

СОДЕРЖАНИЕ

Богданов Е. П., Орлов Л. К., Романов Ю. А. Неустойчивость пространственно разделенных плазменных пучков	805
Ловецкий Е. Е., Силаков В. П. Поверхностные колебания магнитоактивной плазмы со столкновениями	813
Крупина А. Е., Орлова Э. В. К вопросу о влиянии соударений и релятивистских эффектов на распространение высокочастотных волн в магнитоактивной плазме	817
Ковалев А. С. Амплитудные флуктуации в двухуровневой и четырехуровневой моделях лазера	823
Власов С. Н., Таланов В. И., Хижняк А. И. Расчет пространственно-временных характеристик излучения ОКГ	828
Веревкин Ю. К., Дауме Э. Я., Макаров А. И., Новиков М. А., Хижняк А. И. К вопросу об измерении длительности сверхкоротких импульсов	840
Малахов А. Н., Сандлер М. С. Учет распределенности параметров при исследовании естественных флуктуаций в лазере	845
Кравцов Ю. А., Фукс И. М., Шмелев А. Б. Последовательное применение метода Кирхгофа к задаче о рассеянии звуковой волны на поверхности со случайными неровностями	854
Воробьев В. В. О средней интенсивности светового пучка в слабонелинейной турбулентной атмосфере	865
Власова Т. Г., Маркус Ф. А., Черемухин А. М. Измерения функции когерентности светового пучка, распространяющегося в атмосфере	876
Быков В. П. Построение волнового поля по известной лучевой картине, обладающей каустикой с двумя ветвями	880
Барабаненков Ю. Н. Глубинный режим электромагнитного поля в рассеивающей среде	887
Фрейлихер В. Д. Нестационарный сигнал в волноводе со статистически неровными стенками	892
Мионов В. Л., Фортес В. Б. Рассеяние нормальной волны на случайных неоднородностях слоистого волновода	900
Лихарев К. К. Линейная электродинамика сверхпроводящих пленок конечной ширины	909
Лихарев К. К. Образование смешанного состояния в плоских сверхпроводящих пленках	919
Буц В. А. Особенность отражения электромагнитных волн от образца феррита, находящегося во внешнем переменном магнитном поле	926
Лаунец В. Л., Новицкас М. М., Шугуров В. К. Магнитостатические колебания ферритового эллипсоида с учетом кристаллографической анизотропии	933
Барсуков К. А., Бекова С. Х. О влиянии края замедляющей полуплоскости на излучение заряженной частицы, движущейся параллельно этому краю	939
Кулькин А. Г., Павленко Ю. Г. Индуцированное излучение в скрещенных электростатическом и переменном магнитном полях	944
Бункин Ф. В., Карапетян Р. В. Индуцированный тормозной эффект в немонохроматическом поле излучения	950
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Лобов Г. Д., Штыков В. В. Наблюдение магнитного момента плазмы, наведенного СВЧ полем	956
Малышенко Ю. И., Ваксер И. Х. Измерение коэффициента ослабления радиоволн 1,3 и 0,86 мм в дождях	958
Татарский В. И. О распределении вероятностей для лучей в среде со случайными неоднородностями	960

УДК 533.9.01

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО РАЗДЕЛЕННЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ПУЧКОВ

Е. П. Богданов, Л. К. Орлов, Ю. А. Романов

Исследуется неустойчивость пространственно разделенных двухтемпературных плазменных пучков в квазигидродинамическом приближении. Найдены границы неустойчивости и инкременты усиливаемых волн. Изучены зависимости минимальной относительной дрейфовой скорости пучков, при которой возникает неустойчивость, и максимального пространственного инкремента усиливаемых волн от параметров системы: частоты столкновений, отношений тепловых скоростей и плазменных частот заряженных частиц. Полученные результаты указывают на возможность реализации рассматриваемой неустойчивости в полупроводниковой плазме.

В работе [1] была исследована неустойчивость пространственно разделенных одготемпературных плазменных пучков. Критическая дрейфовая скорость $v_{кр}$, при которой она может возникнуть, несколько превышает соответствующую величину в случае взаимопроникающих пучков и больше тепловых скоростей плазменных частиц v_T . В связи с этим реализация такой неустойчивости в плазме твердых тел является довольно сложной, а возможно, и невыполнимой задачей.

Как отмечалось в [2] для случая взаимопроникающих пучков, более реальной в твердом теле является неустойчивость двухтемпературной плазмы. Как известно, в этой системе существуют низкочастотные плазменные волны с фазовой скоростью v_ϕ , удовлетворяющей соотношению

$$v_{T1} < v_\phi < v_{T2}. \quad (1)$$

Эти волны становятся нарастающими при $v > v_\phi$. При этом дрейфовая скорость лучка может быть значительно меньше тепловой скорости его частиц. Соответствующая неустойчивость носит резистивный характер.

Аналогичной ситуации можно ожидать и в пространственно разделенных пучках, поскольку в системе двух граничащих разнотемпературных плазм существуют низкочастотные поверхностные волны с подобными соотношениями между v_ϕ , v_{T1} и v_{T2} [3]. Исследованию неустойчивости таких систем и посвящена настоящая работа. Рассмотрение проведено в квазигидродинамическом приближении. Найдены границы неустойчивости и инкременты усиливаемых волн в зависимости от параметров системы: отношения тепловых скоростей, плазменных частот и частот столкновений заряженных частиц. Полученные результаты указывают на возможность реализации неустойчивости пространственно разделенных двухтемпературных пучков в твердотельной плазме.

1. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ

Дисперсионное уравнение квазистатических волн, распространяющихся вдоль двух соприкасающихся полугораниченных однородных пучков, в пренебрежении тепловыми эффектами имеет вид [4]

$$\varepsilon_1(\omega - k_1 v_1) = -\varepsilon_2(\omega - k_1 v_2), \quad (2)$$

где

$$\varepsilon_{1,2}(\omega) = 1 - \frac{\omega_{01,2}^2}{\omega(\omega + i\nu_{1,2})}$$

— продольная диэлектрическая проницаемость пучков, $v_{1,2}$ — их скорости, $\nu_{1,2}$ — частоты столкновений, ω и k_1 — частота и волновой вектор, параллельный плоской границе раздела пучков.

В дальнейшем будем вести рассмотрение в системе координат, связанной с первым пучком, т. е. полагать $v_1 = 0$, $v_2 = v$. Разрешая уравнение (2) относительно k_1 , получим

$$k_1 v = \omega \pm \frac{\nu_2}{2\sqrt{2}} [(c'^2 + c''^2)^{1/2} - c']^{1/2} + i \frac{\nu_2}{2} \left\{ 1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}} [(c'^2 + c''^2)^{1/2} + c']^{1/2} \right\}, \quad (3)$$

где

$$c' = 1 + \frac{4\omega_2^2}{\nu_2^2} \frac{(\omega_1^2 - \nu_1^2 + \omega^2) \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \nu_1^2 \omega^2},$$

$$c'' = \frac{4\omega_2^2}{\nu_2^2} \frac{\nu_1 \omega_1^2 \omega}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + \nu_1^2 \omega^2}.$$

Верхний знак в (3) соответствует волнам, которые могут усиливаться; волны, описываемые выражением (3) с нижним знаком, всегда затухают.

Частотная граница неустойчивости, определяемая условием $\text{Im } k_1 = 0$, представляет из себя две параллельные прямые

$$\omega = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\nu_2^2}{\omega_2^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1 + \frac{\nu_1^2}{\omega_1^2} \right) \left[\left(\frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1 \right)^2 + \frac{\nu_1^2 \omega^2}{\omega_1^4} \right] - \frac{\nu_1^2}{\omega_1^2} = 0, \quad (4a)$$

где $\omega_1^2 = \omega_{01}^2/2$, $\omega_2^2 = \omega_{02}^2/2$. Качественное поведение верхней границы неустойчивости в зависимости от параметров системы ν_1/ω_1 и ν_2/ω_2 показано на рис. 1. Как видно из приведенных кривых, полоса частот усиливаемых волн монотонно сужается с ростом частоты соударений в

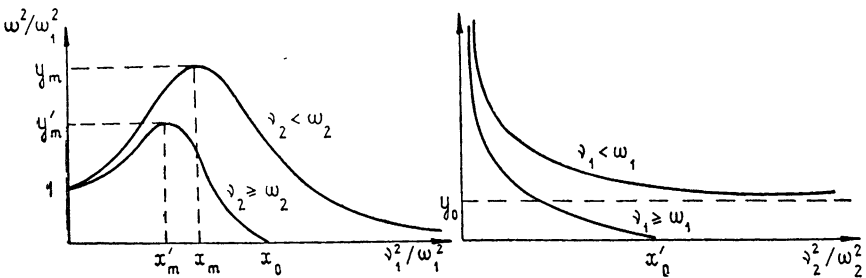


Рис. 1. Зависимость верхней граничной частоты усиливаемых волн от частоты соударений в неподвижной и движущейся плазмах:

$$x_m, x'_m = \left[\frac{\nu_2}{\omega_2} \left(1 + \frac{\nu_2}{\omega_2} \right) \left(2 + \frac{\nu_2}{\omega_2} \right) \right]^{-1}, \quad y_m, y'_m = \left(\frac{\nu_2}{\omega_2} + 1 \right) \left[\frac{\nu_2}{\omega_2} \left(2 + \frac{\nu_2}{\omega_2} \right) \right]^{-1},$$

$$x_0 = \left(\frac{\nu_2}{\omega_2} \right)^2 \left[\left(\frac{\nu_2}{\omega_2} \right)^2 - 1 \right]^{-1}, \quad x'_0 = \left(\frac{\nu_1}{\omega_1} \right)^2 \left[\left(\frac{\nu_1}{\omega_1} \right)^2 - 1 \right]^{-1}, \quad y_0 = 1 - \left(\frac{\nu_1}{\omega_1} \right)^2.$$

пучке v_2 . В случае $v_1 < \omega_1$ неустойчивая область существует при любых v_2 и при $v_2/\omega_2 \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к области

$$0 < \omega < (\omega_1^2 - v_1^2)^{1/2}. \quad (5)$$

В случае $v_1 > \omega_1$ неустойчивая область существует лишь при

$$\frac{v_2}{\omega_2} < \frac{v_1}{\omega_1} \left(\frac{v_1^2}{\omega_1^2} - 1 \right)^{-1/2}.$$

При постоянном значении v_2/ω_2 верхняя граничная частота обладает немонотонной зависимостью от v_1/ω_1 и принимает наибольшее значение

$$\omega = \omega_1 \left(1 + \frac{v_2}{\omega_2} \right) \left[\frac{v_2}{\omega_2} \left(2 + \frac{v_2}{\omega_2} \right) \right]^{-1/2}$$

при

$$v_1 = \omega_1 \left[\frac{v_2}{\omega_2} \left(1 + \frac{v_2}{\omega_2} \right) \left(2 + \frac{v_2}{\omega_2} \right) \right]^{1/2}.$$

В случае $v_2 > \omega_2$ неустойчивая область существует лишь при

$$\frac{v_1}{\omega_1} < \frac{v_2}{\omega_2} \left(\frac{v_2^2}{\omega_2^2} - 1 \right)^{-1/2}.$$

Величина скорости пучка не влияет на частотную границу неустойчивости, а инкременты усиливаемых волн монотонно убывают как v^{-1} .

Рассматриваемая неустойчивость является бунемановской неустойчивостью, измененной столкновениями в пучках. Как и в случае взаимопроникающих пучков [4], столкновения не приводят к каким-либо новым неустойчивостям.

2. КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В отличие от элементарной теории дисперсионные уравнения, описывающие неустойчивость пространственно разделенных пучков, при учете тепловых эффектов существенно отличаются от соответствующих уравнений для взаимопроникающих пучков. Это, в частности, обусловлено двумерностью процессов в пространственно разделенных пучках. Интересующее нас дисперсионное уравнение для квазистатических волн при условии зеркального отражения плазменных частиц от границы плазмы имеет вид

$$\int \frac{dk_3}{k^2 \varepsilon_1(k, \omega - k_1 v_1)} = - \int \frac{dk_3}{k^2 \varepsilon_2(k, \omega - k_1 v_2)}, \quad (6)$$

где $\varepsilon_{1,2}$ — продольная диэлектрическая проницаемость пучков, $k^2 = k_1^2 + k_3^2$, остальные обозначения прежние.

В квазигидродинамическом приближении продольная диэлектрическая проницаемость определяется выражением

$$\varepsilon_j(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{0j}^2}{\omega(\omega + i\nu_j) - k^2 v_{Tj}^2 / 2}, \quad (7)$$

где $v_{Tj} = \sqrt{2kT_j/m_j}$ — тепловая скорость частиц j -го пучка.

Считая $v_1 = 0$, $v_2 = v$, $k_1 \parallel v$ и подставляя (7) в (6), получим

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(\omega - k_1 v_j)(\omega - k_1 v_j + i v_j)}{(\omega - k_1 v_j)(\omega - k_1 v_j + i v_j) - \omega_{0j}^2} - \frac{k_1 \omega_{0j}^2}{x_j [(\omega - k_1 v_j)(\omega - k_1 v_j + i v_j) - \omega_{0j}^2]} \right\} = 0, \quad (8)$$

где

$$x_j = \{ k_1^2 - 2v_{Tj}^{-2} [(\omega - k_1 v_j)(\omega - k_1 v_j + i v_j) - \omega_{0j}^2] \}^{1/2}. \quad (9)$$

Полагая $k_1 = k_1' - ik_1''$, $x_j = x_j' + ix_j''$ и разделяя уравнение (8) на действительную и мнимую части, получим систему двух уравнений для $k_1'(\omega)$ и $k_1''(\omega)$:

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{a_j' (a_j' - a_j) + a_j''^2}{(a_j' - a_j)^2 + a_j''^2} - a_j \frac{(a_j' - a_j)(\tilde{k}' x_j' - \tilde{k}'' x_j'') - a_j'' (\tilde{k}' x_j' + \tilde{k}'' x_j'')}{[(a_j' - a_j)^2 + a_j''^2](x_j'^2 + x_j''^2)} \right\} = 0, \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{a_j a_j''}{(a_j' - a_j)^2 + a_j''^2} - a_j \frac{(a_j' - a_j)(\tilde{k}' x_j' + \tilde{k}'' x_j'') + a_j'' (\tilde{k}' x_j' - \tilde{k}'' x_j'')}{[(a_j' - a_j)^2 + a_j''^2](x_j'^2 + x_j''^2)} \right\} = 0,$$

где

$$a_j' = (\tilde{\omega} - \tilde{k}' \tilde{v}_j)^2 - (\tilde{k}'' \tilde{v}_j)^2 - \tilde{v}_j \tilde{k}'' \tilde{v}_j, \quad a_j'' = (\tilde{\omega} - \tilde{k}' \tilde{v}_j)(\tilde{v}_j + 2\tilde{k}'' \tilde{v}_j),$$

$$\tilde{x}_j' = (1/\sqrt{2}) \{ (\tilde{k}'^2 - \tilde{k}''^2 - 2\beta_j a_j' + 2\beta_j a_j) +$$

$$+ [(\tilde{k}'^2 - \tilde{k}''^2 - 2\beta_j a_j' + 2\beta_j a_j)^2 + 4(\tilde{k}' \tilde{k}'' + \beta_j a_j'')^2]^{1/2} \}^{1/2},$$

$$\tilde{x}_j'' = - \frac{\text{sgn}(\tilde{k}' \tilde{k}'' + \beta_j a_j'')}{\sqrt{2}} \{ -(\tilde{k}'^2 - \tilde{k}''^2 - 2\beta_j a_j' + 2\beta_j a_j) +$$

$$+ [(\tilde{k}'^2 - \tilde{k}''^2 - 2\beta_j a_j' + 2\beta_j a_j)^2 + 4(\tilde{k}' \tilde{k}'' + \beta_j a_j'')^2]^{1/2} \}^{1/2}.$$

Здесь $\tilde{\omega}$, \tilde{k} , \tilde{v}_j , \tilde{v}_j , a_j , β_j обозначают безразмерные величины ω/ω_{01} , $k_1 v_{T1}/\omega_{01}$, v_j/ω_{01} , v_j/v_{T1} , $\omega_{0j}^2/\omega_{01}^2$, v_{Tj}^2/v_{T1}^2 .

Наиболее существенным эффектом теплового движения частиц в развитии неустойчивости как взаимопроникающих, так и пространственно разделенных пучков является существование минимальной критической дрейфовой скорости $v_{кр}$, при которой возникает неустойчивость, и уменьшение соответствующих инкрементов.

Рассмотрим сначала границу неустойчивости пространственно разделенных пучков. Она определяется системой двух уравнений (10) с $\tilde{k}'' = 0$. Решение этих уравнений, найденное на ЭВМ, для параметров системы $v_{T2}/v_{T1} = 12$; $\omega_{02}/\omega_{01} = 4$; $v_1/\omega_{01} = 0,1$; $v_2/\omega_{01} = 10$ приведено на рис. 2 на плоскости (ω, v) . Наличие лишь одной области неустойчивости (ср. с [1]) обусловлено относительно большим значением v_2 . Критическая скорость, при которой возникает неустойчивость, в этом случае равна $0,5 v_{T2}$. Как и следовало ожидать, она удовлетворяет неравенству $v_{T1} < v_{кр} < v_{T2}$. Возникновение неустойчивости при таких малых v связано со следующим. В системе разнотемпературных соприкасающихся по-

дуограниченных плазм существуют слабозатухающие поверхностные волны с фазовыми скоростями, удовлетворяющими неравенству $v_{T1} < v_\phi < v_{T2}$ [3]. При $v_{T1} < v < v_{T2}$ дисперсия этих волн мало меняется из-за дрейфа носителей, а их поглощение становится отрицательным (если v_1 не очень велико), так как оно пропорционально $v_2(\omega - k_1 v)$. Вследствие этого волны становятся нарастающими. Соответствующая неустойчивость носит резистивный характер [5]. С ростом v , когда $v > v_{T2}$, неустойчивость пучков становится подобной бунемановской неустойчивости [6] и не связана с возбуждением низкочастотных поверхностных волн. Безусловно, такое разделение на два типа неустойчивости носит приближенный характер, что, в частности, отражается в наличии единой границы неустойчивости.

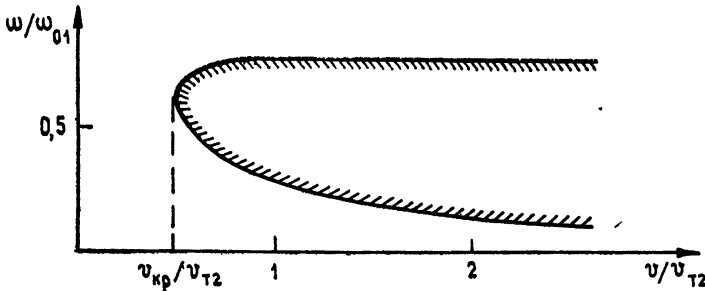


Рис. 2. Граница области усиливаемых волн;

$$\frac{v_{T2}}{v_{T1}} = 12; \quad \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} = 4; \quad \frac{v_1}{\omega_{01}} = 0,1; \quad \frac{v_2}{\omega_{01}} = 10.$$

На рис. 3 приведены пространственные инкременты нарастающих волн для двух наборов параметров системы с $v = 0,5 v_{T2}$. Кривые указывают на существование довольно больших инкрементов, сравнимых с соответствующими значениями для взаимопроникающих пучков [2].

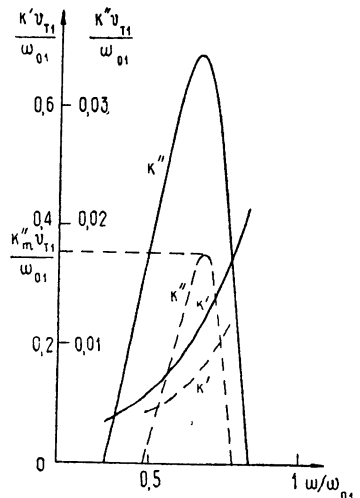
Рис. 3. Зависимость действительной и мнимой частей волнового вектора от частоты.

Сплошная линия — $\frac{v}{v_{T1}} = 6; \quad \frac{v_{T2}}{v_{T1}} = 12;$

$\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} = 8; \quad \frac{v_1}{\omega_{01}} = 0,1; \quad \frac{v_2}{\omega_{01}} = 40.$

Штриховая линия — $\frac{v}{v_{T1}} = 6; \quad \frac{v_{T2}}{v_{T1}} = 12;$

$\frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} = 4; \quad \frac{v_1}{\omega_{01}} = 0,1; \quad \frac{v_2}{\omega_{01}} = 40.$



Наиболее важными характеристиками граничных кривых неустойчивости и пространственных инкрементов нарастающих волн являются критическая скорость $v_{кр}$ и максимальный инкремент k''_m — величины,

сильно зависящие от параметров системы. Для выяснения этих зависимостей на рис. 4—7 приведены функции $v_{кр}$ от v_{T2}/v_{T1} , ω_2/ω_{01} , v_2/ω_{01} и k_m'' от v_{T2}/v_{T1} , ω_2/ω_{01} , v_2/ω_{01} , v/v_{T2} , найденные путем решения уравнений (10) на ЭВМ.

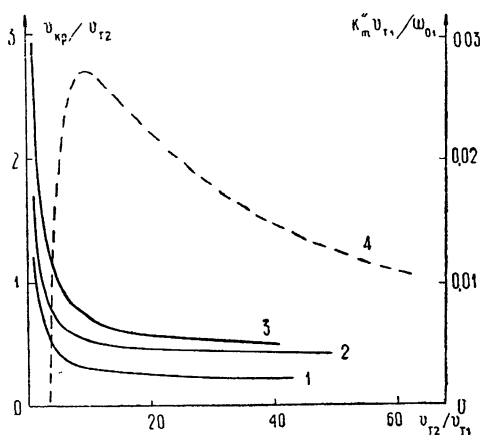


Рис. 4. Зависимость критической скорости и максимального пространственного инкремента от отношения тепловых скоростей частиц:

$\omega_2/\omega_{01} = 4$ (кривые 1, 2, 4) и 10 (3);
 $v_1/\omega_{01} = 0,1$ (1—4); $v_2/\omega_{01} = 100$ (1) и
 10 (2—4); $v/v_{T2} = 0,8$ (4).

Сплошная линия—критическая скорость.
 Штриховая линия—максимальный инкремент.

Как видно из приведенных кривых, относительная критическая скорость $v_{кр}/v_{T2}$ монотонно падает с ростом v_{T2}/v_{T1} . Это согласуется с соответствующими результатами для двухтемпературных взаимопроникающих пучков [2] и с обсуждавшимся выше механизмом неустойчивости. На рис. 4 приведена зависимость k_m'' от v_{T2}/v_{T1} для $v = 0,8 v_{T2}$ при фиксированных остальных параметрах. Вблизи границы неустойчивости k_m'' резко нарастает с ростом v_{T2}/v_{T1} , затем проходит через максимум и плавно спадает до нуля. Изменением отношения тепловых скоростей можно добиться некоторой оптимизации в том смысле, чтобы неустойчивость возникала при сравнительно малых v , а инкременты были не слишком малы.

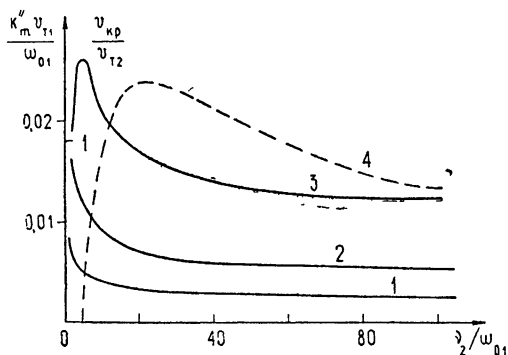
Столкновения в пучке и неподвижной плазме (см. рис. 5) по-разному влияют на $v_{кр}$ при фиксированных v_{T2}/v_{T1} и ω_2/ω_{01} . Увеличением v_2 можно добиться значительного снижения $v_{кр}$. Однако соответствующие инкременты могут оказаться при этом очень малыми. Зависимость k_m'' от v_2 качественно такая же, как и от v_{T2}/v_{T1} . Увеличение диссипации

Рис. 5. Зависимость критической скорости и максимального инкремента от частоты соударений в движущей плазме:

$v_{T2}/v_{T1} = 12$ (кривые 1—4);
 $\omega_2/\omega_{01} = 4$ (1—4);
 $v_1/\omega_{01} = 0,01$ (1), 0,1 (2, 4) и 0,3 (3);
 $v/v_{T1} = 8$ (4).

Сплошная линия—критическая скорость.

Штриховая линия — максимальный инкремент.



в неподвижной плазме, как и следовало ожидать, всегда приводит к увеличению $v_{кр}$ и уменьшению k_m'' . Интересной и характерной является

ся кривая 3 на рис. 5, указывающая на немонотонное поведение $v_{кр}(v_2)$. Такое поведение обусловлено переходом с ростом v_2 бунемановской неустойчивости в резистивную неустойчивость низкочастотных поверхностных волн. Таким образом, здесь также возможна оптимизация $v_{кр}$ и k_m'' по v_2 .

Влияние отношений плазменных частот на $v_{кр}$ и k_m'' показано на рис. 6. Для каждого набора v_{T2}/v_{T1} , v_1 и v_2 существует значение ω_{02}/ω_{01} , при котором $v_{кр}/v_{T2}$ достигает наименьшей величины. Точно так же для любого набора v_{T2}/v_{T1} , v_1 , v_2 и v/v_{T2} существует, вообще говоря, другое значение ω_{02}/ω_{01} , для которого k_m'' достигает максимальной величины.

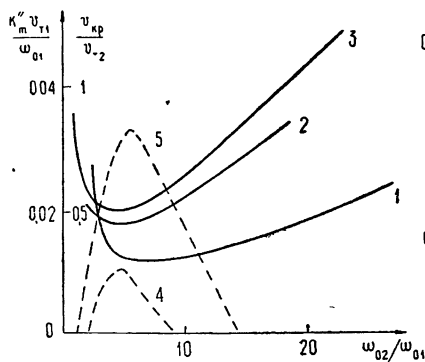


Рис. 6.

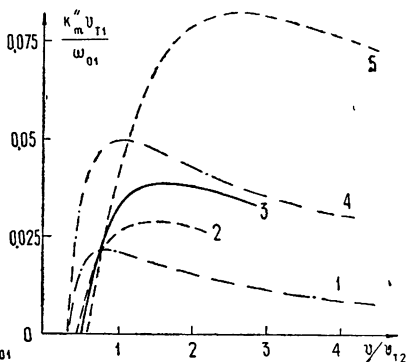


Рис. 7.

Рис. 6. Зависимость критической скорости и максимального инкремента от отношения плазменных частот;

$$v_{T2}/v_{T1} = 12 \text{ (кривые 1, 3-5) и } 20 \text{ (2); } v_1/\omega_{01} = 0,1 \text{ (1-5);}$$

$$v_2/\omega_{01} = 40 \text{ (1) и } 10 \text{ (2-5); } v/v_{T1} = 7 \text{ (4) и } 10 \text{ (5).}$$

Сплошная линия—критическая скорость. Штриховая линия—максимальный инкремент.

Рис. 7. Зависимость максимального инкремента от величины дрейфовой скорости;

$$v_{T2}/v_{T1} = 12 \text{ (1, 3-5) и } 20 \text{ (2); } \omega_{02}/\omega_{01} = 4 \text{ (1-3) и } 8 \text{ (4, 5);}$$

$$v_1/\omega_{01} = 0,1 \text{ (1-5); } v_2/\omega_{01} = 40 \text{ (1, 4) и } 10 \text{ (2, 3, 5).}$$

Таким образом, путем соответствующего подбора параметров системы v_{T2}/v_{T1} , ω_{01} и v_i можно получить значительное усиление при достаточно малых относительных дрейфовых скоростях пространственно разделенных плазменных пучков.

Из приведенного рассмотрения видно, что во многих отношениях неустойчивости пространственно разделенных и взаимопроникающих пучков подобны. В обоих случаях неустойчивость может возникнуть при дрейфовой скорости пучка значительно меньшей, чем тепловая скорость его частиц, лишь в том случае, если тепловые скорости пучка и неподвижной плазмы отличаются не менее чем на порядок, а $v_1 \ll v_*$. Если иметь в виду полупроводниковую плазму, то обеспечить эти условия для взаимопроникающих электронов и дырок довольно трудно. Пространственно разделенные пучки имеют в этом отношении большие возможности. Например, помещая полупроводниковую структуру в термостат с низкой температурой и пропуская через отдельные слои электрический ток, можно получить большие отношения тепловых скоростей в различных пучках. Необходимый набор остальных параметров, которые сбсуж-

дались в данной работе, также может быть сравнительно легко реализован в этой системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Дряхлушин, Ю. А. Романов, ЖЭТФ, 58, 348 (1970).
2. D. Pines, J. R. Schrieffer, Phys. Rev., 124, 1387 (1961).
3. Ю. А. Романов, ФТТ, 5, 2988 (1963).
4. В. Vural, S. Bloom, IEEE Trans. on Electron Devices, ED-13, 57 (1966).
5. R. J. Briggs, Electron-Stream Interaction with plasmas, Cambridge, Mass., MIT, 1964.
6. O. Buneman, Phys. Rev., 115, 503 (1959).

Научно-исследовательский физико-технический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
30 сентября 1970 г.

INSTABILITY OF SPATIALLY SEPARATED PLASMA BEAMS

E. P. Bogdanov, L. K. Orlov, Yu. A. Romanov

The instability of spatially separated two-temperature plasma beams is investigated in a quasi-hydrodynamic approximation. The instability boundaries and the increments of amplified waves have been found. There have been studied the dependences of the minimum relative drift velocity of beams at which the instability occurs and the dependence of the maximum spatial increment of the amplified waves versus the system parameters: the collision frequency, the ratios of the thermal velocities and the plasma-frequencies of charged particles. The results obtained point to the possibility of realizing the considered instability in semiconductor plasmas.

УДК 533.951

**ПОВЕРХНОСТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ
СО СТОЛКНОВЕНИЯМИ***Е. Е. Ловецкий, В. П. Силаков*

Изучаются колебания, длины волн которых велики по сравнению с характерным размером неоднородности плазмы. Последовательный учет столкновений частиц плазмы позволяет выяснить влияние столкновений на раскачку периодических поверхностных колебаний и найти новые спектры колебаний, обусловленные столкновениями.

Явления, протекающие в ионосферной или межпланетной плазме, а также в различных плазменных установках, очень часто обусловлены неоднородностью параметров плазмы. В неоднородной плазме, находящейся в магнитном поле, возможны дрейфовые движения частиц, являющиеся причиной существования и возбуждения дрейфовых колебаний. Достаточно хорошо изучены коротковолновые дрейфовые колебания, длина волны которых λ (длина волны в направлении неоднородности) мала по сравнению с характерным размером неоднородности параметров плазмы L (см. обзоры [1, 2]). Длинноволновые или поверхностные колебания ($\lambda \gg L$) до настоящего времени рассматривались без учета столкновений частиц [3-5]. Как было показано в [4, 5], в целом ряде случаев, имеющих практический интерес, инкременты поверхностных волн значительно превышают инкременты соответствующих коротковолновых колебаний, т. е. в этих случаях первоначально должны возбуждаться поверхностные колебания. Кроме того, поверхностные колебания захватывают значительно больший объем плазмы, чем коротковолновые колебания. В связи с этим является целесообразным всестороннее изучение поверхностных колебаний.

В настоящей работе рассматривается влияние столкновений частиц на устойчивость поверхностных колебаний полностью ионизированной плазмы. Будем считать, что давление внешнего магнитного поля значительно превышает тепловое давление плазмы, и ограничимся поэтому учетом возмущенного потенциального электрического поля. Тогда для изучения поверхностных колебаний необходимо иметь уравнение, которому удовлетворяет неравновесный электрический потенциал в неоднородной столкновительной плазме. Такое уравнение было получено нами путем решения системы кинетических уравнений для электронов и ионов с интегралом столкновений Ландау. В обзоре [2] приведена диэлектрическая проницаемость слабонеоднородной плазмы со столкновениями в приближении геометрической оптики. Мы получили уравнение для неравновесной части потенциала в аналогичных предположениях, но только без приближения геометрической оптики. Это уравнение оказалось довольно промоздким, более того, оно имеет различный вид в каждой из рассматриваемых областей частот, поэтому здесь не приводится. Дальнейшая схема расчетов такова [4]. В случае длинноволновых колебаний область неоднородности можно рассматривать как поверхность разрыва, которую будем считать плоской и расположенной перпендикулярно оси

х. Интегрируя полученное уравнение по x вдоль всей области неоднородности (параметры плазмы в области неоднородности изменяются с изменением x), находим граничное условие для потенциала и его производных. В областях однородной плазмы выбираем такие решения уравнений для потенциала, которые затухают вглубь плазмы, и сшиваем их при помощи граничных условий — получаем дисперсионное уравнение. Дисперсионное уравнение исследовано в различных возможных областях частот колебаний плазмы ω , однако ниже будут приведены только наиболее интересные результаты. Внешнее магнитное поле направим вдоль оси z и будем считать, что ω мала по сравнению с ионной ларморовской частотой Ω_i .

В том случае, когда эффективная частота соударений электронов с ионами ν_e не превышает частоты колебаний ω или $k_z v_{Te}$, а частота ион-ионных соударений $\nu_i \ll \omega$, влияние соударений частиц на поверхностные колебания оказывается незначительным.

Например, на границе плазма — вакуум в области частот $k_z v_s \ll \omega \ll k_z v_{Te}$ могут существовать периодические поверхностные колебания, спектр которых имеет вид [3]

$$\omega = - \frac{k_y v_s}{\sqrt{1 + v_A^2/c^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2}{|k_z| v_{Te}}, \quad (1)$$

где $v_s^2 = T_e/M$, $v_{Te}^2 = T_e/m$, T_e — температура электронов, M и m — массы иона и электрона, v_A — альвеновская скорость, γ — инкремент нарастания колебаний. Аналогичные колебания в коротковолновой области [2] характерны тем, что ион-ионные столкновения могут привести к раскачке коротковолновых колебаний. В то же время колебания (1) затухают под действием ион-ионных столкновений с декрементом $(7/20) \nu_i (T_i/T_e)$. Такое отличие имеет место потому, что спектр поверхностных колебаний (1) существует только в неизотермической плазме $T_e \gg T_i$.

Когда частота столкновений электронов с ионами не мала по сравнению с частотой колебаний ($\nu_e \gg \omega$, $k_z v_{Te}$; $\omega \gg \nu_i$, $k_z v_s$), можно рассмотреть две области частот: $\omega \nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$ и $\omega \nu_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$.

В случае $\omega \nu_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$ в неизотермической плазме $T_e \gg T_i$ возможны периодические слабонарастающие колебания. В частности, на границе плазма — вакуум частота поверхностных колебаний описывается формулой (1), а инкремент имеет вид

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^2}{|k_z| v_{Te}} - \frac{7}{20} \nu_i \frac{T_i}{T_e} + 1,46 \frac{\omega \nu_e}{k_z^2 v_{Te}^2} (\omega + 0,87 k_z u), \quad (2)$$

где u — направленная скорость электронов. Из (2) видно, что электрон-ионные столкновения раскачивают указанные колебания. Инкремент (2) получен в предположении $1 \ll k_y/k_z \ll (M/m)^{1/2}$. Эти колебания трудно стабилизировать широм, так как для этого необходимо $\Theta = B_y/B_0 \sim 1$.

В области частот $\nu_e \omega \gg k_z^2 v_{Te}^2$ возможна раскачка поверхностных колебаний, причиной которой являются столкновения частиц. При условии $k_y^2 \rho_e^2 \gg (k_z^2/k_y^2) (\Omega_i/\nu_e)$ (где ρ_e — ларморовский радиус электронов) спектр поверхностных колебаний имеет вид

$$\omega^2 = 1,93 i \frac{k_y}{|k_y|} \frac{k_z^2 v_{Te}^2 \Omega_i}{\nu_{e1}} \frac{\ln(N_1/N_2)}{1 + N_2/N_1}, \quad (3)$$

где индексы 1 и 2 отличают параметры плазмы с двух сторон от поверх-

ности разрыва. При обратном условии имеет место следующий спектр поверхностных колебаний:

$$\omega^3 = 1,93 i \frac{k_y^2 k_z^2 v_{Te} v_s^2}{v_{e1}} \left[\frac{\ln(N_2/N_1)}{1 + \sqrt{N_2/N_1}} \right]^2. \quad (4)$$

Спектры (3) и (4) получены в предположении, что в области неоднородности изменяется только плотность плазмы, кроме того, для простоты положено $c \gg v_A$.

Стабилизация колебаний (3) и (4) широк возможна соответственно при $\Theta > k_y \rho_e (v_e/\Omega_i)^{1/2}$ и $\Theta > (m T_e v_e / M T_i k_y v_{Ti})^{1/2}$.

Выше были рассмотрены поверхностные колебания, спектры которых обязаны своим существованием, в основном, скачку плотности частиц. Однако в том случае, когда перепад плотности на границе мал (в каждом случае можно указать требуемую малость перепада плотности), а изменение температуры существенно, такая конфигурация также оказывается неустойчивой по отношению к возбуждению поверхностных волн. В работе [4] рассматривался подобный вопрос для бесстолкновительной плазмы. Поэтому ниже обратим внимание на ту область частот, где столкновения существенны.

В области частот $\omega v_e \ll k_z^2 v_{Te}^2$ в неизотермической плазме $T_e \gg T_i$ при условии $k_z^2 v_{Te}^2 \gg v_e k_y v_s$ возможны слабонарастающие поверхностные колебания с частотой

$$\omega = k_y v_{s1} \frac{(T_{i1}/T_{e1}) - (T_{i2}/T_{e2})}{1 + \sqrt{T_{e1}/T_{e2}}}. \quad (5)$$

Столкновения электронов с ионами, так же как и в (2), обуславливают раскачку этих колебаний. Заметим, что частота колебаний (5) и их инкремент приблизительно в T_i/T_e раз меньше, чем частота и инкремент колебаний (2) для случая немалого перепада плотности.

