. \quad (13)$$

Для каждого j ($j = 0, 1, \dots, N/2$) (11) представляет собой систему $(M/2-1)$ уравнений для соответствующих коэффициентов u_{jk} , которая может быть решена с помощью циклической редукции [1]. Будем считать,

что (11) является результатом первой редукции, которая исключила горизонтальные линии с $k = 1, 3, \dots, M-1$. Аналогично после каждого r -го цикла редукции ($r = 2, 3, \dots, R$) для каждого j исключаются $M/2^r$ неизвестных коэффициентов с $k = 2^{r-1}, 2^{r-1} + 2^r, 2^{r-1} + 2 \cdot 2^r, \dots, M - 2^{r-1}$ и сохраняется $(M/2^r - 1)$ уравнений

$$u_{k+2^r} - \lambda^{(r)} u_k + u_{k-2^r} = f_k^{(r)} \quad (k = 2^r, 2 \cdot 2^r, \dots, M - 2^r), \quad (14)$$

где $\lambda^{(r)}$, $f_k^{(r)}$ определяются рекуррентными формулами

$$\lambda^{(r)} = (\lambda^{(r-1)})^2 - 2, \quad (15)$$

$$f_k^{(r)} = f_{k+2^{r-1}}^{(r-1)} + \lambda^{(r-1)} f_k^{(r-1)} + f_{k-2^{r-1}}^{(r-1)} \quad (r = 2, 3, \dots, R), \quad (16)$$

в которых индекс j опущен.

После R -й редукции остается $(p - 1)$ уравнений

$$u_{k+M/p} - \lambda^{(R)} u_k + u_{k-M/p} = f_k^{(R)} \quad (u_0 = \varphi, u_M = \psi), \quad (17)$$

$$(k = M/p, 2M/p, \dots, M - M/p),$$

из которых находим соответствующие коэффициенты Фурье u_k , а затем все остальные коэффициенты на четных горизонтальных линиях по формуле

$$u_k = (u_{k+2^r} + u_{k-2^r} - f_k^{(r)}) (\lambda^{(r)})^{-1} \quad (u_0 = \varphi, u_M = \psi), \quad (18)$$

$(k = 2^r, 2^r + 2^{r+1}, 2^r + 2 \cdot 2^{r+1}, \dots, M - 2^r; r = R - 1, R - 2, \dots, 1)$.

Выполняя после этого синтез Фурье (по методу БПФ) [4], получаем u_{lk}

$$u_{lk} = \frac{1}{2} \bar{u}_{0k}^{(c)} + \frac{1}{2} (-1)^l \bar{u}_{N/2, k}^{(c)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N/2-1} \left(\bar{u}_{lk}^{(c)} \cos \frac{2\pi ij}{N} + \bar{u}_{lk}^{(s)} \sin \frac{2\pi ij}{N} \right) \quad (19)$$

$$(i = 0, 1, \dots, N-1; \quad k = 2, 4, \dots, M-2).$$

Коэффициент $\lambda^{(r)}$ (15) быстро возрастает. Это иногда позволяет сократить время вычислений (и избежать переполнения в машине). Если $\lambda^{(r_0)} > \lambda_{\max}$, где $r_0 < R$, $\lambda_{\max} = 10^5 \div 10^8$ — некоторое заданное число, с достаточной точностью находим из (14)

$$u_k \approx -f_k^{(r_0)} / \lambda^{(r_0)} \quad (k = 2^{r_0}, 2 \cdot 2^{r_0}, \dots, M - 2^{r_0}), \quad (20)$$

а затем — и остальные коэффициенты из (18) при $r = r_0 - 1, r_0 - 2, \dots, 1$. Поскольку $\lambda_j^{(r)}$ (12), (15) зависит от номера гармоники j , переход к вычислениям по формуле (20) для разных гармоник j может происходить на разных этапах циклической редукции.

При $p = 2$ система (17) состоит из одного уравнения для $k = M/2$, при $p = 3$ из двух для $k = M/3, 2M/3$. При этом ее решение упрощается.

2. РЕШЕНИЕ ДЛЯ НЕЧЕТНЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Для нечетных горизонтальных линий из (3) получаем теперь

$$u_{l+1, k} - \mu^{(0)} u_{lk} + u_{l-1, k} = g_{lk}^{(0)}, \quad \mu^{(0)} = 2(1 + \alpha^2) \alpha^{-2}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} g_{ik}^{(t)} &= (f_{ik}^{(t)} - u_{i+k+1} - u_{i-k-1})^{\alpha-2} \\ (i = 0, 1, \dots, N-1; k = 1, 3, \dots, M-1). \end{aligned} \quad (22)$$

Используем снова циклическую редукцию. После t -й редукции ($t = 1, 2, \dots, T$) для каждого $k = 1, 3, \dots, M-1$ получаем систему $N/2^t$ уравнений (индекс k опускаем)

$$u_{i+2^t} - \mu^{(t)} u_i + u_{i-2^t} = g_i^{(t)}, \quad (23)$$

$$\mu^{(t)} = (\mu^{(t-1)})^2 - 2, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} g_i^{(t)} &= g_{i+2^t-1}^{(t-1)} + \mu^{(t-1)} g_i^{(t-1)} + g_{i-2^t-1}^{(t-1)} \\ (i = 0, 2^t, 2 \cdot 2^t, \dots, N-2^t). \end{aligned} \quad (25)$$

После T -й редукции ($t=T$) остается q уравнений вида (23) для $i=0, N/q, 2N/q, \dots, N-N/q$, из которых находим $u_0, u_{N/q}, \dots, u_{N-N/q}$ (напомним, что $0=N \pmod{N}$), а затем все остальные u_i по формуле

$$u_i = (u_{i+2^t} + u_{i-2^t} - g_i^{(t)}) (\mu^{(t)})^{-1} \quad (26)$$

$(i = 2^t, 2^t + 2^{t+1}, 2^t + 2 \cdot 2^{t+1}, \dots, N-2^t; t = T-1, T-2, \dots, 0)$.

На этом решение уравнения Пуассона завершается.

Если $\mu^{(t_0)} > \mu_{\max} = 10^5 \div 10^8$, где $t_0 < T$, дальнейшие редукции (для всех $k = 1, 3, \dots, M-1$) исключаются. Из (23) при этом находим

$$u_i \approx -g_i^{(t_0)}/\mu^{(t_0)} \quad (i = 0, 2^{t_0}, 2 \cdot 2^{t_0}, \dots, N-2^{t_0}), \quad (27)$$

а затем остальные u_i из (26) при $t = t_0-1, t_0-2, \dots, 0$. Система (23) при $t = T$ решается особенно просто в случае $q = 2$ или $q = 3$, когда она состоит соответственно из двух или трех уравнений.

3. ДРУГИЕ ТИПЫ ОБЛАСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В области взаимодействия некоторых приборов плоскость $y=0$ является плоскостью симметрии (например, в ЛБВ типа О с плоской спиралью). При этом краевые условия для уравнения Пуассона (1), в отличие от (2), имеют вид

$$u(x, y) = u(x, -y), \quad u(x, L) = \psi(x), \quad u(x, y) = u(x+H, y). \quad (28)$$

В системах уравнений (3), (7), (11), (14), (17) добавляются уравнения для $k=0$, причем

$$\begin{aligned} u_{i,-k} &= u_{i,k}, & f_{i,-k} &= f_{ik}, \\ u_{j,-k} &= u_{j,k}, & f_{j,-k} &= f_{jk}. \end{aligned} \quad (29)$$

В остальном решение не отличается от данного выше. В [1] указаны также некоторые другие типы краевых условий, допускающие применение описанного метода.

В некоторых приборах (например, в цилиндрическом магнетроне) период области взаимодействия представляет собой кольцевой сегмент ($r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \vartheta \leq \Theta$). Уравнение Пуассона для такой области

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = F(r, \vartheta) \quad (30)$$

с помощью преобразования

$$\varphi = x, \quad r = r_1 e^y, \quad f = r^2 F \quad (31)$$

приводится к виду (1) для прямоугольной области $[0, H; 0, L]$, причем

$$H = \Theta, \quad \Delta = \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right). \quad (32)$$

Уравнение (1) затем решается, как описано в разделах 1, 2.

Для разностного уравнения (7) можно выполнить еще одну редукцию, исключающую линии $k = 2, 6, 10, \dots, M-2$, а затем уже БПФ по оставшимся горизонтальным линиям. Однако оценка необходимого количества операций показывает нецелесообразность этого способа. С другой стороны, решение разностного уравнения (3) можно сразу начать с быстрого анализа Фурье для всех горизонтальных линий, продолжая затем по формулам (14) — (20). При этом

$$\lambda_l^{(0)} = 2(1 + \alpha^2) - 2\alpha^2 \cos \frac{2\pi j}{N}; \quad (33)$$

в уравнении (14) следует взять $r = 0, 1, \dots, R$; в (15), (16) $r = 1, 2, \dots, R$; в (18) $r = R-1, R-2, \dots, 0$. При этом исключается циклическая редукция для нечетных горизонтальных линий, однако общее количество арифметических операций здесь также возрастает, так как БПФ выполняется для всех горизонтальных линий.

Тем не менее последний путь в некоторых случаях оказывается необходимым. В качестве важного примера рассмотрим уравнение

$$A(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(C(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + D(y) u = f(x, y) \quad (34)$$

в прямоугольной области $[0, H; 0, L]$.

Характерной особенностью уравнения (34) является зависимость коэффициентов A, B, C, D только от одной переменной. Частными случаями уравнения (34) являются уравнение Пуассона для периодической аксиально-симметричной области

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(r, z), \quad (35)$$

и уравнение (30). Уравнению (35) удовлетворяет, например, поле в ЛБВ с цилиндрической замедляющей системой.

Разностное уравнение, соответствующее (34), имеет вид

$$\alpha^2 A_k (u_{l+1, k} - 2u_{lk} + u_{l-1, k}) + B_k (C_{k+1} u_{l, k+1} - (C_{k+1} + C_k) u_{lk} + C_k u_{l, k-1}) + \sigma h l D_k u_{lk} = f_{lk}^{(0)}, \quad (36)$$

где $\alpha, l, h, f_{lk}^{(0)}$ находятся из (4). В данном случае выполнить первую редукцию до БПФ не представляется возможным. Решение (36) начинаем с БПФ по всем горизонтальным линиям, получая для коэффициентов Фурье уравнение вида

$$a_k^{(r)} u_{k+2r} - \lambda_k^{(r)} u_k + b_k^{(r)} u_{k-2r} = f_k^{(r)} \quad (37)$$

$$(r = 0, 1, \dots, R).$$

При этом

$$a_k^{(0)} = B_k C_{k+1}, \quad b_k^{(0)} = B_k C_k. \quad (38)$$

$$\lambda_k^{(0)} = B_k (C_{k+1} + C_k) + \alpha h l D_k + 2\alpha^2 A_k \left(1 - \cos \frac{2\pi j}{N} \right), \quad (39)$$

а затем используем рекуррентные формулы

$$a_k^{(r+1)} = \mu_k^{(r)} a_{k+2^r}^{(r)}, \quad \mu_k^{(r)} \equiv a_k^{(r)} (\lambda_{k+2^r}^{(r)})^{-1}, \quad (40)$$

$$b_k^{(r+1)} = v_k^{(r)} b_{k-2^r}^{(r)}, \quad v_k^{(r)} \equiv b_k^{(r)} (\lambda_{k-2^r}^{(r)})^{-1}, \quad (41)$$

$$\lambda_k^{(r+1)} = \lambda_k^{(r)} - \mu_k^{(r)} b_{k+2^r}^{(r)} - v_k^{(r)} a_{k-2^r}^{(r)}, \quad (42)$$

$$f_k^{(r+1)} = f_k^{(r)} + \mu_k^{(r)} f_{k+2^r}^{(r)} + v_k^{(r)} f_{k-2^r}^{(r)}, \quad (43)$$

$$(r = 0, 1, \dots, R-1).$$

При $r=R$ из системы (37) находим соответствующие u_k , а затем и все остальные u_k по формуле

$$u_k = (\lambda_k^{(r)})^{-1} (a_k^{(r)} u_{k+2^r} + b_k^{(r)} u_{k-2^r} - f_k^{(r)}) \quad (44)$$

$$(k = 2^r, 2^r + 2^{r+1}, 2^r + 2 \cdot 2^{r+1}, \dots, M - 2^r; r = R-1, R-2, \dots, 1),$$

после чего выполняется быстрый синтез Фурье (19). Если при некотором $r=r_0 < R$ коэффициенты $a_k^{(r_0)}, b_k^{(r_0)}$ становятся меньше величины $\lambda_k^{(r_0)}/\lambda_{\max}$ дальнейшие редукции прекращаются и вычисления выполняются по формуле (20), а затем (44) при $r=r_0-1, r_0-2, \dots, 0$ (как указано в разделе 1).

4. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Для решения в оперативной памяти отводятся $N(M+1)$ ячеек, в которых первоначально хранятся $f_{ik}^{(0)}, \varphi_i, \psi_i$ ($i = 0, 1, \dots, N-1; k = 1, 2, \dots, M-1$). Значения $f_{ik}^{(1)}$ (8), затем коэффициенты Фурье $f_{ik}^{(1)}, \varphi_j, \psi_j$, результаты циклических редукций, коэффициенты Фурье u_{ik} и, наконец, значения u_{ik} в четных горизонтальных рядах каждый раз помещаются на место исходных величин. Аналогичное свойство имеет место для нечетных линий. Таким образом, помимо $N(M+1)$ ячеек в оперативной памяти требуется лишь относительно небольшое количество рабочих ячеек.

При решении уравнений (37) имеются три группы коэффициентов: a_k, λ_k, b_k . Для хранения каждой группы требуется $2M$ ячеек. Не нарушая общности, можно все коэффициенты одной из групп сделать равными единице.

Применение описанного метода позволяет резко сократить количество умножений и сложений и тем самым повысить точность решения. Для тестовых задач относительная точность при $\lambda_{\max} = \mu_{\max}$ оказалась близка к λ_{\max}^{-1} .

В одном из алгоритмов, разработанных авторами для уравнения (1) с краевыми условиями (2) при $p=q=3$, необходимо следующее количество сложений n_c и умножений n_y : 1) для первой циклической редукции по горизонтальным линиям $n_c = 2MN, n_y = 1.5MN$; 2) для анализа Фурье $n_c = 0.75MN(T+0.8), n_y = 0.5MN(T+1)$; 3) для циклической редукции по четным горизонтальным линиям $n_c = 2MN, n_y = MN$; 4) для синтеза Фурье — то же, что для анализа; 5) для циклической редукции по нечетным горизонтальным линиям $n_c = 3MN, n_y = 2MN$. В целом необходимо

$$n_c = MN(1.5T + 8.2), \quad n_y = MN(T + 5.5). \quad (45)$$

Если считать, что длительность умножения вдвое больше длительности сложения τ_c , то суммарное время сложений и умножений при $M=48, N=96, T=5$ согласно (45) составит

$$\tau_0 = 36.7 MN \tau_c \approx 1.7 \cdot 10^5 \tau_c. \quad (46)$$

Другой разработанный алгоритм БПФ позволяет сократить соответствующее количество сложений и умножений приблизительно на 10%. Для сравнения укажем, что для одной итерации потребовалось бы

$$\tau_0 \approx 13 MN \tau_c, \quad (47)$$

т. е. при $T = 5$ (46) соответствует по длительности трем итерациям. В [1] дается сравнение с некоторыми другими методами.

Время решения на ЭВМ БЭСМ-4 при $M = 48$, $N = 96$, $\lambda_{\max} = \mu_{\max} = 10^7$ составляет около 20 сек. Это время можно несколько уменьшить за счет снижения точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. W. Hockney, J. of ACM, v. 12, № 1, 95 (1965).
2. S. P. Yu, G. P. Kooyers, O. Vuneman, J. Appl. Phys., v. 36, № 8, 2550 (1965).
3. И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. 2, Физматгиз, 1960 г.
4. W. T. Cochran, J. W. Cooley and oth., Proc. IEEE, v. 55, № 10, 1664 (1967).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
13 июля 1970 г.

ON POISSON EQUATION SOLUTION FOR ELECTRONIC INSTRUMENTS INTERACTION REGION

P. V. Romanov, A. S. Roshal

A method using Fourier transformations and a cyclic reduction for the Poisson equation of common use electronic instruments' interaction region is described.

УДК 519.6

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

A. И. Яблонский

Построена модель случайного поиска, описываемая динамикой сплошной среды. Рассмотрение этой модели приводит к установлению вариационного принципа случайного поиска и позволяет определить смысл оптимальности алгоритма случайного поиска. Установлен двойственный характер задачи случайного поиска и его связь с дуальным управлением. Получено соотношение неопределенности для случайного поиска.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

По-видимому, простейшим аддитивным процессом, описывающим движение к минимуму определенной функции потерь (положение которого известно заранее), является процесс случайного поиска [1] с уравнением движения

$$\dot{x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \xi(t), \quad (1.1)$$

где $\varphi(x)$ — потенциальный рельеф функции потерь, к минимуму которой осуществляется движение, $\xi(t)$ — белый шум с корреляционной функцией $K(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$.

Распределение $p(x, t)$ положения x в момент времени t при таком процессе описывается уравнением Фоккера—Планка

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} p + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Это уравнение, как легко показать [2], может быть переписано так:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (pv) = 0, \quad (1.2)$$

где

$$v = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (1.3)$$

$$S = -\varphi - \frac{\sigma^2}{2} \ln p. \quad (1.4)$$

В [2] рассмотрена физическая интерпретация процесса случайного поиска как потока некоторой «фиктивной» жидкости с плотностью потока $p(x, t)$, удовлетворяющей уравнению непрерывности (1.2), и потенциалом скоростей $S(x, t)$, градиент которого определяет эйлерову скорость $v(x, t) = \frac{\partial S}{\partial x}$. Такая интерпретация позволяет, в частности, определить функцию потерь, минимизация которой осуществляется случайнм поиском. Ниже формулируется соответствующий вариационный принцип,

позволяющий определить, в каком смысле случайный поток является оптимальным.

Формулировка подобных вариационных принципов для аддитивных алгоритмов имеет не только теоретическую, но и конструктивную ценность, так как позволяет определять класс алгоритмов адаптации, оптимальных не только в смысле сходимости к минимуму потерь, но и в смысле максимальной быстроты сходимости. Кроме того, наличие вариационного принципа позволяет определять квазиоптимальные алгоритмы и их характеристики, исходя, в частности, из теории возмущений, как в квантовой механике [3].

Рассмотрим предварительно основные вопросы, относящиеся в целом к механике сплошных сред.

2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим движение сплошной среды, определяемое наличием потенциала скоростей $S(x, t)$ и законом сохранения массы, который выражен либо в интегральной форме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dx = \text{const}, \quad (2.1)$$

либо в дифференциальной уравнении неразрывности (1.2). Сформулируем вариационный принцип для движения такой среды.

Можно показать, исходя из принципа возможных перемещений (Даламбера) [4], что вариационный принцип для системы из n точек, каждая из которых имеет массу m и подвергается воздействию силы $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$, описывается принципом стационарного действия Гамильтона

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = ext,$$

где $L = T - U = \sum_{i=1}^n m \left(\frac{\dot{x}_i^2}{2} - U_i \right)$ — лагранжиан, U_i — потенциальная энергия i -й точки на единицу массы, \dot{x}_i — скорость i -й точки.

Устремляя число точек к бесконечности и массу их к нулю, совершив предельный переход к вариационному принципу для сплошной среды

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n m L_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \int dm L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} p L dx = ext,$$

где $L_i = \dot{x}_i^2 / 2 - U_i$, L — плотность лагранжиана (лагранжиан на единицу массы), $p(x, t) dx = dm$, $p(x, t)$ — плотность среды.

Заменив при переходе к пределу лагранжиеву скорость \dot{x}_i на эйлерову скорость $v(x, t)$, получаем окончательно вариационный принцип Гамильтона для сплошной среды (с бесконечным числом степеней свободы)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx p (v^2/2 - U(x, t)) = ext. \quad (2.2)$$

Установим связь этого принципа с уравнением неразрывности (1.2), определяющим движение среды в дифференциальной форме. В целях

простоты и наглядности рассмотрим одномерный случай, обобщение которого на многомерный тривиально.

Очевидно, что вариация по скорости непосредственно выражения (2.2) дает тривиальное решение $v = 0$. Для учета движения среды составим уравнение Эйлера для вариации (2.2) по скорости при ограничении в виде уравнения неразрывности (1.2), т. е. найдем условный экстремум.

Вводя множитель Лагранжа $\lambda(x, t)$, получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[p \left(\frac{v^2}{2} - U \right) + \lambda \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (pv) \right) \right] = extr.$$

Интегрируя по частям произведение множителя Лагранжа и выражения $\frac{\partial}{\partial x} (pv)$ в квадратных скобках с учетом того, что $p(x, t) = 0$ при $x = \pm \infty$, получаем окончательно

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[p \left(\frac{v^2}{2} - U - v \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) + \lambda \frac{\partial p}{\partial t} \right] = extr. \quad (2.3)$$

Составим уравнение Эйлера для вариации по скорости:

$$\delta v : p v - p \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \quad v = \frac{\partial \lambda}{\partial x}. \quad (2.4)$$

Для определения множителя Лагранжа сравним выражение для скорости (2.4) и выражение для скорости (1.3). Получаем, что совместное выполнение (2.3), (а следовательно, и (2.2)) и уравнения неразрывности (1.2) возможно, если $\lambda = S$.

Таким образом, получаем, что поток, удовлетворяющий в каждый момент закону сохранения массы (соответствующему неразрывности) и обладающий потенциалом скоростей $S(x, t)$, является «оптимальным» в смысле обеспечения для каждого момента времени $t = t_2 - t_1$ экстремального значения величины $S(t)$, описываемой уравнением (2.2).

Определим конкретно эту величину. Для этого вычислим ускорение, учитывая (1.3),

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right).$$

Приравнивая это силю на единицу массы (по второму закону Ньютона)

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial x},$$

получаем выражение для потенциальной энергии

$$U = - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2. \quad (2.5)$$

Получаем окончательно

$$S(t) = S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx p \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right) = \quad (2.6)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx p \frac{dS}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx p L,$$

где

$$L = \frac{dS}{dt}.$$

Таким образом, $S(x, t)$ — потенциал скоростей можно трактовать так же как действие (в физическом смысле), приведенное к единице массы (плотность действия).

Такая интерпретация позволяет, учитывая (2.5), записать уравнение Гамильтона—Якоби для плотности действия S

$$\frac{\partial S}{dt} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + U = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H(x, t),$$

где H — полная энергия, приведенная к единице массы (плотность энергии). Получим интересное соотношение (важное для дальнейшего) для случая, когда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial S}{\partial t} p(x, t) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, t) p dx = 0. \quad (2.7)$$

Физически это означает закон сохранения энергии, когда средняя полная энергия равна нулю (закон сохранения «средней энергии»).

Учитывая (2.6) и (2.7), получаем

$$S(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx p \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx p v^2. \quad (2.8)$$

Обозначая $\bar{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx S(x, t) p$, рассмотрим производную этой величины по времени

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx Sp = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial}{\partial t} (Sp) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial S}{\partial t} p + \int_{-\infty}^{+\infty} dx S \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Учитывая (2.7) и равенство $\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (pv)$ (из уравнения непрерывности), интегрируем (2.9) по частям и получаем тождество производной по времени (2.8) и (2.9)

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx S \frac{\partial}{\partial x} (pv) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = \frac{dS(t)}{dt},$$

Итак, окончательно (2.8) имеет вид

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx p \frac{dS}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx L p = \int_{t_1}^{t_2} dt \bar{L} = \\ &= \bar{S} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x, t) p(x, t) dx = e x tr, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\bar{L} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx L p$.

Таким образом доказано, что при нулевой средней полной энергии процесс движения сплошной среды, определенный выше, является «оптимальным» в смысле обеспечения экстремального в каждый момент времени среднего действия, причем, так как $\frac{d\bar{S}}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p v^2 \geq 0$, с течением времени действие возрастает.

Аналогичным образом можно доказать другой вариационный принцип, заключающийся в том, что скорость возрастания среднего действия (совпадающая со средним квадратом эйлеровой скорости) для такого процесса экстремальна

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \bar{v}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p v^2 = e x t r. \quad (2.11)$$

Представляет интерес дальнейшее исследование физических закономерностей динамики сплошной среды этого типа (установление законов сохранения и т. д.). Отдельные частные рассмотрения подобного типа содержатся в недавних работах [5] (в применении к квантовой механике) и [6] (в применении к сплошной среде с завихрением).

Для рассматриваемой нами задачи случайного поиска полученные результаты используются следующим образом.

3. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА И ДУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Как следует из (1.2) — (1.4) раздела 1, процесс случайного поиска можно полностью уподобить потоку «фиктивной» жидкости, рассмотренной в разделе 2, и считать, что для него плотность действия

$$S = -\varphi(x) - \frac{\sigma^2}{2} \ln p(x, t), \quad (3.1)$$

эйлерова скорость

$$v(x, t) = \frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \ln p}{\partial x}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial S}{\partial t} pdx$. Учитывая независимость $\varphi(x)$ от времени, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial S}{\partial t} pdx = -\frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln p}{\partial t} pdx = -\frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial p}{\partial t} dx = 0,$$

так как имеет место принцип нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} pdx = 1$, аналогичный закону сохранения массы, $\frac{d}{dt} \int pdx = \int \frac{\partial p}{\partial t} dx = 0$.