Если же выполнено условие $k_z^2 v_{Te}^2 \ll v_e k_y v_s$, то поверхностные колебания могут быть аperiodически неустойчивы, и их спектр имеет вид

$$\omega = 1,25 i \frac{k_z^2 v_{Te1}^2}{v_{e1}} \frac{(T_{i1}/T_{e1}) - (T_{i2}/T_{e2})}{1 - (T_{e1}/T_{e2})^{5/2}}. \quad (6)$$

Спектры колебаний (5) и (6) получены при условии $k_y \gg k_z (T_e/T_i)$, поэтому стабилизация широк этих колебаний возможна при $\Theta > T_i/T_e$. Для простоты расчетов было положено $\Omega_i \gg k_y v_s$.

В области частот $\omega v_e \gg k_z^2 v_{Te}^2$, когда плотность однородна, но имеется перепад температур, возможны следующие два спектра. При выполнении неравенства $k_z^2/k_y^2 \ll k_y^2 v_{Te}^2 v_e/\Omega_i^3$ спектр поверхностных волн имеет вид

$$\omega^2 = 0,97 i \frac{k_y}{|k_y|} \Omega_i \omega_0, \quad (7)$$

$$\omega_0 = \frac{k_z^2 v_{Te1}^2}{v_{e1}} \left\{ \frac{T_{i1}}{T_{e1}} - \frac{T_{i2}}{T_{e1}} \left(\frac{T_{e2}}{T_{e1}} \right)^{3/2} + 0,72 \left[1 - \left(\frac{T_{e2}}{T_{e1}} \right)^{5/2} \right] \right\}.$$

При выполнении обратного неравенства будет иметь место такой спектр:

$$\omega^3 = -1,93 i \frac{k_y^2}{k_z^2} \frac{v_{e1} \omega_0^2}{[1 + (T_{e2}/T_{e1})^{3/4}]^2}. \quad (8)$$

Стабилизация широм колебаний (7) возможна при условии $\Theta > k_y v_{Te} (\nu_e / \Omega_i^2)^{1/2}$, стабилизация же колебаний (8) затруднена, так как для этого необходимо $\Theta > \sqrt{T_i \nu_e / T_e} k_y v_{Te}$.

Авторы благодарны А. А. Рухадзе за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН, **82**, 499 (1964).
2. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН, **96**, 87 (1968).
3. Е. Е. Ловецкий, В. П. Силаков, ЖТФ, **39**, 1709 (1969).
4. Е. Е. Ловецкий, В. П. Силаков, ЖТФ, **40**, 930 (1970).
5. Е. Е. Ловецкий, В. П. Силаков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **13**, № 10, 1486 (1970).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
29 октября 1970 г.

SURFACE OSCILLATIONS OF MAGNETOACTIVE COLLISION PLASMA

E. E. Lovetsky, V. P. Silakov

The oscillations which wavelengths are greater than the characteristic size of the plasma inhomogeneity are investigated. A successive allowance for the plasma particle collisions enables one to clarify the collision effect on the excitation of periodic surface oscillations and to find new oscillation spectra due to collisions.

УДК 533.951

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ СОУДАРЕНИЙ И РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭФФЕКТОВ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

А. Е. Крупина, Э. В. Орлова

Методом кинетического уравнения рассматривается задача о распространении электромагнитных волн в плазме вблизи гирорезонансов электронов перпендикулярно внешнему магнитному полю. Учитываются как релятивистские эффекты (доплер-эффект второго порядка), так и соударения. Полученные дисперсионные уравнения для обыкновенной и плазменной волн вблизи гармоник гирочастоты анализируются при различных значениях параметров.

Вопрос о распространении высокочастотных волн в магнитоактивной плазме перпендикулярно внешнему магнитному полю рассматривался неоднократно как в статьях [1-7], так и в монографиях [8, 9]. Это связано с тем, что частный случай $\Theta = \pi/2$ (Θ — угол между магнитным полем и волновым вектором k) представляет теоретический интерес в силу ряда особенностей (отсутствие затухания Ландау, уход показателя преломления в бесконечность на гармониках гирочастоты электронов при учете пространственной дисперсии [3, 4] и т. д.).

В последнее время результаты работ [1-7] привлекают внимание и с точки зрения геофизических приложений, в частности, для объяснения резонансов, наблюдаемых при верхнем зондировании ионосферы [10-12]. Согласно данным [10-12] среди резонансов, полученных на ионограммах при верхнем зондировании ионосферы выше максимума F -слоя, можно выделить устойчивые всплески, возникающие на частотах $\omega = n \omega_H$, где $n = 1, 2, \dots$ — номер гармоники, ω_H — гирочастота электронов. Ясно, что именно дисперсионными и поглощающими свойствами магнитоактивной плазмы вблизи $\omega = n \omega_H$ определяются величины наблюдаемых резонансов на гармониках гирочастоты, их зависимость от номера гармоники и т. д. Среди факторов, определяющих поведение показателя преломления среды вблизи $\omega = n \omega_H$, следует наряду с релятивистскими эффектами учитывать и соударения, имея в виду приложении к ионосферной плазме. В связи с вышесказанным целью данной работы является рассмотрение влияния соударений и релятивистских эффектов на распространение высокочастотных волн в плазме вблизи гирорезонансов электронов при $\Theta = \pi/2$.

1. ТЕНЗОР ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Для расчета тензора диэлектрической проницаемости плазмы исходной является система уравнений, состоящая из релятивистского кинетического уравнения для электронов и уравнений электродинамики, которая после линеаризации записывается следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \nabla_r f + e E \nabla_p f + \frac{e}{c} [v H_0] \nabla_p f = \nu f,$$

$$\Delta E - \text{grad div } E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$j = e \int v f d p = e \int \frac{c^2}{\varepsilon} p f d p,$$

где f — возмущенная часть функции распределения электронов по скоростям, v , p , e — скорость, импульс и заряд электрона, ν — частота соударений электрона с тяжелыми частицами, E — самосогласованное электрическое поле. Энергия ε электрона выражается через массу покоя и импульс как $\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$, а равновесная функция распределения

$$f_0 = C e^{-\varepsilon/T}, \quad \int f_0 d p = N_e,$$

где T — температура в энергетических единицах, N_e — концентрация электронов. Интеграл соударений взят в (1.1) в простейшей форме, соответствующей релаксационной модели. В работе [13] показано, что использование более строгой аппроксимации интеграла столкновений, предложенной Бангагарем, Гроссом, Круком, при учете влияния соударений на распространение волн вблизи гирорезонансов $\omega = n \omega_H$ не приводит к существенным отличиям по сравнению с релаксационной моделью*. Так как нас будут интересовать высокочастотные колебания ($\omega \gg \omega_{H1}$, ω_{H1} — гирочастота ионов), то движением ионов пренебрегаем.

Тензор диэлектрической проницаемости находится из системы (1.1) с использованием следующих предположений:

$$\mu = \frac{m_0 c^2}{T} \gg 1, \quad \rho = \frac{1}{\mu} \left(\frac{ck}{\omega_H} \right)^2 \ll 1. \quad (1.2)$$

Первое из условий (1.2) соответствует слабому релятивизму, а второе означает, что отношение гирорадиуса к длине волны считается много меньшим единицы.

Разлагая компоненты тензора ε_{ik} по обратным степеням μ (см. [6]), можно представить их состоящими из двух частей:

$$\varepsilon_{ik} = \overset{\wedge}{\varepsilon}_{ik} + \varepsilon_{ik}^{(n)}, \quad (1.3)$$

где $\overset{\wedge}{\varepsilon}_{ik}$ соответствует холодной плазме:

$$\overset{\wedge}{\varepsilon}_{11} = \overset{\wedge}{\varepsilon}_{22} = 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega + i\nu)}{\omega [(\omega + i\nu)^2 - \omega_H^2]},$$

$$\overset{\wedge}{\varepsilon}_{33} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\nu\omega}, \quad (1.4)$$

$$\overset{\wedge}{\varepsilon}_{12} = -\overset{\wedge}{\varepsilon}_{21} = -i \frac{\omega_p^2 \omega_H}{\omega (\omega + \omega_H + i\nu) (\omega - \omega_H + i\nu)}$$

(ω_p — плазменная частота), а $\varepsilon_{ik}^{(n)}$ определяет поведение компоненты вблизи резонанса $\omega = n \omega_H$ в релятивистском приближении и выражается следующим образом:

* Следует заметить, что релаксационная модель интеграла соударений, а также модель, использованная в [14], не учитывают электрон-электронные взаимодействия, которые могут стать существенными при $\omega = n \omega_H$ для плазмы с высокой электронной плотностью [14].

$$\varepsilon_{ik}^{(n)} = i \mu \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_H} \frac{n}{2^n (n-1)!} \rho^{n-1} \int_0^\infty \frac{\exp \left[i \mu \theta \left(\frac{\omega + i \nu}{\omega_H} - n \right) \right]}{\left(1 - i \frac{\omega + i \nu}{\omega_H} \theta \right)^{n+3/2}} S_{ik}^{(n)} d\theta, \quad (1.5)$$

$$S_{ik}^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho}{n^2 \left(1 - i \frac{\omega + i \nu}{\omega_H} \theta \right)} \end{pmatrix}.$$

После вычисления интеграла в (1.5) приходим к следующим выражениям для компонент тензора диэлектрической проницаемости вблизи резонансов:

$$\varepsilon_{11}^{(n)} = \varepsilon_{22}^{(n)} = i \varepsilon_{12}^{(n)} = -i \varepsilon_{21}^{(n)} = -\mu \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i \nu)} \frac{n}{2^n (n-1)!} \rho^{n-1} F_{n+3/2}(z), \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_{33}^{(n)} = -\mu \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i \nu)} \frac{1}{2^n n!} \rho^n F_{n+5/2}(z);$$

$$F_{n+5/2}(z) = \frac{(-1)^n z^{n+3/2} e^z \Gamma\left(\frac{1}{2}, z\right)}{\left(n + \frac{3}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right) \dots \frac{1}{2}} + \sum_{m=0}^{n+1} \frac{(-1)^m z^m}{\left(n + \frac{3}{2}\right) \dots \left(n + \frac{3}{2} - m\right)}, \quad (1.7)$$

где $z = \mu \delta + i \mu \frac{\nu}{\omega} \frac{n \omega_H}{\omega}$, $\delta = 1 - \frac{n \omega_H}{\omega}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}, z\right)$ — неполная гамма-функция комплексного аргумента с точкой ветвления $z = 0$. Функция $F_{n+3/2}(z)$ записывается аналогично выражению (1.7).

2. ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОЙ И ПЛАЗМЕННОЙ ВОЛН

Используя полученные выражения для тензора диэлектрической проницаемости ε_{ik} , рассмотрим, как влияет одновременный учет соударений и релятивистских эффектов на распространение указанных выше волн. Дисперсионное уравнение для обыкновенной волны при $\Theta = \pi/2$ имеет вид

$$N_2^2 - \varepsilon_{33} = 0. \quad (2.1)$$

Подставляя в (2.1) значение ε_{33} из соотношений (1.3), (1.4) и (1.6), получаем

$$N_2^2 = \frac{1 - \omega_p^2 / \omega(\omega + i \nu)}{1 + \rho^{n-1} \frac{1}{2^n n!} \frac{\omega_p^2}{\omega_H^2} F_{n+5/2} \left(\mu \delta + i \frac{\nu}{\omega} \mu \frac{n \omega_H}{\omega} \right)}, \quad (2.2)$$

где функция $F_{n+5/2} \left(\mu\delta + i \frac{\nu}{\omega} \mu \frac{n\omega_H}{\omega} \right)$ определяется равенством (1.7). Из (2.2) следует, что поведение N_2^2 около частот $\omega = n \omega_H$ определяется в основном функцией $F_{n+5/2}(z)$. Так как в общем виде проследить зависимость $F_{n+5/2}$ от $z = \mu\delta + i \frac{\nu}{\omega} \mu \frac{n\omega_H}{\omega}$ затруднительно, рассмотрим частные случаи.

1) При $|z| \gg 1$, т. е., когда соударения достаточно велики, так что $\mu \frac{\nu}{\omega} \gg 1$ (но $\nu/\omega \ll 1$ всегда) или $\mu\delta \gg 1$, что соответствует частотам, да-

лекоим от резонансных, функция $F_{n+5/2}(z)$ принимает вид

$$F_{n+5/2} = \frac{1}{z} - \frac{n+5/2}{z^2} + \frac{(n+5/2)(n+7/2)}{z^3} - \dots \quad (2.3)$$

Если это разложение подставить в дисперсионное уравнение (2.2), то видно, что поправка к формуле элементарной теории ($T=0$) при учете релятивизма и соударений мала.

2) Рассмотрим случай слабых соударений, так что выполнено условие $\mu \frac{\nu}{\omega} \ll 1$. Тогда, раскладывая функцию $F_{n+5/2}(z)$ в ряд по параметру

$\mu \frac{\nu}{\omega}$, получим для $\mu\delta > 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_{n+5/2} &= \frac{(-1)^n (\mu\delta)^{n+3/2} e^{\mu\delta} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \mu\delta\right)}{(n+3/2) \dots 1/2} + \sum_{m=0}^{n+1} \frac{(-1)^m (\mu\delta)^m}{(n+3/2) \dots (n+3/2-m)}, \\ \operatorname{Im} F_{n+5/2} &= \left[\sum_{m=1}^{n+1} \frac{(-1)^m (\mu\delta)^{m-1}}{(n+3/2) \dots (n+3/2-m)} + \frac{(-1)^n (\mu\delta)^{n+3/2} e^{\mu\delta} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \mu\delta\right)}{(n+3/2) \dots 1/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^n (\mu\delta)^{n+1/2} e^{\mu\delta} \Gamma\left(\frac{1}{2}, \mu\delta\right)}{(n+1/2) \dots 1/2} + \frac{(-1)^{n+1} (\mu\delta)^{n+1}}{(n+3/2) \dots 1/2} \right] \mu \frac{\nu n \omega_H}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для $\mu\delta < 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_{n+5/2} &= \sum_{m=0}^{n+1} \frac{|\mu\delta|^m}{(n+3/2) \dots (n+3/2-m)} - \frac{|\mu\delta|^{n+3/2} e^{-|\mu\delta|}}{(n+3/2) \dots 1/2} \int_0^{|\mu\delta|} \frac{e^x dx}{\sqrt{x}} + \\ &\quad + \left[\frac{|\mu\delta|^{n+3/2} e^{-|\mu\delta|} \sqrt{\pi}}{(n+3/2) \dots 1/2} - \frac{|\mu\delta|^{n+1/2} e^{-|\mu\delta|} \sqrt{\pi}}{(n+1/2) \dots 1/2} \right] \mu \frac{\nu n \omega_H}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F_{n+5/2} &= \frac{\sqrt{\pi} |\mu\delta|^{n+3/2} e^{-|\mu\delta|}}{(n+3/2) \dots 1/2} + \left[\sum_{m=1}^{n+1} \frac{|\mu\delta|^{m-1}}{(n+3/2) \dots (n+3/2-m)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{|\mu\delta|^{n+3/2} e^{-|\mu\delta|}}{(n+3/2) \dots 1/2} \int_0^{|\mu\delta|} \frac{e^x dx}{\sqrt{x}} + \frac{|\mu\delta|^{n+1/2} e^{-|\mu\delta|}}{(n+1/2) \dots 1/2} \int_0^{|\mu\delta|} \frac{e^x dx}{\sqrt{x}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\mu\delta|^{n+1}}{(n+3/2) \dots 1/2} \right] \mu \frac{\nu}{\omega} \frac{n \omega_H}{\omega}. \end{aligned}$$

Из (2.4) и (2.5) видно, что слева от резонанса (при $\mu\delta < 0$) в выражении для $\text{Im } F_{n+5/2}$ первый член связан с релятивистским поглощением, остальные соответствуют затуханию из-за соударений, причем имеют характер поправок, и выражения (2.5), (2.4) сводятся к результатам, приведенным в [6].

3) При $\mu \frac{\nu}{\omega} \sim 1$ ($\omega \approx n\omega_H$) и $|z| \approx 1$ можно воспользоваться таблицами [15] для интеграла вероятностей в комплексной области, который связан с неполной гамма-функцией, и тем самым определить $F_{n+5/2}(z)$. Если соударения считать заданным параметром, то можно построить функции $\text{Re } F_{n+5/2}$ и $\text{Im } F_{n+5/2}$ в зависимости от расстройки $\delta = 1 - n\omega_H/\omega$. Графики действительной и мнимой частей $F_{n+5/2}$ приведены на рис. 1. Сравнивая их с данными работы [6], видим, что учет соударений более существенно сказывается на $\text{Im } F_{n+5/2}$.

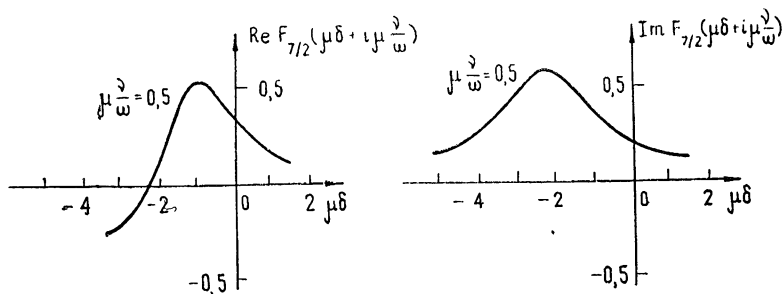


Рис. 1.

Для плазменной волны в предположении ее чистой продольности можно воспользоваться уравнением

$$\epsilon_{11} = 0. \tag{2.6}$$

Согласно [10] уравнение (2.6) справедливо, если для показателя преломления плазменной волны N_3 выполняются неравенства $N_3^2 \gg 1$, $N_3^2 \gg \epsilon_{ik}$. Как показывают последующие оценки, эти неравенства действительно выполняются, и в областях $\omega \approx n\omega_H$ для плазменной волны можно пользоваться укороченным уравнением (2.6). Подставляя в (2.6) значение ϵ_{11} из (1.3), получим

$$N_3^2 = \mu^{(n-2)/(n-1)} \frac{\omega_H^2}{\omega(\omega - i\nu)} \left[\left(\frac{\omega_H^2}{\omega^2} + \frac{1}{1-n^2} \right) \frac{2^n n!}{F_{n+3/2} \left(\mu\delta + i \frac{\nu}{\omega} \mu \frac{n\omega_H}{\omega} \right)} \right]^{\frac{1}{n-1}}. \tag{2.7}$$

Соотношение (2.7) описывает поведение показателя преломления плазменной волны в окрестности резонансов для $n > 2$. Из (2.7) видно, что N_3 может принимать большие значения, поскольку N_3^2 пропорционален $\mu^{(n-2)/(n-1)}$. Поэтому для плазменной волны встает вопрос о выполнении второго условия из (1.2). Из (2.7) следует, что $N_3^2 \leq 10^6$, если оценку делать, исходя из условий ионосферной плазмы согласно [11, 12], т. е. $T = 3000^\circ\text{C}$, $\mu = mc^2/T \approx 10^6$, $\nu_{ei}/\omega \approx 10^{-4}$. Тогда $\rho \sim 10^{-3}$, и условие $\rho \ll 1$ выполняется достаточно хорошо. В работе [6] отмечается, что в окрестности гирорезонансов $\omega \approx n\omega_H$ возможно существование корня дисперсионного уравнения (2.6) для плазменной волны, удовлетворяющего условию $\rho \geq 1$. Учет соударений, который не проводился в [6], возможно, позволит ограничить столь большие значения показателя преломления.

Но этот случай требует особого рассмотрения, которое здесь не проводится. Заметим также, что в данной работе не ставилось целью непосредственное приложение выводов теории к результатам зондирования ионосферы сверху [11, 12]. Для такого сравнения необходимо выполнение трудоемких численных расчетов с привлечением конкретных данных, и соответствующая работа будет проведена позднее.

В заключение авторы выражают благодарность Б. Н. Гершману за постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, ЖЭТФ, 31, 642 (1956).
2. Б. Н. Гершман, ДАН СССР, 137, № 4, 822 (1961).
3. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, 40, 1494 (1961).
4. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ, 41, 1527 (1961).
5. I. V. Bernstein, Phys. Rev., 109, 10 (1958).
6. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, Н. В. Скрыдлов, ЖТФ, 33, 922 (1963).
7. В. П. Демидов, Д. А. Франк-Каменецкий, ЖТФ, 33, 915 (1963).
8. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
9. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
10. Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, М., 1965.
11. G. Lockwood, Can. J. Phys., 41, 190 (1963).
12. J. A. Fejer, W. Calvert, J. Geophys. Res., 69, 5049 (1964).
13. А. Е. Крупина, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 6, 849 (1970).
14. R. C. Hwa, Phys. Rev., 110, 307 (1958).
15. В. Н. Фадеева, Н. М. Терентьев, Таблицы значений функции $W(z)$ от комплексного аргумента, Гостехиздат, М., 1954.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
13 июля 1970 г.

ON THE INFLUENCE OF COLLISIONS AND RELATIVISTIC EFFECTS ON HIGH-FREQUENCY WAVE PROPAGATION IN MAGNETOACTIVE PLASMA

A. E. Krupina, E. V. Orlova

The propagation of electromagnetic waves in the plasma near the electron gyroresonances perpendicularly to the external magnetic field is considered by the kinetic equation method. Both relativistic effects (Doppler effect of the second order) and collisions are taken into account. The dispersion equations obtained for ordinary and plasma waves near the gyro-frequency harmonics are analysed at the different parameter values.

УДК 621.378.325

АМПЛИТУДНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ В ДВУХУРОВНЕВОЙ И ЧЕТЫРЕХУРОВНЕВОЙ МОДЕЛЯХ ЛАЗЕРА

А. С. Ковалев

В корреляционном приближении рассматриваются естественные флуктуации амплитуды поля в лазере. Показано, что выражение для дисперсии числа фотонов в резонаторе, рассчитанное на основе двухуровневой схемы ($\rho_a + \rho_b = 1$), отличается от соответствующего выражения в случае четырехуровневой схемы ($\rho_a + \rho_b \ll 1$).

В последнее время появилось значительное число теоретических работ, посвященных флуктуациям в оптических квантовых генераторах. Эти работы различаются как методами исследования, так и рассматриваемыми моделями лазеров. Несколько различающимися получаются также и результаты.

В работах [1-4] рассматривалась модель лазера с четырьмя и большим числом уровней рабочего вещества. Рассмотрение велось как на основе квантованного поля излучения [1], так и на основе классических уравнений для поля [2-4]. При одинаково выбранных параметрах лазера в этих работах для дисперсии числа фотонов в резонаторе получается выражение

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle \frac{\eta}{\eta - 1}, \quad (1)$$

где η — превышение уровня накачки над пороговым. В работе [5] рассматривалась модель лазера с двумя уровнями рабочего вещества. При этом для дисперсии числа фотонов получено выражение

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle \left(\frac{\eta}{\eta - 1} - \frac{1}{\eta} \right). \quad (2)$$

В настоящей работе на основе методов, использовавшихся в [3, 4, 6], показано, что дополнительный член в (2) появляется вследствие корреляции во флуктуациях населенностей рабочих уровней при нормировке системы только на два уровня.

Рассмотрим систему N неподвижных атомов, взаимодействующих с одной бегущей волной в резонаторе. Считаем, что времена релаксации среды меньше времени релаксации поля в резонаторе. Тогда согласно [6] укороченные уравнения для амплитуды и фазы поля записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\omega_0}{2} \left(4\pi\kappa'' - \frac{1}{Q} \right) E + \omega_0 \xi_a^{(n)} + \omega_0 \xi_a^{(r)}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -2\pi\omega_0\kappa' - \frac{\omega_0}{E} (\xi_\phi^{(n)} + \xi_\phi^{(r)}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\xi_a^{(n)}$, $\xi_\phi^{(n)}$ — части источников флуктуаций амплитуды и фазы, обусловленные флуктуациями поляризации, $\xi_a^{(r)}$, $\xi_\phi^{(r)}$ — части, обуслов-

ленные тепловыми шумами резонатора. Интенсивности тепловых частей источников флуктуаций рассчитываются с использованием формул Каллена—Вельтона.

Интенсивности источников поляризационного шума связаны со спектральными плотностями флуктуаций элементов матрицы плотности следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} (\xi_a^{(n)})_{\omega=0} &= \frac{8\pi^2 e^2 |r_{ab}|^2 n^2}{3} \left[(\tilde{\delta\rho}_{ab} \tilde{\delta\rho}_{ba})_{\omega=0} - \frac{(r_{ab})^2}{|r_{ab}|^2} (\tilde{\delta\rho}_{ba} \tilde{\delta\rho}_{ba})_{\omega=0} \right], \\ (\xi_\Phi^{(n)})_{\omega=0} &= \frac{8\pi^2 e^2 |r_{ab}|^2 n^2}{3} \left[(\tilde{\delta\rho}_{ab} \tilde{\delta\rho}_{ba})_{\omega=0} + \frac{(r_{ab})^2}{|r_{ab}|^2} (\tilde{\delta\rho}_{ba} \tilde{\delta\rho}_{ba})_{\omega=0} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

В свою очередь спектральные плотности флуктуаций элементов матрицы плотности связаны с их одновременными моментами второго порядка посредством системы уравнений

$$\begin{aligned} \gamma_{ab} (\tilde{\delta\rho}_{ab} \tilde{\delta\rho}_{ba})_0^{(+)} + \frac{ie}{2\hbar} r_{ab} E (\delta D \tilde{\delta\rho}_{ba})_0^{(+)} &= \langle \tilde{\delta\rho}_{ab} \tilde{\delta\rho}_{ba} \rangle_{\tau=0}, \\ \gamma_{ab} (\tilde{\delta\rho}_{ba} \tilde{\delta\rho}_{ba})_0^{(+)} - \frac{ie}{2\hbar} r_{ba} E (\delta D \tilde{\delta\rho}_{ba})_0^{(+)} &= \langle \tilde{\delta\rho}_{ba} \tilde{\delta\rho}_{ba} \rangle_{\tau=0}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\gamma (\delta D \tilde{\delta\rho}_{ba})_0^{(+)} - \frac{ie}{\hbar} [r_{ab} (\tilde{\delta\rho}_{ba} \tilde{\delta\rho}_{ba})_0^{(+)} - (\tilde{\delta\rho}_{ab} \tilde{\delta\rho}_{ba})_0^{(+)} r_{ba}] = \langle \delta D \tilde{\delta\rho}_{ba} \rangle_{\tau=0};$$

$$(\tilde{\delta\rho}_{ab} \tilde{\delta\rho}_{ba})_\omega = 2 \operatorname{Re} (\tilde{\delta\rho}_{ab} \tilde{\delta\rho}_{ba})_\omega^{(+)} = 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty \langle \tilde{\delta\rho}_{ab} \tilde{\delta\rho}_{ba} \rangle_\tau e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (6)$$

Для нахождения одновременного момента второго порядка флуктуаций элементов матрицы плотности рассмотрим функцию

$$N_{nm} = \sum_{i=1}^N a_{n_i}^+ a_{m_i}, \quad (7)$$

где $a_{n_i}^+ a_{m_i}$ — оператор, переводящий i -й атом из состояния m в состояние n . Усреднение этой функции дает умноженную на число частиц матрицу плотности системы:

$$\langle N_{nm} \rangle = N \tilde{\rho}_{nm}. \quad (8)$$

Рассмотрим флуктуации функции N_{nm} :

$$\delta N_{nm} = N_{nm} - N \tilde{\rho}_{nm} = \sum_{i=1}^N (a_{n_i}^+ a_{m_i} - \tilde{\rho}_{nm}).$$

Для одновременного момента второго порядка флуктуаций получим

$$\begin{aligned} \langle \delta \dot{N}_{nm} \delta N_{n'm'} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^N (a_{n_i}^+ a_{m_i} - \tilde{\rho}_{nm}) \sum_{j=1}^N (a_{n'_j}^+ a_{m'_j} - \tilde{\rho}_{n'm'}) \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^N (a_{n_i}^+ a_{m_i} - \tilde{\rho}_{nm}) (a_{n'_i}^+ a_{m'_i} - \tilde{\rho}_{n'm'}) \right\rangle + \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ 2 \left\langle \left\langle \sum_{1 < i < j < N} (a_{n_i}^+ a_{m_i} - \tilde{\rho}_{nm}) (a_{n_j}^+ a_{m_j} - \tilde{\rho}_{n'm'}) \right\rangle \right\rangle.$$

Учитывая (7) и (8), выражение (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle \delta N_{nm} \delta N_{n'm'} \rangle &= \sum_{i=1}^N (\langle a_{n_i}^+ a_{m_i} a_{n_i}^+ a_{m_i} \rangle - \tilde{\rho}_{nm} \tilde{\rho}_{n'm'}) + \\ &+ 2 \sum_{1 < i < j < N} (\langle a_{n_i}^+ a_{m_i} a_{n_j}^+ a_{m_j} \rangle - \tilde{\rho}_{nm} \tilde{\rho}_{n'm'}). \end{aligned} \quad (10)$$

Атомы можно считать статистически независимыми, поэтому

$$\langle a_{n_i}^+ a_{m_i} a_{n_j}^+ a_{m_j} \rangle = \langle a_{n_i}^+ a_{m_i} \rangle \langle a_{n_j}^+ a_{m_j} \rangle,$$

и второй член в (10), описывающий корреляцию флуктуаций отдельных атомов, равен нулю.

Для одного атома согласно [8] имеем

$$\langle a_{n_i}^+ a_{m_i} a_{n_i}^+ a_{m_i} \rangle = \delta_{mn'} \langle a_{n_i}^+ a_{m_i} \rangle. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10) и учитывая (7) и (8), получим

$$\langle \delta N_{nm} \delta N_{n'm'} \rangle = N (\delta_{mn'} \tilde{\rho}_{nm} - \tilde{\rho}_{nm} \tilde{\rho}_{n'm'}). \quad (12)$$

Если это выражение симметризовать и записать его через флуктуации элементов матрицы плотности, то окончательно получим

$$\langle \tilde{\delta \rho}_{nm} \tilde{\delta \rho}_{n'm'} \rangle = \frac{1}{2N} (\delta_{mn'} \tilde{\rho}_{nm} + \delta_{nm'} \tilde{\rho}_{n'm} - 2 \tilde{\rho}_{nm} \tilde{\rho}_{n'm'}). \quad (13)$$

Вычисляя по формулам (13) одновременные моменты флуктуаций элементов матрицы плотности и подставляя их в систему уравнений (5), найдем спектральные плотности $(\tilde{\delta \rho}_{ab} \tilde{\delta \rho}_{ba})_0$ и $(\tilde{\delta \rho}_{ba} \tilde{\delta \rho}_{ba})_0$. Подставив их значение в (4), найдем интенсивности источников флуктуаций амплитуды и фазы поля:

$$\begin{aligned} (\xi_a^{(n)2})_0 &= \frac{2\pi\hbar}{VQ} \left[\frac{\rho_a^{(0)} + \rho_b^{(0)}}{D^{(0)}} + \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma_{ab}} \right) \frac{aE^2 D^{(0)}}{(1 + aE^2)^2} \right], \\ (\xi_\Phi^{(n)2})_0 &= \frac{2\pi\hbar}{VQ} \frac{\rho_a^{(0)} + \rho_b^{(0)}}{D^{(0)}} (1 + aE^2). \end{aligned} \quad (14)$$

Сравнивая формулы (14) с соответствующими формулами работы [6], видим, что источник флуктуаций фазы не изменился, а в источнике амплитудных флуктуаций появился дополнительный член, обязанный своим происхождением нормировочному члену в выражении (13). Поэтому далее рассмотрим только амплитудные флуктуации.

Из уравнения (3) для спектральной плотности флуктуаций амплитуды поля имеем

$$(\delta E^2)_\omega = \frac{\omega_0^2 [(\xi_a^{(n)2})_0 + (\xi_a^{(r)2})_0]}{\omega^2 + (\Delta\omega)^2}, \quad (15)$$

где

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \frac{aE^2}{1 + aE^2}. \quad (16)$$

Отсюда находим среднеквадратичные флуктуации амплитуды поля:

$$\langle \Delta E^2 \rangle = \frac{\omega_0 Q}{2} \frac{\eta}{\eta - 1} [(\xi_a^{(n)})_0 + (\xi_a^{(r)})_0], \quad (17)$$

где $\eta = 1 + aE^2$.

Воспользовавшись тем, что дисперсия числа фотонов связана с $\langle \Delta E^2 \rangle$ соотношением $\langle \Delta n^2 \rangle = (\langle n \rangle V / 2\pi\hbar\omega_0) \langle \Delta E^2 \rangle$, и учитывая (14) и выражение для $(\xi_a^{(r)})_0$ из работы [6], получим для дисперсии числа фотонов

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle \frac{\eta}{\eta - 1} \left[\bar{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\rho_a^{(0)} + \rho_b^{(0)}}{D^{(0)}} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma_{ab}} \right) \frac{(\eta - 1) D^{(0)}}{\eta^2} \right]. \quad (18)$$

Рассмотрим это выражение применительно к двум различным моделям лазера.

В случае, когда лазер рассматривается как система двухуровневых частиц, взаимодействующих с полем, и $\gamma = \gamma_{ab}$, а значение $D^{(0)}$ близко к единице, как это было выбрано в модели Казанцева и Сурдутовича [5], из формулы (18) получаем

$$\langle \Delta n^2 \rangle \approx \langle n \rangle \left(\frac{\eta}{\eta - 1} - \frac{1}{\eta} \right). \quad (19)$$

Выражение (19) совпадает с результатом работы [5].

В случае, когда система содержит много уровней, причем вероятности нахождения на рабочих уровнях $\rho_a^{(0)}$ и $\rho_b^{(0)}$ много меньше единицы, последним членом в (18) можно пренебречь, так как $D^{(0)} \ll 1$. При этом для дисперсии фотонов найдем

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle \frac{\eta}{\eta - 1}. \quad (20)$$

Это выражение совпадает с полученным в работах [1-4].

Автор благодарит Ю. Л. Климонтовича за внимание к работе и полезные советы при обсуждении.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. O. Scully, W. E. Lamb, Phys. Rev., **159**, 208 (1967).
2. M. Lax, IEEE, J. Quantum Electron., **QE-3**, 37 (1967).
3. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, ЖЭТФ, **56**, 275 (1969).
4. Ю. Л. Климонтович, А. С. Ковалев, ЖЭТФ, **59**, 464 (1970).
5. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, ЖЭТФ, **56**, 2001 (1965).
6. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, ЖЭТФ, **58**, 1367 (1970).
7. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, изд. Наука, М., 1967.
8. M. Lax, Phys. Rev., **129**, 2342 (1963).

AMPLITUDE FLUCTUATIONS IN TWO-LEVEL AND FOUR-LEVEL LASER MODELS

A. S. Kovalev

The natural field amplitude fluctuations in the laser are considered in the correlation approximation. It is shown that the expression for the dispersion of the photon number in the resonator, calculated on the basis of the two-level model ($\rho_a + \rho_b = 1$), differs from the corresponding expression in the case of the four-level model ($\rho_a + \rho_b \ll 1$).

УДК 621.378.325

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ ОКГ

С. Н. Власов, В. И. Таланов, А. И. Хижняк

В работе выполнены расчеты пространственно-временной структуры поля генерации ОКГ бегущей волны и распределения инверсии в поперечном сечении активного тела. Рассмотрены конфокальный, плоский, плоский с перекосом зеркал и полуконцентрический резонаторы, а также случай самофокусировки в растворителе красителя насыщающего фильтра. Результаты расчета представлены в виде графиков, иллюстрирующих изменение распределения инверсной населенности и поля на зеркале резонатора с течением времени.

В настоящей статье, являющейся продолжением работы [1], излагаются результаты расчетов пространственно-временной структуры поля генерации ОКГ бегущей волны [1] с учетом насыщения усиления активного элемента.

Проведенные исследования были стимулированы отсутствием теоретических результатов, касающихся пространственно-временной структуры поля генерации ОКГ с учетом специфики открытого резонатора, обладающего собственными типами колебаний с различными дифракционными добротностями и объемами, занимаемыми полем. Попытки учета особенностей плоского резонатора были сделаны в работе [2], но методика расчета, примененная в [2], годится лишь для исследования резонаторов с зеркалами, близкими к плоским [3].

Результаты, полученные в данной работе, относятся к следующим типам резонаторов: конфокальному, плоскому, близким к плоскому, полуконцентрическому.

Режим генерации в конфокальном резонаторе характеризуется тем, что в нем при большом значении френелевского параметра $C = ka^2/L$ могут одновременно существовать несколько поперечных высокодобротных мод с сильно различающимися объемами, занятыми излучением в активном веществе. В плоском резонаторе, напротив, моды сильно перекрываются. Резонаторы, близкие к плоскому, были изучены для выяснения изменений, возникающих в структуре излучения при переходе от резонаторов, в которых высокодобротные моды удерживаются краями зеркал и сильно перекрываются, к резонаторам с модами, ограниченными каустиками и, следовательно, слабо перекрытыми. Наконец, полуконцентрический резонатор изучался в связи с тем, что в ряде работ сообщалось о получении в нем одномодовой генерации [4, 5]. Кроме этого проведено исследование изменений в динамике генерации ОКГ с плоским резонатором при наличии разъюстировки зеркал (перекосов) и при учете эффекта внешней самофокусировки в растворителе красителя насыщающего фильтра.

1. УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ МОДЕЛЬ

В общем виде принятая нами модель ОКГ бегущей волны описывается системой уравнений (1) [1]. Для рассматриваемой здесь двумерной модели, учитывающей в отличие от [1] изменение инверсии населен-

ности двухуровневого активного вещества, система (1) [1] в конечном виде представляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_n^{(2)}(\xi)|^2 \exp |\Psi_n^{(2)}(\xi)|^2 &= G_\Phi |\Psi_{n-1}^{(1)}(\xi)| \exp |\Psi_{n-1}^{(1)}(\xi)|^2, \\
 \arg \Psi_n^{(2)}(\xi) &= \arg \Psi_{n-1}^{(1)}(\xi) - \varepsilon |\Psi_{n-1}^{(1)}(\xi)|^2, \\
 \Psi_n^{(3)}(\xi) &= r_1 \sqrt{\frac{iC_1}{2\pi}} \int_{-1}^1 \Psi_n^{(2)}(\xi') \exp \left\{ i \frac{C_1}{2} \left[2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \xi \xi' - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - g_1 \xi'^2 - \frac{C_2}{C_1} g_2 \xi^2 - \frac{\beta_1}{\sqrt{C_1}} \xi' - \frac{\beta_2 \sqrt{C_2}}{C_1} \xi \right] \right\} d\xi', \\
 |\Psi_n^{(4)}(\xi)|^2 &= \frac{|\Psi_n^{(3)}(\xi)|^2}{1 - (1 - G_a^{-1}(\xi)) \exp[-\tilde{\sigma} f_n(\xi)]}, \\
 \arg \Psi_n^{(4)}(\xi) &= \arg \Psi_n^{(3)}(\xi), \\
 \Psi_n^{(4)}(\xi) &= r_2 \sqrt{\frac{iC_2}{2\pi}} \int_{-1}^1 \Psi_n^{(4)}(\xi') \exp \left\{ i \frac{C_2}{2} \left[2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \xi \xi' - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - g_1 \frac{C_1}{C_2} \xi^2 - g_2 \xi'^2 - \frac{\beta_1 \sqrt{C_1}}{C_2} \xi - \frac{\beta_2}{\sqrt{C_2}} \xi' \right] \right\} d\xi',
 \end{aligned} \tag{1}$$

где наряду с уже введенными в [1] использованы следующие обозначения: $\tilde{\sigma} = (\sigma_a/\sigma_\Phi) (2L/CT_{1\Phi})$; σ_a и σ_Φ — сечения радиационного перехода активного элемента и фильтра соответственно; $T_{1\Phi}$ — продольное время релаксации фильтра*; $f_n(\xi) = \sum_{k=1}^{n-1} |\Psi_k^{(2)}(\xi)|^2$; $G_a = \exp[\sigma_a \int_0^{l_a} n_0(\xi, z') dz'] = \exp[\sigma_a n_0(\xi) l_a]$ — коэффициент усиления активного вещества в начале генерации $t=0$; ε — коэффициент нелинейности, ответственный за внешнюю самофокусировку излучения растворителем насыщающего фильтра; $\beta_{1,2} = \alpha_{1,2} \sqrt{kL}$ — параметр, характеризующий перекося зеркал резонатора от съюстированного положения на угол $\alpha_{1,2}$ соответственно.

Система (1) решалась на машине БЭСМ-2 при следующих параметрах вещества: $\sigma_a = 2,5 \cdot 10^{-20}$ (рубин), $\sigma_\Phi = 5 \cdot 10^{-15}$, $T_{1\Phi} = 10^{-10}$, $L = 1$ м.

2. РЕЗОНАТОРЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ЗЕРКАЛАМИ БЕЗ ПЕРЕКОСОВ

$$(\beta_1 = \beta_2 = 0)$$

Мы исследовали различные типы открытых резонаторов при следующих параметрах: конфокальный — при $C_1 = C_2 = 7$ и 20, остальные при $C_1 = C_2 = 20$ (для $L = 1$ м и $\lambda = 0,7$ мкм, полуширина диафрагмы, ограничивающей зеркала, равна 0,39 и 1,49 мм соответственно для $C = 7$ и $C = 20$).

В конфокальном резонаторе с $C = 7$ и $\varepsilon = 0$ на участке просветления фильтра распределение поля соответствует случаю, рассмотренному в [1], т. е. в системе преобладает основная мода (табл. 2 [1]). Однако это распределение не остается до конца импульса, что объясняется действием насыщения усиления активного вещества. Инверсия по оси системы (в максимуме поля) постепенно снимается, что приводит к умень-

* Напомним, что насыщающий фильтр считается безынерционным.

шению коэффициента усиления основной моды по сравнению со 2-й. Таким образом, на поперечную структуру поля оказывает влияние не только нелинейность фильтра, но и нелинейность активного вещества*. Последнее влияние гораздо сильнее, что будет подтверждено расчетами, приводимыми ниже.

Подробно была исследована пространственно-временная структура поля излучения лазеров с резонаторами названных выше типов при $\varepsilon = 0$ и большем размере ограничивающих диафрагм ($C = 20$). Итогом численных расчетов были следующие данные, которые выводились на каждой итерации: амплитуда и фаза полей на зеркалах, величина $n_k(\xi)/n_0$, характеризующая инверсию населенности системы, уорденненную по длине кристалла, величина $I = \int_{-1}^1 |\Psi_k(\xi)|^2 d\xi$, пропорциональная мгновенной

мощности излучения, величина $f_n(\xi)$. Последняя величина интересна тем, что именно она и фиксируется квадратичным детектором с большой постоянной времени (при фотографировании ей пропорциональна экспозиция фотопленки). Все расчеты проводились при следующих параметрах: коэффициенты отражения зеркал $r_1 = 0,99$, $r_2 = 0,8$ и начальная прозрачность фильтра $G_\phi = 0,6$.

В одном из рассмотренных случаев изучалась генерация при равномерном начальном распределении $F(\xi) = 0,05 [1(\xi + 1) - 1(\xi - 1)]$. Вид импульсов генерации представлен на рис. 1. Конфокальный резонатор

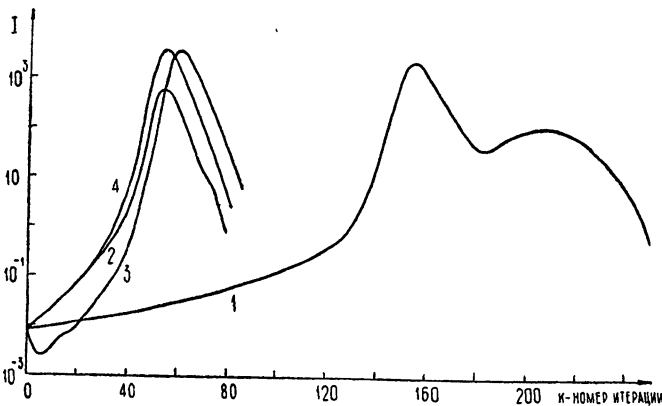


Рис. 1. Форма импульса генерации для различных конфигураций резонаторов с пассивным фильтром ($G_\phi = 0,6$, $F(\xi) = 0,05 [1(\xi + 1) - 1(\xi - 1)]$): 1 — $g_1 = g_2 = 0$; 2 — $g_1 = 0$, $g_2 = 1$; 3 — $g_1 = 1$, $g_2 = 0$; 4 — $g_1 = g_2 = 1$.

рассматривался при $G_a = 2,72$, остальные при $G_a = 3,1$. Выбор меньшего значения G_a для конфокального резонатора связан с практическим отсутствием в нем дифракционных потерь при $C = 20$, в то время как в резонаторах остальных типов эти потери несколько повышают порог генерации.

Для импульса генерации в конфокальном резонаторе характерна дроборбость, происхождение которой легко усмотреть из рис. 2а, 2б. Из этих рисунков видно, что поперечное распределение поля сильно изрезано и напоминает моду высшего порядка. Для инверсии характерна неравномерность ее высвечивания, нарастающая к максимуму первого импульса, затем наступает «перестройка» генератора на другой тип колебаний с максимумами интенсивности, приходящимися на максимумы оставшейся инверсии, высвечивание которой и вызывает появление вто-

* Этот эффект был отмечен автором работы [9].

рого импульса. Поскольку второй импульс по интенсивности значительно меньше первого, то распределение энергии определяется в основном пространственной структурой первого импульса и напоминает одну из высших мод конфокального резонатора рис. 3, кривая 5*.

Заметим, что, строго говоря, пространственная структура излучения не имеет характера одной моды (хотя и высшей), а меняется на протяжении всего импульса генерации. Как мы увидим, это явление наиболее типично для резонаторов со слабо перекрытыми поперечными модами, но в известной степени наблюдается и в остальных случаях.

Форма импульсов генерации в случае плоского ($g_1 = g_2 = 1$) и

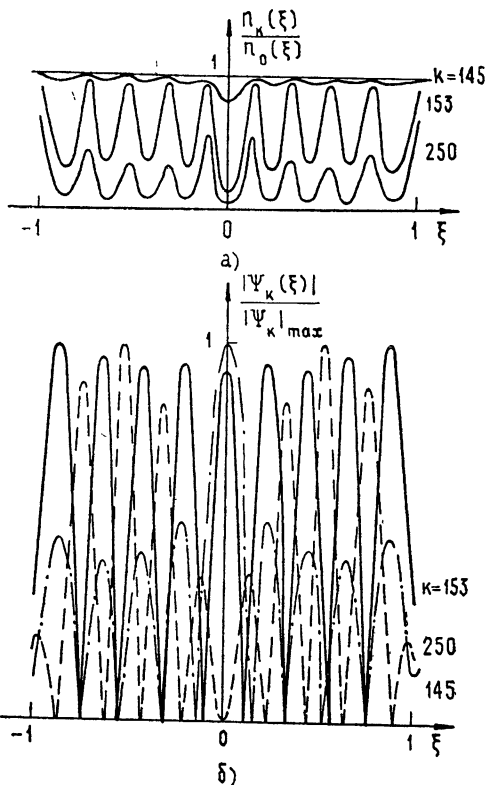
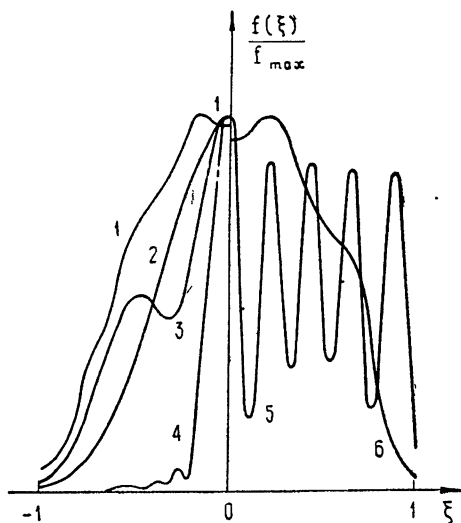


Рис. 2. Распределение инверсии в поперечном сечении (а) и структура поля на зеркале (б) в конфокальном резонаторе с пассивным фильтром ($C = 20$, $G_a = 2,72$, $G_\phi = 0,6$, $F(\xi) = 0,05 [1(\xi + 1) - 1(\xi - 1)]$).

близких к нему резонаторов ($g_1 = g_2 = 0,969$; $g_1 = g_2 = 0,89$)** качественно одинакова, хотя в резонаторах с $g < 1$ импульс сначала растет быстрее,



чем при $g = 1$, что объясняется меньшими дифракционными потерями; а при $g = 0,89$ имеет и несколько большую ширину. В резонаторах с $g = 1$ и $g = 0,969$ поле генерации сохраняет квази-одномодовый характер, хотя при $g = 0,969$ поле сильнее поджато к оси. При $g = 0,89$ поле поджато еще сильнее, неравномерность высвечивания инверсии увеличивается, а на спаде им-

Рис. 3. Интегральная картина поля на зеркале: 1— $g_1 = g_2 = 1$; 2— $g_1 = g_2 = 0,969$; 3— $g_1 = g_2 = 0,89$; 4— $g_1 = 0$, $g_2 = 1$; 5— $g_1 = g_2 = 0$; 6— $g_1 = 1$, $g_2 = 0$.

* Так как начальное распределение было симметричным, то и получающиеся распределения полей симметричны, поэтому на рисунке приведены распределения полей на одной половине зеркала.

** При $g = 0,969$ на край зеркала выходит каустика моды $TEM 1q$, а при $g = 0,89$ —моды $TEM 2q$.

пульса поперечная структура поля становится похожей на тип колебаний ТЕМ_{2q}.

Энергия импульса $f(\xi)$ (рис. 3) при $g=1$ (1) и $g=0,969$ (2) монотонно спадает к краям зеркал, но при $g=0,89$ (3) уже видны боковые максимумы. Таким образом, увеличение кривизны зеркал, уменьшая дифракционные потери высших мод, быстро приводит к исчезновению квазиодномодового характера генерации, который мы можем наблюдать в плоском резонаторе. Этим, в частности, объясняются трудности получения одномодового режима в генераторах с плоскими зеркалами, если активный элемент имеет слабую линзность (первоначальную или возникшую под действием поля накачки)*.

Приведенные на рис. 1 кривые 2 и 3 относятся к полуконцентрическим резонаторам. Случай $g_1=0, g_2=1$ соответствует положению активного элемента у плоского зеркала, случай $g_1=1, g_2=0$ — у сферического зеркала. В первом случае высвечиваемая энергия существенно меньше, чем во втором, что объясняется значительной концентрацией поля у плоского зеркала. Спад интенсивности в начале импульса при $g_1=1, g_2=0$ объясняется очень большими дифракционными потерями начального распределения в этом случае (мал коэффициент присутствия в нем основных добротных мод). Распределение мгновенной мощности и высвечивание инверсии иллюстрируется рис. 4. На рис. 3 показано про-

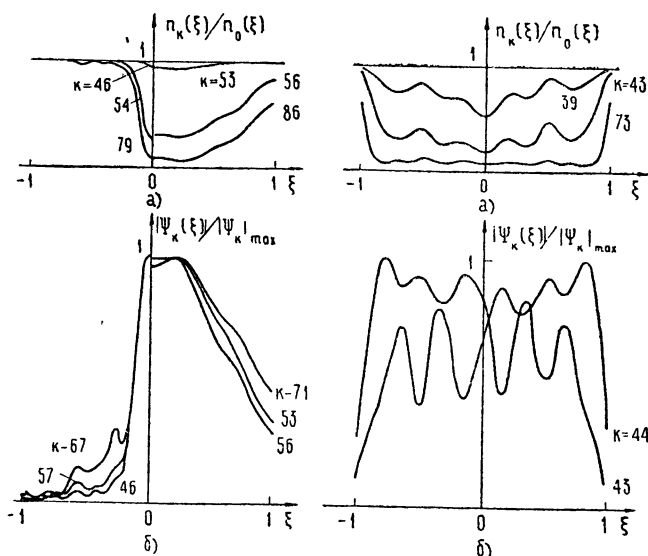


Рис. 4.

Рис. 5.

Рис. 4. Распределение инверсии в поперечном сечении (а) и структура поля на выходном зеркале (б) в полуконцентрическом резонаторе. Слева $g_1=0, g_2=1$, справа $g_1=1, g_2=0$.

Рис. 5. Распределение инверсии в поперечном сечении (а) и поперечная структура поля в конфокальном резонаторе с пассивным фильтром ($C=20, G_a=3,1, G_\phi=0,6, F(\xi)$ — случайная функция).

странственное распределение выходной энергии в обоих случаях. Из приведенных расчетов, на первый взгляд, можно заключить, что постановка активного элемента у сферического зеркала выгоднее, так как дает большую величину энергии при том же уровне накачки. Однако следует иметь в виду, что здесь и влияние линзности активного элемента на

* Приведенным выше значениям g соответствуют фокусные расстояния линзы активного элемента порядка 10—20 метров, что практически всегда имеет место.

дифракционные потери будет существенно выше, так как возникновение даже длиннофокусной линзы поведет к нарушению одномодового режима. Поэтому в лазерных установках активный элемент приходится располагать у плоского зеркала [4, 5], несмотря на более быстрое его разрушение из-за фокусировки излучения.

Более близкой к реальным ОКГ является модель, в которой начальное распределение поля случайно и на каждой итерации на систему воздействует случайный сигнал, имитирующий шум люминесценции, т. е. на каждой итерации к имеющейся функции $\Psi_k^{(1)}(\xi)$ добавляется некая случайная функция. Амплитуду этой функции в отсечных точках мы задавали равной 0,05, фазе приписывали случайные значения. При этом интервал $[0, \pi]$ был разбит на 8 значений, которые выбирались случайным образом с равной вероятностью. Все остальные параметры генератора оставались те же: $r_1 = 0,99$, $r_2 = 0,8$, $G_\Phi = 0,6$, $G_a = 3,1$.

Форма импульсов генерации для конфигураций резонатора: $g_1 = g_2 = 1$; 0,96 и $g_1 = 0$, $g_2 = 1$, напоминает соответствующие кривые на рис. 1. Отличие заключается лишь в случайных вариациях мощности в начале импульса до просветления фильтра. Поле же в конфокальном резонаторе на начальном участке растет от итерации к итерации и в отличие от рис. 1 не имеет двугорбости. Это объясняется тем, что из-за малости дифракционных потерь условия самовозбуждения выполнены для большинства мод, представленных в первоначальном распределении.

Рис. 5а демонстрирует процесс выветчивания инверсии в конфокальном резонаторе. Из рисунка видно, что она, несмотря на резкую асимметрию в структуре излучения на каждой отдельной итерации, выгорает симметрично. Последнее обстоятельство можно пояснить с помощью рис. 5б, где показаны распределения поля на двух соседних итерациях. Видно, что поля являются зеркальным отражением друг друга. Благодаря этому эффекту распределение энергии на выходном зеркале конфокального резонатора получилось симметричным, но с тремя провалами (рис. 6).

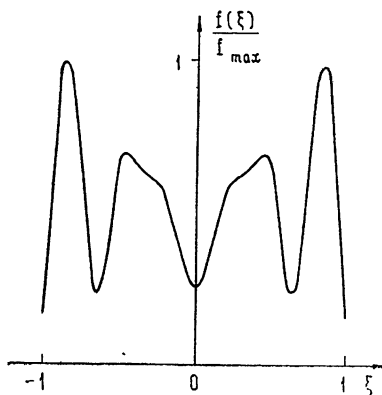


Рис. 6.

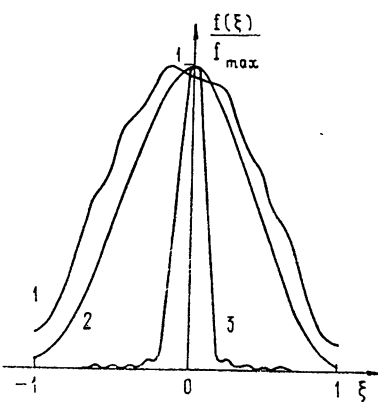


Рис. 7.

Рис. 6. Интегральная картина поля на зеркале в конфокальном резонаторе с пассивным фильтром ($C = 20$, $G_a = 3,1$, $G_\Phi = 0,6$, $F(\xi)$ — случайная функция).

Рис. 7. Интегральная картина поля на зеркале в резонаторе с пассивным фильтром ($C = 20$, $G_a = 3,1$, $G_\Phi = 0,6$, $F(\xi)$ — случайная функция): 1 — $g_1 = g_2 = 1$, 2 — $g_1 = g_2 = 0,96$; 3 — $g_1 = 0$, $g_2 = 1$.

Общей чертой поведения поля в плоском, квазиплоском и полуконцентрическом резонаторах является перемещение максимума распределения

поля по зеркалу от итерации к итерации, хотя распределение выходной энергии на зеркале мало отличается от полученного выше (рис. 7). Этот эффект сканирования распределения менее всего проявляется в полуконцентрическом, а сильнее всего в квазиплоском резонаторе. Следует заметить, что при этом фаза поля на зеркале также изменяется. В полуконцентрическом резонаторе она слабо зависит от номера итерации, в квазиплоском же наклон фазового фронта и, следовательно, направление максимума излучения значительно меняются в процессе генерации.

Как уже отмечалось выше, в расчетах использовались два различных вида первоначального распределения: П-образное и случайное. В системах с высоким уровнем потерь паразитных мод выходные характеристики излучения слабо зависят от начальных условий, благодаря чему в них можно добиться хорошо управляемых параметров генерации. В конфокальном же резонаторе, где уровень потерь нежелательных мод низок, структура поля излучения определяется в значительной степени входной функцией. При П-образной и случайной входной функциях для распределения энергии на выходном зеркале характерна изрезанность. Если же входная функция является основной модой, высвечивание инверсии происходит более равномерно (рис. 8 а), хотя структура поля на выходном зеркале меняется от итерации к итерации (рис. 8 б).

Проведенное изучение влияния насыщающего фильтра и активного элемента на поперечную структуру поля генерации показало, что при выбранных параметрах системы определяющую роль играет нелинейность активного элемента. Это подтверждается также расчетами для случая мгновенного включения добротности резонатора. При этом характеристики излучения в одинаковых резонаторах качественно те же самые, что и при модуляции добротности насыщающим

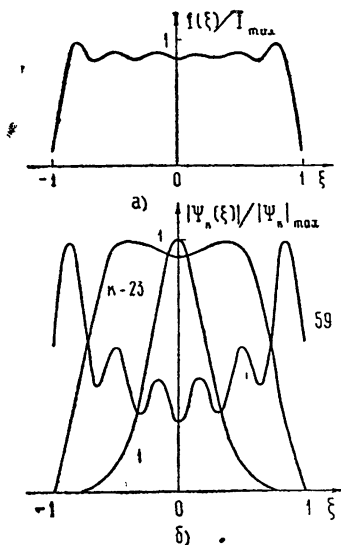


Рис. 8. Интегральная картина (а) и поперечная структура поля (б) на выходном зеркале конфокального резонатора ($C=20$, $G_\phi=0,6$, $G_a=2,72$,

$$F(\xi) = \exp\left(-\frac{C}{2}\xi^2\right).$$

фильтром, и наблюдаются все отмеченные выше эффекты.

3. ПЛОСКИЙ РЕЗОНАТОР С ПЕРЕКОШЕННЫМИ ЗЕРКАЛАМИ

Следующим этапом расчетов явилось исследование устойчивости параметров генерации ОКГ с плоским резонатором по отношению к разбегу резонатора (перекошу зеркал).

Рис. 9 демонстрирует изменение формы выходного импульса генерации при мгновенном включении добротности резонатора в зависимости от угла перекоса. Кривая 1 относится к резонатору без перекосов $\beta_1 = \beta_2 = 0$, 2 — с перекосом $\beta_1 = \beta_2 = 0,05$ ($\alpha_{1,2} = 4,23''$), 3 — с перекосом $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0,3$ ($\alpha_2 = 25,4''$), $G_a = 3,1$, $r_1 = 0,99$, $r_2 = 0,8$. Из рисунка видно, что при данном значении френелевского параметра $C_1 = C_2 = 20$ и при угле перекоса в несколько секунд импульс генерации разбивается на два. Рис. 10 демонстрирует вид поперечной структуры в максимумах обоих пиков. Видно, что в каждом пике генерация идет при разных

поперечных распределений полей (в среднем излучение смещено к раскрыву). По мере «выгорания инверсии» происходит изменение поперечной структуры поля генерации, что приводит к искажению формы импульса генерации.

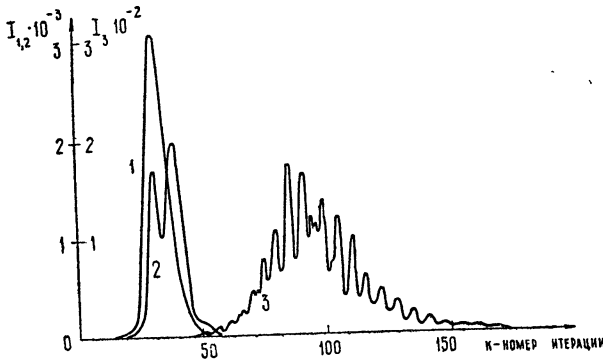


Рис. 9. Форма импульса генерации в плоском резонаторе с перекосом: 1 — $\beta_1 = \beta_2 = 0$; 2 — $\beta_1 = \beta_2 = 0,05$; 3 — $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0,3$.

При увеличении угла перекоса увеличивается изрезанность импульса генерации, уменьшается пиковая мощность и полная энергия излучения. При этом в отдельном пикке происходит непрерывная перестройка поперечной структуры поля генерации, причем максимум поперечного распределения движется по зеркалу из суженной части резонатора в сторону раскрыва. Это движение в пределах максимального пикка демонстрирует рис. 11 б. Сравнение рисунков 10 а и 11 б показывает, что при одинаковых уровнях накачки полная высветившаяся энергия во втором

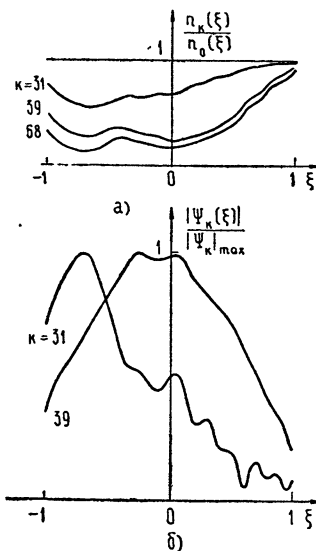


Рис. 10.

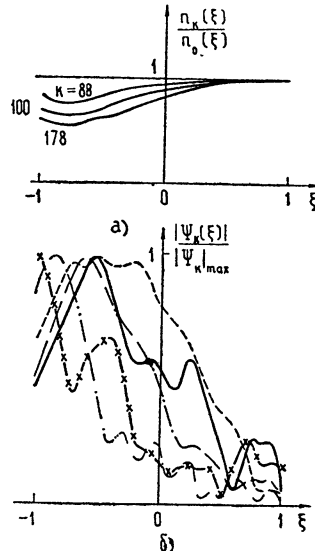


Рис. 11.

Рис. 10. Распределение инверсии (а) и поперечная структура поля генерации (б) в плоском резонаторе с перекосом $\beta = 0,05$.

Рис. 11. Распределение инверсии (а) и поперечная структура поля генерации (б) в плоском резонаторе с перекосом $\beta = 0,3$: — — — $K = 83$; - - - - $K = 84$; ···· $K = 85$; — · — · $K = 86$; — × — × $K = 87$.

случае меньше. Это объясняется увеличением дифракционных потерь в системе.

Отмеченные выше изменения в режиме генерации приводят и к изменению интегральной картины распределения поля на выходном зеркале (рис. 12).

Таким образом, проведенные исследования показывают, что разъюстировка резонатора может приводить к автомодуляции излучения ОКГ. Заметим, что эффект движения максимума поперечного распределения поля генерации, называемый обычно эффектом синхронизации поперечных мод, может наблюдаться в системе, не содержащей насыщающего фильтра.

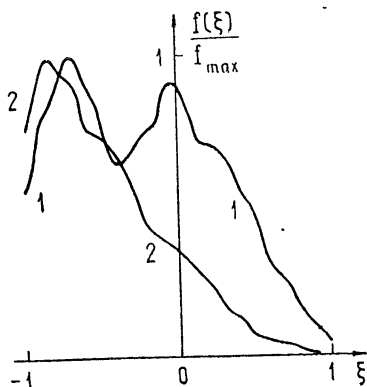


Рис. 12.

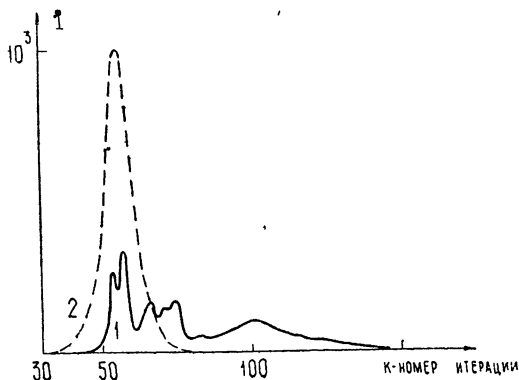


Рис. 13.

Рис. 12. Интегральная картина поля на зеркале в плоском резонаторе с перекосом: 1 — $\beta_1 = \beta_2 = 0,05$; 2 — $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0,3$.

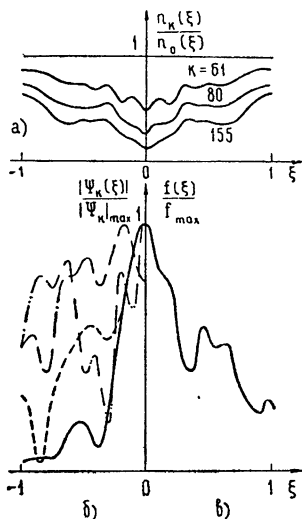
Рис. 13. Форма импульса генерации в плоском резонаторе с нелинейной линзой: 1 — $\epsilon = 0,00785$; 2 — $\epsilon = 0$.

4. РЕЗОНАТОРЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЛИНЗОЙ ($\epsilon \neq 0$) БЕЗ ПЕРЕКОСОВ ($\beta_1 = \beta_2 = 0$)

Экспериментальные данные говорят о том, что эффект внешней самофокусировки в растворителе красителя фильтра должен сказаться на режиме работы ОКГ. Дело в том, что конфигурация резонатора в этом случае сама является функцией поля. Причем резонатор может даже стать неустойчивым, и генерация в нем сорвется. Образующаяся линза имеет сильные нелинейные aberrации, так что учет эффекта самофокусировки аналитически провести чрезвычайно трудно. Поэтому нами было проведено численное исследование влияния этого эффекта на динамику генерации ОКГ.

На рис. 13 представлена форма импульса генерации для двух случаев: 1 — плоский резонатор с нелинейной линзой ($\epsilon = 0,00785$), 2 — плоский резонатор без нелинейной линзы. В качестве начального распределения была взята основная мода плоского резонатора, $C = 20$, $G_\phi = 0,6$, $G_a = 3,1$, остальные параметры прежние. При нелинейной константе Керра $\epsilon_2 = 5 \cdot 10^{-11}$ CGSE величина $\epsilon = 0,00785$ будет соответствовать кювете толщиной 7,5 мм. Проведенный расчет показывает, что внешняя самофокусировка поля генерации существенно изменяет характер генерации ОКГ: уменьшает пиковую мощность и приводит к автомодуляции излучения (рис. 13). Влияние нелинейной линзы особенно хорошо видно на примере поперечной структуры поля генерации (рис. 14 б) и интегральной картины поля на зеркале (рис. 14 в, ср. с рис. 3(1)).

Приведенные результаты указывают на возможность использования внешней самофокусировки для модуляции добротности резонатора*.



Нами были проведены расчеты для неустойчивого резонатора ($g_1 = 1,3; g_2 = 1; G_1 = 3; G_2 = 1; C_1 = C_2 = 7$, остальные параметры прежние). Рис. 15 а демонстрирует форму импульсов генерации для случаев (1) $\varepsilon = 0$ и (2) $\varepsilon = 0,005$ ($l = 4,75$ мм). Из рисунка видно, что происходит увеличение мощности генерации и высветившейся энергии (рис. 15 б). Следует отметить, что величина $\varepsilon = 0,005$ является оптимальной. При дальнейшем увеличении ε импульс генерации разбивается на несколько

Рис. 14. Распределение инверсии (а), поля (б) и интегральная картина поля на зеркале (в) для плоского резонатора с нелинейной линзой: — — $K=53$; - - - - $K=54$; - · - · - $K=55$; - · · - · $K=57$.

импульсов с меньшей пиковой интенсивностью. На рис. 16 представлены распределения поля на зеркале при наличии (а) и при

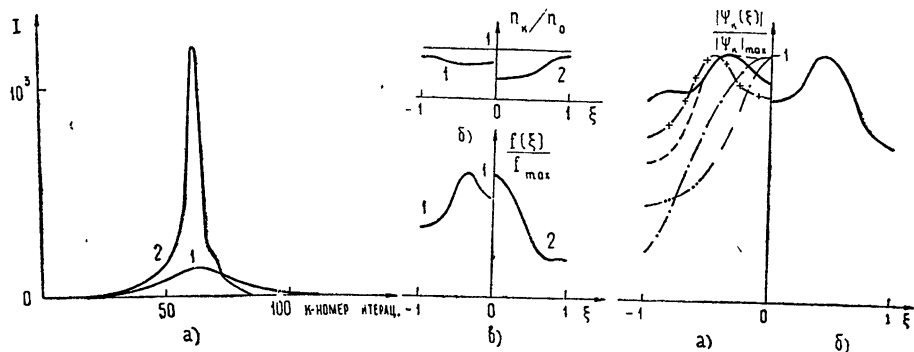


Рис. 15.

Рис. 16.

Рис. 15. Форма импульса генерации (а), распределение инверсии (б); интегральная картина поля на зеркале (в) $g_1 = 1,3, g_2 = 1; l = 0$; 2 — $\varepsilon = 0,005$.

Рис. 16. Структура поля на зеркале в резонаторе $g_1 = 1,3, g_2 = 1$: а) $\varepsilon = 0,005$; — — — $K=35$; - - - - $K=59$; - · - · - $K=62$; - · · - · $K=64$; - × - × $K=90$; б) $\varepsilon = 0$.

отсутствии (б) нелинейной линзы. Если при отсутствии линзы распределение поля не меняется за время генерации и представляет низший тип колебания исследуемого резонатора (что обусловлено высокими дифракционными потерями для следующих типов колебаний), то в присутствии нелинейной линзы структура поля существенно зависит от его интенсивности. Это приводит к тому, что интегральные картины поля на зеркале резко различаются (рис. 15 в).

Результаты, приведенные в данной работе, показывают, что в большинстве случаев поперечная структура поля меняется в течение импуль-

* На возможность автомодуляции излучения ОКГ и модуляции добротности резонатора ОКГ за счет эффекта внешней самофокусировки указано в работах [7] и [8] соответственно.

са генерации, и судить о структуре поля по интегральной картине возможно далеко не всегда. Это необходимо учитывать при использовании ОКГ для наблюдения нелинейных эффектов. В результате проведенных расчетов можно сделать вывод, что для получения генерации с неизменной поперечной структурой необходимо использовать резонатор такой конфигурации, чтобы во все моменты генерации (например, до и после просветления насыщающего фильтра) условие возбуждения было выполнено лишь для одной моды. (Например, плоский и полуконцентрический резонаторы.) Кроме того, ясно, что даже в случае плоского резонатора, где в отъюстированном положении получается практически одномодовая генерация, при разъюстировке может наблюдаться автомодуляция излучения, связанная с тем, что потери основного типа колебания сравниваются с потерями следующих. Приведенные результаты указывают на то, что во многих случаях, когда получают генерацию ОКГ с насыщающимся фильтром, необходимо либо подбирать растворитель красителя с меньшей нелинейностью, либо уменьшать толщину кюветы для уменьшения эффекта внешней самофокусировки.

Последний эффект может существенно влиять на работу ОКГ в режиме синхронизации мод, так как получаемые мощности в импульсе могут превышать критическую мощность самофокусировки в материале активного вещества. При этом влияние растворителя красителя может оказаться слабее, чем активного элемента, так как время релаксации ϵ_2 в растворителе красителя становится сравнимым с длительностью импульса генерации.

Проведенные расчеты далеко не исчерпывают всего разнообразия режимов генерации ОКГ. Предложенная модель позволяет рассчитать характеристики излучения ОКГ разнообразных конфигураций резонаторов и различных методов включения добротности резонатора с учетом не только нелинейности активного вещества и насыщающего фильтра, но и при учете реактивной нелинейности элементов ОКГ. Кроме того, при некоторой модернизации данная модель позволяет исследовать режим самосинхронизации мод и влияния на него различных факторов.

В заключение авторы выражают признательность Я. И. Ханину и С. В. Гапонову за дискуссии, стимулировавшие получение ряда результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Власов, В. И. Таланов, А. И. Хижняк, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 4, 570 (1971).
2. А. Ф. Сучков, Нелинейная оптика, Тр. ФИАН СССР, т. 43.
3. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
4. А. Л. Микаэлян, В. Г. Савельев, Ю. Г. Турков, Письма в ЖЭТФ, 6, 6 (1967).
5. А. Л. Микаэлян, А. В. Коровицын, Л. В. Наумова, Письма в ЖЭТФ, 2, 1 (1965).
6. А. Ф. Сучков, Диссертация, ФИАН СССР, 1966.
7. А. Е. Каплан, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 6, 869 (1969).
8. С. В. Гапонов, А. Г. Гончаров, Г. А. Крафтмахер, Я. И. Ханин, Письма в ЖЭТФ, 11, 8, 370 (1970).

CALCULATION OF SPATIAL - TIME CHARACTERISTICS OF LASER RADIATION

S. N. Vlasov, V. I. Talanov, A. I. Khizhnyak

Calculations have been made of the spatial-time structure of the traveling-wave laser radiation field and the inversion distribution in the transverse section of the active body. The confocal, plane, plane with skew of mirrors and half-concentric resonators are considered, as well as the case of self-focusing in the dye solution of the saturable absorber. The calculation results are represented as the plots illustrating the change of the field and inversion population distribution on the resonator mirror in time.

УДК 621.378 325

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ СВЕРХКОРОТКИХ ИМПУЛЬСОВ

Ю. К. Веревкин, Э. Я. Дауме, А. И. Макаров, М. А. Новиков,
А. И. Хижняк

В работе реализованы две новые методики измерения автокорреляционных функций излучения лазера с синхронизацией мод. Эти методики позволяют получить результат измерения за одну «вспышку» импульсного лазера; при измерении используется нелинейный эффект, пропорциональный произведению интенсивностей двух полей.

Лазеры с синхронизованными модами (СМ) в настоящее время широко применяются в научных исследованиях, однако стабильность параметров их излучения (длительность, число и мощность генерируемых импульсов) остается все еще недостаточной [1]. В связи с этим как при использовании ОКГСМ, так и при их исследовании необходим постоянный (во время каждой «вспышки») контроль характеристик излучаемых импульсов.