На основании этого из (2.8) получаем вариационный принцип для случайного поиска (учитывая, что $\int dx \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \ln p}{\partial x} p = - \int dx p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$)

$$S(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx p \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \sigma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\sigma^4}{4} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial x} \right)^2 \right] = \\ = S(t_2) - S(t_1) = \Delta S(t_2, t_1) = e x t r. \quad (3.3)$$

Из (2.9) получаем другое выражение для вариационного принципа случайного поиска (C_0 — константа интегрирования)

$$S_t = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(-\varphi - \frac{\sigma^2}{2} \ln p \right) p = S(t) + C_0 = e x t r. \quad (3.4)$$

Как показано в разделе 2, выражение (3.3), представляющее собой приращение среднего действия за время t_1 до t_2 , и выражение (3.4), представляющее собой среднее действие в момент $t = t_2 - t_1$, идентичны между собой с точностью до константы интегрирования в (3.4), определяемой из заданных условий. Выясним смысл этой константы. Для этого исследуем асимптотическое поведение (3.4) при $t \rightarrow \infty$. Так как

$$\frac{dS_t}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p v^2 > 0 \quad (v \neq 0), \text{ то } S_t \text{ монотонно возрастает.}$$

Рассмотрим вариационный принцип на бесконечности, т. е. в стационарном режиме, когда $p(x)$ не зависит от времени ($t \rightarrow \infty$),

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi + \frac{\sigma^2}{2} \ln p \right) p dx = e x t r, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p dx = 1. \quad (3.5)$$

Учитывая условие (3.5) и используя множитель Лагранжия λ , получаем вариационное уравнение Эйлера для условного экстремума

$$-\frac{d}{dp} \left[\left(\varphi + \frac{\sigma^2}{2} \ln p \right) p \right] + \lambda = 0, \quad p = \exp \left(-\frac{2\varphi}{\sigma^2} \right) \exp \left(-\frac{1+\lambda}{\sigma^2} \right),$$

где λ определяется из условия нормировки (3.5)

$$C \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2\varphi}{\sigma^2} \right) dx = 1, \quad \exp \left(-\frac{1+\lambda}{\sigma^2} \right) = C = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2\varphi}{\sigma^2} \right) dx \right]^{-1}.$$

Таким образом, на бесконечности $p = C \exp \left(-\frac{2\varphi}{\sigma^2} \right)$, т. е. вариационный принцип случайного поиска позволяет получить, в частности, асимптотическое выражение, совпадающее с решением для уравнения Фоккера—Планка при $t \rightarrow \infty$, полученным Бернштейном [1].

Подставляя значение p в (3.4), получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_t = S_\infty = -\frac{\sigma^2}{2} \ln C = \frac{\sigma^2}{2} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left(-\frac{2\varphi}{\sigma^2} \right) dx.$$

Это выражение и представляет собой искомую константу интегрирования $C_0 = S_\infty$.

Таким образом, получаем окончательное соотношение между двумя выражениями для вариационного принципа случайного поиска (3.3) и (3.4)

$$S_t = \Delta S(t) + S_\infty, \quad \text{где } t = t_2 - t_1.$$

Очевидно, что $S(t)$, определяемое (3.3), стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Покажем это

$$v(t \rightarrow \infty) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \ln p}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{2}{\sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Тогда $\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} p v^2 dx = 0$.

Отметим, что аналогично (2.11) раздела [2] можно получить вариационный принцип для скорости возрастания среднего действия в процессе случайного поиска

$$\frac{dS_t}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} p v^2 dx = \bar{v}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[d x p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \sigma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\sigma^4}{4} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial x} \right)^2 \right] = e x t r.$$

Выясним, наконец, физический смысл экстремумов (3.3) и (3.4), указывающий на двойственный характер случайного поиска.

$$\text{Обозначим } \int_{-\infty}^{+\infty} p \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \sigma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] dx = V(t) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) p(x, t) dx,$$

где $V(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ — плотность потенциальной энергии, совпадающая с потенциальной энергией частицы единичной массы, определенной в [7] для интегрирования по траекториям. Тогда

$$S(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt [V(t) + I(t)], \quad (3.6)$$

где $I(t) = \frac{\sigma^4}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial x} \right)^2 pdx$ — выражение, аналогичное количеству информации по Фишеру.

Для (3.4) получаем

$$S_t = F(t) - R(t), \quad (3.7)$$

где $R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) p(x, t) dx$ — средние потери в единицу времени,

$F(t) = -\frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p \ln pdx$ — энтропия $\left(\frac{\sigma^2}{2} \right)$ — коэффициент пропорциональности, аналогичный постоянной Больцмана).

Таким образом, выражения (3.3) и (3.4) (согответственно (3.6), (3.7), оптимизируемые случайнм поиском и определяемые поэтому как функция потерь для случайногоп поиска, аддитивно зависят от члена, определяющего только средние потери в результате «управления» ($V(t)$ или $R(t)$) и от информационного члена, являющегося результатом «изучения» ($I(t)$ или $F(t)$). Двойственный характер этих выражений указывает на наличие дуального управления в процессе случайногого поиска, как, вероятно, в любом градиентном методе, связанном с накоплением информации в процессе адаптации.

В самом деле, конечной целью адаптивного процесса является переход в положение, соответствующее минимальным потерям (в частности, определение x_{opt} , для которого $\varphi(x_{opt}) = \min_x$). Но так как это положение заранее неизвестно, то для движения к нему («управления») необходимо получение информации («изучение»), связанное с дополнительными потерями. В этом смысле дуального управления [8]. Это и отражено естественным образом в (3.6), (3.7) в результате физической интерпретации случайногого поиска. Укажем на аналогию выражений (3.6), (3.7) с функцией потерь дуального управления, определяемой из эвристических соображений в [8].

Поэтому существует соотношение неопределенности дуального управления, аналогичное (в определенном смысле) квантово-механиче-

скому и возникающее в результате двойственности процесса (необходимость одновременного уменьшения потерь и увеличения информации). Получим это соотношение для случайногопоиска между положением $x(t)$, характеризующим потерю, и эйлеровой скоростью $v(x, t)$, характеризующей (в некотором условном смысле) накопление информации при движении к экстремуму.

Из неравенства Шварца следует, что

$$\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_v^2} \geq \int_{-\infty}^{+\infty} dx p x v.$$

Учитывая, что $v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \ln p}{\partial x}$, получаем для правой части неравенства в результате интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx p x \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \ln p}{\partial x} \right) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx p x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\partial p}{\partial x} dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx p x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} p dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx p x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p dx$ и $\bar{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p v = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx p \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, так как $\int_{-\infty}^{+\infty} p \frac{\partial \ln p}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0$, получаем окончательно соотношение неопределенности для случайногопоиска

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p dx \int_{-\infty}^{+\infty} (v - \bar{v})^2 p dx \right]^{1/2} \geq - \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \frac{\partial \varphi}{\partial x} p + \frac{\sigma^2}{2}.$$

Полученное соотношение определяет потенциальные возможности одновременного уточнения положения экстремума и скорости движения к этому экстремуму. При $t \rightarrow \infty$ это неравенство стремится к тождеству для любой $\varphi(x)$, так как $v \rightarrow 0$. При квадратичной функции потерь неравенство обращается в тождество для любого момента времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. М. Хазен, Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления, изд. Сов. радио, М., 1968.
2. А. И. Яблонский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, 8, 1229 (1970).
3. Я. И. Френкель, Волновая механика, ч II, ОНТИ, 1934.
4. Г. Кирхгоф, Механика, изд. АН СССР, М., 1962.
5. F. Santos, A lagrangian formulation of the theory of random motion, Nuovo Cimento, B, v LIX, № 1, 65 (1964).
6. Р. Л. Селиджер, Г. Б. Уитем, Сб. Механика, изд. Мир, М., 1969, № 5, стр. 99.
7. А. И. Яблонский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, 11, 1718 (1970).
8. Г. А. Медведев, В. П. Тарасенко, Вероятностные методы исследования экстремальных систем, изд. Наука, М., 1967.

Поступила в редакцию
4 августа 1970 г.

ON EXTREMAL PROPERTIES OF RANDOM SEARCH

A. I. Yablonsky

A random search model described by continuous medium dynamics is constructed. The analysis of the model leads to finding the random search variational principle and allows determining the sense of random search algorithm optimality. Random search problem's duality and its relationship with dual control are determined. The indeterminacy relation for the random search is obtained.

УДК 621.391.193

О НЕЛИНЕЙНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРИЗНАКОВ В ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

Ю. И. Неймарк, М. Д. Брейдо

Рассматриваются итеративные алгоритмы нелинейного преобразования пространства признаков, учитывающие неопределенность задания характеристик объекта и приводящие к построению решающего правила, минимизирующего максимальную вероятность ошибки принятого решения. Такой подход позволяет уменьшить произвол в численном кодировании исходных данных задачи классификации.

Одним из важных аспектов теории и практики распознавания образов является преобразование исходной информации с целью извлечения данных, позволяющих принять то или иное решение и достичь определенной степени успеха. К такого рода преобразованиям относится выбор системы кодирования признаков или параметров классифицируемого объекта. При изменении значений отдельных градаций признаков изменяется расположение точек в пространстве признаков, что приводит к изменению вида решающего правила и надежности опознания.

В общем случае искомое преобразование может быть определено только тогда, когда формирование и кодирование признаков связано с процессом распознавания. Впервые регулярный подход к решению этой задачи был изложен Харкевичем [1], рассмотревшим линейные отображения пространства признаков при разделении непересекающихся выпуклых множеств. Предложенное Себестианиом [2] решение сводится к нахождению линейного или полиномиального преобразования, минимизирующею среднеквадратическое расстояние между объектами одного класса и увеличивающее расстояния между классами. Он также предлагает присваивать градациям признаков такие значения, чтобы расположение точек в пространстве признаков было гауссовским. В [3] описан способ числового кодирования параметров объектов, приводящий к разделению классов фиксированной гиперплоскостью, делящей пополам n -мерный гиперкуб (n — число признаков). Задаче максимального сокращения несущественной для распознавания информации посвящены работы [4, 5] и другие.

Нами рассматриваются вопросы линейного изменения численных значений признаков и формирования новых признаков, приводящих к улучшению построенных минимаксными алгоритмами [6, 7] линейных решающих правил. Для решения этих вопросов необходимо найти в общем случае нелинейную разделяющую поверхность, максимизирующую в определенной метрике расстояние до ближайших точек множеств объектов каждого класса.

Построим нелинейное отображение путем расширения исходного пространства X . Пусть параметрами объекта в новом пространстве будут

$$\tilde{y}_i = \lambda_{ij} x_i x_j \quad (i, j = \overline{1, n+1}, x_{n+1} = 1, \lambda_{n+1, n+1} = 0),$$

где λ_{ij} — масштабные множители.

Обозначим через A матрицу ковариаций уклонений δ_{ij} и применим в расширенном пространстве минимаксный алгоритм построения разделяющей гиперплоскости путем последовательной минимизации расстояния от точки y^0 до отрезка y^1y^2 . При этом на каждом шаге определяется

$$\min (y - y^0)^T A^{-1} (y - y^0)^T,$$

$$y = y^1 + t(y^2 - y^1).$$

Подставляя второе уравнение в первое, дифференцируя по t и приравнивая результат нулю, имеем

$$(y^2 - y^1)^T A^{-1} [t(y^2 - y^1) + y^1 - y^0] + \\ + [t(y^2 - y^1) + y^1 - y^0]^T A^{-1} (y^2 - y^1) = 0,$$

откуда

$$t = \frac{(y^2 - y^1)^T A^{-1} (y^0 - y^1)}{(y^2 - y^1)^T A^{-1} (y^2 - y^1)}.$$

Видно, что непосредственное использование минимаксного алгоритма в расширенном пространстве признаков, даже в прошлайшем случае, требует вычисления обратных матриц относительно большой размерности $m = n(n+3)/2$. Положение ухудшается тем, что элементы матрицы A являются функциями точки пространства X , когда условия применимости минимаксного алгоритма требуют введения переменных метрик в каждом классе. Для преодоления этой трудности в дальнейшем предлагаются итерационная двухступенчатая процедура, позволяющая строить разделяющие поверхности большой размерности. Введение нелинейных преобразований расширяет возможности линейной классификации, приводя к разделению множеств объектов обучающей последовательности с пересекающимися выпуклыми оболочками. Одновременно такой подход позволяет уменьшить производство в численном кодировании исходных данных задачи классификации.

1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОТДЕЛЬНЫХ ПРИЗНАКОВ

Согласно [6], вычисление коэффициентов линейного минимаксного решающего правила осуществляется в метрике, согласованной с видом распределения ошибок δ_{ij} кодирования признаков x_i .

Здесь и в дальнейшем, не теряя общности, предполагается, что вектор уклонений δx является нормальным с единичной матрицей ковариации и нулевым средним*.

Рассмотрим двухступенчатую итеративную процедуру построения нелинейных минимаксных поверхностей.

1) На первой ступени произведем расширение исходного пространства признаков X путем введения отображения $X \rightarrow Y$ такого, что

$$y_{ip} = \lambda_i x_i^p \quad (i = \overline{1, n}, p = \overline{1, r}). \quad (1)$$

В построенном таким образом пространстве Y применим линейный алгоритм [6, 7] вычисления решающего правила без учета погрешностей измерения параметров объектов.

Гиперплоскости, построенные по двум ближайшим точкам y^* и \bar{y}^* ,

* Если это не так, то найдем ортогональное отображение, приводящее показатель экспоненты нормального распределения ошибок кодирования признаков x_i к каноническому виду и введем центрированные переменные.

принадлежащим выпуклым оболочкам множеств объектов классов C_1 и C_2 соответственно, будет отвечать в пространстве X разделяющая поверхность

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^r q_{ip} x_i^p + c = 0. \quad (2)$$

Введем новые переменные:

$$z_i = \mu_i \sum_{p=1}^r q_{ip} x_i^p \quad (i = \overline{1, n}), \quad (3)$$

где μ_i — масштабные множители, определяемые ниже из соображения фиксирования длины интервала значений признаков, и перейдем ко второй ступени алгоритма — построению минимаксного линейного решающего правила в пространстве Z .

Как видно из (3), на первом этапе рассматривается независимое численное перекодирование значений признаков объектов. При вычислении шкал кодирования по формулам (3) может оказаться, что в зависимости от знаков q_{ip} значения отдельных градаций будут отрицательными. Для устранения этого эффекта несколько преобразуем выражение (3).

Пусть x_{ik} — k -я градация i -го признака в пространстве X . Обозначим

$$D_{ik} = \sum_{p=1}^r q_{ip} x_{ik}^p \quad (4)$$

и положим

$$d_i = \min_k D_{ik}. \quad (5)$$

Тогда, перенося начало отсчета в измерении значения признака, можно написать

$$z_i = \mu_i \begin{cases} D_i & (d_i \geq 0) \\ D_i + |d_i| & (d_i < 0). \end{cases} \quad (6)$$

Масштабный множитель μ_i найдем из условия нормировки значения максимальной градации признаков z_i на заданную величину T_i , т. е.

$$\mu_i = T_i / \max_k z_{ik} \Big|_{\mu_i=1}. \quad (7)$$

Это позволяет выделить нелинейную часть преобразования пространства признаков.

2) На втором этапе линейный минимаксный алгоритм [6, 7] используется для разделения объектов обучающей последовательности в пространстве признаков z_i .

Поскольку в таком алгоритме выбор метрики должен быть согласован с видом распределения ошибок кодирования, определим компоненты вектора уклонений δz ($\delta z_1, \dots, \delta z_n$), воспользовавшись равенствами (3), откуда найдем δz_i

$$\delta z_i = \mu_i \sum_{p=1}^r p q_{ip} x_i^{p-1} \delta x_i. \quad (8)$$

Замечая, что δx_i определены по нормальному закону, имеют единич-

ные дисперсии и нулевые средние, из (8) получаем распределение δz в виде

$$P(\delta z) = 1/(2\pi)^{n/2} |A|^{1/2} \exp\{-1/2 \delta z^T A^{-1} \delta z\}. \quad (9)$$

Элементами обратной матрицы ковариаций A^{-1} ошибок кодирования признаков являются

$$q_{ii} = (\mu_i \sum_{p=1}^r p q_{ip} x_i^{p-1})^{-2}. \quad (10)$$

Как видно из (10), метрика в пространстве признаков Z , согласованная с распределением уклонений δz , является переменной и определяется как функция точки пространства X . Это означает, что для разных объектов одни и те же ошибки кодирования имеют различное влияние на результат классификации. Так как в окрестности любой точки z^k вектор уклонений распределен по нормальному закону (9), то в соответствии с требованиями минимаксного алгоритма [6], нахождение ближайших точек выпуклых оболочек и построение решающего правила должно проводиться в пространстве Z с использованием метрики (10). Для вычисления коэффициентов g_{ii} найдем координаты точек пространства X , отвечающих ближайшим точкам z^k и \bar{z}^k , определенным с помощью минимаксного алгоритма на k -й итерации. Поскольку, согласно (3), отображение $x^k \rightarrow z^k$ проходит независимо по каждой координате (покомпонентно), то x_i^k является решением уравнения (3) для заданного z_i^k . Ввиду нелинейности (3) одному и тому же z^k отвечает несколькими значенийми x^k . Из них реальный смысл имеют только те, которые входят в выпуклую оболочку множества точек того или иного класса в пространстве X , т. е. в ближайшей окрестности которых находится хотя бы одна точка обучающей последовательности. Такие точки X^k назовем допустимыми.

Минимаксное решающее правило должно верно классифицировать объекты при любых допустимых распределениях уклонений значений признаков. Поэтому из множества величин g_{ii} и \bar{g}_{ii} выберем такие, при которых достигается наименьшее значение расстояния между точками z и \bar{z} , т. е. $\min_{g, \bar{g}} \rho(z, \bar{z})$. Так как с каждой из этих точек связана своя, со-

гласованная с распределением уклонений метрика, то расстояние между ними определим как

$$\begin{aligned} \rho(z, \bar{z}) &= \min_{\eta} \left[\left(\sum_{i=1}^n g_{ii} (z_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sum_{i=1}^n \bar{g}_{ii} (\bar{z}_i - \eta_i)^2 \right]^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где η_i ($i=1, 2, \dots, n$) — координаты равноудаленной от z и \bar{z} точки, для которой

$$\sum_{i=1}^n g_{ii} (\bar{z}_i - z_i) (\eta_i - z_i) = \sum_{i=1}^n \bar{g}_{ii} (z_i - \bar{z}_i) (\eta_i - \bar{z}_i). \quad (12)$$

Применяя метод множителей Лагранжа для нахождения минимума (11) при ограничении (12), имеем

$$\eta_i = \frac{g_{ii} z_i + \bar{g}_{ii} \bar{z}_i}{g_{ii} + \bar{g}_{ii}}.$$

Тогда

$$\rho(z, \bar{z}) = \left[\sum_{i=1}^n \frac{g_{ii}^2 - \bar{g}_{ii}}{(g_{ii} + \bar{g}_{ii})^2} (z_i - \bar{z}_i)^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^n \frac{g_{ii} \bar{g}_{ii}^2}{(g_{ii} + \bar{g}_{ii})^2} (z_i - \bar{z}_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Минимум соотношения (13) определяет выбор коэффициентов метрик g_{ii} и \bar{g}_{ii} на каждой итерации. При небольших различиях значений g_{ii}^k и \bar{g}_{ii}^k , полагая $g_{ii}^k = \bar{g}_{ii}^k + \epsilon$, можно с точностью до величин второго порядка малости вычислять расстояние между точками z^k и \bar{z}^k по формуле

$$\rho(z^k, \bar{z}^k) \approx 1/2 \left[\sum_{i=1}^n g_{ii}^k (z_i^k - \bar{z}_i^k)^2 \right]^{1/2} + 1/2 \left[\sum_{i=1}^n \bar{g}_{ii}^k (z_i^k - \bar{z}_i^k)^2 \right]^{1/2}.$$

Таким образом, использование линейного минимаксного алгоритма на втором этапе одной итерации изменения значений признаков усложняется введением переменной метрики. Каждая итерация нелинейного преобразования численных значений кодов признаков завершается нахождением формул (6), вычислением коэффициентов g_{ii} и \bar{g}_{ii} ($i=1, 2, \dots, n$) и построением решающего правила в пространстве Z . Миногократное повторение описанной процедуры приводит к максимизации расстояния между ближайшими точками выпуклых оболочек множеств обобщенных классов в новом пространстве признаков. Итерации продолжаются до тех пор, пока очередное приращение этого расстояния не будет меньше некоторого достаточно малого положительного числа δ , т. е.

$$\Delta\rho < \delta, \quad \delta > 0. \quad (14)$$

Возможно применение и других критериев останова.

2. ФОРМИРОВАНИЕ НОВЫХ ПРИЗНАКОВ

Полученные в первом параграфе результаты могут быть обобщены введением расширенного пространства с помощью отображения вида

$$y_{ij} = \lambda_{ij} x_i x_j \quad (i, j = 1, \dots, n+1, x_{n+1} = 1, \lambda_{n+1, n+1} = 0). \quad (15)$$

Тогда гиперплоскости в пространстве Y будут соответствовать в пространстве X поверхность

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n q_{ik} x_i x_k + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c = 0. \quad (16)$$

Так как $y_{ij} = y_{ji}$, то матрица Q квадратичной формы общего уравнения поверхности (16) будет симметричной.

$$Q = (\tilde{q}_{ik})_1^n, \quad (17)$$

где

$$\tilde{q}_{ik} = q_{ik}/2 = \tilde{q}_{ki} \quad (i \neq k, \quad \tilde{q}_{ii} = q_{ii}).$$

Как известно, для квадратичной формы с действительной симметричной матрицей всегда можно найти невырожденное ортогональное преобразование переменных

$$\tilde{z}_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, n}), \quad (18)$$

такое что, выражая координаты x_i через \tilde{z}_i , мы преобразуем квадратичную форму к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n q_{ik} x_i x_k = \sum_{i=1}^n c_i \tilde{z}_i^2. \quad (19)$$

Коэффициенты c_i являются собственными значениями матрицы Q , а соответствующие им собственные векторы $s_i(s_{i1}, \dots, s_{in})$ составляют ортонормированную систему векторов. Уравнение (16) после подстановки (18) имеет вид

$$\sum_{i=1}^n c_i \tilde{z}_i^2 + \sum l_i \tilde{z}_i + c = 0, \quad (20)$$

где l_i — новые коэффициенты линейной формы $L(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i$. Аналогично (3), введем новые переменные

$$z_i = \mu_i (c_i \tilde{z}_i^2 + l_i \tilde{z}_i) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (21)$$

Тогда компоненты вектора уклонений δz будут равны

$$\delta z_i = \mu_i (2c_i \tilde{z}_i + l_i) \delta \tilde{z}_i \quad (i = \overline{1, n}), \quad (22)$$

а $\delta \tilde{z}_i$ определяется по формуле

$$\delta \tilde{z}_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} \delta x_j \quad (i = \overline{1, n}). \quad (23)$$

Обозначим матрицу системы (23) через $S = (s_{ij})_1^n$. Так как δx_i , независимы, имеют единичные дисперсии и нулевые средние, то вектор $\delta \tilde{z}$ является нормальным с матрицей ковариаций $R = S S^T$, а вектор δz в окрестности любой точки z распределен по нормальному закону с матрицей ковариации

$$G(z) = K(z) R K^T(z). \quad (24)$$

Здесь $K(z)$ — диагональная матрица с элементами на главной диагонали

$$k_{ii} = \mu_i (2c_i \tilde{z}_i + l_i). \quad (25)$$

Видно, что метрика, согласованная с распределением уклонений δz , является функцией точки \tilde{z} .

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Процедура численного изменения значений признаков была применена в модельных задачах и задачах медицинской диагностики.

1) Пусть объекты характеризуются двумя параметрами (признаками) x_1 и x_2 , каждый из которых может принимать восемь различных значений, и пусть исходная таблица кодов имеет вид

Номер градации	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
x_1	0	1	2	3	4	5	6	7
x_2	0	1	2	3	4	5	6	7

Обучающая последовательность построена таким образом, что в первый класс входят точки $(0,4)$, $(7,4)$, а второй класс представлен точками $(3,0)$ и $(3,7)$ (рис. 1).

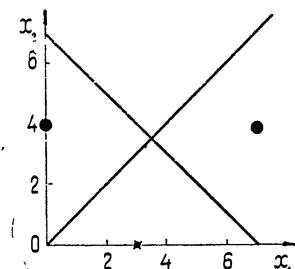


Рис. 1.

Нетрудно видеть, что при таком распределении на классы они не могут быть разделены одной прямой. Предположим, что ошибки кодирования обоих признаков равновероятны. Введем расширенное пространство Y так, что

$$\begin{aligned} y_{11} &= x_1, \quad y_{12} = x_1^2, \\ y_{21} &= x_2, \quad y_{22} = x_2^2. \end{aligned} \quad (26)$$

1 шаг. Применяя в данном пространстве линейный алгоритм обучения, получаем разделяющую гиперплоскость

$$0,7 y_{11} - 0,1 y_{12} - 0,7 y_{21} + 0,1 y_{22} = 0,$$

которой в пространстве X соответствует кривая второго порядка

$$\Phi(x) = 0,7 x_1 - 0,1 x_1^2 - 0,7 x_2 + 0,1 x_2^2 = 0.$$

Определитель данной квадратичной формы равен нулю, и она определяет вырожденное коническое сечение, распадающееся на пару действительных пересекающихся прямых (рис. 1). Построим функции D_1 по формуле (4)

$$D_1 = 0,7 x_1 - 0,1 x_1^2,$$

$$D_2 = 0,1 x_2^2 - 0,7 x_2$$

и вычислим значения z_i , μ_i из соотношений (6), (7), полагая $T_1 = T_2 = 7$. Получим $d_1 = 0$, $a_2 = 0$, $\mu_1 = \mu_2 = 5,83$. График зависимости $z_i(x_i)$ имеет вид рис. 2. Как видно, обе компоненты преобразуются одинаковым образом. Матрицы ковариаций уклонений δz , построенные в ближайших к разделяющей поверхности точках и удовлетворяющие условию нормировки $g_{11} + g_{22} = 2$, имеют вид

$$(A_1)^{-1} = \begin{vmatrix} 0,95 & 0 \\ 0 & 1,05 \end{vmatrix},$$

$$(A_2)^{-1} = \begin{vmatrix} 1,05 & 0 \\ 0 & 0,95 \end{vmatrix}.$$

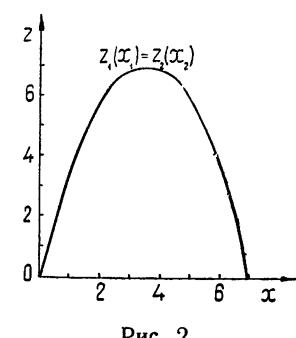


Рис. 2.