Известные методы измерения таких характеристик можно разделить на два класса.

а) Методы временных разверток (осциллографы, фотоэлектронные регистраторы и т. д.).

б) Методы измерения автокорреляционных функций различного вида.

В настоящее время разрешающая способность первого способа не лучше чем 10^{-11} сек [2]. Во втором способе измеряемыми величинами являются функции типа

$$\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [E_1(t) + E_2(t + \tau)]^n dt,$$

$$\Psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [E_1^n(t) E_2^m(t + \tau)] dt;$$

здесь черта означает усреднение по быстроосциллирующим членам как во времени, так и в пространстве. Функция $\Phi(\tau)$ имеет фон, причем отношение $\Phi(\tau)/\Phi(0)$ может изменяться в пределах от 1 до $1/3$ [3] на интервале $(-T/2, T/2)$, где T — время пробега по резонатору туда и обратно. Функция $\Psi(\tau)$ не имеет фона, и отношение $\Psi(\tau)/\Psi(0)$ может изменяться в пределах от 1 до 0. Чтобы получить представление о временном ходе измеряемого сигнала, как в том, так и в другом случае требуется измерение отношений $\Phi(\tau)/\Phi(0)$ и $\Psi(\tau)/\Psi(0)$ на всем интервале $(-T/2, T/2)$ с одинаковой абсолютной точностью. Однако при измерении $\Psi(\tau)$ требуется меньшая по сравнению с измерением $\Phi(\tau)$ относительная точ-

ность для того, чтобы убедиться в отсутствии побочных максимумов, что в ряде случаев дает определенные практические преимущества*.

Недостатком большинства известных методов измерения $\Psi(\tau)$ [4, 5] является то, что процесс измерения происходит не за одну «вспышку» импульсного лазера.

В настоящей работе обсуждаются две методики измерения автокорреляционной функции $\Psi(\tau)$, исключаяющие упомянутый недостаток, и приводятся предварительные результаты измерений, полученные с помощью этих методик.

1. На рис. 1 представлена блок-схема установки для измерения функции

$$\Psi_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [E_1(t) E_2(t + \tau)]^2 dt.$$

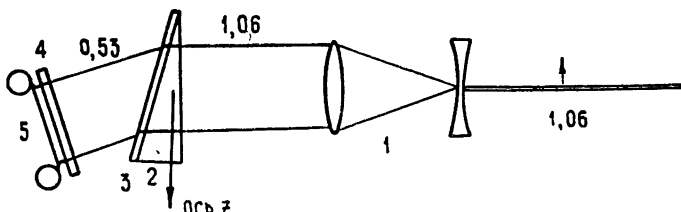


Рис. 1. Блок-схема для измерения $\Psi_1(\tau)$:

1—цилиндрический телескоп, 2—анизотропный клин из кальцита, 3—кристалл KDP толщиной 1 мм, 4—светофильтр ЗС-1, 5—фотокамера.

Здесь в качестве нелинейного эффекта, позволяющего проводить умножение амплитуд, используется эффект удвоения частоты при синхронизме типа $1^0 + 2^e = 3^e$, а в качестве полей E_1 и E_2 —обыкновенная и необыкновенная волны, которые при синхронизме по отдельности не преобразуются во вторую гармонику. Различие поляризаций E_1 и E_2 дает возможность использовать для получения переменной задержки анизотропный клин**.

В нашем эксперименте в качестве нелинейного элемента использовалась пластинка из кристалла KDP толщиной 1 мм, а анизотропный клин с углом 30° был выполнен из кальцита. Функция $\Psi_1(\tau)$ соответствует зависимости интенсивности 2-й гармоники от поперечной координаты z .

Величина задержки определяется соотношением

$$\tau(z) = \frac{(n_o - n_e)}{c} l(z),$$

где $l(z)$ —толщина клина в точке z .

* Для того, чтобы определить длительности импульсов по функции $\Phi(\tau)$, требуется высокая точность измерения $\Phi(\tau)/\Phi(0)$ [$\sim 1/m$, m —скважность периодической последовательности импульсов]. Если измерение $\Phi(\tau)/\Phi(0)$ производится путем фиксирования светового потока на фотопленке и последующего измерения почернения, то при $m = 10^2 \div 10^3$ упомянутая выше точность обычными средствами практически недостижима.

При измерении же $\Psi(\tau)$ можно, используя, например, ступенчатый ослабитель, ослабить в некоторое число раз центральную часть трека (вблизи $\tau = 0$) и измерять крылья функции $\Psi(\tau)$; при этом может быть достигнута существенно более высокая точность измерения $\Psi(\tau)/\Psi(0)$. Если с достаточной ($\sim 1/m$) точностью $\Psi(\tau) = 0$ для значений $|\tau| > \tau$, то это будет означать, что в излучении нет импульсов длиннее, чем 2τ , и вся энергия сосредоточена в этих импульсах. Количество импульсов на периоде T может быть определено с помощью прибора с разрешающей способностью порядка максимальной задержки τ_{\max} .

** Возможность использования анизотропного клина и нелинейного кристалла для измерения функции типа $\Psi_1(\tau)$ отмечалась в [6].

Максимальное значение τ_{\max} дает оценку для наибольшей длительности измеряемых импульсов. В описываемом эксперименте τ_{\max} равнялась $8,5 \cdot 10^{-12}$ сек.

Минимальная длительность и временное разрешение измеряемых импульсов ограничиваются рядом факторов: двойным лучепреломлением, зависимостью направления синхронизма от частоты, дифракцией на краю клина и т. д. Оценка этих величин для приведенных выше параметров схемы дает $\tau_{\min} = (2 \div 3) \cdot 10^{-13}$ см. Уменьшение угла клина и уменьшение толщины нелинейного кристалла позволят продвинуться в область более коротких импульсов при одновременном уменьшении τ_{\max} . Вместе с тем, для увеличения τ_{\max} можно использовать дополнительные плоскопараллельные анизотропные пластины.

2. На рис. 2 представлена блок-схема установки для измерения функции

$$\Psi_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [E_1^{(\omega)}(t)]^2 [E_2^{(2\omega)}(t + \tau)]^2 dt$$

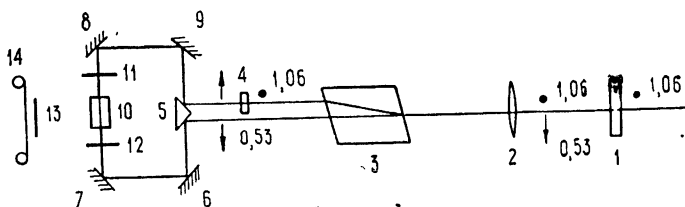


Рис. 2. Блок-схема для измерения $\Psi_2(\tau)$:

1—кристалл LiIO_3 толщиной 2 мм, 2—линза с фокусным расстоянием 1 м, 3—призма из кальцита естественной огранки, 4—кварцевая пластинка для поворота плоскости поляризации, 5—прямоугольная призма с диэлектрическими зеркалами, 6, 7, 8, 9—диэлектрические зеркала, 10—кувета с красителем, 11—светофильтр КС-15, 12—светофильтр СЗС-21, 13—светофильтр ФС-1, 14—фотокамера,

При этом в качестве нелинейного эффекта используется двухфотонное поглощение $\omega + 2\omega$ и последующая люминесценция в растворе бетаметилумбеллиферона ($\text{C}_{10}\text{H}_8\text{O}_3$) в виде $(\rho h = 9)$, не имеющем существенного поглощения на частотах ω , 2ω и двухфотонного поглощения $\omega + \omega$, $2\omega + 2\omega$.

Максимальная длительность измеряемых импульсов определяется размерами кюветы и составляет в нашем эксперименте $\tau_{\max} = 80 \cdot 10^{-12}$ сек*.

Минимальная длительность и временное разрешение измеряемых импульсов определяются разрешающей способностью камеры и возможным уширением импульса при получении второй гармоники. В эксперименте для удвоения использовалось скалярное взаимодействие $1^0 + 2^0 = 3^0$ в кристалле LiIO_3 толщиной 2 мм; при этом $\tau_{\min} = 5 \cdot 10^{-13}$ сек.

Для экспериментальной проверки описанных методов измерялись временные характеристики излучения двух вариантов неодимового лазера с синхронизацией мод. В первом варианте кювета с просветляющимся фильтром находилась в нескольких сантиметрах от «глухого»

* Поглощение $\omega + 2\omega$ в растворе дифенилциклопентадиена в тетрагидрофуране использовалось для измерения параметров излучения ОКГСМ в работе [8]. В отличие от нашего эксперимента в работе [8] использовался элемент задержки (кювета с бромбензолом) для разделения импульсов 1,06 и 0,53 м; двухфотонная люминесценция наблюдалась в кювете, на один из торцов которой было нанесено диэлектрическое зеркало.

зеркала, во втором выходное зеркало (коэффициент отражения $R = 0,5$) служило стенкой кюветы с красителем [7].

Наиболее оперативный контроль за режимом СМ осуществлялся по осциллографу И2-7. Одновременно измерялся также спектр на спектрографе с дисперсией $1,95 \text{ \AA} \cdot \text{мм}^{-1}$.

Режим СМ в первом варианте генератора очень критичен к превышению накачки над порогом. Допустимое превышение порога по напряжению в нашем случае составляло $\sim 1\%$. При превышениях $\leq 1\%$ на осциллографе были видны один или несколько отдельных импульсов на аксиальном периоде, при превышении $\geq 1\%$ был виден гигантский импульс с большей или меньшей изрезанностью огибающей. Спектр же существенно не менялся при больших изменениях превышения над порогом, и его ширина составляла $30 \div 50 \text{ \AA}$ со случайной модуляцией различного характера. Однородный участок спектра не превышал нескольких ангстрем. Измерение функции $\Psi_2(\tau)$ такого генератора показывает наличие люминесценции по всей длине кюветы с максимумом при $\tau = 0$. Таким образом, в этом случае излучение представляет собой последовательность импульсов длительностью* более $80 \cdot 10^{-12} \text{ сек}$ ** причем плавность огибающей каждого импульса может гарантироваться с точностью до усреднения по всем импульсам «вспышки» и временного разрешения метода измерения.

Функции $\Psi_2(\tau)$, измеренные для второго варианта генератора, представлены на рис. 3. Здесь ярко выражен локализованный характер

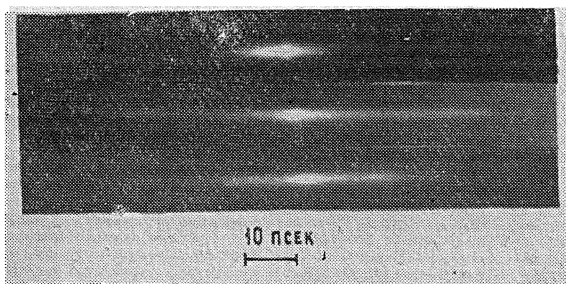


Рис. 3. Фотографии картины люминесценции в растворе бета-метилумбеллиферона сбоку кюветы.

люминесценции. Разность почернений на конце кюветы ($\tau = \tau_k$) и в максимуме ($\tau = 0$) обычно более 1,5. Однако отсутствие корректных измерений зависимости нелинейности почернения пленки от энергии люминесценции не позволяет точно измерить величину $\Psi_2(\tau)/\Psi_2(0)$. В нашем случае мы можем только сказать, что $\Psi_2(\tau)/\Psi_2(0)$ меньше, чем $10^{-1,5}$. Следует отметить, что характер почернения существенно различен для различных «вспышек» лазера; спектр расширился по сравнению со спектром излучения первого варианта лазера до $80 \div 100 \text{ \AA}$, и сохранилась его случайная модуляция. При этом измерениям можно сделать оценки для длительности импульса по основанию, которая получается для различных «вспышек» в пределах $(15 \div 70) \cdot 10^{-12} \text{ сек}$.

* Под длительностью здесь, вне зависимости от числа импульсов на периоде, понимается ширина функции корреляции по основанию. Таким образом, речь идет о длительности, усредненной по всем импульсам за одну «вспышку»

** Как показали предварительные измерения временных характеристик такого лазера с помощью фотоэлектронного регистратора с разрешением 80 псек , излучение состоит из импульсов длительностью по основанию более 200 псек .

Результаты измерения $\Psi_1(\tau)$ для второго варианта генератора представлены на рис. 4. Для этого метода легко определить зависимость почернения пленки от энергии второй гармоники по дифракции на щели, поэтому величину $\Psi_1(\tau)/\Psi_1(0)$ можно измерить с учетом нелинейности пленки. Как известно из теории [3], для ограниченного набора синусоид с произвольными фазовыми соотношениями контрастность $\Psi_1(0)/\Psi_1(\infty) = 2$. В нашем эксперименте для случая $\tau_{\max} = 8,5 \cdot 10^{-12}$ сек величина $\Psi_1(0)/\Psi_1(\tau_k)$ изменяется от 4,5 до 2, т. е. по тако-

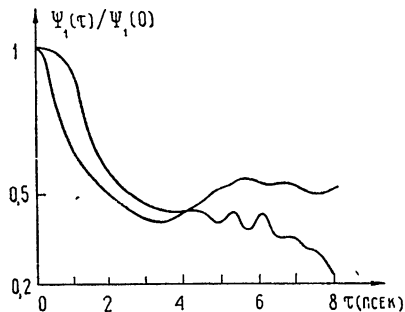


Рис. 4. Зависимость энергии второй гармоники $\Psi_1(\tau)$.

му измерению, принимая во внимание ширину спектра излучения, можно считать, что процент синхронизованных мод мал и импульс длиннее, чем 8,5 псек. С использованием дополнительной плоскопараллельной пластины (кальцита τ_{\max} была увеличена до 16,5 псек. Для этого случая $\Psi_1(0)/\Psi_1(\tau_k)$ изменяется в пределах $9 \div 2,3$. Для реализации с контрастностью 9 длительность импульса можно оценить ~ 16 псек*. В остальных случаях измерение контрастности не позволяет сделать заключение о длительности импульсов.

В заключение авторы благодарят В. И. Беспалова за ценные замечания и помощь в работе и Т. И. Кузнецову за полезные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Коробкин, А. А. Малютин, М. Я. Щелев, Письма в ЖЭТФ, 11, 168 (1970).
2. А. А. Малютин, М. Я. Щелев, Письма в ЖЭТФ, 9, 445 (1969).
3. Т. И. Кузнецова, Препринт № 47, ФИАН (1968); ЖЭТФ, 55, 2453 (1968).
4. J. A. Armstrong, Appl. Phys. Lett., 10, 16 (1967).
5. H. P. Weber, J. Appl. Phys., 39, 6041 (1968).
6. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 6, 787 (1970).
7. D. J. Bradley, G. H. C. New, S. J. Caughey, Phys. Lett., 30A, 78 (1969).
8. P. M. Rentzepis, M. A. Duguay, Appl. Phys. Lett., 11, 218 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
24 сентября 1970 г.

ON MEASUREMENT OF SUPERSHORT PULSE DURATION

*Yu. K. Verevkin, E. Ya. Daume, A. I. Makarov, M. A. Novikov,
A. I. Khizhnyak*

Two new techniques of measuring the autocorrelation functions of the laser radiation with mode locking are realized. They permit to obtain a measurement result during a pulse laser "flash". The nonlinear effect proportional to the product of the two field intensities is used.

* Эту цифру нельзя считать вполне достоверной. Для достоверности здесь требовалось бы провести измерения при еще больших значениях τ_{\max} . В эксперименте эти измерения не проводились.

УДК 621.378.325

УЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ В ЛАЗЕРЕ

А. Н. Малахов, М. С. Сандлер

Рассматриваются флуктуационные процессы в распределенной модели лазера бегущей волны. Находятся спектральные характеристики амплитудных и фазовых флуктуаций, а также ширина спектральной линии колебания.

Теоретическому исследованию статистических характеристик автоколебаний в лазере посвящено уже значительное количество работ (см., например, [1-4] и библиографию в [4]). Однако во всех этих работах рассматривалась по существу сосредоточенная модель лазера, вследствие чего флуктуации амплитуды, фазы и частоты колебания считались не зависящими от координаты. Последнее обстоятельство, конечно, существенно упрощает расчеты, но в то же время накладывает определенные ограничения на частотную область спектров рассматриваемых флуктуаций.

Представляет несомненный интерес, во-первых, нахождение более полной картины спектров флуктуаций, что возможно лишь при исследовании распределенной модели, и, во-вторых, нахождение того нового, что вносит именно распределенность параметров модели лазера в статистические характеристики излучения.

Вместе с этим следует отметить, что распределенная модель лазера с учетом флуктуаций рассматривалась в [5], где были найдены пространственно-временные спектры амплитуды и фазы излучения. Однако в этой работе не были учтены граничные условия для флуктуаций, вследствие чего не рассматривались спектральные характеристики колебания на границе активной среды, хотя именно последние являются непосредственно измеряемыми на опыте величинами.

Заметим также, что учет влияния распределенности параметров на флуктуационные характеристики автоколебания был проведен в [6], где рассматривались естественные флуктуации в распределенном генераторе с кубической нелинейностью. Однако в этой работе не была отражена специфика лазера — инерционная нелинейность, характеризующаяся дополнительным дифференциальным уравнением, учет которого приводит, как будет показано ниже, к существенному отличию спектра амплитудных флуктуаций от полученного в [6].

Настоящая работа посвящена рассмотрению флуктуационных процессов в одномодовой распределенной модели лазера бегущей волны. С учетом граничных условий находятся и анализируются спектральные характеристики флуктуаций и ширина спектральной линии автоколебания.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим одномерный кольцевой резонатор длины l , в котором находится активная среда, состоящая из двухуровневых молекул с частотой перехода ω_0 . Считаем, что поле E имеет лишь поперечную состав-

ляющую, которая изменяется только вдоль оси резонатора x . Уравнение для поля в резонаторе записываем в виде

$$c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + 4\pi\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \omega_0^2 f_1(x, t). \quad (1a)$$

Здесь $P(x, t)$ — поляризация среды, возбуждающая поле в резонаторе, σ — распределенные потери, $f_1(x, t)$ — источник теплового шума резонатора, обусловленный потерями в последнем. Корреляционная функция этого источника вычисляется с помощью обобщенной на распределенные системы флуктуационно-диссипационной теоремы [7]

$$\langle f_1(x, t) f_1(x', t') \rangle = D_1 \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (16)$$

Здесь

$$D_1 = \frac{4\pi^2\sigma}{\omega_0^2} \left(\frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar\omega_0}{\exp(\hbar\omega_0/kT) - 1} \right).$$

Уравнение для поляризации среды P и разности населенности N с учетом флуктуационных источников записываем в виде [8]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + 2T_2^{-1} \frac{\partial P}{\partial t} + \omega_0^2 P = - \frac{2d^2\omega_0}{h} EN + \omega_0^2 f_2(x, t); \quad (2a)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + T_1^{-1}(N - N_{00}) = \frac{2}{h\omega_0} E \frac{\partial P}{\partial t} + f_3(x, t). \quad (3a)$$

Здесь T_1 и T_2 — времена продольной и поперечной релаксации соответственно, N_{00} — разность населенностей в отсутствие поля, d^2 — квадрат дипольного момента молекулы, $f_2(x, t)$ и $f_3(x, t)$ — флуктуационные источники активной среды, определяемые ее свойствами.

Воспользовавшись результатами работ [5, 9], корреляционные функции этих источников в принятых обозначениях можно записать в следующем виде:

$$\langle f_2(x, t) f_2(x', t') \rangle = D_2 \delta(x - x') \delta(t - t'), \quad D_2 = \frac{d^2 T_2^{-1} N'}{\omega_0^2}; \quad (26)$$

$$\langle f_3(x, t) f_3(x', t') \rangle = D_3 \delta(x - x') \delta(t - t'), \quad (36)$$

$$D_3 = \frac{2T_1^{-1}}{N'} (N'^2 - NN_{00}).$$

Здесь N' — полное число молекул на верхнем и нижнем уровнях.

Решение уравнений (1)–(3) при наличии в резонаторе невязанного элемента ищем в виде одночастотных, бегущих в одном направлении, волн поля и поляризации, амплитуды и фазы которых вследствие сильной дисперсии и малости потерь медленно меняются по сравнению с $\cos(\omega_0 t - kx)$:

$$E(x, t) = \mathcal{E}(x, t) \cos(\omega t - kx + \Theta_1), \quad (4)$$

$$P(x, t) = \mathcal{P}(x, t) \cos(\omega t - kx + \Theta_2).$$

Предполагаем далее, что $N(x, t)$ также медленно меняется с временем и в пространстве.

Подставляя (4) в (1)–(3), получим следующие укороченные уравнения для медленных величин:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = 2\pi\omega_0 \mathcal{P} \sin \Phi - 2\pi\sigma \mathcal{E} + \frac{\omega_0}{2} f_{1s}(x, t),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + T_2^{-1} P &= \frac{d^2}{h} N \mathcal{E} \sin \Phi + \frac{\omega_0}{2} f_{2s}(x, t), \\ \frac{\partial N}{\partial t} + T_1^{-1} (N - N_{00}) &= -\frac{1}{h} P \mathcal{E} \sin \Phi + \tilde{f}_3(x, t), \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} + c \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} &= -2\pi\omega_0 \frac{P}{\mathcal{E}} \cos \Phi + \frac{\omega_0}{2\mathcal{E}} f_{1c}(x, t), \\ \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} + \Delta\omega &= \frac{d^2}{h} \frac{N \mathcal{E}}{P} \cos \Phi + \frac{\omega_0}{2P} f_{2c}(x, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega - \omega_0, & \Phi &= \Theta_2 - \Theta_1, \\ f_{1c, 2c} &= e_{1\parallel, 2\parallel} \cos \Theta_{1, 2} + e_{1\perp, 2\perp} \sin \Theta_{1, 2}, \\ f_{1s, 2s} &= e_{1\parallel, 2\parallel} \sin \Theta_{1, 2} - e_{1\perp, 2\perp} \cos \Theta_{1, 2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} e_{1\parallel, 2\parallel} \\ -e_{1\perp, 2\perp} \end{array} \right\} &= \frac{2}{T_0 \lambda_0} \int_{t-T_0}^t \int_{x-\lambda_0}^x f_{1, 2}(x', t') \left\{ \begin{array}{l} \cos(\omega_0 t' - k_0 x') \\ \sin(\omega_0 t' - k_0 x') \end{array} \right\} dt' dx', \\ \tilde{f}_3(x, t) &= \frac{1}{T_0 \lambda_0} \int_{t-T_0}^t \int_{x-\lambda_0}^x \tilde{f}_3(x', t') dt' dx'. \end{aligned}$$

Граничные условия возьмем в виде: $\mathcal{E}(0, t) = \mathcal{E}(l, t)$, $\Theta_{1, 2}(0, t) = \Theta_{1, 2}(l, t)$, полагая зеркала в резонаторе идеальными (коэффициент отражения $R = 1$). Полагая флуктуационные силы и производные по времени в (5) равными нулю, легко найти следующие не зависящие от координаты x установившиеся значения амплитуды поля, амплитуды поляризации и т. д.*:

$$\mathcal{E}_0^2 = \gamma \frac{h^2}{d^2 T_1 T_2}, \quad P_0 = \frac{\sigma}{\omega_0} \mathcal{E}_0, \quad N_0 = \frac{N_{00}}{1 + (T_1 T_2 d^2 / h^2) \mathcal{E}_0^2}, \quad \Phi = \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{N_{00} - N_0}{N_0}.$$

Вопросы устойчивости стационарного режима в принятых предположениях рассматривались в [10]. Мы не будем на них останавливаться. Отметим лишь, что при $\gamma < \gamma_0$ режим одной бегущей волны оказывается устойчивым. Значение γ_0 дано в [10]. При $T_1 \gg T_2$ $\gamma_0 \approx 8$. Разбиваем, как обычно, переменные $\mathcal{E}(x, t)$, $P(x, t)$ и т. д. на детерминированные и флуктуационные части:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &= \mathcal{E}_0(1 + \alpha(x, t)), & P(x, t) &= P_0(1 + \rho(x, t)), \\ N(x, t) &= N_0(1 + n(x, t)), \\ \Theta_1(x, t) &= \Theta_{10} + \varphi(x, t), & \Theta_2(x, t) &= \Theta_{20} + \psi(x, t), & \Phi &= \Phi_0 + \vartheta. \end{aligned}$$

* Ниже везде предполагается отсутствие расстройки: $\Delta\omega = 0$.

Подставляя эти величины в (5) и ограничиваясь случаем $\langle \alpha^2 \rangle$, $\langle \rho^2 \rangle$, $\langle n^2 \rangle$, $\langle \varphi^2 \rangle \ll 1$, получим следующие флуктуационные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + c \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= 2\pi\sigma(\rho - \alpha) + \frac{\omega_0}{2\mathcal{E}_0} f_{1s}(x, t), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + T_2^{-1}\rho &= T_2^{-1}(\alpha + n) + \frac{\omega_0}{2P_0} f_{2s}(x, t), \\ \frac{\partial n}{\partial t} + T_1^{-1}n &= -T_1^{-1}\gamma(\alpha + \rho) + \frac{1}{N} \tilde{f}_3(x, t), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 2\pi\sigma(\psi - \varphi) + \frac{\omega_0}{2\mathcal{E}_0} f_{1c}(x, t), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -T_2^{-1}(\psi - \varphi) + \frac{\omega_0}{2P_0} f_{2c}(x, t). \end{aligned} \quad (7)$$

2. АМПЛИТУДНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ПОЛЯ

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением флуктуационных процессов в области частот, много меньших полосы поляризации T_2^{-1} . В этом случае первые три уравнения системы (7) статистически эквивалентны [11] следующим:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + c \frac{\partial \alpha}{\partial x} = p_{12}n + \frac{\omega_0}{2\mathcal{E}_0} (e_{1\perp} + 2\pi\omega_0 T_2 e_{2\perp}); \quad (8a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -p_{21}\alpha - p_{22}n + \frac{1}{N} \left(\tilde{f}_3 - \frac{\omega_0 T_2 \mathcal{E}_0}{2h} e_{2\perp} \right); \quad (8b)$$

$$\rho = \alpha + n + \frac{\omega_0 T_2}{2P_0} f_{2s}(x, t). \quad (8в)$$

Здесь $p_{12} = 2\pi\sigma$, $p_{21} = 2T_1^{-1}\gamma$, $p_{22} = T_1^{-1}(\gamma + 1)$. От системы (8) легко перейти к флуктуационному уравнению для $\alpha(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t \partial x} + p_{22} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + p_{22}c \frac{\partial \alpha}{\partial x} + p_{12}p_{21}\alpha = F(x, t). \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{p_{22}\omega_0}{2\mathcal{E}_0} \left(e_{1\perp} + p_{22}^{-1} \frac{\partial e_{1\perp}}{\partial t} + 2\pi\omega_0 T_2 e_{2\perp} + \right. \\ &\left. + 2\pi\omega_0 T_2 p_{22}^{-1} \frac{\partial e_{2\perp}}{\partial x} \right) + \frac{p_{12}}{N} \left(\tilde{f}_3 - \frac{\omega_0 T_2 \mathcal{E}_0}{2h} e_{2\perp} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (9) будем решать при граничных условиях

$$\alpha(0, t) = \alpha(l, t). \quad (11)$$

Из (9), (10) с учетом (11) можно найти следующее выражение для спектра мощности амплитудных флуктуаций:

$$S_{\alpha}(\Omega) = \frac{S_F(\Omega)}{2cp_{12}p_{21}p_{22}} \times \frac{\text{sh} [(p/\Omega_{\text{mod}})p_{22}^2/(\Omega^2 + p_{22}^2)]}{\text{ch} \left(\frac{p}{\Omega_{\text{mod}}} \frac{p_{22}^2}{\Omega^2 + p_{22}^2} \right) - \cos \frac{\Omega}{\Omega_{\text{mod}}} \left(1 - \frac{p}{p_{22}} \frac{p_{22}^2}{\Omega^2 + p_{22}^2} \right)}$$
(12)

Здесь $p = p_{12}p_{21}/p_{22}$ (физический смысл параметра p будет определен ниже), $S^F(\Omega)$ — спектральная плотность случайной силы $F_{\alpha}(x, t)$, равная

$$S^F(\Omega) = \frac{D_1}{4\pi} \frac{\omega_0^2}{4\mathcal{E}_0^2} (p_{22}^2 + \Omega^2) + \frac{D_2^2}{4\pi} \frac{\omega_0^4 T_2^2 \pi^2}{\mathcal{E}_0^2} (T_1^{-2} + \Omega^2) + \frac{p_{12}^2}{N^2} S_{\tilde{f}_2}$$
(13)

Спектральная плотность амплитудных флуктуаций не зависит от x вследствие однородности поля внутри резонатора. (Влияние $R \neq 1$ на координатную зависимость S_{α} можно учесть аналогично [6].)

Перейдем теперь к исследованию формы спектра амплитудных флуктуаций. Рассмотрим сначала область частот много меньше Ω_{mod} — межмодового расстояния холодного резонатора. В этой области выражение для $S_{\alpha}(\Omega)$ запишется следующим образом:

$$S_{\alpha}(\Omega) = \frac{S_F(\Omega)}{l} \frac{1}{(p_{12}p_{21} - \Omega^2)^2 + p_{22}^2 \Omega^2}$$
(14)

Если выполняется неравенство $p_{22} \gg p$, то выражение (14) еще более упростится:

$$S_{\alpha}(\Omega) = \frac{S_F(0)}{lp_{22}^2} \frac{1}{p^2 + \Omega^2}$$
(15)

Величина p_{22}^{-1} есть время инерции населенности (см. 8б). Таким образом, при малой инерции населенности спектральная плотность амплитудных флуктуаций имеет резонансную форму с шириной p . Поэтому можно сказать, что по своему смыслу характерная частота p есть прочность предельного цикла безынерционного генератора. Если выполняется обратное неравенство ($p_{22} \ll p$), то из-за большой инерционности населенности последняя не успевает следить за изменениями амплитуды. Вследствие этого в спектре амплитудных флуктуаций появится характерный максимум на частоте $\Omega_0 \approx (pp_{22})^{1/2}$ (рис. 1). С уменьшением p_{22} (инерционность населенности увеличится) этот максимум сме-

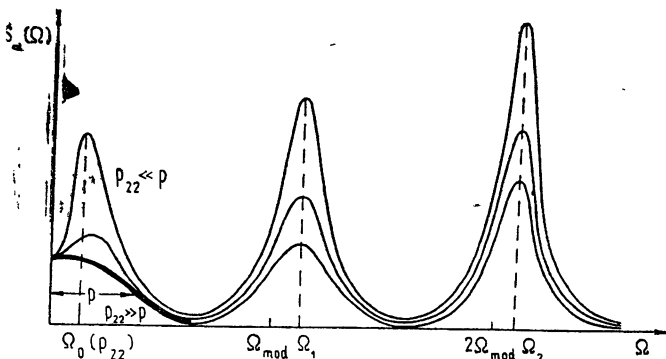


Рис. 1.

щается к началу координат, делается уже и выше. Отметим, что аналогичная «эволюция» спектра амплитудных флуктуаций в зависимости от времени инерции нелинейного элемента наблюдается и в сосредоточенном генераторе с инерционной нелинейностью [12] (см. также [13]).

Сделаем некоторые оценки. Пусть $T_1 \sim 10^{-4}$ сек, $T_2 \sim 10^{-11}$ сек, $p_{12}^{-1} \approx 10^{-6}$ сек, $\gamma \approx 1$, тогда $p \approx 10^6$ гу, $\Omega_0 \approx 1,4 \cdot 10^5$ гу.

Рассмотрим теперь область частот $\Omega \gg \Omega_{\text{mod}}$, $\Omega \gg p_{22}$. В этой области форма спектра амплитудных флуктуаций выразится следующей формулой*:

$$S_\alpha(\Omega) = \frac{S_0}{c \Omega_{\text{mod}}} \frac{1}{1 + \frac{p^2 p_{22}^4}{\Omega_{\text{mod}}^2} \Omega^{-4} - \cos \frac{\Omega}{\Omega_{\text{mod}}} \left(1 - \frac{p p_{22}}{\Omega^2}\right)} \quad (16)$$

Здесь

$$S_0 = \frac{\pi \omega_0^4 T_2^2 D_2}{4 \mathcal{E}_0^2}$$

Спектр амплитудных флуктуаций на частотах Ω_n , удовлетворяющих уравнению $\Omega_n / \Omega_{\text{mod}} (1 - p p_{22} / \Omega_n^2) = 2n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), имеет максимумы, расстояние между которыми меньше Ω_{mod} , но стремится к Ω_{mod} с увеличением частоты. Наличие максимумов объясняется тем, что возмущения поля, из которых складываются амплитудные флуктуации, через τ_0 — время пробега вдоль кольцевого резонатора длины l , снова возвращаются в прежнюю точку. Естественно ожидать, что на частотах Ω_n , приблизительно кратных обратному времени пробега τ_0^{-1} , в спектре амплитудных флуктуаций будут всплески. Независимость максимумов связана, очевидно, с наличием инерционности, которая приводит к временной дисперсии для флуктуаций. С увеличением номера максимума величина его растет, он делается уже. Из (16) видно, что

$$\frac{S_{\alpha \text{ max}}(\Omega_n)}{S_{\alpha \text{ max}}(\Omega_k)} = \frac{\Omega_n^4}{\Omega_k^4},$$

а ширина n -го максимума пропорциональна $p p_{22}^2 / \Omega_n^2$. Такое поведение можно качественно пояснить следующим образом: с увеличением частоты величина инерционной нелинейности уменьшается (инерционная населенность не успевает реагировать на быстрые возмущения поля). Вследствие этого высокочастотные компоненты возмущений поля затухают слабее, а максимумы становятся выше и уже**. Еще раз подчеркнем, что эти рассуждения справедливы лишь в области частот, много меньших полосы поляризации. В области частот, сравнимых с T_2^{-1} , амплитуда поляризации уже не успевает следить за амплитудой поля. Поэтому требуется учесть инерцию поляризации. Учет последней приводит к уменьшению $S_\alpha(\Omega)$ с ростом частоты. Общий вид спектральной плотности $S_\alpha(\Omega)$ в области частот $\ll T_2^{-1}$ показан на рис. 1.

* Оценки показывают, что в указанной области частот основной вклад в амплитудные флуктуации дает шумовой источник f_2 . В (16) это учтено.

** Возмущению, распространяющемуся без затухания, соответствует в спектральный набор δ -функций

3. ШИРИНА СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ АВТОКОЛЕБАНИЯ

От последних двух уравнений системы (7) можно перейти к флуктуационному уравнению для фазы поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + (p_{12} + T_2^{-1}) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c T_2^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \\ = \frac{\omega_0 T_2^{-1}}{2 \mathcal{E}_0} (f_{1c} + 2\pi\omega_0 T_2^{-1} f_{2c}) \end{aligned} \quad (17)$$

с граничными условиями $\varphi(0, t) = \varphi(l, t)$. Это уравнение полностью совпадает с рассмотренным в [6], поэтому мы не будем останавливаться на анализе последнего. Подставляя в формулу (18) работы [6] значение мощности случайных источников (1а)—(2а), получим следующее выражение для ширины спектральной линии автоколебания, которое совпадает с найденным в [1]:

$$\Delta \Omega_{R=1} = \frac{4\pi\sigma h \omega_0}{\mathcal{E}_0^2 l} \left(\bar{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{N'}{N} \right). \quad (18)$$

Здесь \bar{n} — среднее число фотонов в равновесном состоянии.

Представляет интерес найти поправку к ширине линии автоколебания, обусловленную неоднородностью пространства ($R \neq 1$). Можно показать, что в этом случае уравнение (17) останется по форме тем же, однако появится следующая зависимость коэффициента p_{12} от координаты:

$$p_{12} = \frac{2\pi\omega_0 T_2 d^2 h^{-1} N_0}{1 + (T_1 T_2 d^2 / h^2) \mathcal{E}^2(x)},$$

где $\mathcal{E}(x)$ — установившееся значение амплитуды поля при $R \neq 1$, которое, как это видно из (5), удовлетворяет следующему уравнению:

$$c \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = \frac{2\pi\omega_0 T_2 d^2 h^{-1} N_0 \mathcal{E}}{1 + T_1 T_2 d^2 h^{-2} \mathcal{E}^2} - 2\pi\omega \mathcal{E}, \quad (19)$$

с граничным условием $\mathcal{E}(0) = R \mathcal{E}(l)$.

Из (17) с учетом зависимости p_{12} от координаты можно найти спектр фазовых флуктуаций $S_\varphi(\Omega, x)$, с помощью которого легко определяется ширина спектральной линии колебаний:

$$\Delta \Omega_{R \neq 1} = \Delta \Omega_{R=1} \frac{\mathcal{E}_0^2}{l} \int_0^l \mathcal{E}^{-2}(x) dx. \quad (20)$$

Как это видно из (20), ширина спектральной линии колебания не зависит от координаты даже в случае неоднородности поля в резонаторе (см. также [6]). Вместе с тем, ширина спектральной линии существенно зависит от коэффициента отражения. В общем виде эту связь записать не удается вследствие того, что затруднительно найти явную зависимость амплитуды поля от координаты. В случае небольшого превышения над порогом ($\gamma \ll 1$), решение (19) при граничных условиях $\mathcal{E}(0) = R \mathcal{E}(l)$ имеет вид [6]

$$\mathcal{E}^2(x) = \frac{1}{\eta} \frac{1}{1 + A \exp(-\Omega_1 x/c)}. \quad (21)$$

Здесь

$$\eta = \frac{d^4 T_2^{-1} N_0 4\pi\omega_0 T_1}{h^3 \Omega_1}, \quad \Omega_1 = 2 \left(\frac{2\pi\omega_0 d^2 T_2 N_0}{h} - 2\pi\sigma \right),$$

A — константа, определяемая из граничных условий, равная*

$$A = \frac{1 - R}{R - \exp(-\Omega_1 l/c)}.$$

Подставляя (21) в (20), получим

$$\Delta\Omega_{R \neq 1} = \Delta\Omega_{R=1} \eta \mathcal{E}_0^2 \left[1 + \frac{1 - \exp(-\Omega_1/\Omega_{\text{mod}})}{\Omega_1/\Omega_{\text{mod}}} \frac{1 - R}{R - \exp(-\Omega_1/\Omega_{\text{mod}})} \right]. \quad (22)$$

Отметим следующее обстоятельство: значение ширины линии (20) можно, вообще говоря, получить из сосредоточенной модели, если ввести эффективные потери

$$\sigma_{\text{эфф}} = \sigma \frac{\mathcal{E}_0^2}{l} \int_0^l \mathcal{E}^{-2}(x) dx,$$

учитывающие влияние потерь на зеркалах на ширину линии. Вместе с тем, как это видно из (20), (22), эффективные потери вовсе не определяются лишь свойствами холодного резонатора, а существенно зависят еще и от параметров активной среды, что не очевидно при рассмотрении сосредоточенной модели [3].

С уменьшением R ширина линии увеличивается вследствие уменьшения добротности резонатора. Оценим это увеличение. Пусть $\Omega_1/\Omega_{\text{mod}} \approx 0,05$. Тогда при $R = 0,98$, $\Delta\Omega_{R \neq 1} = 1,7 \Delta\Omega_{R=1}$, если же $R = 0,96$, то $\Delta\Omega_{R \neq 1} = 5 \Delta\Omega_{R=1}$ (при этом добротность, определяемая потерями на зеркалах, уменьшается вдвое).

В заключение отметим, что, кроме флуктуаций амплитуды и фазы, автоколебание, распространяющееся в шумящей среде, обладает флуктуациями длины волны (волнового числа) и фазовой скорости. Можно показать, что флуктуационные уравнения для этих величин совпадают с рассмотренными в [6], вследствие чего совпадают и их статистические характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Arzt, H. Haken, H. Risken, H. Sauermann, Ch. Schmid und W. Weidlich, *Zeitschrift für Physik*, **197**, 207 (1966).
2. M. Lax, *IEEE J. of Quantum Electronics*, **QE-3**, № 2 (1967).
3. И. Л. Берштейн, И. А. Андропова, Ю. И. Зайцев, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **10**, № 1, 59 (1967).
4. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, *ЖЭТФ*, **56**, 275 (1969).
5. R. Graham und H. Haken, *Zeitschrift für Physik*, **213**, 420 (1968).
6. А. Н. Малахов, М. С. Сандлер, *Радиотехника и электроника*, **16**, № 3, 299 (1971).
7. С. М. Рытов, *Введение в статистическую радиофизику*, изд Наука, М., 1966.
8. В. М. Файн, *ЖЭТФ*, **33**, 945 (1957).
9. M. Lax, *Phys. Rev.*, **145**, 110 (1966).

* Безразмерный параметр $\Omega_1 l/c = \Omega_1/\Omega_{\text{mod}}$ определяется степенью превышения над порогом и для рассматриваемого случая много меньше единицы.

10. H. Risken, K. Nummedal, J. Appl. Phys., **39**, 4662 (1968).
11. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968
12. А. Н. Малахов, М. С. Сандлер, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **12**, № 1, 72 (1969).
13. D. E. McCumber, Phys. Rev., **141**, 306 (1966).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
14 июля 1970 г.

INVESTIGATION OF INHERENT LASER FLUCTUATIONS WITH ALLOWANCE
FOR THE LUMPED PARAMETERS

A. N. Malakhov, M. S. Sandler

The fluctuations in a lumped traveling-wave laser model are considered. The spectral characteristics of amplitude and phase fluctuations are found, as well as the spectral line width of oscillation.

УДК 538.56 : 519.25

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КИРХГОФА К ЗАДАЧЕ О РАССЕЯНИИ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕРОВНОСТЯМИ

Ю. А. Кравцов, И. М. Фукс, А. Б. Шмелев

В работе последовательно применяется метод Кирхгофа к задаче о нахождении статистических характеристик рассеянной случайно неровной поверхностью звуковой волны. Рассмотрение ведется в пренебрежении затенениями и многократным перерассеянием.

Найденные выражения для рассеянного поля, его среднего значения и корреляционной функции справедливы при более общих условиях, чем полученные ранее результаты других авторов. Кроме того, установлены пределы применимости некогерентного сложения интенсивностей волн, рассеянных отдельными элементами неровной поверхности. Показано, что условия некогерентного сложения интенсивностей являются менее жесткими, чем требование удаления точки наблюдения и источника в зону Фраунгофера по отношению к отдельной неровности

В предположении, что высота неровностей распределена по нормальному закону при наличии одного масштаба корреляции, даны оценки радиусов продольной и поперечной корреляции рассеянного поля в дальней зоне отдельной неоднородности, как при малых, так и при больших по сравнению с длиной волны высотах неровностей.

Наиболее распространенным методом изучения статистических характеристик поля, рассеянного случайно неровной поверхностью, является метод Кирхгофа, впервые примененный к этой проблеме Исаковичем [1]. В пренебрежении затенениями для плоской первичной волны в [1] были получены выражения для среднего значения и средней интенсивности рассеянного поля в зоне Фраунгофера шероховатой площадки S конечных размеров. В последующих работах [2-4] рассматривался более общий случай, когда наблюдение производится не в дальней зоне по отношению к S и, в частности, когда поверхность S является неограниченной. Однако полученные там результаты справедливы лишь вблизи определенных выделенных направлений наблюдения, а именно — направлений зеркального отражения [2, 3] и обратного рассеяния [4]. Для нормального падения плоской волны и углов наблюдения, близких к нулю, в [3] установлена аналогия между рассеянием на неровной поверхности и дифракцией на хаотически неоднородном фазовом экране, а также приведены оценки радиусов поперечной корреляции рассеянного поля для поверхности с двумя масштабами неровностей. Наконец, в [5] на основании гипотезы некогерентного сложения интенсивностей волн, переизлученных отдельными элементами неровной поверхности, получены выражения для средней интенсивности рассеяния в произвольном направлении наблюдения.

В данной работе последовательно применяется метод Кирхгофа к нахождению статистических характеристик звуковой волны, рассеянной на шероховатой в среднем плоской поверхности S как конечной, так и бесконечно протяженной. Особенностью рассмотрения является использование (как в [6]) формулы Вейля, дающей разложение поля точечного источника по плоским волнам. При вычислении среднего зна-

чения рассеянного поля в основном используется представление первичной волны в виде суперпозиции плоских волн, в расчетах корреляционной функции и средней интенсивности применяется описание падающего поля в приближении геометрической оптики.

Полученные в работе результаты справедливы, в отличие от [2-4], при произвольных направлениях наблюдения, для которых еще несущественны затенения и многократные переотражения. Кроме того, показано, что некогерентное сложение интенсивностей [5] имеет место при менее жестких условиях, чем требование удаления точки наблюдения и источника в дальнюю зону отдельной неровности. В предположении, что высота неровностей распределена по нормальному закону при наличии одного масштаба корреляции, найдены оценки радиусов продольной и поперечной корреляции рассеянного поля в дальней зоне отдельной неоднородности при падении на поверхность как плоской, так и сферической волны. Эти оценки подтверждают отмеченную в [3] аналогию с дифракцией на неоднородном фазовом экране.

1. Пусть на статистически неровную в среднем плоскую* поверхность $z = \zeta(x, y)$ падает звуковая волна

$$\Phi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{i\psi(\mathbf{r})}, \quad (1)$$

где $A(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{r})$ — медленно меняющиеся функции координат, характерный масштаб изменения которых L велик по сравнению с длиной волны, т. е.

$$kL \gg 1. \quad (2)$$

Геометрическая схема рассеяния на неровной поверхности S показана на рис. 1.

Значение отраженного поля в точке наблюдения R связано со значениями отраженного поля φ и его нормальной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на поверхности S формулой Грина

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \right) dS. \quad (3)$$

В приближении Кирхгофа на границе раздела S имеют место следующие соотношения:

$$\varphi = V\Phi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -V \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad (4)$$

где $V = V(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ — локальный френелевский коэффициент отражения. Будем считать, что точка наблюдения лежит выше любой точки неровной поверхности, т. е.

$$Z - \zeta(x, y) \geq 0. \quad (5)$$

Запишем тогда разложение поля точечного источника по формуле Вейля

$$\frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{R}-\mathbf{r})} \frac{d^2 x_{\perp}}{x_3}, \quad (6)$$

* Это предположение не является, по-видимому, необходимым (см. [2]), но мы принимаем его, чтобы не усложнять выкладки.

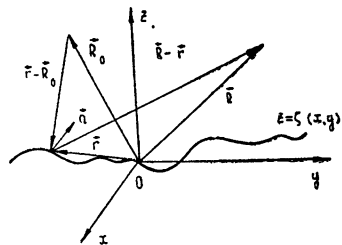


Рис. 1.

где

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_\perp, x_3) \text{ и } x_3 = \sqrt{k^2 - x_\perp^2}.$$

Подстановка (4) и (6) в (3) с учетом (1) дает

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S V e^{i\mathbf{x}\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial n} [A e^{i\psi - i\mathbf{x}\mathbf{r}}] dS \frac{d^2 \mathbf{x}_\perp}{x_3}. \quad (7)$$

При условии нахождения источника первичной волны в зоне Фраунгофера по отношению к высоте неровностей σ ,

$$\frac{k \sigma^2}{L} \ll 1, \quad (8)$$

выражение (7) нетрудно представить в следующем виде:

$$\varphi(\mathbf{R}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S V A_0 e^{i\mathbf{x}\mathbf{R}} (nq) \exp [i(\psi_0 - \mathbf{x}_\perp \mathbf{r}_\perp + q_3 \zeta)] dS \frac{d^2 \mathbf{x}_\perp}{x_3}, \quad (9)$$

где

$$A_0 = A(\mathbf{x}, y, 0), \quad \psi_0 = \psi(\mathbf{x}, y, 0) \text{ и } \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) = \nabla \psi(\mathbf{x}, y, 0) - \mathbf{x}.$$

Для перехода к интегрированию в (9) по подстилающей плоскости S_0 воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial e^{i\gamma}}{\partial(x, y)} = i \left[q_{1,2} + q_3 \frac{\partial \zeta}{\partial(x, y)} + \zeta \frac{\partial q_3}{\partial(x, y)} \right] e^{i\gamma}, \quad (10)$$

где $\gamma = \psi_0 - \mathbf{x}_\perp \mathbf{r}_\perp + q_3 \zeta$. Пренебрегая в (10) малой величиной $\zeta \frac{\partial q_3}{\partial(x, y)} \sim \frac{k \sigma}{L}$ и проводя выкладки, аналогичные описанным в [1, 5], приходим к окончательному выражению для рассеянного поля:

$$\varphi(\mathbf{R}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_0} V A_0 e^{i\mathbf{x}\mathbf{R}} \frac{q^2}{q_3 x_3} \exp [i(\psi_0 - \mathbf{x}_\perp \mathbf{r}_\perp + q_3 \zeta)] d^2 \mathbf{r}_\perp d^2 \mathbf{x}_\perp. \quad (11)$$

Отметим, что с самого начала вместо (1) можно использовать представление падающего поля в виде суперпозиции плоских волн

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}_\perp) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^2 \mathbf{k}_\perp, \quad (12)$$

где $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_\perp, k_3)$, $k_3 = -\sqrt{k^2 - k_\perp^2}$. Выкладки, вполне аналогичные описанным выше, приводят тогда к следующему динамическому соотношению для рассеянного поля:

$$\varphi(\mathbf{R}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_0} \int V A(\mathbf{k}_\perp) \frac{q^2}{q_3 x_3} e^{i\mathbf{x}\mathbf{R} + i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^2 \mathbf{r}_\perp d^2 \mathbf{x}_\perp d^2 \mathbf{k}_\perp, \quad (13)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{x}$.

Формула (13), в отличие от (11), остается справедливой и тогда, когда условие (8) нарушено. Что же касается неравенства (2), то мы и в этом случае будем считать его выполненным для того, чтобы поверх

ность находилась в волновой зоне по отношению к источнику первичной волны.

Подчеркнем, что по формулам (11) и (13) можно вычислять поле, рассеянное как ограниченной, так и бесконечной поверхностью при весьма слабом условии (5), налагаемом на положение точки наблюдения относительно неровностей*.

При выполнении несколько более жестких условий

$$kZ \gg 1, \quad Z \gg \sigma \quad (14)$$

экспоненциальный множитель e^{ikR_1} в (11), где $R_1 = (X_1, Y_1, Z) = (X - x, Y - y, Z)$ быстро осциллирует, что позволяет вычислить двойной интеграл по \mathbf{x}_\perp методом стационарной фазы. При этом получаем более простое, по сравнению с (11), выражение для рассеянного поля:

$$\varphi(\mathbf{R}) = \frac{i}{4\pi} \int_{S_0} VA_0 \frac{\exp(ikR_1 + i\psi_0)}{R_1} \frac{q^2}{q_3} e^{iq_3 z} d^2\mathbf{r}_\perp, \quad (15)$$

в котором $\mathbf{q} = \nabla\psi(x, y, 0) - \chi$, а $\chi = k(\mathbf{R}_1/R_1)$ — волновой вектор, направленный из точки интегрирования в точку наблюдения.

Для направлений наблюдения, близких к направлению зеркального отражения, когда $q_1 \approx q_2 \approx 0$ и $q^2/q_3 \approx q_3$, результат (15) находится в согласии с выражением для рассеянного поля, полученным для пологих неровностей Чаевским [2], который рассмотрел также и случай в среднем неплоской поверхности. В случае нормального падения плоской волны на поверхность формула (15) эквивалентна динамическому соотношению, найденному в [3]. Наконец, при удалении точки наблюдения в зону Фраунгофера по отношению к площадке конечных размеров S_0 приходим к выражению для рассеянного поля, полученному в [1].

2. Усредняя (13) по ансамблю поверхностей и считая поверхность абсолютно жесткой ($V = 1$), получаем выражение для среднего поля:

$$\langle \varphi(\mathbf{R}) \rangle = -\frac{1}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \int_{S_0} A(\mathbf{k}_\perp) \frac{q^2}{q_3^2} f_{1c}(q_3) \exp(i\mathbf{x}\mathbf{r} + iq_\perp \mathbf{r}_\perp) d^2\mathbf{r}_\perp d^2\mathbf{x}_\perp d^2\mathbf{k}_\perp, \quad (16)$$

где $f_{1c}(q_3)$ — одномерная характеристическая функция неровностей.

В частном случае бесконечной рассеивающей поверхности.

$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iq_\perp \mathbf{r}_\perp) d^2\mathbf{r}_\perp = (2\pi)^2 \delta(q_\perp)$ и дальнейшее интегрирование в (16) по \mathbf{x}_\perp приводит к результату

$$\langle \varphi(\mathbf{R}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A(\mathbf{k}_\perp) \exp(ik_\perp R_\perp - ik_3 Z) f_{1c}(2k_3) d^2\mathbf{k}_\perp. \quad (17)$$

Таким образом, среднее значение отраженного от бесконечной неровной поверхности поля представляется в виде суперпозиции плоских волн, отраженных под разными углами, причем каждая из них входит со своим коэффициентом отражения $V_{\text{эфф}} = f_{1c}(2k_3)$.

В частности, если падающее поле представляет собой плоскую волну $\Phi(\mathbf{r}) = e^{ik_0 r}$, то

$$\langle \varphi(\mathbf{R}) \rangle = f_{1c}(2k_{03}) \exp(ik_{0\perp} R_\perp - ik_{03} Z). \quad (18)$$

* Аналог формулы (11) для плоской волны и направления зеркального отражения был получен Ю. Е. Дьяковым и Л. П. Цеге (доклад на семинаре по статистической радиофизике, ФИАН, 1968 г.).

Заметим, что формула (18) следует также из результатов работы [2], но при более жестких условиях, чем использованные в нашем выводе.

Формулы (16) — (18) справедливы при весьма слабом условии (5) относительно положения точки наблюдения в верхнем полупространстве.

Интегрируя усредненное выражение (15) методом стационарной фазы, получаем

$$\langle \varphi(\mathbf{R}) \rangle = f_{1c}(q_3 c) \varphi^{(0)}(\mathbf{R}), \quad (19)$$

где нижний индекс «с» означает, что соответствующая величина взята в стационарной точке, а $\varphi^{(0)}(\mathbf{R})$ — поле, регулярно отраженное плоской площадкой S_0 и вычисленное в приближении геометрической оптики. Формула (19), в отличие от (16) — (18), справедлива при более жестких, чем (5), условиях (14). Кроме того, должно выполняться неравенство

$$kR_c \gg \begin{cases} (k\sigma)^2, & \text{если } (k\sigma)^2 \ll 1 \\ (k\sigma)^4, & \text{если } (k\sigma)^2 \gg 1 \end{cases}, \quad (20)$$

где R_c — величина порядка $\min(R_{0c}, R_{1c})$. Это неравенство обеспечивает малость изменения характеристической функции в пределах области, существенной для интегрирования в усредненном выражении (15).

Выражение (19) было получено ранее в [2] в предположении, что неровности являются пологими: $\sigma/l \ll 1$, где l — масштаб корреляции неровностей. В нашем выводе, в отличие от [2], требование достаточной пологости неровностей использовано лишь в той мере, в какой мы не учитываем затенения и многократное перерассеяние.

3. Вычислим корреляционную функцию рассеянного поля $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = \langle \varphi(\mathbf{R}) \varphi^*(\mathbf{R}') \rangle - \langle \varphi(\mathbf{R}) \rangle \langle \varphi^*(\mathbf{R}') \rangle$. Используя (11), в случае плоской волны, падающей на статистически однородные неровности, после перехода к новым переменным интегрирования

$$\rho = \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp, \quad \xi = \frac{\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}'_\perp}{2} \quad (21)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{R}, \mathbf{R}') = & \frac{1}{(8\pi^2)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\mathbf{x}\mathbf{R} - \mathbf{x}'\mathbf{R}')] \frac{q^2 q'^2}{q_3 x_3 q_3' x_3'} \times \\ & \times \int_{S_0} \int_{-\infty}^{\infty} [f_{2c}(q_3, -q_3', \rho) - f_{1c}(q_3) f_{1c}(-q_3')] \exp\left[i\rho \frac{(q_\perp + q'_\perp)}{2} + \right. \\ & \left. + i\xi(q_\perp - q'_\perp)\right] d^2\rho d^2\xi d^2\mathbf{x}_\perp d^2\mathbf{x}'_\perp. \end{aligned} \quad (22)$$

Пределы интегрирования по ρ в (22) распространены до бесконечности в связи с предполагаемой малостью радиусов корреляции по сравнению с размерами площадки S_0 .

Для бесконечной поверхности интегрирование по ξ дает $(2\pi)^2 \delta(q_\perp - q'_\perp) = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)$, и дальнейшее интегрирование по \mathbf{x}'_\perp приводит к результату

$$\Psi(R, R') = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i \mathbf{x}R - i \mathbf{x}'R') \left| \frac{q^2}{q_3 x_3} \right|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq_{\perp} \rho} \times \quad (23)$$

$$\times [f_{2\zeta}(q_3, -q_3^*, \rho) - f_{1\zeta}(q_3) f_{1\zeta}(-q_3^*)] d^2 \rho d^2 \mathbf{x}_{\perp}.$$

Очевидно, корреляционная функция (23) зависит в плоскости $z = \text{const}$ только от разности координат точек наблюдения, как это и должно быть при рассеянии плоской волны на безграничной, статистически однородной поверхности.

Для трансформанты Фурье от корреляционной функции (23) по поперечным координатам

$$F(\mathbf{p}_{\perp}, Z, Z') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(R, R') \exp[-ip_{\perp}(R-R')_{\perp}] d^2(R-R')_{\perp} \quad (24)$$

получаем выражение

$$F(\mathbf{p}_{\perp}, Z, Z') = \frac{\exp(ip_3 Z - ip_3^* Z')}{16\pi^2} \left| \frac{q^2}{q_3 p_3} \right|^2 \times \quad (25)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq_{\perp} \rho} [f_{2\zeta}(q_3, -q_3^*, \rho) - f_{1\zeta}(q_3) f_{1\zeta}(-q_3^*)] d^2 \rho,$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{p}$, $p_3 = \sqrt{k^2 - p_{\perp}^2}$.

Положив в (25) $Z = Z'$, получаем пространственную спектральную плотность рассеянного поля в плоскости $z = \text{const}$. Свойства интеграла, входящего в (25), достаточно хорошо изучены при вещественном q_3 как для поверхности с нормальным распределением высоты неровностей [5, 7, 8], так и в случае произвольной функции распределения случайных отклонений [9, 10].

4. До сих пор при вычислении корреляционной функции мы предполагали выполненным лишь неравенство (5). Пусть теперь точки наблюдения расположены достаточно высоко над неровностями, так что выполняются условия (14). Тогда, используя (15), находим

$$\Psi(R, R') = \frac{1}{16\pi^2} \int_{S_0} \int_{S'_0} \frac{\exp[ik(R_1 - R'_1)]}{R_1 R'_1} A_0 A'_0 \frac{q^2 q'^2}{q_3 q'_3} \times \quad (26)$$

$$\times [f_{2\zeta}(q_3, -q'_3, \mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}'_{\perp}) - f_{1\zeta}(q_3) f_{1\zeta}(-q'_3)] \exp[i\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) - i\psi(\mathbf{x}', \mathbf{y}', 0)] d^2 \mathbf{r}_{\perp} d^2 \mathbf{r}'_{\perp},$$

где

$$q = \nabla\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) - \chi, \quad q' = \nabla\psi(\mathbf{x}', \mathbf{y}', 0) - \chi', \quad \chi = k(R_1/R_1), \quad \chi' = kR'_1/R'_1.$$

Из (26) вытекает аналогия между рассеянием волны статистически неровной поверхностью и дифракцией на хаотически неоднородном экране S_0 , на котором задано случайное граничное условие:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=0} = A_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) e^{i\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)} \frac{q^2}{2q_3} \exp[iq_3 \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{y})]. \quad (27)$$

Действительно, корреляционная функция дифрагированного на случай-

ном экране S_0 поля, как можно показать (см., например, [11]), при граничном условии (27) имеет вид (26).

Подобная аналогия, но с дифракцией на чисто фазовом экране, была ранее установлена Тамойкинским и Фрайманом [3] в случае нормального падения плоской волны на шероховатую поверхность.

Если неровности поверхности статистически однородны, то, введя в (26) новые переменные интегрирования (21), получаем

$$\Psi(R, R') = \frac{1}{16\pi^2} \int_{S_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_0^2 e^{i\alpha}}{R_2 R_2'} \frac{q^2 q'^2}{q_3 q_3'} [f_{2c}(q_3, -q'_3, \rho) - f_{1c}(q_3) f_{1c}(-q'_3)] d^2 \rho d^2 \xi. \quad (28)$$

В (28) значения неосциллирующих множителей заменены их величинами в точке ξ , что возможно при условиях

$$l \ll \min(R_2, R_2', L), \quad |R - R'| \ll \frac{R_2^2}{l_\Phi(k\sigma)^2}, \quad (29)$$

где l_Φ — размер области, существенной для интегрирования по ρ в (28). В случае низких по сравнению с длиной волны неровностей поверхности ($q_3 q_3' \sigma^2 \ll 1$) $l_\Phi = l$, а для высоких неровностей ($q_3 q_3' \sigma^2 \gg 1$) $l_\Phi = l/\sigma \sqrt{q_3 q_3'}$, что по порядку величины равно $l/k\sigma$. Через α в (28) обозначена величина $\alpha = k(t(R_1 - R'_1) + \psi(x, y, 0) - \psi(x', y', 0))$, разложение которой в ряд по степеням $\rho = (\rho_x, \rho_y)$ с точностью до кубических членов включительно имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha = & kR_2 - kR_2' - \frac{k(\rho n_2)}{2} - \frac{k(\rho n_2')}{2} + \frac{k}{8R_2} [\rho^2 - (\rho n_2)^2] - \\ & - \frac{k}{8R_2'} [\rho^2 - (\rho n_2')^2] + \frac{k(\rho n_2)}{16R_2^2} [\rho^2 - (\rho n_2)^2] + \frac{k(\rho n_2')}{16R_2'^2} \times \\ & \times [\rho^2 - (\rho n_2')^2] + \nabla\psi(\xi, 0) \rho + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_x} \rho_x + \frac{\partial}{\partial \xi_y} \rho_y \right)^3 \psi(\xi, 0), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$R_2 = \sqrt{(X - \xi_x)^2 + (Y - \xi_y)^2 + Z^2}, \quad R_2' = \sqrt{(X' - \xi_x)^2 + (Y' - \xi_y)^2 + Z'^2},$$

$$n_2 = \frac{R_2}{R_2}, \quad n_2' = \frac{R_2'}{R_2'}.$$

Существенно, что при совмещении точек наблюдения $R = R'$ из разложения (30) выпадают квадратичные по ρ члены. Тогда при условии

$$R_{\min} \gg l_\Phi \sqrt{kl_\Phi}, \quad (31)$$

где $R_{\min} = \min(R_{01}, R_2)$, $R_{01} = \xi - R_0$, позволяющем для сферической падающей волны пренебречь в (30) кубическими по ρ членами, из (28) вытекает следующее выражение для средней интенсивности:

$$I = \frac{1}{16\pi^2} \int_{S_0} \frac{A_0^2}{R_2^2} \frac{q^4}{q_3^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iq_\perp \rho) [f_{2c}(q_3, -q_3, \rho) - f_{1c}(q_3) f_{1c}(-q_3)] d^2 \rho d^2 \xi. \quad (32)$$

Оно означает, что интенсивности флуктуационной составляющей поля, рассеянного отдельными элементами неровной поверхности, складываются некогерентно, в согласии с гипотезой, высказанной в [5].

Подчеркнем, что условие (31) некогерентного сложения интенсивностей является более мягким, чем требование удаления источника и точки наблюдения во фраунгоферову зону отдельной неоднородности.

Если b — характерный размер рассеивающей поверхности, то при условии

$$\frac{kl_{\Phi}b}{R_{\min}} \ll 1 \quad (33)$$

функцию, стоящую под интегралом, по ρ в (32) можно считать не зависящей от ξ . Если, кроме того, предположить, что $b \ll R_{\min}$, то медленно меняющиеся множители, зависящие от ξ , можно вынести за знак интеграла по ξ . При этом формула (32) переходит в выражение для средней интенсивности рассеянного поля, полученное Исаковичем [1] в предположении, что источник и точка наблюдения удалены в зону Фраунгофера по отношению к S_0 , т. е. при условии

$$\frac{kb^2}{R_{\min}} \ll 1. \quad (34)$$

Как следует из нашего рассмотрения, на самом деле результат М. А. Исаковича справедлив при гораздо более слабом, чем (34), условии (33). Физически неравенство (33) означает, что углы, под которыми видна площадка S_0 из источника и точки наблюдения, должны быть меньше, чем ширина индикатрисы рассеяния.

Результат (33) для шероховатых тел ограниченных размеров был известен и ранее (см., например, работу [12], в которой вычислялось сечение рассеяния шероховатым цилиндром), однако здесь, на наш взгляд, он установлен более последовательно*.

В качестве иллюстрации приведем результаты вычислений по формуле (32) средней интенсивности поля точечного источника, рассеянного назад к передатчику бесконечной поверхностью с нормальным распределением высоты неровностей и гауссовой функцией корреляции:

$$I = \begin{cases} \frac{(k\sigma)^2}{Z^2} [1 - \exp(-k^2 l^2)], & \text{если } (k\sigma)^2 \ll 1 \\ 1/4Z^2, & \text{если } (k\sigma)^2 \gg 1 \end{cases} \quad (35)$$

Последнее выражение для случая $(k\sigma)^2 \gg 1$ ранее было получено в работе [13].

5. Обратимся теперь к вопросу о поведении корреляционной функции рассеянного поля. Будем исходить из выражения (28), причем в разложении (30) фазы α ограничимся лишь членами нулевого и первого порядка по ρ , что возможно при удалении точек наблюдения в зону Фраунгофера по отношению к отдельной неровности, т. е. при выполнении неравенств

$$\frac{kl_{\Phi}^2}{R_2} \ll 1, \quad \frac{kl_{\Phi}^2}{R_2'} \ll 1. \quad (36)$$

Введем векторы $r'' = R - R'$, $R'' = \frac{R+R'}{2}$, $R_3 = R'' - \xi$, $R_{01} = \xi - R_0$,

* Несколько иначе условие (33) получено также в недавно опубликованной работе [15].

$n'' = \frac{R''}{R''}$, $n_3 = \frac{R_3}{R_3}$ и $n_{01} = R_{01}/R_{01}$, геометрический смысл которых

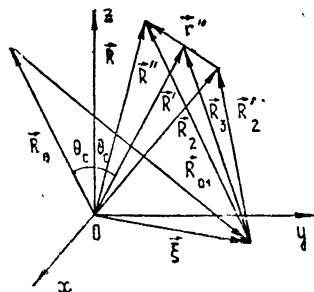


Рис. 2.

ясен из рис. 2. Будем считать далее что начало декартовой системы координат $Oxyz$ совпадает с точкой геометрического отражения волны (1) от плоскости xy в направлении вектора R'' , так что векторы R_0 и R'' на рис. 2 образуют равные углы θ_c с осью z .

Если точки наблюдения разнесены не слишком далеко друг от друга, так что выполняются неравенства

$$R'' \gg \max \{r_{\perp}'' \sqrt{kl\phi}, r_{\parallel}'' \sqrt{kl\phi}, \sqrt{kl\phi} r_{\perp}'' r_{\parallel}''\}, \quad k\sigma \sqrt{r_{\perp}'' r_{\parallel}''}, \quad r_{\perp}'' k\sigma, \quad (37)$$

где r_{\perp}'' и r_{\parallel}'' — величины поперечного и продольного относительно зеркально отраженного луча разнесения точек наблюдения, то, сохраняя в разложении фазы α в ряд по r'' лишь члены нулевого и первого порядков, получаем вместо (28) следующую, более простую формулу для функции корреляции рассеянного поля:

$$\Psi(R'', r'') = \frac{1}{16\pi^2} \int_{S_0} \frac{A_0^2(\xi) \exp[ik(n_3 r'')] }{R_3^2} \frac{q^4}{q_3^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq_{\perp} \rho} \times \\ \times [f_{2c}(q_3, -q_3, \rho) - f_{1c}(q_3) f_{1c}(-q_3)] d^2 \rho d^2 \xi, \quad (38)$$

где $q = \nabla\psi(\xi, 0) - kn_3$.

Предположим теперь, что неровности поверхности статистически изотропны и распределены по нормальному закону с одномасштабной функцией корреляции. Вычисляя тогда внутренний интеграл в (38) в случае малых неровностей поверхности ($2k\sigma \cos \theta_c \ll 1$) и сферической первичной волны, имеем

$$\Psi(R'', r'') = \frac{\sigma^2}{4} \int_{S_0} \frac{\exp[ik(n_3 r'')] }{R_{01} R_3^2} q^4 W(q_{\perp}) d^2 \xi, \quad (39)$$

где $W(q_{\perp})$ — спектральная плотность неровностей поверхности. Учитывая, что подынтегральное выражение в (39) существенно убывает при $q_{\perp} \sim 1/l$ в предположении, что размеры площадки S_0 велики по сравнению с размерами области, существенной для интегрирования, т. е. $b > R_0 R'' / (R_0 + R'') kl \cos^2 \theta_c$, нетрудно получить следующие оценки радиусов поперечной и продольной корреляции рассеянного поля:

$$r_{\perp}'' \sim l \frac{R_0 + R''}{R_0} \cos \theta_c; \quad (40)$$

$$r_{\parallel}'' \sim kl^2 \left(\frac{R_0 + R''}{R_0} \right)^2 \cos^2 \theta_c. \quad (41)$$

Эти оценки ранее были найдены в работе [14], где решение задачи проводилось методом возмущений.

В случае высоких неровностей поверхности ($2k\sigma \cos \theta_c \gg 1$), исполь-

зую асимптотическое выражение для интеграла по ρ в (38), найденное в [10], имеем

$$\Psi(R'', r'') = \frac{1}{4} \int_{s_0}^{\cdot} \frac{\exp [ik(n_3 r'')] }{R_{01}^2 R_3^2} \frac{q^4}{q_3^4} \omega_n \left(\frac{q_{\perp}}{q_3} \right) d^2 \xi, \quad (42)$$

где $\omega_n(\zeta'_x, \zeta'_y)$ — совместная плотность вероятности наклонов неровной поверхности. Для достаточно пологих неровностей подынтегральное выражение в (42) становится малым при $q_{\perp} \sim 1/l_{\phi} \sim 2k\sigma \cos \theta_c/l$. Отсюда для радиусов поперечной и продольной корреляции рассеянного поля получаем при $b > R_0 R'' / (R_0 + R'') k l_{\phi} \cos^2 \theta_c$:

$$r'_{\perp} \sim \frac{l}{2k\sigma} \frac{R_0 + R''}{R_0}; \quad (43)$$

$$r''_{\parallel} \sim \frac{l^2}{4k\sigma^2} \left(\frac{R_0 + R''}{R_0} \right)^2. \quad (44)$$

Полученные оценки допускают простую физическую интерпретацию. В случае поперечного разнесения точек наблюдения рост флуктуационной составляющей разности фаз $\delta\phi$ обусловлен увеличением расстояния между зеркальными точками на плоскости $z = 0$. При этом декорреляция рассеянного поля наступает при $\delta\phi \sim 1$, что соответствует расстоянию между точками геометрического отражения порядка l_{ϕ} . При продольном разнесении точек наблюдения рост $\delta\phi$ происходит за счет приращения линейных размеров зоны Френеля. Волновое поле становится некоррелированным, когда площадь зоны Френеля увеличивается на величину порядка l_{ϕ}^2 . Приведенные физические соображения позволяют путем простых геометрических построений получить те же оценки (40), (41), (43) и (44) радиусов поперечной и продольной корреляции.

Эти оценки подтверждают отмеченную в [3] аналогию с фазовым экраном в случаях малых и больших по сравнению с длиной волны неровностей поверхности. При нормальном падении плоской волны на поверхность оценки радиусов поперечной корреляции (40) и (43) совпадают с полученными ранее в [3].

Авторы глубоко признательны С. М. Рытову за постоянное внимание к работе и ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Исакович, ЖЭТФ, 23, 3, 305 (1952).
2. Е. В. Чаевский, в сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, 5, № 4, 121 (1966).
3. В. В. Тамойкин, А. А. Фрайман, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 1, 56 (1968).
4. А. П. Жуковский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1482 (1969).
5. М. А. Исакович, Тр. Акуст. ин-та, вып. 5, 152 (1969).
6. Л. М. Бреховских, ЖЭТФ, 23, № 3, 275 (1952).
7. Р. Вексманн, А. Spizzichino, The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces, Pergamon Press, N. Y., 1963.
8. Е. В. Чаевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 2, 400 (1966).
9. Е. В. Чаевский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 6, 1128 (1965).
10. D. E. Barrick, Proc. IEEE, 56, № 10, 1728 (1968).
11. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
12. В. В. Тамойкин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 6, 1124 (1966).

- 13 Ю. Ю. Житковский, Ю. П. Лысанов, Изв. АН СССР (Физика атмосферы и океана), 5, № 9, 982 (1969).
- 14 И. М. Фуks, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 8, № 1, 104 (1965).
- 15 Ю. П. Лысанов, Акуст. ж., 17, вып. 1, 93 (1971).

Радиотехнический институт
АН СССР

Поступила в редакцию
18 июня 1970 г

A SUCCESSIVE APPLICATION OF KIRCHOFF'S METHOD TO SOUND WAVE SCATTERING ON THE SURFACE WITH RANDOM ROUGHNESSES

Yu. A. Kravtsov, I. M. Fuks, A. B. Shmelev

In the paper Kirchoff's method is successively applied to find the statistical characteristics of the sound wave scattered by a randomly rough surface. The shadowing and multiple scattering are neglected.

The expressions derived for the scattered field, its mean value and the correlation function are valid under more general conditions than the results obtained earlier by the other authors. Besides, the applicability limits of the incoherent summation of the intensities of waves scattered by separate elements of the rough surface are established. They are shown to be not so strict as the requirement to remove the observation point and the source in the Fraunhofer zone with respect to a single roughness.

Assuming the roughness height to be distributed according to the normal law in the presence of one correlation scale, there are estimated the radii of the longitudinal and transverse correlation of the scattered field in a far zone of the single inhomogeneity both at small and large (as compared with the wavelength) heights of the roughnesses.

УДК 621.371.24 : 535.2

О СРЕДНЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ СВЕТОВОГО ПУЧКА В СЛАБОНЕЛИНЕЙНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

В. В. Воробьев

Рассчитывается уменьшение средней интенсивности и уширение узких световых пучков, размеры которых меньше размеров неоднородностей, в слабонелинейной среде с моделями неоднородностей в виде случайных клиньев и в виде случайных линз на оси пучка. Нелинейность среды учитывается методом возмущений в первой задаче и энергетическим методом во второй.

При исследовании распространения интенсивных световых пучков в атмосфере возникает необходимость учета зависимости диэлектрической проницаемости воздуха от интенсивности поля. Если диэлектрическая проницаемость увеличивается с ростом интенсивности, к чему приводит, например, электрострикция, то возможно появление таких эффектов как самофокусировка пучка. Необходимые для этого мощности очень велики (порядка $10^8 \div 10^9$ вт) и могут быть получены только в коротких импульсах с длительностями порядка нескольких микросекунд. Поскольку времена установления нелинейного волноводного канала из-за стрижки имеют порядок отношения размеров пучка к скорости звука, то эффектов самофокусировки можно ожидать только в узких световых пучках с размерами меньшими 10^{-1} см. В таких узких пучках при больших интенсивностях поля возможны, вообще говоря, такие явления как пробой, ионизация воздуха, вынужденные рассеяния и другие, которые могут препятствовать развитию самофокусировки. Мы отвлекаемся здесь от этих явлений, имея в виду исследование влияния на развитие самофокусировки крупномасштабных неоднородностей диэлектрической проницаемости атмосферы, размеры которых больше размеров пучка.