Переходя к пространству X' , получаем, что точки первого класса отображаются в точку $(0,7)$, а второго — в $(7,0)$.

Расстояние между этими точками равно:

$$\rho(V_1, V_2) = 9,9.$$

2 шаг. Введем пространство Y' вида (26) относительно пространства X' и снова применим линейный алгоритм обучения. Получим

$$x'_1 - x'_2 = 0,$$

т. е. кривая второго порядка вырождается в прямую.

Согласно (4), $D_1 = x'_1$, $D_2 = -x'_2$. Считая по-прежнему $T_1 = T_2 = 7$, из (6) — (7) имеем

$$d_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \mu_1 = \mu_2 = 1,$$

$$z'_1 = x'_1, \quad z'_2 = x'_2.$$

По формулам (10)

$$G^{1'} = G^{2'} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \rho(V'_1, V'_2) = 9,9,$$

задаваясь точностью $\delta = 0,01$, вычисляем

$$\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1 = 0 < \delta.$$

Протому процесс перекодирования заканчивается на втором шаге. Прямая $x'_1 - x'_2 = 0$ оптимальным образом делит обучающую последовательность в пространстве X' с евклидовой метрикой.

2) Алгоритм изменения численных значений градаций признаков был применен к ряду задач медицинской диагностики, указанных в табл. 1*.

Таблица 1

Дифференциальный диагноз заболевания или прогноз состояния больного	Число призна- ков	Число больных обучающей после- довательности		Число больных экзаменационной последовательности	
		основ- ным заболев- анием	сходными заболева- ниями	основ- ным заболев- анием	сходными заболева- ниями
1. Бесприступно-текущий ревматизм на ранней стадии у детей	32	100	100	400	100
2. Атеросклеротическая стенокардия на ранней стадии	65	180	220	90	100
3. Центральный рак легкого	3	75	80	130	80
4. Прединфарктное состояние	29	60	70	50	70
5. Трудоспособность в ближайшие три года (по данным первого года) после перенесенного инфаркта миокарда	27	24	65	50	60

Кодирование ряда признаков подвергалось существенным изменениям (см., например, табл. 2**). Следует отметить вырожденное отобра-

* Более подробная информация об этих задачах приведена в работах [8—12].

** В таблице приведены новые значения градаций; округленные до ближайшего целого.

жение отдельных градаций и параболическое перекодирование. В других случаях изменения кодов были не столь значимыми и заключались в основном в вырождении начальных значений, когда две первые градации переходили в одну нулевую (аналогично изменению кодовых значений температуры в задаче первой табл. 2). Сравнительные результаты

Таблица 2

Порядковый номер задачи	Кодировка	Значения градаций	Признак
1	Исходная Новая	0 1 2 3 4 5 6 7 0 0 1 1 2 4 5 7	Систолический шум над верхушкой сердца
	Исходная Новая	0 1 2 3 — — — 0 0 1 3 — — —	Температура
4	Исходная Новая	0 1 2 3 4 5 6 — 3 5 6 6 5 3 0 —	Боли в центре
	Исходная Новая	0 1 2 3 4 5 6 — 1 0 0 0 2 3 6 —	Боли в левой половине

классификации с использованием исходной и новой кодировок всех признаков приведены в табл. 3. Заметим, что изучающие последовательности во всех задачах подверглись полному разделению и в указанной в табл. 3 зоне отказов нет ни одного их представителя.

Таблица 3

Номер задачи	$\left(\frac{r}{\rho}\right)_{\text{исх}}$	$\left(\frac{r}{\rho}\right)_{\text{нов}}$	Исходная кодировка		Новая кодировка		Зона отказов
			число отказов	число ошибок	число отказов	число ошибок	
1	2,3	1,8	31	9	24	7	8
2	4,6	3,6	12	1	10	1	6
3	6,4	5	15	16	10	12	3
4	4,1	3,2	16	1	12	0	6
5	2,4	1,9	0	4	0	3	7

Здесь r и ρ — соответственно расстояния между множествами двух классов и их выпуклыми оболочками, измеренные при исходной и новой кодировках значений признаков.

Величина зоны отказов определяет в абсолютных единицах длину интервала значений решающей функции, в пределах которой опознание считается неопределенным (отказ).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Харкевич, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 2, 3 (1963).
2. Г. С. Себестян, Процессы принятия решений в задачах распознавания образов, изд. Мир, М., 1965.
3. Ю. В. Девингталь, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 33 (1968).
4. Р. И. Полонников, В. В. Александров, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 92 (1967).
5. Р. И. Полонников, В. В. Александров, Ю. В. Богачкин, Вопросы радиоэлектроники, серия общетехническая, вып. 8, 44 (1969).
6. Ю. И. Неймарк, М. Д. Брейдо, А. Н. Дурново, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 2, 144 (1970).

7. М. Д. Брейдо, Ю. И. Неймарк, А. Н. Дурново, Сб. Автоматизация Организация. Диагностика. М., 1970, в печати
8. Я. Г. Любавин, Ю. И. Неймарк, З. С. Баталова, Ю. Г. Васин, В. И. Кочкин, Н. Д. Образцова, Сб. Автоматизация. Организация. Диагностика. М., 1971.
9. Н. В. Шабалкина, Л. М. Великовская, М. С. Бубель, М. Д. Брейдо, М. Г. Аронович, И. М. Гринвальд, Т. Федорова, И. Т. Кочетова, Сб. Автоматизация. Организация Диагностика М., 1971.
10. Н. Е. Яхонтов, М. А. Кузнецова, Ю. И. Неймарк, З. С. Баталова, И. М. Иванов, Сб. Автоматизация. Организация. Диагностика. М., 1971.
11. Л. М. Великовская, Л. Г. Чистякова, Л. Л. Сизык, М. Г. Аронович, М. Д. Брейдо, И. М. Иванова, Сб. Автоматизация. Организация. Диагностика М., 1971.
12. М. С. Бубель, Л. Г. Чистякова, М. Д. Брейдо, Е. И. Ланкина. Сб. Автоматизация. Организация. Диагностика. М., 1970.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 октября 1970 г.

ON NONLINEAR TRANSFORMATION OF FEATURES IN PATTERN RECOGNITION PROBLEMS

Yu. I. Neimark, M. D. Breydo

Iterative algorithms for nonlinear transformation of feature space accounting the indeterminacy of plant characteristics specification are considered. This leads to the construction of the decision rule minimizing the maximum probability of a decision error. Such an approach makes it possible to reduce the arbitrariness in numerical coding of classification problems initial data.

УДК 681.142.6

О СИНТЕЗЕ СХЕМ, РЕАЛИЗУЮЩИХ СЛОЖНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

O. A. Башкиров, С. И. Башкирова

Излагаются не трудоемкие методы синтеза логических функций из стандартных блоков. Приводятся оптимальные разбиения переменных. Сравниваются с результатами в классе дизъюнктивных нормальных и скобочных форм

Общеприняты трудности, возникающие при автоматизации синтеза схем, реализующих логические функции, зависящие от большого числа переменных. Несмотря на то, что вопросы минимизации в классе дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) хорошо разработаны [1-3], с ростом числа переменных трудоемкость методов быстро растет, так что вычислительные трудности становятся непреодолимыми. В данной работе излагаются три варианта метода синтеза логических функций из стандартных блоков, позволяющие строить достаточно сложные схемы при сравнительно малой трудоемкости*. Приводятся оптимальные разбиения переменных на группы и сложность получаемых схем для функций и систем функций, зависящих от $6 \leq n \leq 14$ переменных. Производится сравнение с результатами минимизации в классе дизъюнктивных нормальных и скобочных форм, демонстрирующее эффективность предлагаемого метода.

Излагаемые ниже результаты базируются на идеях Шеннона [4] и Лупашнова [5], [6]. Пусть задана функция алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Разобъем переменные x_1, x_2, \dots, x_n на две произвольные группы $x_1, x_2, \dots, x_m | x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+l}$ так, что $m + l = n$. Нанесем значения функции на прямоугольную таблицу так, чтобы наборы переменных x_1, x_2, \dots, x_m составляли номера столбцов таблицы, а наборы переменных $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+l}$ — номера элементов в столбце. Совокупность нулей и единиц в каждом столбце высотой 2^l будет задавать некоторую функцию от l переменных, которую обозначим $f_l(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+l})$. В качестве базиса используем двухходовые элементы дизъюнкции, двухходовые элементы конъюнкции и элемент инверсии с одинарным весом единица. Реализуем функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в соответствии с блок-схемой рис. 1.

Блок A реализует дешифратор на 2^m выходов, который расшифровывает номера столбцов таблицы. Блок C реализует все функции $f_l(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+l})$, блок B производит логическое умножение выходов блока C на выходы блока A , т. е. реализует 2^m функций, совпадающих с f_l на каждом из столбцов таблицы и равных нулю всюду вне этого столбца. Блок D производит объединение всех выходов блока B , в результате чего получаем f . Подсчитаем количество функций

* После того, как работа была сдана в печать, авторам стало известно, что аналогичными вопросами занималась Карпова Н. А.

нальных элементов, необходимых для реализации функции. Для получения инверсий переменных понадобится n элементов инверсии. Блок A представляет из себя дешифратор. Известен алгоритм построения дешифратора из двухвходовых элементов конъюнкции, содержащего минимальное количество элементов. Сложность такого дешифратора $L(m)$ вычисляется по рекуррентной формуле

$$L(m) = 2^m + 2L(m/2) \quad (1)$$

при четном m и

$$L(m) = 2^m + L\left(\frac{m+1}{2}\right) + L\left(\frac{m-1}{2}\right) \quad (2)$$

при нечетном m .

В таблице функции могут встретиться столбцы, состоящие только из нулей, только из единиц и одинаковые столбцы. Обозначим количество нулевых и единичных столбцов через L_0 и L_1 , а количество столбцов, в которых записана одна и та же функция f_i , через Q_i . Каждый нулевой столбец приводит к уменьшению на один элемент блоков B , D и последнего каскада дешифратора A . Каждый единичный столбец уменьшает на один элемент блок B . Каждая группа одинаковых столбцов уменьшает блоки B и D на $Q_i - 1$ элемент.

Для этого выходы блока A , соответствующие одинаковым столбцам, объединяются с помощью элементов дизъюнкции, затем умножаются на соответствующий выход блока C и включаются в блок D . Поскольку при этом уменьшается на единицу количество элементов конъюнкции, будем считать, что уменьшился блок B .

Таким образом,

$$L_A = L(m) - L_0,$$

$$L_B = 2^m - L_0 - L_1 - \sum_{i=1}^{2^m} (Q_i - 1), \quad (3)$$

$$L_D = 2^m - 1 - L_0.$$

При реализации блока C необходимо рассмотреть два случая.

$$1) 2^{2^l} - 2 \leq 2^m - L_0 - L_1 - \sum_{i=1}^{2^m} (Q_i - 1). \quad (4)$$

В этом случае среди всех столбцов таблицы могут встретиться все $2^{2^l} - 2$ функции от l переменных (кроме функций, тождественно равных нулю или единице). Построим схему, реализующую эти функции

$$L_C = 2^{2^l} - 2l - 2. \quad (5)$$

Пусть для определенности $l = 3$. Построим сначала с помощью двухвходовых элементов конъюнкции все функции, существенно зависящие только от двух первых переменных и содержащие по две единицы. Для этого потребуется по одному элементу конъюнкции на функцию. Из построенных функций построим все функции трех переменных, содержа-

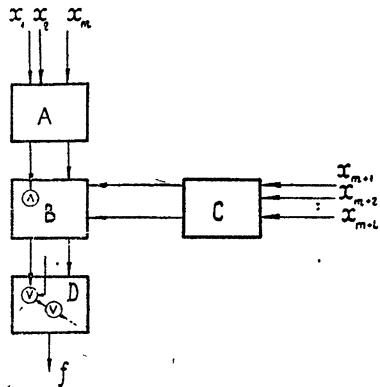


Рис. 1.

щие только одну единицу. Для этого потребуется также по одному элементу конъюнкции на функцию. Затем с помощью элементов дизъюнкции построим все функции, содержащие по две единицы и не совпадающие с уже построенными, затем содержащие по 3 единицы и т. д. Функции, тождественно равные нулю или единице, совпадающие с переменными и их инверсиями, строить не надо. Отсюда получаем (5).

$$2^{2^l} - 2 > 2^m - L_0 - L_1 - \sum_{i=1}^{2^m} (Q_i - 1). \quad (6)$$

В этом случае не все выходы блоков C могут быть использованы и более выгодным может быть построение блока C в соответствии с блок-схемой рис. 2. Здесь блок F генерирует все функции от $l-p$ переменных, блок E — дешифратор на 2^p выходов, блок G умножает каждый выход блока F , а блок H с помощью элементов дизъюнкции объединяет выходы блока G в группы по 2^p штук. Эта блок-схема соответствует построению каждой функции f_i из 2^p кусков высотой по 2^{l-p} элементов каждый. Подсчитаем сложность блоков.