Процесс распространения светового пучка в нелинейной среде с крупномасштабными неоднородностями можно описывать параболическим уравнением [1, 2]

$$\Delta E + 2ik \frac{\partial E}{\partial x} + k^2 [\varepsilon_1(x, \rho) + \varepsilon_2 |E|^2] E = 0, \quad (1.1)$$

где $\Delta = \Delta(\rho) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — поперечный лапласиан, $k = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon_0}$,

ε_1 и $\varepsilon_2 |E|^2$ — флуктуационная и нелинейная части диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \varepsilon_1(x, \rho) + \varepsilon_2 |E|^2)$.

Даже в том случае, когда нет флуктуационного члена в уравнении (1), точного аналитического решения этого уравнения для трехмерных пучков не существует, приближенные же решения типа приосевого [3] удовлетворительно описывают поле только в начальной стадии самофокусировки. Из-за того, что уравнение (1) нелинейно, нельзя также получить из него замкнутых уравнений для моментов случайного поля, чтобы решать их численными методами.

В настоящей работе рассмотрены два приближенных метода решения уравнения (1): метод возмущений по нелинейному члену и энергетический метод, с помощью которых рассчитывается ослабление поля в двух моделях неоднородной среды; с неоднородностями в виде случайных клиньев и в виде случайных параболических линз на оси пучка.

1. УМЕНЬШЕНИЕ СРЕДНЕЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОЛЯ ИЗ-ЗА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ ПУЧКА*

В этой части работы будем учитывать нелинейность методом возмущений, который, как показывает сравнение с численными расчетами в случае отсутствия неоднородностей, применим, по крайней мере, в той же области, что и приосевое приближение: при мощностях много меньше критической или при малых расстояниях.

Предполагая $\varepsilon_2 |E|^2$ достаточно малой величиной, будем искать решение уравнения (1) в виде $E = E_1 + E_2$, причем

$$\Delta E_1 + 2ik \frac{\partial E_1}{\partial x} + k^2 \varepsilon_1 E_1 = 0; \quad (1.2)$$

$$\Delta E_2 + 2ik \frac{\partial E_2}{\partial x} + k^2 \varepsilon_1 E_2 = -k^2 \varepsilon_2 |E_1|^2 E_1. \quad (1.3)$$

Воспользовавшись методом, предложенным в работе [1], из уравнений (1.2), (1.3) можно получить следующее уравнение для функции когерентности случайного поля $\Gamma(x, \rho_1, \rho_2) = \langle E(x, \rho_1) E^*(x, \rho_2) \rangle \approx \langle E_1(x, \rho_1) E_1^*(x, \rho_2) \rangle + \langle E_1(x, \rho_1) E_2^*(x, \rho_2) \rangle + \langle E_1^*(x, \rho_2) E_2(x, \rho_1) \rangle$:

$$\begin{aligned} (\Delta_1 - \Delta_2) \Gamma + 2ik \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{ik^3}{2} D(\rho_1 - \rho_2) \Gamma = \\ = k^2 \varepsilon_2 [\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_2, \rho_2) - \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_1, \rho_1, \rho_2)], \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = \langle E(x, \rho_1) E(x, \rho_2) E^*(x, \rho_3) E^*(x, \rho_4) \rangle$ — функция когерентности четвертого порядка, которая удовлетворяет уравнению

$$(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4) \Gamma_4 + 2ik \frac{\partial \Gamma_4}{\partial x} + \frac{ik^3}{2} F(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \Gamma_4 = 0. \quad (1.5)$$

В уравнениях (1.4), (1.5) $\Delta_n = \Delta(\rho_n)$,

$$D(\rho_1 - \rho_2) = \int_{-\infty}^{\infty} [B_{\varepsilon_1}(\xi, 0) - B_{\varepsilon_1}(\xi, \rho_1 - \rho_2)] d\xi,$$

$B_{\varepsilon_1}(\xi, \rho_1 - \rho_2)$ — корреляционная функция флуктуаций $\varepsilon_1(x, \rho)$,

$$\begin{aligned} F(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = D(\rho_1 - \rho_3) + D(\rho_1 - \rho_4) + D(\rho_2 - \rho_3) + D(\rho_2 - \rho_4) - \\ - D(\rho_1 - \rho_2) - D(\rho_1 - \rho_4). \end{aligned}$$

Структурная функция $D(\rho)$ для турбулентных неоднородностей имеет вид

$$D(\rho) \sim \rho^2 \quad \text{при } \rho \ll l_0, \quad D(\rho) \sim \rho^{5/3} \quad \text{при } \rho \gg l_0,$$

где l_0 — внутренний масштаб турбулентности.

* Имеется в виду усреднение по большому числу реализаций случайных функций $\varepsilon_1(x, \rho)$, что предполагает или наличие импульса большой длительности или большого числа коротких световых импульсов.

Если размеры пучка меньше или порядка внутреннего масштаба турбулентности, можно приближенно заменить $D(\rho)$ на квадратичную функцию от ρ :

$$D(\rho) = c\rho^2,$$

где

$$c = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 D(\rho)}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=0}, \quad (1.6)$$

что соответствует разложению функции $\varepsilon_1(x, \rho)$ в ряд по поперечным координатам, отсчитываемым от оси невозмущенного пучка, с точностью до линейных членов разложения

$$\varepsilon_1(x, \rho) = \varepsilon_{10}(x) + \rho \nabla \varepsilon_1(x, 0).$$

В этом приближении, таким образом, неоднородности имеют форму случайных клиньев, которые поворачивают пучок как целое, не создавая флуктуаций интенсивности в системе координат, движущейся с центром тяжести пучка. Ослабление средней интенсивности в этой модели будет обусловлено только уходами пучка от юсовой оси.

При

$$D(\rho) = c\rho^2, \quad F(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = c(\rho_1 + \rho_2 - \rho_3 - \rho_4)^2 \quad (1.7)$$

решение уравнений (1.4), (1.5) легко найти, приведя их к виду уравнений переноса [4]. Переходя в уравнении (1.4) к координатам

$$R = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), \quad \rho = \rho_1 - \rho_2, \quad \text{для преобразования Фурье по координатам } R,$$

$$J(x, \mathbf{x}, \rho) = (2\pi)^{-2} \int d^2 R \Gamma(x, R, \rho) \exp(-i\mathbf{x}R),$$

получим уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\mathbf{x}}{k} \nabla_{\rho} J + \frac{k^2}{4} c \rho^2 J = \frac{k\varepsilon_2}{2i} [\Phi_{-}(x, \mathbf{x}, \rho) - \Phi_{+}(x, \mathbf{x}, \rho)], \quad (1.8)$$

где

$$\Phi_{\mp}(x, \mathbf{x}, \rho) = (2\pi)^{-2} \int d^2 R \Gamma_4\left(R + \frac{\rho}{2}, R \mp \frac{\rho}{2}, R \mp \frac{\rho}{2}, R - \frac{\rho}{2}\right) \exp(-i\mathbf{x}R).$$

Решение уравнения (1.8) имеет вид

$$J(x, \mathbf{x}, \rho) = J_1(x, \mathbf{x}, \rho) + J_2(x, \mathbf{x}, \rho), \quad (1.9)$$

$$J_1(x, \mathbf{x}, \rho) = J\left(0, \mathbf{x}, \rho - \frac{\mathbf{x}}{k} x\right) \exp\left\{-\frac{k^2 c}{4} \int_0^x \left(\rho - \frac{\mathbf{x}}{k} \xi\right)^2 d\xi\right\};$$

$$J_2(x, \mathbf{x}, \rho) = \frac{k\varepsilon_2}{2i} \int_0^x d\xi \left\{ \Phi_{-}\left[\xi, \mathbf{x}, \rho - \frac{\mathbf{x}}{k}(x - \xi)\right] - \right. \quad (1.10)$$

$$\left. - \Phi_{+}\left[\xi, \mathbf{x}, \rho - \frac{\mathbf{x}}{k}(x - \xi)\right] \right\} \exp\left\{-\frac{k^2 c}{4} \int_{\xi}^x \left[\rho - \frac{\mathbf{x}}{k}(x - \xi')\right]^2 d\xi'\right\}.$$

Аналогично находится и решение уравнения (1.5). Переходя в нем к координатам

$$r_1 = \frac{1}{4} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4), \quad r_2 = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4),$$

$$r_3 = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2 - \rho_3 + \rho_4), \quad r_4 = \rho_1 + \rho_2 - \rho_3 - \rho_4,$$

для преобразования Фурье по координатам r_1, r_3 ,

$$\Psi(x, q, r_2, p, r_4) = (2\pi)^{-4} \int d^2 r_1 d^2 r_3 \Gamma_4(x, r_1, r_2, r_3, r_4) \times \\ \times \exp\{-iqr_1 - ipr_3\},$$

получим уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(\frac{q}{k} \nabla_4 + \frac{p}{k} \nabla_2 \right) \Psi + \frac{k^2}{4} cr_4^2 \Psi = 0,$$

решение которого будет

$$\Psi = \Psi\left(0, q, r_2 - \frac{p}{k} x, p, r_4 - \frac{q}{k} x\right) \exp\left\{-\frac{k^2 c}{4} \times \right. \\ \left. \times \int_0^x \left(r_4 - \frac{q}{k} \xi\right)^2 d\xi\right\}. \quad (1.11)$$

Выражая далее функции Φ_{\mp} через Ψ , для $J_2(x, \mathbf{x}, 0)$ получим

$$J_2(x, \mathbf{x}, 0) = \frac{k\varepsilon_2}{(2\pi)^2} \exp\left(-\frac{cx^2 x^3}{i2}\right) \int_0^x d\xi \int d_2 p \Psi\left[0, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}}{2k}(x - \xi) - \right. \\ \left. - \frac{p}{k} \xi, p, -\frac{\mathbf{x}}{k} x\right] \sin \frac{\mathbf{x}}{2k} \left(\frac{\mathbf{x}}{2} - p\right)(x - \xi). \quad (1.12)$$

Дальнейшие вычисления проведем для пучка, имеющего на границе среды гауссову форму:

$$E(0, \rho) = A_0 \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2a_0^2} + \frac{ik}{2F} \rho^2\right\}, \quad J(0, \mathbf{x}, \rho) = \frac{A_0^2 a_0^2}{4\pi} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\rho^2}{4a_0^2} - \frac{a_0^2}{4} \left(\mathbf{x} - \frac{k\rho}{F}\right)^2\right\}, \quad (1.13)$$

$$\Psi(0, q, r_2, p, r_4) = \frac{A_0^4 a_0^4}{16\pi^2} \exp\left\{-\frac{r_2^2}{2a_0^2} - \frac{r_4^2}{8a_0^2} - \frac{a_0^2}{2} \times \right. \\ \left. \times \left(p - \frac{k}{F} r_2\right)^2 - \frac{a_0^2}{8} \left(q - \frac{k}{F} r_4\right)^2\right\}.$$

Подставляя (1.13) в (1.12) и (1.9), интегрируя по ρ , а затем по \mathbf{x} , для $\Gamma(x, \mathbf{R}, 0) = \int J(x, \mathbf{x}, 0) \exp(i\mathbf{x}\mathbf{R}) d^2\mathbf{x}$ получим выражение

$$\Gamma(x, \mathbf{R}, 0) = \frac{A_0^2 a_0^2}{a_{\text{эфф}}^2(x)} \exp\left(-\frac{R^2}{a_{\text{эфф}}^2(x)}\right) + k\varepsilon_2 a_0^4 A_0^4 \times \quad (1.14)$$

$$\times \int_0^x \frac{b^2 \cos 2R^2 b^2 / (f^4 + b^4) - f^2 \sin 2R^2 b^2 / (f^4 + b^4)}{a^2(\xi) [f^4(x, \xi) + b^4(x, \xi)]} \exp\left(-\frac{2R^2 f^2}{f^4 b^4}\right) d\xi,$$

где

$$a^2(x) = a_0^2 [(1 + x/F)^2 + x^2/k^2 a_0^4], \quad a_{\text{эф}}^2 = a^2(x) + cx^3/3,$$

$$f^2(x, \xi) = a^2(x) + (2/3) cx^3 + 2(x - \xi)/ka^2(\xi),$$

$$b^2(x, \xi) = 2(x - \xi)/k [1 + (S(\xi)(x - \xi)/k)], \quad S(x) = (k/a)(da/dx).$$

При $R = 0$ интеграл в (1.14) можно вычислить аналитически. В частном случае эквифазного пучка на границе среды $F \rightarrow \infty$ получим

$$\Gamma(t, 0, 0) = \Gamma_1 + \Gamma_2 = \frac{A_0^2 a_0^2}{a_{\text{эф}}^2(t)} \left\{ 1 + \frac{k^2 \varepsilon_2 a_0^2 A_0^2}{8} \times \right. \\ \left. \times \ln \left[1 + \frac{8t^2(1 + t^2 + \alpha t^3)}{(1 + t^2 + 2\alpha t^3)^2} \right] \right\}, \quad (1.15)$$

где $t = x/ka_0^2$, $\alpha = (c/3) k^3 a_0^4$, $a_{\text{эф}}^2 = a_0^2 (1 + t^2 + \alpha t^3)$. Из формулы (1.15) видно, что в среде с $\varepsilon_2 > 0$ нелинейность всегда приводит к возрастанию средней интенсивности на оси пучка, в то же время случайные блуждания пучка ослабляют фокусирующее действие нелинейности.

Рис. 1, на котором приведена зависимость отношения $\frac{8}{k^2 \varepsilon_2 a_0^2 A_0^2} \frac{\Gamma_2(t, 0, 0)}{\Gamma_1(t, 0, 0)}$

от расстояния при различных значениях параметра α , иллюстрирует это утверждение.

Из формулы (1.15) при $\alpha = 0$, (когда нет неоднородностей) можно оценить область применимости метода возмущений по нелинейному члену. В предельных случаях малых и больших расстояний получим

$$\Gamma(t, 0, 0) = A_0^2 (1 + k^2 \varepsilon_2 a_0^2 A_0^2 t^2) (1 + t^2)^{-1} \\ \text{при } t^2 \ll 1,$$

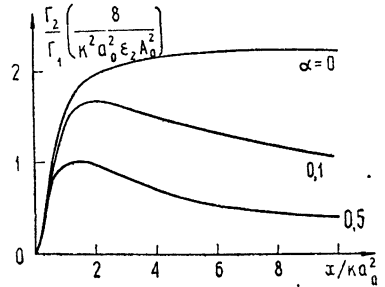


Рис. 1.

что совпадает с результатами расчетов в приосевом приближении

$$\Gamma(t, 0, 0) = A_0^2 \left(1 + \frac{k^2 \varepsilon_2 a_0^2 A_0^2 \ln 9}{8} \right) (1 + t^2)^{-1} \quad \text{при } t^2 \gg 1.$$

Поскольку условие $k^2 \varepsilon_2 a_0^2 A_0^2 \ln 9 = 8$ с точностью до 1% соответствует условию критической мощности согласно численным расчетам, приведенным в работах [2, 5], метод возмущений будет применим либо при малых по сравнению с критической мощностью, либо при малых расстояниях $t^2 \ll (k^2 \varepsilon_2 a_0^2 A_0^2)^{-1}$, что совпадает с условиями применимости приосевого приближения.

Из формулы (1.15), которая показывает, что случайные блуждания пучка из-за неоднородностей ослабляют действие нелинейности, нельзя однако сделать какой-либо вывод о влиянии нелинейности среды на сами случайные блуждания. Чтобы оценить это влияние, были проведены также расчеты среднего квадрата флуктуаций центра тяжести пучка, который определяется соотношением

$$\rho_c = \frac{\int \rho E(x, \rho) E^*(x, \rho) d^2 \rho}{\int E(x, \rho) E^*(x, \rho) d^2 \rho}.$$

Как показали расчеты, нелинейность среды никак не сказывается на флуктуациях центра тяжести пучка, они будут такими же, как и в линейной среде. Этот результат связан, по-видимому, с учетом нелинейности методом возмущений; можно ожидать, что в сильнонелинейной среде характер случайного блуждания пучка изменится даже в модели с неоднородностями в виде клиньев.

В заключение обсуждения вопроса о случайном блуждании пучка отметим, что предположение о малой ширине пучка по сравнению с размерами неоднородностей не является необходимым для того, чтобы можно было ограничиться квадратичным членом разложения функции $D(\rho)$ при расчете средней интенсивности; вообще говоря, должно быть некоторое ограничение на расстояния, при которых это разложение справедливо. Это следует хотя бы из того факта, что точно такой же результат для средней интенсивности поля в линейной среде получается при расчете методами плавных возмущений и геометрической оптики [6, 7]. Приближенные оценки условий применимости замены $D(\rho)$ на ρ^2 в линейной среде можно сделать и на основании уравнения (1.4), которое без нелинейного члена можно решить при произвольной функции $D(\rho)$. Для $J(x, x, 0)$ аналогично (1.9) можно получить выражение

$$J(x, x, 0) = J\left(0, x, -\frac{x}{k} x\right) \exp\left\{-\frac{k^2 c}{4} \int_0^x D\left(\frac{x}{k} \xi\right) d\xi\right\}.$$

Поскольку существенная область интегрирования по x при расчете средней интенсивности широких пучков будет порядка a^{-1} , где a — ширина пучка, то ограничиться квадратичным членом разложения $D(\rho)$

можно при условии $\frac{x}{ka} \ll l_0$ или $x \ll ka l_0$.

2. УШИРЕНИЕ СВЕТОВОГО ПУЧКА В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ ЛИНЗАМИ НА ЕГО ОСИ

Поскольку неоднородности диэлектрической проницаемости в форме случайных клиньев с $\epsilon_1(x, \rho) = \epsilon_{10}(x) + \epsilon_l(x)\rho_l$ поворачивают пучок, не искажая дифракционной картины, так как здесь нет случайной фокусировки лучей, представляет интерес рассмотреть неоднородности, имеющие кривизну. Следующим приближением к случаю клиньев в среде с размерами неоднородностей большими, чем ширина пучка, будут неоднородности, имеющие форму параболоидов с $\epsilon_1 = \epsilon_{10}(x) + \epsilon_{1k}\rho_l\rho_k$. Здесь мы рассмотрим только случай, когда параболоиды являются круглыми, т. е.

$$\epsilon_1 = \epsilon_{10}(x) + \epsilon_{12}(x)\rho^2, \quad (2.1)$$

не учитывая возможных эллиптических и гиперболических параболоидов и их поворотов вокруг оси пучка, что, как можно ожидать, при усреднении по всем ориентациям не очень существенно скажется на результате. Кроме того, не будем учитывать также и случайные клинья, обуславливающие случайное блуждание пучка, хотя в строгой постановке задачи действие случайных линз и случайных клиньев нельзя, по-видимому, рассматривать независимо.

При учете квадратичных по ρ членов разложения $\epsilon_1(x, \rho)$, что соответствует учету в разложении поперечной структурной функции $D(\rho)$ членов четвертого порядка, найти точное решение уравнения (1.5) пред-

ставляется трудной задачей, если не прибегать к различным методам возмущений по ϵ_1 . Но в линейной среде в случае, когда диэлектрическая проницаемость задается формулой (2.1), легко получить и решить уравнения не для моментов поля E , а для ширины пучка по интенсивности, если искать решение в виде гауссова пучка с переменными шириной и кривизной фазового фронта так же, как это делается в плосковолновом приближении. Но в отличие от этого приближения, где нелинейная часть диэлектрической проницаемости $\epsilon_2 |E|^2$ раскладывается в ряд по ρ , мы учтем нелинейный член энергетическим методом [8], позволяющим выбрать из класса приближенных решений, определяемых рядом параметров, наилучшее в смысле наименьшей квадратичной ошибки. Этот метод дает возможность рассмотреть не только случаи малых по сравнению с критической мощностей, но и случаи, когда мощность в пучке порядка критической.

Для уравнения

$$\Delta E + 2ik \frac{\partial E}{\partial x} + k^2 [\epsilon_{10}(x) + \epsilon_{12}(x) \rho^2 + \epsilon_2 |E|^2] E = 0 \quad (2.2)$$

можно записать функционал действия

$$\begin{aligned} L(E, E^*) = & - \int_0^{x_0} dx \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho \left\{ \nabla E \nabla E^* + ik \left[E \frac{\partial E^*}{\partial x} - E^* \frac{\partial E}{\partial x} \right] - \right. \\ & \left. - k^2 [\epsilon_{10} + \epsilon_{12} \rho^2] EE^* - \frac{k^2 \epsilon_2}{2} (EE^*)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

который имеет экстремум, если поле E является решением уравнения (2.2), поскольку вариационные производные

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta E^*} &= \Delta E + 2ik \frac{\partial E}{\partial x} + k^2 [\epsilon_{10} + \epsilon_{12} \rho^2 + \epsilon_2 |E|^2] E, \\ \frac{\delta L}{\delta E} &= \Delta E^* - 2ik \frac{\partial E^*}{\partial x} + k^2 [\epsilon_{10} + \epsilon_{12} \rho^2 + \epsilon_2 |E|^2] E \end{aligned}$$

обращаются при этом в нуль.

В случае, когда имеется класс приближенных решений, определяемых рядом параметров, то из условия экстремума функционала L можно получить соотношения между этими параметрами, которые определяют наилучшее из выбранного класса приближенных решений.

Предполагая, что на границе среды при $x = 0$ распределение поля в поперечном сечении пучка имеет вид (1.13), будем искать решение уравнения (2.2) в следующем виде:

$$E(x, \rho) = \frac{A(x)}{f(x)} \exp \left\{ - \frac{\rho^2}{2a_0^2 f^2(x)} + \frac{iS(x)}{2} \rho^2 + i\varphi(x) \right\}. \quad (2.4)$$

Подставляя это выражение в (2.3) и интегрируя по поперечным координатам, получим

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\pi} L = & \int_0^{x_0} A^2 \left\{ 2ka_0^2 \varphi' - k^2 a_0^2 \epsilon_{10} + \frac{1}{f^2} + a_0^2 f^2 S^2 + k^2 a_0^2 f^2 S' - \right. \\ & \left. - k^2 a_0^4 \epsilon_{12} f^2 - \frac{k^2 \epsilon_2 a_0^2 A^2}{4 f^2} \right\} dx, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где штрих означает дифференцирование по x .

Из условия экстремума функционала L по параметрам $A(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $S(x)$, приравнявая нулю вариационные производные от (2.5); получим следующие соотношения:

$$A^2 = A_0^2 = \text{const}, \quad S = k \frac{f'}{f}, \quad \varphi' = \frac{k\varepsilon_{10}}{2} - \frac{1}{ka_0^2 f^2} \times \\ \times \left[1 - \frac{3}{8} k^2 \varepsilon_2 a_0^2 A_0^2 \right], \quad f'' - \varepsilon_{12}(x) f = \frac{P}{f^3}, \quad (2.6)$$

где

$$P = \frac{1}{k^2 a_0^4} \left[1 - \frac{k^2 \varepsilon_2 a_0^2 A_0^2}{4} \right].$$

Эти уравнения в отсутствие флуктуаций ($\varepsilon_{10} = 0$, $\varepsilon_{12} = 0$) отличаются от соответствующих уравнений приосевого приближения:

$$A^2 = \text{const}, \quad S = k \frac{f'}{f}, \quad \varphi' = -\frac{1}{ka_0^2 f^2} \left[1 - \frac{k^2 \varepsilon_2 a_0^2 A_0^2}{2} \right], \\ f'' = \frac{P_1}{f^3},$$

где

$$P_1 = \frac{1}{k^2 a_0^4} \left[1 - k^2 \varepsilon_2 a_0^2 A_0^2 \right],$$

значениями коэффициентов при членах с ε_2 . Из сравнения параметров P и P_1 видно, что энергетический метод дает значение критической мощности в четыре раза больше, чем приосево приближение, что хорошо согласуется с результатами численных расчетов [2, 5]. Однако при мощностях больше критической это приближение, так же как приосево, не поддается, что связано с неудовлетворительным выбором решения в форме автомоделного пучка.

Обратимся теперь к уравнению, описывающему флуктуации ширины пучка по интенсивности:

$$f'' - \varepsilon_{12}(x) f = \frac{P}{f^3}, \quad (2.7)$$

которое для нелинейной среды имеет тот же вид, что и для линейной.

Заменой $f^2 = g$ это уравнение можно привести к линейному уравнению третьего порядка

$$\frac{d^3 g}{dx^3} - 4\varepsilon_{12} \frac{dg}{dx} - 2 \frac{d\varepsilon_{12}}{dx} g = 0 \quad (2.8)$$

с начальными условиями

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = U_0 = \frac{2}{F}, \quad g''(0) = V_0 = 2P + \frac{2}{F^2}. \quad (2.9)$$

Как показано в работе [1], те предположения, которые обычно делаются при расчете случайного поля E в различных методах возмущений для уравнения (1.1) без нелинейного члена, указываются эквивалентными предположению о том, что флуктуации $\varepsilon_1(x, \rho)$ гауссовы и δ -коррелиро-

ваны как функции x . Такие же предположения можно сделать и о флуктуациях $\varepsilon_{1,2}(x)$ и заменить реальную корреляционную функцию на следующую:

$$\langle \varepsilon_{1,2}(x_1) \varepsilon_{1,2}(x_2) \rangle = B(x_1 - x_2) = \gamma \delta(x_1 - x_2),$$

где

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} B(x) dx = \text{const.}$$

Тогда из уравнения (2.8) методом, подобным предложенному в работе [1], можно получить уравнение для средней площади пучка $\langle g \rangle$, не прибегая к методам возмущений. Для этого уравнения (2.8) удобнее записать в виде системы трех уравнений, положив

$$U = g', \quad V = U', \quad V = V_0 + 2 \int_0^x \varepsilon_{1,2}(\xi) U(\xi) d\xi + 2\varepsilon_{1,2}(x) g(x). \quad (2.10)$$

При усреднении системы уравнений (2.10) воспользуемся соотношением, существующим между случайной гауссовой функцией ε и функционалом от нее $\Phi[\varepsilon]$ [1], именно:

$$\langle \varepsilon(x) \Phi[\varepsilon(x)] \rangle = \int \langle \varepsilon(x) \varepsilon(y) \rangle \left\langle \frac{\delta \Phi[\varepsilon(x)]}{\delta \varepsilon(y)} \right\rangle dy, \quad (2.11)$$

из которого следует

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{1,2}(x) U(x) \rangle &= \int \langle \varepsilon_{1,2}(x) \varepsilon_{1,2}(y) \rangle \left\langle \frac{\delta U(x)}{\delta \varepsilon_{1,2}(y)} \right\rangle dy = \\ &= \gamma \left\langle \frac{\delta U(x)}{\delta \varepsilon_{1,2}(x)} \right\rangle; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\langle \varepsilon_{1,2}(x) g(x) \rangle = \gamma \left\langle \frac{\delta g(x)}{\delta \varepsilon_{1,2}(x)} \right\rangle. \quad (2.13)$$

Чтобы найти входящие в (2.12) и (2.13) вариационные производные, проинтегрируем уравнения (2.10):

$$U(x) = U_0 + V_0 x + 2 \int_0^x (x-y) \varepsilon_{1,2}(y) U(y) dy + 2 \int_0^x \varepsilon_{1,2}(y) g(y) dy; \quad (2.14)$$

$$g(x) = 1 + U_0 x + \frac{V_0 x^2}{2} + \int_0^x (x-y)^2 \varepsilon_{1,2}(y) U(y) dy + \quad (2.15)$$

$$+ 2 \int_0^x (x-y) \varepsilon_{1,2}(y) g(y) dy.$$

Из уравнения (2.14) тогда следует

$$\begin{aligned} \frac{\delta U(x)}{\delta \varepsilon_{1,2}(t)} &= 2 \int_0^x (x-y) \delta(y-t) U(y) dy + 2 \int_0^x \delta(y-t) g(y) dy + \\ &+ 2 \int_0^x (x-y) \varepsilon_{1,2}(y) \frac{\delta U(y)}{\delta \varepsilon_{1,2}(t)} dy + 2 \int_0^x \varepsilon_{1,2}(y) \frac{\delta g(y)}{\delta \varepsilon_{1,2}(t)} dy. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Поскольку начальные условия для функций $U(x)$ и $g(x)$ задаются только при $x = 0$, функционалы $U[\varepsilon]$ и $g[\varepsilon]$ зависят лишь от тех значений $\varepsilon_{1,2}(t)$, при которых аргумент y больше, чем t , и $\delta U/\delta \varepsilon_{1,2} = \delta g/\delta \varepsilon_{1,2} = 0$ при $t > y$. Поэтому два последних интеграла в пределе при $t \rightarrow x$ обратятся в нуль. Оставшиеся два интеграла при условии, что $\delta(x)$ — четная функция, можно записать в виде

$$\frac{\delta U(x)}{\delta \varepsilon_{1,2}(t)} = 2(x-t)\theta(x-t)U(t) + 2\theta(x-t)g(t),$$

где

$$\theta(x-t) = \int_0^x \delta(y-t) dy = \begin{cases} 1 & (x > t) \\ \frac{1}{2} & (x = t) \\ 0 & (x < t) \end{cases}$$

— единичная функция.

В пределе при $t \rightarrow x$

$$\frac{\delta U(x)}{\delta \varepsilon_{1,2}(x)} = g(x). \quad (2.17)$$

Аналогично доказывается, что $\delta g(x)/\delta \varepsilon_{1,2}(x) = 0$. Усредняя систему уравнений (2.10), учитывая соотношения (2.12), (2.13), (2.17), получим $\langle U \rangle = \langle g' \rangle$, $\langle V \rangle = \langle U' \rangle$, $\langle V' \rangle = 2\gamma \langle g \rangle$, откуда следует уравнение, определяющее среднюю площадь пучка:

$$\langle g''' \rangle - 2\gamma \langle g \rangle = 0. \quad (2.18)$$

Решение этого уравнения с учетом начальных условий (2.9) будет

$$\begin{aligned} \langle g \rangle = & A_1 \exp(\beta x) + A_2 \exp\left(-\frac{\beta}{2} x\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \beta x + \\ & + A_3 \exp\left(-\frac{\beta}{2} x\right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \beta x, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} \beta = & \sqrt[3]{2\gamma}, \quad A_1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{\beta F} + \frac{1}{\beta^2} \left(P + \frac{1}{F^2} \right) \right], \\ A_2 = & \frac{2}{3} \left[1 - \frac{1}{\beta F} - \frac{1}{\beta^2} \left(P + \frac{1}{F^2} \right) \right], \quad A_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\beta F} - \frac{1}{\beta^2} \left(P + \frac{1}{F^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

При $\beta x \ll 1$ выражение (2.19) можно разложить в ряд

$$\begin{aligned} \langle g \rangle = & \left(1 + \frac{x}{F} \right)^2 + Px^2 + \frac{\gamma}{3} x^3 + \frac{\gamma}{6F} x^4 + \frac{\gamma}{15} \left(P + \frac{1}{F^2} \right) x^5 + \\ & + \frac{\gamma^2}{180} x^6 + \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из этой формулы видно, что при малых x случайное уширение пучка, так же как и в случае неоднородностей в виде клиньев, увеличивается пропорционально x^3 , независимо от того, линейная среда или нелинейная. При увеличении расстояния это различие уже будет проявляться:

с увеличением нелинейности, что соответствует уменьшению коэффициента P , случайное уширение будет уменьшаться по сравнению с уширением в линейной среде.

Следует отметить также то обстоятельство, что, в отличие от случайного уширения в среде с клиньями, уширение в среде со случайными линзами пропорционально начальной площади лучка, поскольку средняя площадь лучка $\langle S \rangle = \pi a_0^2 \langle g \rangle$. Этот факт, а также и то, что на больших расстояниях ширина лучка будет расти экспоненциально, связан с заменой реальных неоднородностей на параболические линзы, показатель преломления которых растет по абсолютной величине пропорционально квадрату расстояния от оси, в результате чего чем больше пучок уширяется, тем больше воздействие оказывают на него случайные линзы. Естественно возникает поэтому ограничение на применимость полученных результатов:

$$\langle g \rangle \ll (l_0/a_0)^2.$$

Ограничение, накладываемое этим условием на расстояние, не очень сильное. Поскольку параметр γ в турбулентной среде по порядку величины равен $C_s l_0^{-7/3}$, где C_s — структурная постоянная, то для таких, например, параметров среды и пучка как $a_0 = 10^{-2}$ см, $l_0 = 10^{-1}$ см, $C_s = (10^{-15} \div 10^{-18})$ см $^{-2/3}$ должно выполняться условие $x \ll 1 \div 10$ км, если мощность в световой нити равна критической.

Отметим в заключение, что хотя ослабление поля из-за расфокусировки случайными линзами сказывается на больших расстояниях по сравнению с уменьшением средней интенсивности из-за случайных блужданий пучка, тем не менее первый эффект более существен, чем второй, так как он приводит к уширению поперечного сечения пучка и «истинному» ослаблению, в то время как случайные блуждания не изменяют интенсивности поля в системе координат, движущейся вместе с центром тяжести пучка.

Автор выражает искреннюю благодарность В. И. Татарскому за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, 2106 (1969).
2. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, В сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
3. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 50, 1537 (1966).
4. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).
5. P. L. Kelley, Phys. Rev. Lett., 15, 1005 (1965).
6. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 5, 870 (1965).
7. З. И. Фейзулин, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 68 (1967).
8. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, М., 1959.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
19 марта 1970 г.

THE AVERAGE INTENSITY OF LIGHT BEAM IN A WEAKLY-NONLINEAR TURBULENT ATMOSPHERE

V. V. Vorob'ev

The author calculates the decrease of the average intensity and broadening narrow light beams, the dimensions of which are smaller than those of inhomogeneities, in a weakly nonlinear medium with inhomogeneity models as the random wedges and random lenses on the beam axis. The medium nonlinearity is taken into account by the perturbation method in the first problem and by the energetic method in the second one.

УДК 621.371.24 : 535.2

ИЗМЕРЕНИЯ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ СВЕТОВОГО ПУЧКА, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ В АТМОСФЕРЕ

Т. Г. Власова, Ф. А. Маркус, А. М. Черемухин

Параллельный пучок света проходил в турбулентной атмосфере путь длиной 1750 м и принимался с помощью линзы. Картина в фокальной плоскости фотографировалась с выдержкой, много большей среднего времени смены фотографируемой картины. Получен график логарифма нормированной средней освещенности как функции волнового числа, пропорционального расстоянию от данной точки до центра картины. Произведено сравнение экспериментальных данных с теоретическими. Оценены ошибки рассматриваемого метода.

При распространении пучка света в атмосфере когерентность излучения нарушается из-за неоднородности показателя преломления. Характеристикой когерентности обычно служит функция когерентности Γ_2 , определяемая следующим образом:

$$\Gamma_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle E(\mathbf{r}_1) E^*(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad (1)$$

где $E(\mathbf{r}_1)$ — комплексная амплитуда электрического поля световой волны в точке с координатой \mathbf{r}_1 , звездочка означает комплексное сопряжение, а угловые скобки — усреднение. Выражение для Γ_2 получено в [1] для случая, когда плоская световая волна проходит путь L в локально изотропной турбулентной среде:

$$\Gamma_2(L, \rho) = \Gamma_2(L, 0) \exp \left[-\frac{1}{2} D_1(\rho) \right]. \quad (2)$$

Здесь $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние между точками, в которых берется электрическое поле. Величина D_1 связана с трехмерным спектром флуктуаций диэлектрической проницаемости $\Phi_\epsilon(x)$ соотношением [2]

$$D_1(\rho) = 2\pi^2 k^2 L \int_0^\infty [1 - J_0(x\rho)] \Phi_\epsilon(x) x dx, \quad (3)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число излучения, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Для экспериментального изучения функции когерентности проводились измерения средней освещенности в фокальной плоскости линзы, на которую падал коллимированный пучок света, прошедший через турбулентную атмосферу. В этом случае, как показано в работе [3], распределение освещенности можно представить в виде

$$\overline{|E(x', y')|^2} = \frac{1}{\lambda^2 F^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \Gamma_2(L, \rho) \Gamma_k(x, y) \exp i \frac{k}{F} (xx' + yy') dx dy, \quad (4)$$

где x', y' — координаты точки в фокальной плоскости линзы, $\Gamma_k(x, y)$ — корреляционная функция регулярного распределения освещенности на поверхности линзы.

Если флуктуации столь велики, что $D_1(2R) \gg 1$, то выражение (4) примет вид

$$|E(r)|^2 = \frac{2R^2\pi^2}{\lambda^2 F^2} \int_0^\infty \Gamma_2(\Delta, \rho) J_0\left(\frac{k}{F} r \rho\right) \rho d\rho. \quad (5)$$

Здесь $r = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, R — радиус отверстия линзы.

Таким образом, средняя освещенность зависит только от r и полностью определяется видом функции Γ_2 . Следовательно, измерение средней освещенности позволяет получить представление о виде функции когерентности.

В проводившемся эксперименте использовалась схема, изображенная на рис. 1. Свет, выходящий из источника, попадал в телескопиче-

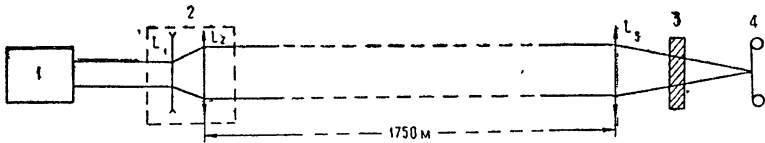


Рис. 1. Схема оптической установки для экспериментального изучения функции когерентности:

1 — источник света, 2 — система линз, формирующая параллельный пучок, L_3 — линза, в фокальной плоскости которой фотографировалась средняя освещенность, 3 — нейтральный светофильтр для ослабления интенсивности светового пучка в фиксированное число раз, 4 — фотопленка.