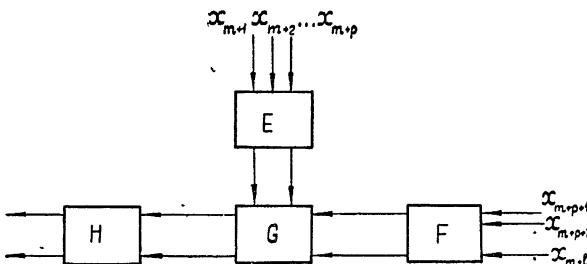


Рис. 2.

1) Пусть

$$(2^{2^{l-p}} - 2)2^p \leq (2^m - L_0 - L_1 - \sum_{i=1}^{2^m} (Q_i - 1))2^p - M_0 - M_1 - \sum_{i=1}^{2^m} \sum_{j=1}^{2^p} (S_{ij} - 1), \quad (7)$$

где M_0 — суммарное количество нулевых кусков столбцов высотой 2^{l-p} , M_1 — суммарное количество единичных кусков столбцов, S_{ij} — количество одинаковых кусков данного типа в j -м столбце (в S_{ij} не включаются столбцы L_0 и L_1). В этом случае все выходы блока G будут использованы и сложность блоков составит

$$\begin{aligned} L_F &= 2^{2^{l-p}} - 2(l-p) - 2, \\ L_E &= L(p), \\ L_G &= (2^{2^{l-p}} - 2)2^p, \end{aligned} \quad (8)$$

$$L_H = (2^m - L_0 - L_1 - \sum_{i=1}^{2^m} (Q_i - 1))(2^p - 1) - M_0.$$

2) Пусть

$$(2^{2^{l-p}} - 2)2^p > (2^m - L_0 - L_1 - \sum_{i=1}^{2^m} (Q_i - 1))2^p - M_0 - M_1 - \sum_{i=1}^{2^m} \sum_{j=1}^{2^p} (S_{ij} - 1). \quad (9)$$

В этом случае сложность блока G можно уменьшить

$$L_G = (2^m - L_0 - L_1 - \sum_{i=1}^{2^m} (Q_i - 1))2^p - M_0 - M_1 - \sum_{i=1}^{2^m} \sum_{j=1}^{2^p} (S_{ij} - 1). \quad (10)$$

Для реализации упрощения схемы из-за наличия одинаковых кусков столбцов выходы блока E объединяются с помощью элементов дизъюнкции так, чтобы получить функцию, принимающую значение единицы на данной группе одинаковых кусков в данном столбце. Выход, соответствующий каждой такой функции, умножается на функцию куска столбца (выход блока F) и включается с помощью элемента дизъюнкции в блок H . Обозначив

$$\sum_{i=1}^{2^m} (Q_i - 1) = \Sigma_1, \\ \sum_{i=1}^{2^m} \sum_{j=1}^{2^p} (S_{ij} - 1) = \Sigma_2, \quad (11)$$

окончательно получим

$$L_f = L(m) + 2^{m+1} - 1 - 3L_0 - L_1 - \Sigma_1 + n + L_C, \quad (12)$$

где

$$L_C = 2^{2l} - 2l - 2 \quad (p = 0), \quad (13)$$

$$L_C = 2^{2l-p} - 2(l-p) - 2 + L(p) + (2^{2l-p} - 2) 2^p + (2^m - L_0 - L_1 - \Sigma_1) \times \\ \times (2^p - 1) - M_0 \quad (p \neq 0) \quad (14)$$

и

$$(2^{2l-p} - 2) 2^p \leq (2^m - L_0 - L_1 - \Sigma_1) 2^p - M_0 - M_1 - \Sigma_2. \quad (15)$$

В противном случае

$$L_C = 2^{2l-p} - 2(l-p) - 2 + L(p) + (2^m - L_0 - L_1 - \Sigma_1) (2^{p+1} - 1) - 2M_0 - M_1 - \Sigma_2. \quad (16)$$

Рассмотрим задачу об одновременном синтезе r функций

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Очевидно, что блоки A и C рис. 1 будут общими для всех функций. Общие элементы могут быть также в блоке B . Таким элементам соответствуют одинаковые столбцы, стоящие на одинаковых местах в таблицах функций. Обозначим количество одинаковых столбцов данного типа, стоящих на одинаковых местах, через R_k , а выражение $\sum_{k=1}^r (R_k - 1)$ — через Σ_3 . Пусть

$$2^{2l} - 2 \leq 2^m r - \Sigma L_0 - \Sigma L_1 - \Sigma_1 - \Sigma_3, \quad (17)$$

где ΣL_0 и ΣL_1 означает общее количество нулевых и единичных столбцов во всех функциях, а Σ_1 вычисляется по всем функциям, причем в Σ_1 не входят столбцы, входящие в Σ_3 . Тогда

$$L_f = L(m) + (2^{m+1} - 1)r - 2\Sigma L_0 - \Sigma L_1 - \Sigma_1 - \Sigma_3 + n + L_C, \quad (18)$$

где $L_C = 2^{2l} - 2l - 2$. Если неравенство (17) не выполнено, то блок C образуется по блок-схеме рис. 2, при этом неравенство, аналогичное неравенству (15), имеет вид

$$(2^{2l-p} - 2) 2^p \leq (2^m r - \Sigma L_0 - \Sigma L_1 - \Sigma_1 - \Sigma_3) 2^p - \Sigma M_0 - \Sigma M_1 - \Sigma_2 - \Sigma_4, \quad (19)$$

где ΣM_0 и ΣM_1 подсчитывают суммарное количество нулевых и единичных кусков столбцов по всем функциям, Σ_2 подсчитывает одинаковые куски столбцов в каждой функции, а Σ_4 — одинаковые куски, стоя-

щие на одинаковых местах в различных функциях. При этом куски, входящие в Σ_2 , не входят в Σ_4 .

Тогда

$$L_C = 2^{2^l-p} - 2(l-p) - 2 + L(p) + (2^{2^l-p} - 2)2^p + \\ + (2^m r - \Sigma L_0 - \Sigma L_1 - \Sigma_1 - \Sigma_3)(2^p - 1) - \Sigma M_0 - \Sigma M_1 - \Sigma_2 - \Sigma_4. \quad (20)$$

Если (19) не выполнено, то

$$L_C = 2^{2^l-p} - 2(l-p) - 2 + L(p) + (2^m r - \Sigma L_0 - \Sigma L_1 - \\ - \Sigma_1 - \Sigma_3)(2^{p+1} - 1) - 2\Sigma M_0 - \Sigma M_1 - \Sigma_2 - \Sigma_4. \quad (21)$$

Для получения схемы с минимальной сложностью необходимо найти оптимальное разбиение переменных, т. е. m , l и p . Результаты расчета для $6 \leq n \leq 14$ без учета ΣL_0 , ΣL_1 , Σ_1 , Σ_2 , ΣM_0 , ΣM_1 , Σ_3 и Σ_4 приведены в табл. 1. Величины, приведенные в таблице, соответствуют максимальной сложности схемы при заданном n , т. е. гарантируют реализацию самой сложной функции.

Таблица 1

n	r = 1				r = 5				r = 10			
	m	l	p	L_f	m	l	p	L_f	m	l	p	L_f
6	2	4	2	59	3	3	1	171	2	4	2	270
7	2	5	3	100	3	4	2	284	3	4	2	479
8	3	5	3	177	4	4	2	497	3	5	3	864
9	5	4	2	286	4	5	3	882	2	7	4	1595
10	5	5	3	479	2	8	5	1605	6	4	1	2764
11	6	5	3	808	7	4	1	2846	6	5	2	4557
12	4	8	5	1371	7	5	2	4639	7	5	2	7834
13	5	8	5	2436	8	5	2	7980	7	6	3	13979
14	9	5	2	4425	8	6	3	14125	8	6	3	25640

Рассмотрим модификацию изложенного выше метода, для чего понадобится метод каскадов.

Обычно под методом каскадов [7] понимают следующую процедуру синтеза логической функции. Производится разложение функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по одной из переменных (например, x_n). Полученные в результате разложения функции, зависящие от $n-1$ переменной, раскладываются по x_{n-1} и т. д., пока не будут получены функции, зависящие не более чем от двух переменных, которые синтезируются отдельно в виде совершенной СДНФ. Очевидно, что вид получаемой функции

зависит от порядка разложения, что эквивалентно необходимости громоздкого перебора для получения оптимальной схемы. Оценим количество элементов, необходимое для построения функции по методу каскадов. Пусть задана функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значения которой занесем в таблицу, имеющую четыре строки и 2^{n-2} столбца. Будем строить функцию в соответствии с блок-схемой рис. 3, где блок F реализует все функции двух переменных. В соответствии с (5) для его построения необходимо десять элементов дизъюнкции и конъюнкции и два инвертора. Блок K имеет каскадную структуру и его сложность.

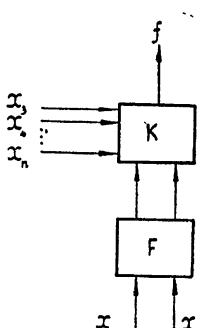


Рис. 3.

$$L_K = 3(2^{n-2} - 1) + n - 2, \quad (22)$$

получаемую из формулы для суммы членов геометрической прогрессии. На рис. 4 приведен пример блока K для $n = 4$. Таблица функции задает адреса соединений выходов блока F со входами блока K . Учитывая упрощение нижнего яруса блока K из-за наличия нулевых и единичных столбцов таблицы, получаем

$$L_f = 3(2^{n-2} - 1) - 2L_0 - L_1 + 10 + n. \quad (23)$$

Будем называть данное построение методом каскадов A . Полученное выражение может быть значительно улучшено. Рассмотрим вновь блок-схему рис. 1. Блоки A , B и D совместно выполняют такие же функции, как и каскадная структура рис. 4. Сравним необходимое количество элементов в обоих вариантах:

$$\begin{aligned} L_A + L_B + L_D &= L(m) + 2^m + 2^m - 1 - 3L_0 - L_1, \\ L_K &= 3(2^m - 1) - 2L_0 - L_1, \end{aligned} \quad (24)$$

Очевидно, если

$$L_0 < L(m) - 2^m + 2, \quad (25)$$

то

$$L_K < L_A + L_B + L_D. \quad (26)$$

Все рассуждения и оценки сложности блока C остаются справедливыми и при применении каскадной структуры. Как и раньше, при этом может оказаться эффективным учет упрощения не только самого нижнего, но и следующих каскадов схемы из-за наличия нулевых столбцов таблицы. При заданной таблице функции подсчет не нужен

затруднений. При синтезе системы функций дело обстоит несколько хуже. В этом случае блок L_K содержит

$$L_K = 3(2^m - 1)r - \Sigma L_0 - \Sigma L_1 - \Sigma_3 \quad (27)$$

элементов, т. е. оказывается сложнее, чем блоки A , B и D , построенные в соответствии с блок-схемой рис. 2 и выражениями (3). Будем называть описанное построение методом каскадов B . Оптимальные разбиения переменных и количество элементов без учета L_0 , L_1 , Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 , M_0 и M_1 для метода каскадов при реализации блока F в соответствии с выражениями (13), (14), (16) приведены в табл. 2.

Таблица 2

n	$r = 1$				$r = 5$				$r = 10$			
	m	l	p	L_f	m	l	p	L_f	m	l	p	L_f
6	2	4	2	57	2	4	2	181	2	4	2	286
7	3	4	2	98	3	4	2	302	2	5	3	511
8	5	3	1	171	3	5	3	527	3	5	3	912
9	5	4	2	268	4	5	3	928	1	8	5	1595
10	6	4	2	461	2	8	5	1611	2	8	5	2916
11	6	5	3	782	3	8	5	2932	6	5	2	5089
12	4	8	5	1361	7	5	2	5105	6	6	3	8674
13	5	8	5	2418	7	6	3	8690	7	6	3	15075
14	9	5	2	4351	8	6	3	15091	7	7	4	27360

Большой практический интерес представляет задача синтеза функций, содержащей мало единиц. Рассмотрим эту задачу подробнее. Если единицы распределены по таблице функции достаточно равномерно, то многие столбцы будут содержать только по одной единице. Тогда более выгодно в блоке C блок-схемы рис. 1 реализовать сначала все функции l переменных, содержащие по одной единице, для чего достаточно построить дешифратор на 2^l выходов. Все остальные функции будем строить из уже построенных с помощью элементов дизъюнкции. Пусть количество единиц в функции $-F_1$. Тогда количество дизъюнкций, необходимых для построения функций, содержащих более одной единицы, определяется выражением

$$L_V = F_1 - 2^l L_1 - \Sigma'_1 - (2^m - L_0), \quad (28)$$

где $\Sigma'_1 = \sum_{i=1}^{2^m} Q'_i - 1$, а Q'_i — количество единиц в столбце, входящем в Σ_1 . Тогда

$$L_C = L(l) + F_1 - 2^l L_1 - \Sigma'_1 - (2^m - L_0) \quad (29)$$

при

$$F_1 \geq 2^l L_1 + \Sigma'_1 + (2^m - L_0) \quad (30)$$

и

$$F_1 - 2^l L_1 - \Sigma'_1 \geq 2^l. \quad (31)$$

Если неравенство (31) не выполнено, то

$$L_C = L(l) - 2^l + 2F_1 - 2^l L_1 - (2^m - L_0). \quad (32)$$

В этом выражении фактически учитывается упрощение последней ступени дешифратора $L(l)$, если использованы не все его выходы. Неравенство (30) эквивалентно требованию выбора такого m , чтобы на каждый столбец приходилось не менее одной единицы, в предположении их равномерного распределения по таблице, и существенно при неизвестных L_0 и L_1 . Очевидно, что выбор больших значений невыгоден, так как приводит к неиспользуемым выходам дешифратора $L(m)$. Если L_0 и L_1 известны, то неравенство выполняется автоматически. Аналогичные неравенства имеются в рассматриваемых ниже вариантах.