скую систему и превращался в параллельный пучок диаметром 50 см. Измерения проводились на трассе длиной $L = 1750$ м, проходившей на высоте 1,5 м над ровным участком земной поверхности в условиях однородной турбулентности. Приемником света служила линза диаметром $2R = 5$ см с фокусным расстоянием $F = 160$ см. Картина в фокальной плоскости фотографировалась на пленку КН-1 с выдержкой $\Delta t = 1$ мин. Смена картин в фокальной плоскости происходила за время $\tau < 0,01$ сек. Несколько кадров той же пленки засвечивались стабильным источником, ослабленным фильтрами известной прозрачности. Эти кадры использовались для построения характеристической кривой пленки, с помощью которой находился закон изменения освещенности в фокальной плоскости.

Для увеличения динамического диапазона измерений применялось ослабление приходящего лучка. Благодаря этому на одних снимках создавались условия для измерения освещенности в центре картины. На других снимках, снятых без ослабления, в центре картины пленка засвечивалась до насыщения. Поэтому удалось измерить освещенность на разных расстояниях от центра.

На рис. 2 по оси ординат отложены полученные экспериментально значения величины $\lg(J(r)/J(0))$, где $J(r)$ — средняя освещенность на расстоянии r от центра, а $J(0)$ — средняя освещенность в центре картины. На оси абсцисс отложены значения безразмерного волнового числа \tilde{x} :

$$\tilde{x} = \frac{x}{x_0} = \frac{kr}{F(0,73 C_e^2 k^2 L)^{3/5}}.$$

В опыте величина C_e^2 , полученная из метеорологических измерений, равнялась $0,64 \cdot 10^{-14}$ см $^{-2/3}$. Ошибка измерения \tilde{x} и $\lg(J/J_0)$ указана

на графике. Ширина экспериментальной кривой на уровне 0,5 оказалась равной $90 r_d$, где $r_d = F/2Rk$ — дифракционный радиус картины. Динамический диапазон изменения освещенности равен 50 db на расстоянии, равном $1400 r_d$ или 1,5 мм.

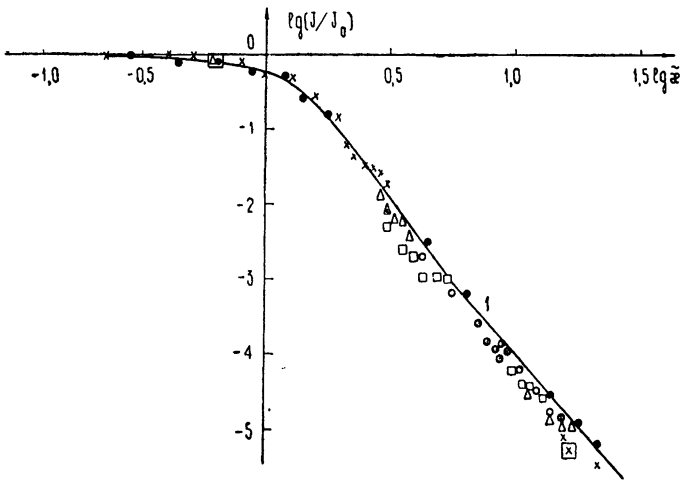


Рис. 2. График зависимости $\lg(J(r)/J_0)$ (логарифм отношения освещенности на расстоянии r от центра дифракционной картины к освещенности в центре) от $\lg x$ (логарифм безразмерного волнового числа). Разными значками изображены значения, полученные для кадров фотопленки, снятых с разными ослаблениями, цифрой 1 обозначена теоретическая кривая.

Для сравнения результатов эксперимента с существующей теорией турбулентности на том же графике построена теоретическая кривая, рассчитанная по формуле (5) для случая степенного спектра, не учитывающего наличие внутреннего масштаба турбулентности $\Phi_e(x)$. В этом случае величина D_1 равна

$$D_1 = 0,73 C_e^2 \Delta \rho^{5/3} k^2. \quad (6)$$

Известно, что при больших волновых числах $x > x_m$ реальный спектр Φ_e спадает быстрее, чем упомянутый выше степенной. Следовательно, экспериментальные значения $\lg(J/J_0)$, начиная с некоторого x_m , должны лежать ниже, чем рассчитанные по формуле (5) с помощью выражения (6). Для приведенных на графике результатов расхождение экспериментальных и теоретических значений наступает для $x = 3,18$; что соответствует значению внутреннего масштаба турбулентности $l_0 = 2\pi/x_m = 0,5$ см.

Одним из возможных источников ошибок рассматриваемого метода может быть рассеяние света в эмульсии пленки. Такое рассеяние приведет к уменьшению прозрачности всех участков пленки, кроме центрального. Обработка картины, снятой на пленке, даст более медленный спад освещенности, чем тот, который существовал в действительности. Отклонение экспериментальных значений от теоретической кривой, рассчитанной с помощью степенного спектра, может, следовательно, быть еще более значительным. Однако можно думать, что ошибка из-за рассеяния света в эмульсии пленки не слишком велика. Об этом сви-

детельствует следующее. Было определено отношение интенсивности, измеренной в опыте, к той, которая наблюдалась бы в отсутствие турбулентности. Для центра картины значение этого отношения равно $(3,5 \pm 0,4) \cdot 10^{-3}$. Расчет дает величину отношения, равную $3,2 \cdot 10^{-3}$. Согласие между экспериментом и расчетом в той области, где они должны совпадать, вполне удовлетворительное. Следовательно, ошибка измерения, вызванная рассеянием в эмульсии, не может быть большой.

Метод изучения функции когерентности путем фотографирования картины в фокальной плоскости линзы кажется весьма перспективным, и можно надеяться, что дальнейшие эксперименты дадут возможность определить вид функции когерентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, АН СССР, отделение океанологии, физики атмосферы и географии, препринт, 1970.
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, 1967.
3. Н. Г. Денисов, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 6, № 3, 488 (1963).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
3 июля 1970 г.

MEASUREMENT OF THE COHERENCE FUNCTION OF LIGHT BEAM PROPAGATING IN THE ATMOSPHERE

T. G. Vlasova, F. A. Markus, A. M. Cheremukhin

A parallel light beam passed a way of 1750 m in the turbulent atmosphere and was received by a lens. The picture in the focal plane was photographed with the exposure much greater than the mean time of the photographed picture change. The logarithm of the normalized mean illumination is plotted as the function of the wave number proportional to the distance from the given point to center of the picture. The experimental data are compared with the theory. The errors of the method considered are estimated.

УДК 538.3 : 538.56

ПОСТРОЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ПО ИЗВЕСТНОЙ ЛУЧЕВОЙ КАРТИНЕ, ОБЛАДАЮЩЕЙ КАУСТИКОЙ С ДВУМЯ ВЕТВЯМИ

В. П. Быков

В работе излагается способ построения волнового поля по заданной лучевой картине в том случае, когда эта картина имеет каустику с двумя ветвями. Построение производится, по существу, в рамках геометрической оптики, однако решение волнового уравнения предполагается в виде произведения линейной комбинации функции параболического цилиндра и ее производной на экспоненту, в отличие от простой экспоненты в обычной геометрической оптике. Волновое поле построено с точностью до некоторой функции одной переменной, определяемой источниками, создающими лучевую картину. Если лучевая картина является собственной для какого-либо резонатора, то поле определяется полностью.

В работе [1] нами показано, что в двумерном случае по известной лучевой картине, имеющей каустику с одной ветвью и являющейся собственной лучевой картиной для данного резонатора, может быть построено волновое поле, не имеющее особенностей на каустике и удовлетворяющее граничным условиям на поверхности резонатора.

В данной работе мы решаем аналогичную задачу, но для каустики с двумя ветвями. Соответственно, предполагаемое решение выбирается в виде произведения линейной комбинации функции параболического цилиндра и ее производной на экспоненту.

Связь лучевой картины с волновым полем неоднократно исследовалась [3-5]. В работах [3, 4] построены собственные функции волнового уравнения, примыкающие к некоторым замкнутым лучевым циклам. Однако там переход к асимптотическому пределу происходит при постоянном поперечном индексе и при стремлении к бесконечности продольного индекса и волнового числа. В рассматриваемом нами случае к бесконечности стремятся как поперечный, так и продольный индексы, и лучевая картина, соответствующая собственному колебанию, остается неизменной.

В работах [5] рассматривались волновые поля, которым соответствуют лучевые картины, каустики которых имеют две ветви, однако вопрос о собственных колебаниях не рассмотрен и не получены явные выражения для полей.

Пусть задана система лучей, каустика которых имеет две ветви с общими асимптотами [2]. Будем считать, что ветви каустики симметричны и симметрично расположены относительно декартовых координат. По-видимому, требование симметричности не является существенным, в то время как наличие общих асимптот важно.

Построим криволинейную ортогональную систему координат подобно тому, как это сделано в работе [1]. Линии N делят пополам угол между двумя лучами, точка пересечения которых лежит на N , и пересекают каустику под прямым углом. Линии K делят пополам допол-

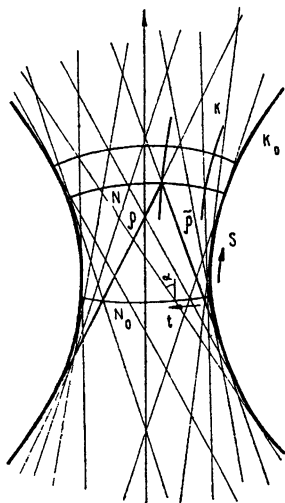


Рис. 1.

нительный угол между лучами, и по мере приближения к каустике они сливаются с ней. Координату t будем отсчитывать вдоль линии N_0 от точки пересечения ее с каустикой, а координату s от той же точки вдоль каустики K_0 (рис. 1). Систему лучей разобьем на две подсистемы — для первой проекция направляющего вектора \bar{q} на линии N положительна, для второй (направляющий вектор q) — отрицательна.

Коэффициенты Ламе данной системы координат определяются из условия $\text{rot } \bar{q} = \text{rot } q = 0$. Так как векторы \bar{q} и q равны соответственно

$$\bar{q} = \{q_t(t, s); q_s(t, s)\}; \quad q = \{-q_t(t, s); q_s(t, s)\}, \quad (1)$$

то для коэффициентов Ламе получаем выражения

$$h_s = q_s^{-1}, \quad h_t = \kappa q_t^{-1}, \quad (2)$$

где $\kappa = \kappa(t) = q_t(0, t)$ — величина проекции q_t на линии N_0 . Волновое уравнение в рассматриваемой системе координат можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\lambda^{-1} \frac{\partial U}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\lambda \frac{\partial U}{\partial \mu} \right) + k^2 (\lambda^{-1} + \lambda) U = 0, \quad (3)$$

где

$$\mu = \int_0^t \kappa dt, \quad \lambda(s, \mu) = q_t q_s^{-1}. \quad (4)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$U = (AW + k^{-1/2} BW') e^{iks}, \quad (5)$$

где функция

$$W = W(\vartheta), \quad \vartheta = \vartheta(\mu) \quad (6)$$

является функцией параболического цилиндра, т. е. удовлетворяет уравнению

$$W'' + Q(\vartheta) W = 0 \quad (7)$$

при

$$Q(\vartheta) = N + 1/2 - (1/4) \vartheta^2. \quad (8)$$

Из (7) следует соотношение

$$W''' = (1/2) \vartheta W - QW', \quad (9)$$

которое понадобится в дальнейшем.

Коэффициенты A и B будем считать медленно меняющимися функциями s и μ . Для определения $A(s, \mu)$, $B(s, \mu)$, а также $\vartheta(\mu)$ подставим решение (5) в уравнение (3). Нетрудно убедиться, что старшие члены, пропорциональные k^2 , сократятся, если положить

$$\vartheta^2 = k^2/Q. \quad (10)$$

Отсюда следует

$$\int_0^{\vartheta} \sqrt{N + 1/2 - (1/4) \vartheta^2} d\vartheta = k\mu. \quad (11)$$

При интегрировании от каустики до каустики получим

$$N + 1/2 = k\mu_0/\pi. \quad (12)$$

Это соотношение является поперечным фазовым условием. Оно показывает, что заданной системе лучей может соответствовать волновое поле только при дискретном наборе частот. Из соотношений (11) и (12) следует, что $\vartheta \sim k^{1/2}$ и $Q \sim k$, поэтому удобно ввести величины

$$\tau = k^{-1/2} \vartheta, \quad P = k^{-1} Q. \quad (13)$$

Теперь выпишем полностью волновое уравнение и сгруппируем отдельно члены, содержащие W и W' :

$$\begin{aligned} W \{ k^2 (-\lambda^{-1} A - \lambda A + \lambda^{-1} A + \lambda A) + k [2i\lambda^{-1} A_s + i(\lambda^{-1})_s A + \\ + (1/2) \lambda \tau P^{-1} B - 2\lambda P^{1/2} B_\mu - (\lambda P^{-1/2})_\mu P B] + [\lambda^{-1} A_{ss} + (\lambda^{-1})_s A_s + \\ + \lambda A_{\mu\mu} + \lambda_\mu A_\mu] \} + k^{-1/2} W' \{ k^2 (-\lambda^{-1} B - \lambda B + \lambda^{-1} B + \lambda B) + \\ + k [2i\lambda^{-1} B_s + i(\lambda^{-1})_s B + 2\lambda P^{-1/2} A_\mu + (\lambda P^{-1/2})_\mu A] + [\lambda^{-1} B_{ss} + \\ + (\lambda^{-1})_s B_s + \lambda B_{\mu\mu} + \lambda_\mu B_\mu] \} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Как легко видеть, члены, пропорциональные k^2 и $k^{3/2}$, сокращаются. Это происходит вследствие специального выбора $\vartheta(\mu)$, определяемого соотношением (10). Члены, не содержащие k или пропорциональные $k^{-1/2}$, малы, и мы ими пренебрегаем. Член, пропорциональный kW , после ряда преобразований приводит к уравнению

$$i\lambda^{-1/2} \frac{\partial}{\partial s} (\lambda^{-1/2} P^{-1/4} A) - \lambda^{1/2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\lambda^{1/2} P^{1/4} B) = 0. \quad (15)$$

Член, пропорциональный $k^{1/2} W'$, после аналогичных преобразований приводит к уравнению

$$i\lambda^{-1/2} \frac{\partial}{\partial s} (\lambda^{-1/2} P^{1/4} B) + \lambda^{1/2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\lambda^{1/2} P^{-1/4} A) = 0. \quad (16)$$

Складывая и вычитая (15) и (16), получим

$$\lambda^{-1/2} \frac{\partial}{\partial s} (\lambda^{-1/2} F) - \lambda^{1/2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\lambda^{1/2} F) = 0; \quad (17)$$

$$\lambda^{-1/2} \frac{\partial}{\partial s} (\lambda^{-1/2} G) + \lambda^{1/2} \frac{\partial}{\partial \mu} (\lambda^{1/2} G) = 0, \quad (18)$$

где

$$F = iP^{-1/4} A + P^{1/4} B, \quad G = iP^{-1/4} A - P^{1/4} B. \quad (19)$$

Уравнения (17) и (18) являются уравнениями в частных производных первого порядка.

Выполняя дифференцирование, приводим (17) к виду

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial \mu} - \lambda^{-1} \frac{\partial F}{\partial s} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \lambda^{-2} \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) F. \quad (20)$$

Уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \lambda, \quad \frac{ds}{d\nu} = -\lambda^{-1}, \quad \frac{dF}{d\nu} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \lambda^{-2} \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) F. \quad (21)$$

Первые два уравнения (21) являются параметрическими уравнениями одного из лучей. Действительно, в малой окрестности некоторой точки имеем

$$ds_1 = q_t d\rho, \quad ds_2 = q_s d\rho, \quad (22)$$

где $d\rho$ — элемент длины луча. С другой стороны,

$$ds_1 = -q_t^{-1} d\mu, \quad ds_2 = q_s^{-1} ds. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и деля соотношения (22) друг на друга, получим

$$\frac{d\mu}{ds} = -\lambda^2, \quad (24)$$

что эквивалентно первым двум характеристическим уравнениям (21). Кроме того, из (22) и (23) следует

$$d\rho = q_t ds_1 + q_s ds_2 = -d\mu + ds \quad (25)$$

и, следовательно,

$$\frac{d\rho}{d\nu} = -(\lambda + \lambda^{-1}). \quad (26)$$

Учитывая (26), третье из характеристических уравнений (21) можно привести к виду

$$\frac{dF}{d\rho} = \frac{1}{2} (\lambda + \lambda^{-1}) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} + \lambda^{-2} \frac{\partial \lambda}{\partial s} \right) F. \quad (27)$$

Это уравнение можно преобразовать к виду [1]

$$\frac{dF}{d\rho} = -\frac{F}{2\rho}, \quad (28)$$

где ρ — расстояние от точки поля до точки касания с каустикой того луча, который проходит через данную точку поля и является характеристикой уравнения (20).

Решение уравнения (28) имеет вид

$$F = F_0 / \sqrt{\rho}, \quad (29)$$

где F_0 есть функция номера луча, т. е. F_0 — постоянная вдоль луча, но меняется от луча к лучу. Решение уравнения (18) получается аналогично и имеет вид

$$G = G_0 / \sqrt{\tilde{\rho}}, \quad (30)$$

где $\tilde{\rho}$ — расстояние вдоль второго луча, проходящего через точку поля, от точки касания его с каустикой до точки поля и G_0 — функция номера второго луча.

Таким образом, коэффициенты A и B имеют вид

$$A = -\frac{i}{2} P^{1/4} \left(\frac{F_0}{\sqrt{\rho}} + \frac{G_0}{\sqrt{\tilde{\rho}}} \right), \quad B = \frac{1}{2} P^{-1/4} \left(\frac{F_0}{\sqrt{\rho}} - \frac{G_0}{\sqrt{\tilde{\rho}}} \right), \quad (31)$$

и, следовательно, поле между ветвями каустики в рассматриваемом приближении оказывается равным

$$U = \left[-iP^{1/4} \left(\frac{F_0(n_1)}{\sqrt{\rho}} + \frac{G_0(n_2)}{\sqrt{\tilde{\rho}}} \right) W + k^{-1/2} P^{-1/4} \left(\frac{F_0(n_1)}{\sqrt{\rho}} - \frac{G_0(n_2)}{\sqrt{\tilde{\rho}}} \right) W' \right] e^{iks}. \quad (32)$$

Для того, чтобы поле на каустике не имело особенностей, следует положить

$$F_0(n) = G_0(n). \quad (33)$$

Это соотношение эквивалентно обычному геометрикооптическому условию, состоящему в том, что набег фазы вдоль луча при прохождении мимо каустики изменяется на $-\pi/2$. Таким образом, окончательный вид поля следующий:

$$U = \left[-iP^{1/4} \left(\frac{F_0(n_1)}{\sqrt{\rho}} + \frac{F_0(\tilde{n}_2)}{\sqrt{\tilde{\rho}}} \right) W + k^{-1/2} P^{-1/4} \left(\frac{F_0(n_1)}{\sqrt{\rho}} - \frac{F_0(\tilde{n}_2)}{\sqrt{\tilde{\rho}}} \right) W' \right] e^{iks}. \quad (34)$$

Непродно убедиться, что это поле на каустике особенностей не имеет. Поле за каустикой мы строить не будем, так как это делается точно так же, как в работе [1]. Кроме решения (34), очевидно, имеется еще комплексно-сопряженное решение.

Если исходная лучевая система является собственной для какого-либо резонатора, то возникает вопрос об удовлетворении граничных условий. Пусть уравнения зеркал резонатора суть $s = s_1$ и $s = s_2$. Тогда для выполнения граничных условий, например, $U|_{s_1, s_2} = 0$, необходимо, чтобы фаза выражения (34) не зависела от ϑ . Положим:

$$\frac{F_0(n_1)}{\sqrt{\rho}} = \left(\rho \frac{d\alpha_1}{dn} \right)^{-1/2}, \quad \frac{F_0(\tilde{n}_2)}{\sqrt{\tilde{\rho}}} = \left(\tilde{\rho} \frac{d\alpha_2}{dn} \right)^{-1/2}, \quad (35)$$

где n — номер луча. В силу закона отражения на верхнем зеркале эти выражения равны, и, следовательно, фаза выражения (34) просто равна $-\pi/2$ и не зависит от ϑ . В силу того же закона отражения то же самое будет иметь место на нижнем зеркале.

Номер луча n должен обладать двумя свойствами. Во-первых, луч с номером n после отражения от верхнего и нижнего зеркал должен принимать номер $n + 1$. Во-вторых, параметры луча, такие, например, как наклон α , должны плавно зависеть от n . Возможность введения такого номера луча не является очевидной. Более подробно этот вопрос мы обсудим ниже.

Если функцию $F_0(n)$ выбрать в соответствии с (35), то из граничных условий на зеркалах следует продольное фазовое условие

$$k(s_1 - s_2) = N_1 \pi, \quad (36)$$

и поле в объеме резонатора оказывается равным

$$U = \left\{ -iP^{1/4} \left[\left(\rho \frac{d\alpha_1}{dn} \right)^{-1/2} + \left(\tilde{\rho} \frac{d\alpha_2}{dn} \right)^{-1/2} \right] W + k^{-1/2} P^{-1/4} \left[\left(\rho \frac{d\alpha_1}{dn} \right)^{-1/2} - \left(\tilde{\rho} \frac{d\alpha_2}{dn} \right)^{-1/2} \right] W' \right\} \exp[ik(s - s_1)] + \text{к. с.} \quad (37)$$

Поперечное фазовое условие (12) имеет место даже в том случае, когда зеркала отсутствуют. Оно показывает, что заданной системе лучей может соответствовать не произвольная частота, а лишь дискретный набор частот. Отсюда видно, что для удовлетворения обоим фазовым условиям

необходимо знать не просто одну лучевую картину, но систему собственных лучевых картин, зависящую от некоторого параметра.

Вернемся теперь к вопросу о введении номера луча n . Систему лучей можно изобразить на своего рода фазовой диаграмме (рис. 2), где по оси абсцисс отложена координата пересечения луча с одним из зеркал, отсчитываемая вдоль зеркала, а по оси ординат отложен синус угла, образуемого лучом с нормалью к зеркалу в точке их пересечения. На такой фазовой диаграмме каждый луч изобразится точкой, а вся система лучей изобразится замкнутой кривой (будем называть эту кривую циклом). Если система лучей является собственной для рассматриваемого резонатора, то после отражения лучей от верхнего и нижнего зеркал этот цикл перейдет в себя, хотя каждая отдельная точка цикла перейдет в другую точку цикла. Будем предполагать, что цикл не является изолированным, т. е. имеется система циклов, приближающаяся к рассматриваемому, скажем, система циклов, вложенных в рассматриваемый, или система циклов, охватывающих рассматриваемый. Отметим на рассматриваемом и одном из дополнительных циклов некоторую начальную точку с номером $n = 0$ и точку с номером $n = 1$, которая получается из начальной в результате отражения луча от верхнего и нижнего зеркал. Теперь для произвольной точки цикла определим номер n как предел отношения площади, заключенной между дугами циклов, ограниченными точками $n = 0$ и $n = n$, к площади, заключенной между дугами циклов, ограниченными точками $n = 0$ и $n = 1$, при стремлении дополнительного цикла к рассматриваемому. Нетрудно убедиться, что введенный таким образом номер луча n удовлетворяет необходимым условиям. Действительно, точка, получающаяся из точки $n = 1$ после отражения луча от верхнего и нижнего зеркал, будет иметь номер $n = 2$, так как площадь на фазовой диаграмме сохраняется при отражении лучей от верхнего и нижнего зеркал. Кроме того, все параметры луча (x и $\sin \alpha$) будут плавно зависеть от номера n . Возможность введения номера n следует из работы [6].

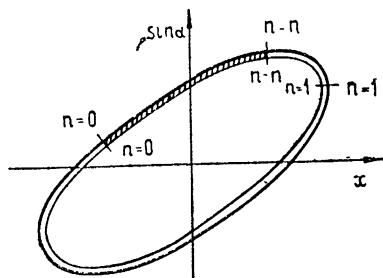


Рис. 2.

Таким образом, соотношение (34) определяет волновое поле, соответствующее данной лучевой картине с двумя каустиками с точностью до некоторой функции одного переменного $F_0(n)$, которая может быть определена, если известны свойства источника, задающего лучевую картину. Если система лучей является собственной для какого-либо резонатора, то волновое поле определяется полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Быков, ЖТФ, 40, вып. 10, 2035 (1970).
2. В. П. Быков, Электроника больших мощностей, сб. 5, 1968, стр. 117.
3. В. С. Булдырев, ДАН СССР, 163, № 4 (1965).
4. В. Ф. Лазуткин, Автореферат диссертаций, Ленинград, 1967.
5. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, 7, № 4, 664 (1964); 8, № 4, 659 (1965).
6. А. Н. Колмогоров, ДАН СССР, 93, № 5, 763 (1953).

CREATION OF THE WAVE FIELD USING THE RAY PICTURE WITH
TWO BRANCHES CAUSTICS

V. P. Bykov

A method of creating the wave field using the given ray picture in the case when this picture has the caustics with two branches is presented. The creation is essentially made in the geometrical optics approximation. However, the solution of the wave equation is assumed as the product of the linear combination of the parabolic function and its derivative with the exponent as distinct from the simple exponent in the ordinary geometrical optics. The wave field is created with an accuracy up to some function of a variable determined by the sources forming the ray pattern. If the ray pattern is eigenpicture to some resonator, the field is fully determined.

УДК 538.56 : 519.25

ГЛУБИННЫЙ РЕЖИМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Ю. Н. Барабаненков

Рассматривается многократное рассеяние электромагнитных волн в рассеивающей среде. В основу кладутся уравнения Дайсона и Бете—Солпитера. С помощью оптической теоремы находится решение уравнения Бете—Солпитера для корреляционного тензора электрического поля в рассеивающей среде на большой оптической глубине. Найденный корреляционный тензор с точностью до постоянного множителя равен мнимой части среднего тензора Грина электрического поля и выражается через тензор эффективной диэлектрической проницаемости рассеивающей среды так же, как выражается корреляционный тензор тепловых флуктуаций электрического поля в детерминированной среде через ее тензор диэлектрической проницаемости. Выясняется условие, при котором средняя интенсивность продольного электрического поля мала по сравнению со средней интенсивностью поперечного электрического поля. Для непрерывной среды это условие означает, что средний квадрат флуктуаций диэлектрической проницаемости должен быть мал по сравнению с единицей.

В работе [1] путем решения уравнений Дайсона (Д) и Бете—Солпитера (Б—С) найдена корреляционная функция скалярного поля в рассеивающей среде на большой оптической глубине. Эта корреляционная функция с точностью до постоянного множителя равна мнимой части средней функции Грина. В данной заметке результат работы [1] обобщается на случай электромагнитного поля в рассеивающей среде.

Исходим из уравнений Д и Б—С для средних значений электрического поля $\overline{E}_\mu(\mathbf{r})$ и его билинейной комбинации $\overline{E}_\mu(\mathbf{r}_1) E_\nu^*(\mathbf{r}_2)$, где греческие индексы μ, ν, \dots принимают значения 1, 2, 3. Такие уравнения сформулированы в работе Татарского [2]. Они записываются аналогично уравнениям Д и Б—С для скалярного поля и отличаются от них лишь тем, что для электрического поля массовый оператор M и оператор интенсивности K имеют тензорные ядра* $M_{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и $K_{\mu\nu, \nu\nu'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2)$.

Предположим, что рассеивающая среда является немагнитной негиротропной, в среднем однородной и изотропной. Уравнение Б—С для корреляционной функции электрического поля на большой оптической глубине удобно записать в спектральном представлении [3], вводя тензорную спектральную плотность $f_{\mu\nu}(\mathbf{R}, \mathbf{p})$ (пространственный спектр) электрического поля с помощью соотношения

$$\overline{E}_\mu(\mathbf{r}_1) E_\nu^*(\mathbf{r}_2) = \int \exp [i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] d^3p f_{\mu\nu}(\mathbf{R}, \mathbf{p}). \quad (1)$$

На большой оптической глубине среднее электрическое поле $\overline{E}_\mu(\mathbf{r})$ пренебрежимо мало, и спектральная плотность $f_{\mu\nu}(\mathbf{R}, \mathbf{p})$ не зависит от координат \mathbf{R} . При этих условиях уравнение для спектральной плотности принимает вид

* В работе Татарского [2] массовый оператор и оператор интенсивности обозначены буквой Q .

$$f_{\mu\nu}(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \tilde{G}_{\mu\mu'}(\mathbf{p}) \tilde{G}_{\nu\nu'}^*(\mathbf{p}) \int \tilde{K}_{\mu\mu', \nu\nu'}^0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') d^3 p' f_{\mu'\nu'}(\mathbf{p}'). \quad (2)$$

Здесь $\tilde{G}_{\mu\mu'}(\mathbf{p})$ — фурье-образ среднего тензора Грина электрического поля, $\tilde{K}_{\mu\mu', \nu\nu'}^0(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — диагональная часть фурье-образа ядра оператора интенсивности*. Поперечная и продольная (относительно волнового вектора \mathbf{p}) составляющие $\tilde{G}^{tr}(\mathbf{p})$ и $\tilde{G}^l(\mathbf{p})$ фурье-образа среднего тензора Грина связаны с поперечной и продольной составляющими $\tilde{M}^{tr}(\mathbf{p})$ и $\tilde{M}^l(\mathbf{p})$ фурье-образа ядра массового оператора соотношениями

$$\tilde{G}^{tr}(\mathbf{p}) = -\frac{(2\pi)^{-3}}{p^2 - k_0^2 + \tilde{M}^{tr}(\mathbf{p})}, \quad \tilde{G}^l(\mathbf{p}) = \frac{(2\pi)^{-3}}{k_0^2 - \tilde{M}^l(\mathbf{p})}, \quad (3)$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число свободного пространства, ω — частота, c — скорость света.

Уравнение (2) можно решить, если воспользоваться оптической теоремой для электромагнитного поля в рассеивающей среде. Эта теорема доказывается аналогично случаю скалярного поля [4] и имеет вид

$$\text{Im} \tilde{M}_{\mu'\nu'}(\mathbf{p}') = \int \text{Im} \tilde{G}_{\mu\nu}(\mathbf{p}) d^3 p \tilde{K}_{\mu\mu', \nu\nu'}^0(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (4)$$

С помощью (3), (4) и соотношения взаимности

$$\tilde{K}_{\mu\mu', \nu\nu'}^0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \tilde{K}_{\mu'\mu, \nu'\nu}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \quad (5)$$

приходим к следующему решению уравнения (2):

$$f_{\mu\nu}(\mathbf{p}) = -C \text{Im} \tilde{G}_{\mu\nu}(\mathbf{p}), \quad (6)$$

где C — произвольная положительная не зависящая от \mathbf{p} скалярная величина. Таким образом, тензорная спектральная плотность электрического поля на большой оптической глубине с точностью до постоянного множителя равна мнимой части среднего тензора Грина.

Спектральной плотности (6) можно придать интересную форму записи, если ввести тензор эффективной диэлектрической проницаемости рассеивающей среды $\varepsilon_{\mu\mu'}^{\text{эфф}}(\mathbf{r})$, равный

$$\varepsilon_{\mu\mu'}^{\text{эфф}}(\mathbf{r}) = \delta_{\mu\mu'} - k_0^{-2} M_{\mu\mu'}(\mathbf{r}). \quad (7)$$

С его помощью выражение (6) преобразуется к виду

$$f_{\mu\nu}(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3} C k_0^{-2} \left[k_0^{-4} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{\text{Im} \tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}}^{tr}(\mathbf{p})}{|p^2 - k_0^2 \tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}}^{tr}(\mathbf{p})|^2} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \frac{\text{Im} \tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}}^l(\mathbf{p})}{|\tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}}^l(\mathbf{p})|^2} \right], \quad (8)$$

где $\tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}}^{tr}(\mathbf{p})$ и $\tilde{\varepsilon}_{\text{эфф}}^l(\mathbf{p})$ — поперечная и продольная составляющие фурье-образа тензора эффективной диэлектрической проницаемости. Правая

* В работах [1, 3] диагональная часть фурье-образа ядра оператора интенсивности обозначена через $\tilde{K}_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}, \mathbf{p}')$.

часть (8) с точностью до постоянного множителя и индекса «эфф» совпадает со спектральной плотностью тепловых флуктуаций электрического поля в детерминированной среде с пространственной дисперсией, диэлектрической проницаемости [5, 6].

Произведем в (8) свертку по индексам μ, ν и подставим результат в формулу (1), тоже свернутую по индексам μ, ν , совмещая точки наблюдения $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. При этом первое слагаемое (8) даст среднюю интенсивность $|E^{tr}|^2$ поперечного электрического поля, а второе слагаемое — среднюю интенсивность $|E^l|^2$ продольного поля. Оценим величину их отношения, считая эффективные рассеивающие неоднородности среды мелкомасштабными: $k_0 l \ll 1$, l — масштаб неоднородности.

Интенсивность поперечного поля $|E^{tr}|^2$ оцениваем в пренебрежении пространственной дисперсией, заменяя в $\text{Im } \tilde{G}^{tr}(\rho)$ функцию $\tilde{M}^{tr}(\rho)$ ее значением $\tilde{M}^{tr}(0)$ в точке $\rho = 0$. При оценке интенсивности продольного поля $|E^l|^2$ пренебрегать пространственной дисперсией нельзя, так как это приводит к расходящемуся интегралу. Мы учтем пространственную дисперсию приближенно, полагая $\text{Im } \tilde{G}^l(\rho) \approx (2\pi)^{-3} k_0^{-4} \text{Im } \tilde{M}^l(0)$ и обрывая интеграл (1) от второго слагаемого (8) на верхнем пределе $\rho_{\text{max}} \sim 1/l$. В результате получаем

$$|E^l|^2 / |E^{tr}|^2 \sim \frac{1}{k_0 d (k_0 l)^3}, \quad (9)$$

где коэффициент экстинкции

$$1/d = -\text{Im } \tilde{M}^{tr}(0) / k_0 \approx -\text{Im } \tilde{M}^l(0) / k_0. \quad (10)$$

Из оценки (9) следует, что средняя интенсивность продольного поля мала по сравнению со средней интенсивностью поперечного поля, если

$$k_0 d (k_0 l)^3 \gg 1. \quad (11)$$

Подобное условие приводится в монографии Левина и Рытова [5] (стр. 213) в связи с исследованием тепловых флуктуаций электрического поля; описанный метод оценки средней интенсивности продольного поля заимствован нами из этой монографии.

Проанализируем условие (11). Коэффициент экстинкции $1/d$ в рассеивающей среде зависит от масштаба l эффективной неоднородности. Для непрерывной среды, диэлектрическая проницаемость которой флуктурует по нормальному закону, коэффициент экстинкции, согласно [7], приближенно равен

$$\frac{1}{d} \approx \frac{4}{3} \sigma^2 k_0 (k_0 l)^3,$$

где σ^2 — средний квадрат флуктуаций диэлектрической проницаемости. Подставляя в (11), находим

$$\sigma^2 \ll 1. \quad (11a)$$

Таким образом, в непрерывной рассеивающей среде из условия пренебрежения продольным электрическим полем следует, что средний квадрат флуктуаций диэлектрической проницаемости должен быть мал по сравнению с единицей.

Мы получили условие (11), исходя из выражения (8) для спектральной плотности электрического поля на большой оптической глубине

не. К этому условию можно прийти иначе, рассматривая роль продольного электрического поля в формулировке оптической теоремы (4).

Действительно, запишем оптическую теорему (4) подробнее, разлагая в правой части фурье-образ среднего тензора Грина на поперечную и продольную составляющие. Получаем

$$\operatorname{Im} \tilde{M}_{\mu\nu'}(k_0 s') = \int_{4\pi} d^2 s \int_0^\infty [(\delta_{\mu\nu} - s_\mu s_\nu) \operatorname{Im} \tilde{G}^{tr}(p) + s_\mu s_\nu \operatorname{Im} \tilde{G}^l(p)] p^2 dp \tilde{K}_{\mu\nu', \nu\nu'}^0(p s, k_0 s'), \quad (4a)$$

где при переходе от (4) положено $p' = k_0 s'$, s и s' — единичные векторы. В правой части (4a) первый интеграл учитывает вклад поперечного электрического поля, второй — продольного поля. Если фурье-образ ядра оператора интенсивности $\tilde{K}_{\mu\nu', \nu\nu'}^0(p s, k_0 s')$ в зависимости от p около точки $p = k_0$ является плавно меняющейся функцией в масштабе $1/d$, то при вычислении первого интеграла его можно вынести за знак интеграла по p в точке $p = k_0$. Второй интеграл оцениваем по модулю, вынося за знак интеграла максимальное значение модуля фурье-образа ядра оператора интенсивности. Требуя, чтобы второй интеграл был мал по сравнению с первым, опять приходим к условию (11). Как видим, это условие позволяет пренебречь в оптической теореме эффектом продольного электрического поля.

В пренебрежении эффектом продольного поля оптическая теорема записывается следующим образом:

$$\operatorname{Im} \tilde{M}_{\mu\nu'}(k_0 s') = -\frac{k_0}{4\pi} \int_{4\pi} d^2 s (\delta_{\mu\nu} - s_\mu s_\nu) \tilde{K}_{\mu\nu', \nu\nu'}^0(k_0 s, k_0 s'). \quad (12)$$

В таком приближении она лежит в основе уравнения переноса электромагнитного излучения в рассеивающих средах.