Выражение (28) дает несколько завышенный результат, так как часть дизъюнкций может быть общей для нескольких функций столбцов.

Аналогично может быть построена схема для синтеза системы из r функций, содержащих мало единиц. В этом случае

$$L_C = L(l) + \Sigma F_1 - 2^l \Sigma L_1 - \Sigma'_1 - \Sigma'_3 - (2^m r - \Sigma L_0) \quad (33)$$

при

$$\Sigma F_1 \geq 2^l \Sigma L_1 + \Sigma'_1 + \Sigma'_3 + (2^m r - \Sigma L_0), \quad (34)$$

$$\Sigma F_1 - 2^l \Sigma L_1 - \Sigma'_1 - \Sigma'_3 \geq 2^l. \quad (35)$$

Если неравенство (35) не выполнено, то

$$L_C = L(l) - 2^l - 2\Sigma F_1 - 2^l \Sigma L_1 - \Sigma'_1 - \Sigma'_3 - (2^m r - \Sigma L_0), \quad (36)$$

где $\Sigma'_3 = \sum_{k=1}^r R'_k$, R'_k — количество единиц в столбце, входящем в Σ_3 ,

а ΣF_1 — суммарное количество единиц во всех функциях. Структура остальных блоков (A , B , D) не изменяется и вычисляется по формулам (3). Поскольку предположение о равномерности распределения единиц по таблице функций никогда не использовалось, полученные выражения справедливы при произвольном распределении единиц.

Пусть каждый столбец функции, содержащей мало единиц, разбит на 2^p куска, содержащих по 2^{l-p} элементов каждый, т. е. будем строить функцию в соответствии с блок-схемой рис. 2. Подсчитаем сложность блока C в этом варианте. Для построения всех функций кусков столбцов, содержащих по одной единице потребуется $L(l-p)$ элементов (десифратор на 2^{l-p} выходов). Все остальные функции получим с помощью элемента дизъюнкции, которых потребуется

$$L_V = F_1 - 2^l L - \Sigma'_1 - (2^m - L_0 - M_0 - M_1) 2^p - 2^{l-p} M_1 - \Sigma'_2, \quad (37)$$

где Σ'_1 подсчитывает количество единиц в одинаковых кусках столбцов, входящих в Σ_2 аналогично Σ'_1 и Σ'_3 . Функции столбцов получим путем умножения функций кусков столбцов на выходы десифратора $L(p)$ в блоке G и объединения с помощью элементов дизъюнкции в блоке H . Тогда

$$L_F = L(l-p) + F_1 - 2^l L_1 - \Sigma'_1 - (2^m - L_0 - M_0 - M_1) 2^p - 2^{l-p} M_1 - \Sigma'_2,$$

$$L_E = L(p), \quad (38)$$

$$L_G = (2^m - L_0 - L_1 - \Sigma_1) 2^p - M_0 - M_1 - \Sigma_2,$$

$$L_H = (2^m - L_0 - L_1 - \Sigma_1) (2^p - 1) - M_0$$

при

$$F_1 \geq 2^l L_1 + \Sigma'_1 + (2^m - L_0) 2^p + 2^{l-p} M_1 + \Sigma'_2 \quad (39)$$

и

$$F_1 - 2^l L_1 - \Sigma'_1 - 2^{l-p} M_1 - \Sigma'_2 \geq 2^{l-p}. \quad (40)$$

В выражении для L_G член $(-\Sigma_2)$ учитывает, как и раньше, упрощение из-за наличия одинаковых кусков столбцов. Если неравенство (40) не выполнено, то

$$L_F = L(l-p) - 2^{l-p} + 2 F_1 - 2^l L_1 - \Sigma'_1 - (2^m - L_0) 2^p - 2^{l-p} M_1 - \Sigma'_2. \quad (41)$$

При синтезе системы функций сложность блока C подсчитывается аналогично разобранным ранее случаям

$$\begin{aligned} L_F &= L(l-p) + \Sigma F_1 - 2^l \Sigma L_1 - \Sigma'_1 - \Sigma'_3 - (2^m r - \Sigma L_0 - \\ &\quad - \Sigma M_0 - \Sigma M_1) 2^p - 2^{l-p} \Sigma M_1 - \Sigma'_2 - \Sigma'_4, \end{aligned} \quad (42)$$

$$L_G = (2^m r - \Sigma L_0 - \Sigma L_1 - \Sigma_1 - \Sigma_3) 2^p - \Sigma M_0 - \Sigma M_1 - \Sigma_2 - \Sigma_4,$$

$$L_H = (2^m r - \Sigma L_0 - \Sigma L_1 - \Sigma_1 - \Sigma_3) (2^p - 1) - M_0$$

при

$$\Sigma F_1 \geq 2^l \Sigma L_1 + \Sigma'_1 + \Sigma'_3 + (2^m r - \Sigma L_0) 2^p + 2^{l-p} \Sigma M_1 + \Sigma'_2 + \Sigma'_4 \quad (43)$$

и

$$\Sigma F_1 - 2^l L_1 - \Sigma'_1 - \Sigma'_3 - 2^{l-p} \Sigma M_1 - \Sigma'_2 - \Sigma'_4 \geq 2^{l-p}, \quad (44)$$

Если неравенство (44) не выполнено, то

$$\begin{aligned} L_F &= L(l-p) - 2^{l-p} + 2 \Sigma F_1 - 2^l \Sigma L_1 - \\ &\quad - \Sigma'_1 - \Sigma'_3 - (2^m r - \Sigma L_0) 2^p - 2^{l-p} \Sigma M_1 - \Sigma'_2 - \Sigma'_4. \end{aligned} \quad (45)$$

Оптимальные разбиения и сложность схемы с учетом только количества единиц в функции (т. е. без учета L_0 , L_1 , Σ_1 , Σ_2 и т. д.) приведены в табл. 3.

Рассмотрим теперь процесс синтеза функции по описанной выше

методике. Как только значения функции нанесены на таблицу оптимального размера, ячейки, находящиеся в кусках столбцов, можно считать адресами соединений блоков схемы, имеющих стандартную структуру, после чего остается удалить неиспользуемые элементы, соответствующие нулевым и единичным кускам столбцов и целым столбцам, для чего необходим однократный просмотр таблиц. Следующим, более трудоемким уровнем синтеза можно считать учет одинаковых столбцов и их кусков, так как это приводит к некоторому изменению структуры блоков и многократному просмотру таблиц. Количество нулевых, единичных и одинаковых столбцов зависит от разделения переменных на группы, что приводит к необходимости полного перебора всевозможных таблиц для получения минимальной для данной структуры схемы. При решении практических задач синтеза в каждом конкретном случае можно ограничиться уровнем синтеза с выполненным объемом вычислений. По-видимому, наибольший интерес представляет наиболее простой вариант синтеза без перебора таблиц, так как он позволяет строить схемы для функций и систем функций, заданных таблицами практический сколь угодно большого размера.

Таблица 3

n	$r = 1$					$r = 5$					$r = 10$				
	F_1	m	l	p	L_f	ΣF_1	m	l	p	L_f	ΣF_1	m	l	p	L_f
6	32	1	5	2	63	160	2	4	0	209	320	1	5	0	384
	16	1	5	2	47	80	2	4	0	129	160	1	5	0	224
7	64	1	6	2	108	320	2	5	0	394	640	2	5	0	729
	32	1	6	2	76	160	2	5	0	234	320	2	5	0	409
8	128	2	6	2	187	640	3	5	0	743	1280	2	6	0	1410
	64	2	6	2	123	320	3	5	0	423	640	2	6	0	770
9	32	2	6	2	91	160	3	5	0	263	320	2	6	0	450
	256	2	7	2	340	1280	3	6	0	1424	2560	3	6	0	2739
10	128	2	7	2	212	640	3	6	0	784	1280	3	6	0	1459
	64	2	7	2	148	320	3	6	0	464	640	3	6	0	8190
11	32	2	7	2	116	160	3	6	0	304	320	3	6	0	499
	512	2	8	3	621	2560	1	9	3	2755	5120	3	7	0	5370
12	256	2	8	3	365	1280	1	9	3	1475	2560	3	7	0	2816
	128	2	8	3	237	640	1	9	3	835	1280	3	7	0	1536
13	64	2	8	3	173	320	1	9	3	515	640	3	7	0	896
	1024	2	9	3	1174	5120	1	10	3	5392	10240	4	7	0	10589
14	512	2	9	3	662	2560	1	10	3	2832	5120	4	7	0	5469
	256	2	9	3	406	1280	1	10	3	1552	2560	4	7	0	2909
15	128	2	9	3	278	640	1	10	3	912	1280	4	7	0	1629
	2048	2	10	4	2243	10240	1	11	4	10605	20480	4	8	0	20970
16	1024	2	10	4	1219	5120	1	11	4	5485	10240	4	8	0	10730
	512	2	10	4	707	2560	1	11	4	2925	5120	4	8	0	5610
17	256	2	10	4	451	1280	1	11	4	1645	2560	4	8	0	3050
	4096	2	11	4	4368	20480	1	12	4	20986	40960	1	12	4	41631
18	2048	2	11	4	2320	10240	1	12	4	10746	20480	1	12	4	21151
	1024	2	11	4	1296	5120	1	12	4	5626	10240	1	12	4	10911
19	512	2	11	4	784	2560	1	12	4	3066	5120	1	12	4	5791
	8192	3	11	4	8541	40960	2	12	4	41641	81920	1	13	4	82872
20	4096	3	11	4	4445	20480	2	12	4	21161	40960	1	13	4	41912
	2048	3	11	4	2397	10240	2	12	4	10921	20480	1	13	4	21432
21	1024	3	11	4	1373	5120	2	12	4	5801	10240	1	13	4	11192

Для оценки эффективности методов синтеза была построена программа минимизации логических функций, состоящая из подпрограм-

мы получения сокращенной ДНФ методом Мак-Класси, подпрограммы поиска тупиковой ДНФ и подпрограммы вынесения за скобки. При поиске тупиковой ДНФ использован следующий простейший алгоритм. Сначала производится покрытие всех единиц функции членами сокращенной ДНФ, начиная с членов, покрывающих максимальное количество единиц. Затем удаляются члены, содержащиеся в совокупности всех оставшихся, начиная с членов, покрывающих минимум единиц. Экспериментально установлено, что получаемые при этом тупиковые ДНФ по крайней мере для исследованных функций не являются самыми сложными. Для построения скобочной формы производилось последовательное вынесение за скобки сначала x_n , затем, в получившихся скобках, x_{n-1} и т. д., пока возможно вынесение хотя бы одного переменного.

Таблица 4

<i>n</i>	Количество единиц	ТДНФ	Скобочная форма	Каскады А	Стандартные блоки	Дешифаторы	
						1	2
1	2	3	4	5	6	7	
6	1/2	76	51	61	59	64	
		58	37	55	53	56	
		66	45	58	56	60	
	1/4	68	43	53	51	56	
		31	24	43	41	35	
		53	38	49	47	44	
7	1/2	184	103	108	98	114	
		127	83	100	90	88	
		150	92	105	95	101	
	1/4	143	92	96	86	81	
		98	68	78	68	67	
		125	79	88	77	73	
8	1/2	342	200	204	174	195	
		281	150	194	164	166	
		320	180	200	169	180	
	1/4	290	166	183	149	130	
		216	134	153	122	113	
		261	148	163	134	120	
9	1/8	236	129	145	115	100	
		145	85	115	85	71	
		172	105	128	98	33	
	1/2	1511	743	760	462	608	
		1443	679	738	448	593	
		1484	706	752	455	600	
10	1/4	1274	615	623	397	371	
		1092	510	582	377	324	
		1185	578	614	389	348	
	1/8	884	436	501	337	243	
		699	346	435	313	202	
		786	396	461	325	225	
11	1/4	2692	1150	1221	638	657	
		2465	1089	1168	607	611	
		2572	1118	1192	624	630	
	1/8	1754	796	914	509	406	
		1580	739	764	486	369	
		1651	781	909	502	393	

В качестве тест-объекта были выбраны «случайные» функции, т. е. функции, расположение единиц в которых задавалось генератором случайных чисел, и содержащие примерно $1/2$, $1/4$ и $1/8$ единиц. Результаты синтеза приведены в табл. 4. В клетках таблицы приведено соответственно максимальное, минимальное и среднее количество элементов для десяти случайных функций. Расчет количества элементов в пятой графе таблицы (каскады A) произведен в соответствии с (22), в 6 графе (стандартные блоки) — в соответствии с (3), (8) и (10) при использовании разбиений переменных из табл. 1, а в 7 графе (десифраторы) — в соответствии с (38), (41) при использовании разбиений переменных из табл. 3. При этом учитывались только нулевые и единичные столбцы и куски столбцов без какого-либо перебора разбиений переменных, т. е. использован простейший вариант синтеза, имеющий малую трудоемкость. Приведенные результаты демонстрируют высокую эффективность описанных методов, однако, наиболее интересной представляется малая трудоемкость процесса синтеза, что позволяет строить схемы для достаточно больших n .

В заключение выражаем благодарность Л. С. Лебедевой, выполнившей ряд громоздких расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Яблонский, Тр. Математического института им. Стеклова, 51, 5 (1958).
2. В. М. Глушков, Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, М., 1962.
3. Д. А. Поспелов, Логические методы анализа и синтеза схем, изд. Энергия, М., 1968.
4. К. Э. Шеннон, Работы по теории информации и кибернетики, М., ИЛ, 59, 1963.
5. О. Б. Лупанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 1, 120 (1958).
6. О. Б. Лупанов, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 14, изд. Наука, М., 31, 1965.
7. Г. Н. Поваров, ДАН СССР, 100, 5, 909 (1955).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 мая 1970 г.

ON SYNTHESIS OF SCHEMES REALIZING COMPLICATED LOGICAL FUNCTIONS

O. A. Bashkirov, S. I. Bashkirova

Little time-consumption methods for logical functions synthesis using standard units are described. Optimal decompositions of variables are given. A comparison with results in the class of disjunctive normal and parenthesis forms is carried out.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О ПРОЦЕССЕ СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ПРЕИМУЩЕСТВЕННОГО ПОИСКА

Н. Н. Леонов

1. В [1] исследованы стационарные движения одной системы преимущественного поиска и выполнено разбиение пространства ее параметров на области существования различных движений. Настоящая статья содержит результаты исследования качества работы этой системы в стационарных режимах. За показатель качества принято среднее для стационарного движения отклонение выхода объекта управления от его экстремального значения в статике

2. Система (1), (2), рассмотренная в [1], имеет два положительных параметра τ , Δ , определяющие характер ее движений. Исследования показали, что первый квадрант плоскости τ , Δ разбит на шесть областей O_n ($n = 1, \dots, 6$) существования различных установившихся движений системы. Области O_1, \dots, O_5 соответствуют простым формам периодических движений, а область O_6 заполнена счетным множеством областей существования движений сложных форм, вплоть до форм сколь угодно высокой сложности. Оценка качества работы системы в установившихся режимах изучается в областях существования простых режимов.

Области O_1, O_2, O_5 являются областями существования периодических движений, подчиненных условию преимущественности поиска. Области O_3, O_4 отвечают симметричным периодическим движениям, не подчиненным требованию преимущественности поиска. Эти движения и рассмотрим в первую очередь.

3. Оценка качества для $(\tau, \Delta) \in O_3$, которую обозначим через δ_3 , описывается согласно (4) [1] выражением

$$\delta_3 = \frac{2v_3^*}{u_3^* + v_3^*} + \frac{(u_3^* + v_3^*)^2}{3} - 1, \quad (1)$$

где

$$u_3^* = \frac{\Delta}{2} \operatorname{cth} \left(u_3^* + \frac{\Delta}{2u_3^*} \right), \quad v_3^* = \frac{\Delta}{2u_3^*}.$$

Оценка для $(\tau, \Delta) \in O_4$ описывается равенствами

$$\begin{aligned} \delta_4 &= 0,5 (\nu_1 \nu_2^2/2 + \nu_2^3/6 - \nu_2) (\nu_1 + \nu_2)^{-1}, \\ \exp(-\nu_1) &= v_4^*/u_4^*, \quad \nu_2 = 2(u_4^* + v_4^*), \\ 1 + \Delta/2u_4^* &= (1 - u_4^*) \exp(2u_4^* + \Delta/u_4^*), \quad v_4^* = \Delta/2u_4^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Из выражений для δ_3, δ_4 следует, что эти оценки зависят лишь от одного параметра Δ и не зависят от τ . Это вполне естественно, ибо соответствующие стационарные режимы не подчинены требованию преимущественности поиска, а параметр τ является параметром, определяющим преимущественность поиска. Зависимости $\delta_3(\Delta)$, $\delta_4(\Delta)$ представлены табл. 1 [2].

Таблица 1

Δ	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	1	2	3
δ_3									0,819	1,490
δ_4	0,372	0,365	0,362	0,366	0,385	0,404	0,446	0,503		

и рисунком 1.. На рис. 2, иллюстрирующем зависимость $\delta(\tau)$ при фиксированных Δ , графики $\delta_3(\tau)$, $\delta_4(\tau)$ представляют собой горизонтальные прямые.

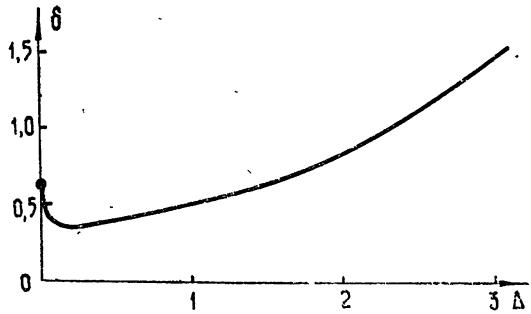


Рис. 1.

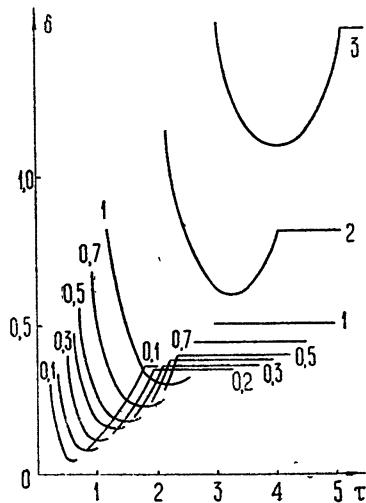


Рис. 2.

4. а) При $(\tau, \Delta) \in O_1$ оценка эффективности работы системы

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \tau^2/3 - (u_1^* + v_1^*)\tau + (u_1^* + v_1^*)^2 - 1 + 2\tau^{-1} v_1^*, \\ u_1^* &= 0,5 \Delta \operatorname{cth} \tau/2, \quad v_1^* = \Delta/2u_1^* = \operatorname{th} \tau/2. \end{aligned} \quad (3)$$

Величина $\delta_1(\tau, \Delta)$ достигает наименьшего значения при $\Delta > \Delta^*$, где $\Delta^* = 2 \operatorname{th}^2 \sqrt{2\Delta}$ ($\Delta^* \approx 1,84$)^[1], внутри области O_1 , а при $\Delta < \Delta^*$ — на правой границе этой области. Зависимость $\delta_1(\tau', \Delta) = \min_{\tau, (\tau, \Delta) \in O_1} \delta_1(\tau, \Delta)$ представлена табл. 2.

Таблица 2

Δ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	1	2	3
τ'	0,46	0,66	0,82	0,96	1,10	1,36	1,76	3,2	4,0
δ_1	0,074	0,094	0,138	0,177	0,214	0,278	0,345	0,595	1,086

6) Если $(\tau, \Delta) \in O_2$, то оценка качества описывается равенствами:

$$\delta_2 = (2\tau + v)^{-1} [2\tau^3/3 + (u_2^* + v_2^*) (1 - 2\tau^2) +$$

$$\begin{aligned}
 & + (u_2^* + v_2^*)^2 (\nu + 2\tau) - 2\tau + (1 - u_2^*) e^\tau - (1 + v_2^*) e^{-\tau}], \\
 u_2^* &= 0,5 [(1 - e^{-\tau})^2 + \sqrt{(1 - e^{-\tau})^4 + 2\Delta e^{-2\tau}}], \\
 v_2^* &= \Delta/2u_2^*, \quad e^{-\nu} = v_2^*/u_2^*.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Для области O_2 параметр Δ принимает значения, меньшие Δ^* . Наименьшего значения величина $\delta_2(\tau, \Delta)$ при фиксированном Δ достигает внутри области O_2 . Зависимость $\delta_2(\tau, \Delta) = \min_{\tau, (\tau, \Delta) \in O_2} \delta_2(\tau, \Delta)$ представлена в табл. 3

Таблица 3

Δ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	1
τ'	0,6	0,8	1,0	1,3	1,6	1,9	2,2
δ_2	0,048	0,091	0,129	0,161	0,189	0,237	0,301

в) При $(\tau, \Delta) \in O_5$ оценка качества имеет вид

$$\begin{aligned}
 \delta_5 &= (2\tau + \nu_1 + \nu_2)^{-1} \{ (u_5^* + v_5^*)^2 (2\tau + \nu_1 + \nu_2 - 1,5) + \\
 & + (u_5^* + v_5^*) (4 + 3t_1 - 2t_1\nu_1 - 2\tau^2) + (1 - u_5^*) \times \\
 & \times \exp(t_1) [t_1 - u_5^* - v_5^* + 0,5(1 - u_5^*) \exp(t_1)] - \\
 & - (2 - e^{-\tau} - v_5^* e^{t_1 - \tau}) e^{t_1 - \tau} [2(u_5^* + v_5^* - t_1) + 0,5(2 - e^{-\tau} - v_5^* e^{-\tau})] \times \\
 & \times \exp(t_1 - \tau) + t_1^2 (\nu_2 - 1,5) - 3t_1 - 2(1 + v_5^*) e^{-\tau} - 2\tau + 2 + 2\tau^3/3 \},
 \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\exp(-\nu_1) = v_5^*/u_5^*, \quad \exp(-\nu_2) = \frac{1 - \exp(t_1) + u_5^* \exp(t_1)}{u_5^* + v_5^* + \exp(t_1) - u_5^* \exp(t_1) - t_1 - 1},$$

$$[1 - \exp(-t_1)] [2e^{-\tau} - 2e^{-2\tau} + \exp(t_1 - 2\tau) - \exp(-t_1) - t_1 e^{-2\tau}] =$$

$$= \Delta/2 \left\{ [\exp(-t_1) - \exp(-2\tau)] [\exp(-t_1) - \exp(t_1 - 2\tau)] - \right.$$

$$- \frac{(1 - e^{-\tau})^2 [1 + e^{-\tau} - 2e^{t_1 - \tau} - (1 - e^{-\tau}) e^{2t_1 - 2\tau}]^2}{(1 - e^{-t_1})(e^{-t_1} - e^{t_1 - 2\tau}) 0,5 \Delta - (1 - 2e^{t_1 - \tau} + e^{t_1 - 2\tau}) (2e^{-\tau} - e^{-2\tau} - t_1 e^{-t_1} - e^{-2t_1})} \right\},$$

$$u_5^* =$$

$$= \frac{(1 - e^{-t_1})(e^{-2t_1} - 2e^{-t_1 - \tau} - e^{-2\tau} + 2e^{-t_1 - 2\tau} + t_1 e^{-t_1 - 2\tau}) + 0,5 \Delta (e^{-t_1} - e^{-2\tau}) (e^{-2t_1} - e^{-2\tau})}{(1 - e^{-\tau}) [e^{-2t_1} (1 + e^{-\tau}) - 2e^{-t_1 - \tau} - e^{-2\tau} (1 - e^{-\tau})]}.$$

$$v_5^* = \Delta/2u_5^*.$$

Наименьшего значения величина $\delta_5(\tau, \Delta)$ при фиксированном Δ достигает на левой границе области O_5 (рис. 2).

5. Зависимость качества работы системы в стационарных режимах может быть охарактеризована на основании выше изложенного (рис. 2).

На этом рисунке изображены графики $\delta(\tau)$ при фиксированных значениях параметра Δ . При $\Delta = 3, \Delta = 2$ кривая $\delta(\tau)$ образована кривыми $\delta_1(\tau), \delta_2(\tau)$; при $\Delta = 1,$

$\Delta = 0,7$ кривая $\delta(\tau)$ состоит из $\delta_1(\tau)$, $\delta_2(\tau)$, $\delta_4(\tau)$, а при $\Delta = 0,5$, $\Delta = 0,4$, $\Delta = 0,3$, $\Delta = 0,2$, $\Delta = 0,1$ кривая $\delta(\tau)$ образована кривыми $\delta_1(\tau)$, $\delta_2(\tau)$, $\delta_5(\tau)$, $\delta_4(\tau)$. Полученные результаты говорят о том, что наилучшее качество процесса слежения в системе достигается на стационарных режимах, подчиненных условию преимущественности поиска. Для $\Delta > \Delta^*$ это — периодический несимметричный режим вида, изображенного на рис. 4 а в работе [1], а при $\Delta < \Delta^*$ — несимметричный периодический режим, содержащий отрезок режима скольжения (рис. 4 б [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Леонов, Об экстремальных системах с преимущественным поиском, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 3, 371 (1971).
2. Н. Н. Леонов, Автоматика и телемеханика, № 12, 156 (1969).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 апреля 1970 г.