В заключение автор благодарит В. И. Татарского и В. М. Финкельберга за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 894 (1969).
2. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 46, № 4, 1399 (1964).
3. Ю. Н. Барабаненков, ЖЭТФ, 56, № 4, 1262 (1969).
4. Ю. Н. Барабаненков, В. М. Финкельберг, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 719 (1968).
5. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, изд. Наука, М., 1967.
6. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмобразных сред, Госатомиздат, М., 1961.
7. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 48, № 2, 656 (1965).

Всесоюзный научно-исследовательский институт
оптико-физических измерений

Поступила в редакцию
1 июня 1970 г.

THE DEPTH REGIME OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN A SCATTERING MEDIUM

Yu. N. Barabanenkov

The multiple scattering of electromagnetic waves in a scattering medium is considered. The Dyson and Bethe—Salpeter equations are taken as a principle. Using the optical theorem the Bethe—Salpeter equation is solved for the correlation tensor of the

electric field in the scattering medium at the large optical depth. The correlation tensor found with an accuracy of the constant multiplier is equal to the imaginary part of the average Green's tensor of the electric field and is expressed through the tensor of the effective dielectric permittivity of the scattering medium in such a way as the correlation tensor of thermal fluctuations of the electric field in the determined medium is expressed through the dielectric permittivity tensor. The condition is explained under which the average intensity of the longitudinal electric field is small as compared with the mean intensity of the transverse electric field. For the continuous medium this condition implied the mean square of the dielectric permittivity fluctuations to be smaller than the unity,

УДК 621.378.2

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ СИГНАЛ В ВОЛНОВОДЕ СО СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНЫМИ СТЕНКАМИ

В. Д. Фрейлихер

В рамках теории многократного рассеяния рассчитана средняя интенсивность амплитудно-модулированного сигнала, распространяющегося в статистически шероховатом волноводе. Вычислены расстояния, на которых за счет рассеяния на неровностях стенок существенно искажается импульсная структура поля.

1. При передаче сигнала по волноводам на большие расстояния существенное влияние на характер распространения оказывают нерегулярности поверхности. Так как деформации поверхности имеют, как правило, случайный характер, их форму невозможно описывать с помощью детерминированных функций. В этом случае для теоретического изучения влияния шероховатостей на характер волноводнопо распространения эффективным оказывается статистический подход, развитый в работах [1-3], при котором поверхность волновода задается в виде случайной функции координат, а поле характеризуется своими статистическими моментами, т. е. величинами, усредненными по ансамблю реализаций случайной поверхности. Естественно, что такие усредненные характеристики могут существенно отличаться от величин, измеряемых в конкретном волноводе, являющемся одной реализацией из ансамбля. В случае природных волноводов это, однако, не приводит к затруднениям при сравнении измеряемых на эксперименте величин с вычисленными путем усреднения по ансамблю, так как форма поверхности таких волноводов, как правило, случайным образом изменяется во времени. Поэтому усреднение по ансамблю можно, в силу эргодичности, заменить усреднением по этим медленным по сравнению с частотой сигнала временным флуктуациям.

Если мы имеем дело с неизменяющимися во времени поверхностями, например, с металлическими волноводами, средние (по ансамблю) величины можно определять по измерениям в одной только линии путем измерений в некоторой полосе частот с последующим усреднением по этой полосе [4].

В настоящей работе в рамках статистического метода изучается влияние неровностей на процесс установления стационарного режима при включении источника, а также исследуется уменьшение глубины амплитудной модуляции, вызванное наличием шероховатостей.

Как показано в [3], задачу о вычислении интенсивности n -й собственной волны при достаточно малых высотах «одномерных» неровностей можно свести к решению следующей системы уравнений:

$$\operatorname{sgn}(n) \frac{\partial J_n(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{v_n} \frac{\partial J_n(x, t)}{\partial t} = \sum_{m=-N}^N \omega_{nm} (J_m - J_n) - 2\gamma_n^0 J_n. \quad (1)$$

Здесь v_n — групповая скорость n -й волны, γ_n^0 — декремент затухания, вызванного тепловыми потерями или «вывывечиванием» через стенки, t — время, x — координата вдоль оси волновода, N — число распространяющихся в волноводе волн (волна номера — m отличается от n -й волны только направлением распространения); ω_{nm} — отнесенная к единице длины вероятность перехода энергии при рассеянии из n -й волны в m -ю — средний погонный коэффициент потерь на преобразование, вычислявшийся ранее, например, в [4, 5].

Поясним еще физический смысл фигурирующих в (1) величин J_n . Для одномодового ($N = 1$) волновода (именно этот случай и будет в основном рассматриваться ниже) уравнения, (1) получаются непосредственно путем интегрирования точного уравнения для вторых статистических моментов поля (уравнения Бете—Солпитера) по интервалу L , большому по сравнению с радиусом корреляции неровностей l и малому по отношению к $1/\gamma_n$ — расстоянию, на котором существенно затухает когерентное поле [2]:

$$l \ll L \ll 1/\gamma_n \quad (2\gamma_n \equiv \sum_{m=-N}^N \omega_{nm}). \quad (2)$$

Таким образом, фигурирующие в случае одномодового волновода в (1) величины J_1 и J_{-1} описывают не просто интенсивность в точке x , а интегральную интенсивность данной волны, заключенную в объеме с размером $\sim L$ в окрестности точки x . Если, например, размеры, принимающего устройства удовлетворяют неравенству (2), то необходимое интегрирование производится автоматически самим приемником. При этом, конечно, теряется информация о «тонкой структуре» поля, т. е. о процессах, имеющих масштаб изменения меньший, чем радиус корреляции. Однако, благодаря этому, величины J_n удовлетворяют существенно более простым соотношениям, чем точные уравнения для интенсивности в точке. (Хорошо известно, что уравнения Бете—Солпитера можно решить только при очень специальных и, как правило, физически мало интересных предположениях.)

Тот факт, что для получения (1) необходимо перейти от интенсивности в точке x к интенсивности в объеме с размером $\sim L$ в окрестности точки x хорошо согласуется с результатами работы [4], где показано, что погонный коэффициент потерь на преобразование в n -ю моду ω_{nm} формируется, т. е. перестает зависеть от x , только на расстояниях много больших радиуса корреляции l .

В многомодовом ($N > 1$) волноводе при выводе (1) необходимо также потребовать, чтобы размеры объема, в котором измеряется интенсивность, были велики по сравнению с длиной волны в волноводе. Это необходимо для того, чтобы полная интенсивность представлялась в виде суммы интенсивностей отдельных мод.

При выводе уравнений (1) не учтены явления, связанные с обычной временной дисперсией волн в волноводе, изученные, например, в [6]. Это накладывает ограничения на ширину спектра передаваемого сигнала $(\Delta\Omega)^2 \ll v_n^2 x_n k/Dq_n^*$. Поэтому рассмотренные ниже процессы, сопровождающие распространение нестационарных волн, обусловлены

* Здесь D — расстояние между источником и приемником, x_n — проекция волнового вектора на направление распространения, $q_n = \sqrt{k^2 - x_n^2}$, $k = 2\pi/\lambda$.

единственно наличием шероховатостей и в идеальном (гладком) волноводе отсутствуют.

Если граничные условия для J_n имеют вид

$$J_n(x=0, t \leq 0) = 0, \quad J_n(x=0, t > 0) = J_n(t), \quad (3)$$

то, применяя к (1) преобразование Лапласа по времени, для изображений $\tilde{J}_n(x, p)$ получим систему дифференциальных уравнений, которая, как легко убедиться, совпадает с уравнениями для интенсивности в стационарном случае, если $2\gamma_0$ заменить на $(2\gamma_n^0 + p/v_n)$. Граничное условие имеет вид

$$\tilde{J}_n(0, p) = \int_0^{\infty} J_n(t) e^{-pt} dt. \quad (4)$$

Если решение системы уравнений для \tilde{J}_n известно, интенсивность n -й нормальной волны в статистически шероховатом волноводе, возбуждаемом в точке $x=0$ по закону (3), определяется выражением

$$J_n(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{J}_n(x, p) e^{pt} dp, \quad (5)$$

где контур интегрирования есть прямая в плоскости комплексного переменного p , параллельная мнимой оси и проходящая правее всех особенностей функции $\tilde{J}(x, p)$.

2. В качестве примера рассмотрим волновод, поперечные размеры которого таковы, что в нем на данной частоте ω_0 могут существовать лишь две волны, отличающиеся только направлением распространения (одномодовый волновод), причем будем считать, что неровным является полубесконечный участок $(0, \infty)$. В этом случае система (1) состоит из двух уравнений для интенсивностей волны, бегущей в направлении $x > 0$ (J_1) и $x < 0$ (J_2).

Граничные условия зададим в виде

$$J_1(x=0, t \leq 0) = 0, \quad J_1(x=0, t > 0) = J_0, \quad J_2(x \rightarrow \infty) = 0. \quad (6)$$

Граничные условия (6) означают, что в точке $x=0$ (начало шероховатого участка) в момент времени $t=0$ возбуждается монохроматическая нормальная волна с интенсивностью J_0 , распространяющаяся в положительном направлении.

Пользуясь полученным в [3] решением системы уравнений для $\tilde{J}_n(x, p)$ с учетом того, что $\tilde{J}_1(x=0, p) = 1/p$, находим по формуле (5):

$$J_1(x, t) = \frac{J_0}{2\pi i} \int_{c_1} \frac{dp}{p} \exp(pt - h(p)x/v); \quad (7)$$

$$J_2(x, t) = \frac{J_0}{2\pi i} \int_{c_1} r_{\infty}(p) \frac{dp}{p} \exp(pt - h(p)x/v), \quad (8)$$

$$r_{\infty} = \frac{2\gamma_0 + p/v + 2\omega - h(p)}{2\gamma_0 + p/v + 2\omega + h(p)},$$

$$h(p) = \sqrt{(p + 2\gamma_0 v)(p + 2\gamma_0 v + 2\omega v)},$$

причем ветви корня нужно выбирать так, чтобы выполнялись условия $\text{Im}h(p) > 0$ при $\text{Im}p > 0$ и $\text{Im}h(p) < 0$ при $\text{Im}p < 0$. Интегралы подобного типа исследовались Л. А. Вайнштейном.

При $t < x/v$, замыкая контур C_1 (см. рис. 1) в правой полуплоскости, убеждаемся, что $J_1 = J_2 = 0$. Если $t > x/v$, путь интегрирования можно деформировать налево, и $J_1, J_2 \neq 0$, так как левее C_1 расположены полюс подынтегральной функции $p = 0$ и две точки ветвления $p_1 = -2\gamma_0 v$, $p_2 = -2\gamma_0 v - 2\omega v$, а также полюс функции r_∞ , совпадающий с p_1 .

Вычислим асимптотику J_1 и J_2 при малых $\xi = t - x/v > 0$, т. е. на небольших расстояниях от фронта волны (точные оценки приведены ниже). Для этого преобразуем контур C_1 непрерывным образом, не пересекая при этом особых точек, в окружность радиуса Ω (см. рис. 1). Радиус Ω может быть достаточно произвольным (необходимо только,

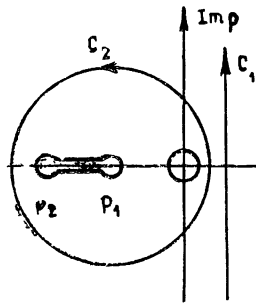


Рис. 1.

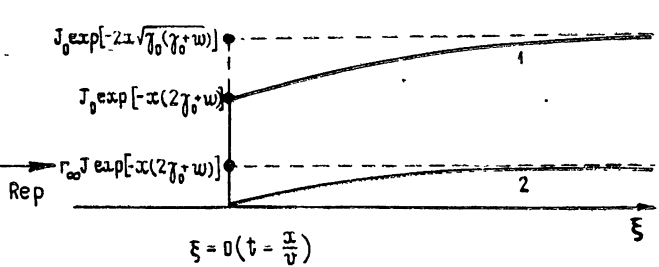


Рис. 2.

чтобы все особые точки находились внутри окружности $|p| = \Omega$, выберем его большим настолько, чтобы в разложении $h(p)$ и r_∞ в ряд по $1/\Omega$ можно было ограничиться первыми тремя членами. Переходя к интегрированию по углу $\left(\int_{C_1} \dots dp = \int_0^{2\pi} \dots i\Omega e^{i\varphi} d\varphi \right)$, замечаем, что при $\Omega = [v\omega^2 x / 2(t - x/v)]^{1/2}$ полученные интегралы вычисляются точно:

$$J_1(x, t) = J_0 \exp[-x(2\gamma_0 + \omega)] I_0[\sqrt{2}\omega^2 v x(t - x/v)]; \quad (9)$$

$$J_2(x, t) = J_0 \exp[-x(2\gamma_0 + \omega)] \sqrt{2v(t - x/v)/x} I_1[\sqrt{2v\omega^2 x(t - x/v)}]. \quad (10)$$

Здесь I_k — функции Бесселя от мнимого аргумента. Неравенство, появляющееся при разложении подынтегральных функций в (7), (8) по $1/\Omega$ и ограничивающее пределы применимости (9), (10), имеет вид

$$\xi = t - x/v \ll [2v(2\gamma_0 + \omega)]^{-1} \quad (t \gg \xi). \quad (11)$$

В другом предельном случае,

$$(xv)^{-1/2} \ll \beta^{1/2}(1 - \beta^2)^{1/4} \quad (\beta = x/tv), \quad (12)$$

вычисляя (7), (8) методом перевала, получаем

$$J_1(x, t) = J_0 \exp[-2x\sqrt{\gamma_0(\gamma_0 + \omega)}] - \frac{J_0}{2} \exp\left[-vt(2\gamma_0 + \omega - \omega\sqrt{1 - \beta^2}) + \frac{P^2 t(1 - \beta^2)^{3/2}}{2\beta^2 \omega v}\right] \times \left\{ 1 - \Phi\left[P\sqrt{\frac{t(1 - \beta^2)^{3/2}}{2\beta^2 \omega v}}\right] \right\} \quad (P = v(2\gamma_0 + \omega - \omega/\sqrt{1 - \beta^2}) > 0),$$

$$J_1(x, t) = \frac{J_0}{2} \exp \left[-vt(2\gamma_0 + \omega - \omega \sqrt{1 - \beta^2}) + \frac{P^2 t(1 - \beta^2)^{3/2}}{2\beta^2 \omega v} \right] \times \left\{ 1 - \Phi \left[|P| \sqrt{\frac{t(1 - \beta^2)^{3/2}}{2\beta^2 \omega v}} \right] \right\} \quad (P < 0), \quad (13)$$

$$J_2(x, t) = r_\infty(P) J_1(x, t), \quad \Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt.$$

Формулы (9), (10), (13) и их асимптотики позволяют достаточно полно проанализировать интенсивность прямой и отраженной волн в рассматриваемом случае.

Временная эволюция средней интенсивности, наблюдаемая в фиксированной точке волновода x , будет следующей (рис. 2). При $t < x/v$ сигнал отсутствует. В момент времени $t = x/v$ интенсивность прямой волны терпит скачок и становится равной $J_0 \exp[-x(2\gamma_0 + \omega)]$. С ростом $\xi = t - x/v$ величина J_1 (кривая 1) возрастает как $I_0(\sqrt{2\omega v^2 x \xi})$, т. е. вначале (при малых ξ) линейно, а затем (на достаточно больших расстояниях) по закону

$$J_1(x, t) = \exp[-vt(2\gamma_0 + \omega) + \omega v \sqrt{2t\xi}] \frac{J_0}{\sqrt{4\pi t \xi \omega v}}. \quad (9a)$$

При $t \rightarrow \infty$, как видно из (13), интенсивность $J_1(x, t)$ экспоненциально приближается к значению $J_0 \exp[-2x\sqrt{\gamma_0(\gamma_0 + \omega)}]$. Этой формулой описывается, как и следовало ожидать, распределение интенсивности прямой волны по координате в стационарном случае.

Интенсивность отраженной волны J_2 (кривая 2) также равна нулю при $t < x/v$, однако не терпит скачка при $t = x/v$, а возрастает с нулевого значения как $J_1(x, t)$, т. е. вначале линейно по ξ , а затем по закону

$$J_2(x, t) = J_0 \sqrt{\frac{2v\xi}{x}} \exp[-vt(2\gamma_0 + \omega) + \omega v \sqrt{2t\xi}].$$

Наконец, при $t \rightarrow \infty$ интенсивность J_2 выходит на стационарное распределение.

$$J_2(x, t) = r_\infty(p = 0) \exp[-2x\sqrt{\gamma_0(\gamma_0 + \omega)}].$$

3. При изучении вопроса о возможности передачи информации на большие расстояния по волноводу с неровными стенками интересно рассмотреть процесс распространения амплитудно-модулированного сигнала в таком волноводе и выяснить, на каких расстояниях за счет влияния шероховатостей заметно уменьшается глубина амплитудной модуляции средней интенсивности.

Пусть в начале неровного участка $(0, \infty)$ одномодового волновода возбуждается серия n прямоугольных импульсов длительностью T , разделенных интервалом τ . (Из-за условия (2), очевидно, необходимо, чтобы $T, \tau \gg l/v_n$.)

Все характерные особенности процесса распространения проявляются уже при $n = 2$. Интенсивность прямой волны J_1 в этом случае удовлетворяет при $x = 0$ граничному условию (3), причем

$$J_1(t) = \begin{cases} J_0 & (0 < t < T, \quad T + \tau < t < 2T + \tau) \\ 0 & (T \leq t \leq T + \tau, \quad t \geq 2T + \tau, \quad t \leq 0) \end{cases}$$

Если $T + \tau \ll [2v(\gamma_0 + \omega)]^{-1}$, то приближенный метод вычисления интегралов (7), (8), примененный при получении (9), (10), приводит к следующей зависимости от x и t :

$$J_1(x, t) = \begin{cases} \exp[-x(2\gamma_0 + \omega)] I_0(\sqrt{2v\omega^2 x \xi}) & (0 < \xi < T) \\ \exp[-x(2\gamma_0 + \omega)] [I_0(\sqrt{2v\omega^2 x \xi}) - I_0(\sqrt{2v\omega^2 x(\xi - T)})] & (T \leq \xi \leq T + \tau) \\ \exp[-x(2\gamma_0 + \omega)] [I_0(\sqrt{2v\omega^2 x \xi}) - I_0(\sqrt{2v\omega^2 x(\xi - T)}) + \\ + I_0(\sqrt{2v\omega^2 x(\xi - T - \tau)})] & (T + \tau < \xi < 2T + \tau) \\ \exp[-x(2\gamma_0 + \omega)] [I_0(\sqrt{2v\omega^2 x \xi}) - I_0(\sqrt{2v\omega^2 x(\xi - T)}) + \\ + I_0(\sqrt{2v\omega^2 x(\xi - T - \tau)}) - I_0(\sqrt{2v\omega^2 x(\xi - 2T - \tau)})] & (\xi \geq 2T + \tau) \end{cases} \quad (14)$$

Если, наконец, при вычислении $J_1(x, t)$ на больших расстояниях от конца серии воспользоваться методом перевала, можно построить следующую картину изменения средней интенсивности сигнала, принимаемого в фиксированной точке волновода (рис. 3).

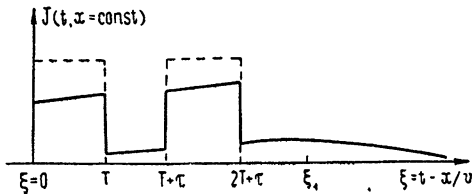


Рис. 3.

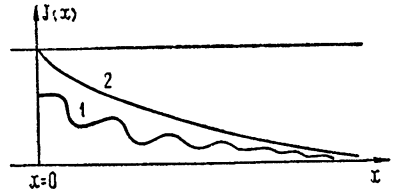


Рис. 4.

Тот факт, что на интервалах $(0, T)$, $[T + \tau, (2T + \tau)]$, $(2T + \tau, \xi_1)$ интенсивность прямой волны возрастает, имеет простой физический смысл. Действительно, в точку x в момент времени $t = x/v$ приходит сигнал, интенсивность которого ослаблена за счет рассеяния назад на участке $(0, x)$. Отраженное назад поле претерпевает затем повторные рассеяния и частично попадает в точку x в более поздние моменты времени, что и приводит к некоторому росту $J_1(x, t)$.

Определим величину относительной глубины модуляции средней интенсивности следующим образом:

$$\eta(x) = \frac{J_1(x, T - 0) - J_1(x, T + 0)}{J_1(x, T - 0)} = \frac{1}{I_0(\sqrt{2\omega^2 v x T})}. \quad (15)$$

Если считать, что $\eta(x)$ существенно уменьшается на расстояниях L , при которых аргумент I_0 становится порядка единицы, получим:

$$\omega L \approx \frac{1}{2\omega v T} \gg 1 \quad (16)$$

(это неравенство является прямым следствием (11)). Следовательно, модуляция средней интенсивности исчезает вследствие рассеяния на неровностях стенок волновода на конечных, но весьма больших по сравнению с $1/\omega$ расстояниях. Так как $1/\omega$ — дистанция, на которой существенно затухает когерентная часть, ясно, что информация, передаваемая с помощью амплитудной модуляции, сохраняется при наличии шероховатостей на значительно больших расстояниях, чем информация, содержащаяся в фазе сигнала.

Если амплитуда сигнала в точке $x = 0$ промодулирована по закону $A_0 \sin \Omega t$ ($\Omega \ll \omega_0$, $-\infty < t < \infty$), средняя интенсивность прямой (J_1) и обратной (J_2) волн находится из системы уравнений (1) ($N = 1$); которая после фурье-преобразования по времени решается точно:

$$J_1(x, t) = \frac{A_0^2}{2} [1 - e^{-2x\delta} \cos(dx - \Omega t)] \exp[-2x \sqrt{\gamma_0(\gamma_0 + \omega)}],$$

$$\delta = \sqrt{\frac{V[(\gamma_0 + \omega)\gamma_0 + \Omega^2/v^2]^2 + \Omega^2\omega^2/v^2 + \gamma_0(\gamma_0 + \omega) - \Omega^2/v^2}{2}} - \sqrt{\gamma_0(\gamma_0 + \omega)},$$

$$d = \sqrt{\frac{V[(\gamma_0 + \omega)\gamma_0 + \Omega^2/v^2]^2 + \Omega^2\omega^2/v^2 - \gamma_0(\gamma_0 + \omega) + \Omega^2/v^2}{2}}. \quad (17)$$

Таким образом, наличие неровностей приводит к «замыванию» осциллирующей средней интенсивности и к изменению их пространственного периода ($d \neq \Omega/v$) (рис. 4, кривая 1). На расстояниях $x \gg \delta$ осцилляции уже практически отсутствуют, и $J_1(x)$ выходит на стационарный режим $J_1(x) = (A_0^2/2) \exp[-2x \sqrt{\gamma_0(\gamma_0 + \omega)}]$ (кривая 2). Если, например, $\gamma_0, \omega \ll \Omega/v, \omega \ll \gamma_0$, то

$$\delta = \omega^2/8\gamma_0, \quad d = \Omega/v + \frac{1}{8} \omega^2 \frac{v}{\Omega}. \quad (18)$$

4. Рассмотрим, наконец, случай, когда заданным является распределение интенсивности в пространстве в начальный момент времени $t = 0$. При этом мы будем рассматривать величину $J = J_1 + J_2$ — среднюю суммарную интенсивность прямой и отраженной волн, для которой из системы (1) ($N = 1$) можно получить

$$J(x, t) = Q(x, t) e^{-2v\gamma_0 t}, \quad (19)$$

причем $Q(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + 2v\omega \frac{\partial Q}{\partial t} = 0. \quad (20)$$

Если величина $J(x, 0)$ известна, из (1) можно также вывести формулу для $\frac{\partial Q}{\partial t}$ при $t = 0$, т. е. получить полный набор начальных условий для (20):

$$Q(x, 0) = J(x, 0), \quad \frac{\partial Q(x, 0)}{\partial t} = 2v\omega J(x, 0). \quad (21)$$

Уравнение (20) с учетом (21) подробно исследовано (в связи с другой физической задачей) в [7].

Используя полученные там результаты, можно утверждать, что суммарная интенсивность прямой и отраженной волн в одномерном волноводе, обращающаяся в момент времени $t = 0$ в $J(x, 0)$, определена в любой момент времени выражением

$$J(x, t) = \exp[-2(\gamma_0 + \omega)vt] \left\{ \frac{1}{2} J(x - vt, 0) + \frac{1}{2} J(x + vt, 0) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2\omega \int_{-vt}^{vt} J(x+y, 0) I_0(2\omega \sqrt{v^2 t^2 - y^2}) dy + \frac{1}{2\omega} \int_{-vt}^{vt} dy J(x+y, 0) \times \\
 &\times \left. \frac{\partial}{\partial t} I_0(2\omega \sqrt{v^2 t^2 - y^2}) \right\}. \quad (22)
 \end{aligned}$$

5. Таким образом, как следует из результатов пп. 3, 4, наличие шероховатостей стенок приводит к искажению формы передаваемых по волноводу импульсов. Причем, если распывание, связанное с обычной дисперсией, объясняется тем, что разные частотные составляющие распространяются с различными скоростями, механизм размытия импульса за счет влияния неровностей несколько иной. Сигнал, принимаемый в точке наблюдения, формируется в этом случае из полей, многократно перерассеянных на неоднородностях и прошедших вследствие этого разные пути, т. е. попадающих в приемник с разным запаздыванием, что и обуславливает искажение исходной формы сигнала.

В рассмотренном выше случае одномодового волновода рассеяние происходит только из прямой волны в обратную и наоборот; когда число распространяющихся мод больше единицы, дополнительный вклад в распывание импульса вносят еще перерассеяния между модами, и задача также сводится к вычислению интегралов типа (7), (8).

Автор благодарит Ф. Г. Басса и И. М. Фукса за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 98 (1970).
2. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 10, 1521 (1969).
3. Ф. Г. Басс, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс, Укр. физ. ж., 14, № 9, 1548 (1969).
4. Р. Ф. Матвеев, Радиотехника и электроника, 8, № 4, 577 (1963).
5. М. А. Исакович, Акуст. ж., 3, № 1, 37 (1957).
6. А. Е. Karbowiak, Proc. IEE, 104(6), 339 (1967).
7. Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М., 1948

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
2 февраля 1970 г.

A NONSTATIONARY SIGNAL IN A WAVEGUIDE WITH STATISTICALLY ROUGH WALLS

V. D. Freylikher

The average intensity of the amplitude modulated signal in a statistically rough waveguide has been calculated in the framework of the multiple scattering theory. The distances are calculated at which the pulse structure of the field is considerably distorted due to scattering on the wall roughnesses.

УДК 621 372.8.09

РАССЕЯНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ВОЛНЫ НА СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ СЛОИСТОГО ВОЛНОВОДА

В. Л. Миронов, В. Б. Фортес

Методом возмущений, использующим разложение поля по полной системе ортогональных волн, решена задача о рассеянии нормальной волны диэлектрического слоя на случайно неоднородном участке конечной длины. Вычислена мнимая часть постоянной распространения когерентной составляющей поля падающей волны, обусловленная прохождением волны через неоднородный участок. Показано, что ширина диаграммы направленности рассеянного в пространство вне слоя поля и потери энергии нормальной волны за счет излучения существенным образом зависят от соотношения между радиусом корреляции неоднородностей диэлектрической проницаемости и толщиной слоистого образования.

При сверхдальнем распространении радиоволн в тропосфере [1] учет однократных отражений от слоистых образований не приводит к полному описанию рассматриваемого явления. В ряде случаев необходимо учитывать нормальные волны [2], распространяющиеся путем последовательных переотражений между границами слоя.

В то же время экспериментально установлено [3], что устойчивые стратифицированные образования в тропосфере сопровождаются наличием интенсивных флуктуаций показателя преломления. Случайные неоднородности структуры слоя оказывают влияние на процесс распространения нормальной волны, вызывая появления новых типов нормальных волн и излучение из слоя. Последнее явление может быть причиной передачи энергии нормальной волны в точки, расположенные вне слоя.

В имеющихся работах [4-8] рассеяние нормальных волн на случайных неоднородностях обсуждалось в основном с использованием моделей в виде закрытых волноводных систем. Однако такой подход не позволяет изучить другую сторону рассматриваемого явления — излучение энергии из слоя в свободное пространство.

В настоящей работе основное внимание уделяется именно этому вопросу. Модель открытого волновода выбирается в виде слоя диэлектрика ($0 \leq x \leq b$, $-\infty \leq y \leq \infty$, $-\infty \leq z \leq \infty$) с постоянной проницаемостью ϵ . Объем слоя на отрезке $0 \leq z \leq L$ заполнен пространственными неоднородностями, характеризуемыми случайной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_1(x, z)$. Нормальная волна набегаёт на неоднородный участок вдоль оси Oz со стороны $z > 0$.

Решение задачи получим методом возмущений, который, применительно к закрытым волноводным системам, изложен в работах [9-11]. Легко распространить этот метод на случай слоистых открытых волноводов.

Если предположить, что слой однороден вдоль оси Oy , и опустить временной множитель $e^{i\omega t}$, то для ТЕ волн систему уравнений Максвелла можно представить в виде

$$(A_0 + A) \Psi = \frac{\partial}{\partial z} \Psi. \quad (1)$$

Здесь $\Psi = \begin{bmatrix} E_y \\ H_x \end{bmatrix}$ — вектор, составленный из компонент электромагнитного поля,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & i\omega\mu_0 \\ \frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\omega\epsilon\epsilon_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

— дифференциальный матричный оператор, описывающий однородный волновод и не зависящий от z и $\frac{\partial}{\partial z}$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ i\omega\epsilon_0 \epsilon_2(x, z) & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

— оператор возмущений, не зависящий от $\frac{\partial}{\partial z}$.

В выражениях (2), (3) ϵ_0, μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума, $\epsilon_2(x, z) = \epsilon - \epsilon_1(x, z)$ — отклонение диэлектрической проницаемости на неоднородном участке слоя. Вне слоя следует положить $\epsilon_1(x, z) = 1, \epsilon_2(x, z) = 0$.

Уравнение для невозмущенного волновода

$$A_0 \Psi = \frac{\partial}{\partial z} \Psi \quad (4)$$

при наложении соответствующих граничных условий определяет спектр собственных волн слоя, состоящий [12] из конечного числа нормальных волн

$$A_0 \Psi_n = -i\beta_n \Psi_n, \quad n = \pm 1, \dots, \pm N < \infty \quad (5)$$

и непрерывной совокупности псевдонормальных волн

$$A_0 \Phi_\nu(x) = -ih_\nu \Phi_\nu(x), \quad h_\nu^2 = k^2 - x^2, \quad (6)$$

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad \nu = \pm 1;$$

где $\beta_n = -\beta_{-n}, h_+ = -h_- = h$ — продольные волновые числа.

В работе [12] показано, что собственные волны удовлетворяют следующим условиям ортогональности:

$$\langle \bar{\Psi}_n | \Psi_m \rangle = \text{sgn } m \delta_{nm}, \quad \langle \bar{\Psi}_n | \Phi_\nu(x) \rangle \equiv 0, \quad (7)$$

$$\langle \bar{\Phi}_\nu(\tilde{x}) | \Phi_s(x) \rangle = \nu \delta_{\nu s} \delta(x - \tilde{x}).$$

Здесь через $\langle \bar{\Psi}_n | \Psi_m \rangle$ обозначено скалярное произведение

$$\langle \bar{\Psi}_n | \Psi_m \rangle = \sum_l \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Psi}_{nl} \Psi_{ml} dx,$$

причем в рассматриваемом случае под сопряженным вектором $\bar{\Psi}$ понимаем $\bar{\Psi} = -[H_x, E_y]$; δ_{nm} — символ Кронекера, $\delta(x - \tilde{x})$ — дельта-функция Дирака.

Поле в произвольном поперечном сечении неоднородного участка волновода представим в виде разложения по собственным волнам однородного слоя:

$$\Psi(x, z) = \Psi_1 \exp(-if(z) - i\beta_1 z) + \sum_{m \neq 1}^N u_m(z) \Psi_m \times \exp(-i\beta_m z) + \sum_s^{+, -} \int_0^{\infty} c_s(x, z) \Phi_s(x) \exp(-ih_s z) dx, \quad (8)$$

причем падающую волну выделим из-под знака суммы, и неизвестную амплитуду при ней выразим через комплексную фазу $f(z)$.

Подставим разложение (8) в уравнение (1). Умножая затем полученное равенство скалярно на векторы $\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_{n \neq 1}, \bar{\Phi}_s(\tilde{x})$, используя условия ортогональности (7) и уравнения (5), (6), приходим к системе дифференциальных уравнений для неизвестных коэффициентов $u_n(z), c_s(z), f(z)$. После интегрирования по продольной координате z с учетом условий на концах неоднородного участка

$$f(0) = 0, \quad u_n(0) = u_{-n}(L) = 0 \quad (n \geq 1), \\ c_+(x, 0) = c_-(x, L) = 0$$

эта система дифференциальных уравнений может быть сведена к следующей системе интегральных уравнений:

$$f(z) = i \int_0^z \left\{ a_{11}(z') + \left[\sum_{m \neq 1}^N u_m(z') a_{1m}(z') \exp(-i\beta_m z') + \sum_s^{+, -} \int_0^{\infty} c_s(x, z') a_{1s}(z', x) \exp(-ih_s z') dx \right] \exp(if(z') + i\beta_1 z') \right\} dz', \\ u_n(z) = \int_q^z \exp\left(\text{sgn } n \int_{z'}^z a_{nn}(z'') dz'' + i\beta_n z'\right) \times \\ \times \left[a_{n1}(z') \exp(-if(z') - i\beta_1 z') + \sum_{m \neq 1, n}^N u_m(z') a_{nm}(z') \exp(-i\beta_m z') + \sum_s^{+, -} \int_0^{\infty} c_s(x, z') a_{ns}(z', x) \exp(-ih_s z') dx \right] dz', \\ c_s(x, z) = v \int_q^z \left[a_{vs}(z', x) \exp(-if(z') - i\beta_1 z') + \sum_{m \neq 1}^N u_m(z') a_{vm}(z', x) \times \right. \\ \left. \times \exp(-i\beta_m z') + \sum_s^{+, -} \int_0^{\infty} c_s(\tilde{x}, z') a_{vs}(z', x, \tilde{x}) \exp(-i\tilde{h}_s z') d\tilde{x} \right] \exp(ih_s z') dz'.$$

Здесь постоянная интегрирования q равна

$$q = \begin{cases} 0 & (n \geq 1, \quad v = +1) \\ L & (n < 1, \quad v = -1) \end{cases}$$

и коэффициенты связи собственных волн $a_{nm}(z), a_{vn}(z, x)$ и $a_{vs}(z, x, \tilde{x})$ определяются формулами

$$a_{nm}(z) = \langle \bar{\Psi}_n | A | \Psi_m \rangle = \sum_i \sum_{i' = -\infty}^{+\infty} \int \bar{\Psi}_{ni}(x) A_{ij}(x, z) \Psi_{\omega_j}(x) dx, \quad (10)$$

$$a_{\nu n}(z, x) = \langle \bar{\Phi}_\nu(x) | A | \Psi_n \rangle, \quad A_{\nu s}(z, x, \tilde{x}) = \langle \bar{\Phi}_\nu(x) | A | \Phi_s(\tilde{x}) \rangle,$$

где $A_{ij}(x, z)$ — элемент матрицы оператора возмущений (3).

Система уравнений (9) позволяет записать ряды теории возмущений по малому параметру $(\bar{\epsilon}_2^2)^{1/2}$ (черта сверху означает статистическое усреднение) для искомых функций $f(z)$, $u_n(z)$, $c_\nu(x, z)$. При этом удобно применить метод итераций, выбирая в качестве нулевого приближения

$$f^{[0]} = u_n^{[0]} = c_\nu^{[0]} = 0.$$

Кроме прямой итерационной процедуры

$$\begin{aligned} f^{[j+1]} &= F(f^{[j]}, u_n^{[j]}, c_\nu^{[j]}), \quad u_n^{[j+1]} = U(f^{[j]}, u_n^{[j]}, c_\nu^{[j]}), \\ c_\nu^{[j+1]} &= C(f^{[j]}, u_n^{[j]}, c_\nu^{[j]}) \end{aligned} \quad (11)$$

(правые части (11) есть функционалы, определенные в (9)) здесь возможен учет фазовой поправки в падающей волне при вычислении амплитуд нормальных и псевдонормальных волн:

$$u_n^{[j+1]} = U(f^{[j+1]}, u_n^{[j]}, c_\nu^{[j]}), \quad c_\nu^{[j+1]} = C(f^{[j+1]}, u_n^{[j]}, c_\nu^{[j]}), \quad (12)$$

а также некоторых существенных нормальных волн, например, отраженной волны того же типа, что и падающая, при вычислении амплитуд псевдонормальных волн:

$$c_\nu^{[j+1]} = C(f^{[j+1]}, u_{-1}^{[j+1]}, u_n^{[j]}, c_\nu^{[j]}).$$

Первые члены соответствующих рядов, полученные с учетом формул (11) и (12), имеют вид

$$f^{[1]}(z) = i \int_0^z a_{11}(z') dz',$$

$$\begin{aligned} u_n^{[1]}(z) &= \operatorname{sgn} n \int_q^z a_{n1}(z') \exp \left[\operatorname{sgn} n \int_{z'}^z a_{nn}(z'') dz'' + \int_0^{z'} a_{11}(z'') dz'' + \right. \\ &\quad \left. + i(\beta_n - \beta_1) z' \right] dz', \end{aligned} \quad (13)$$

$$c_\nu^{[1]}(x, z) = \nu \int_q^z a_{\nu 1}(z', x) \exp \left[\int_0^{z'} a_{11}(z'') dz'' + i(\beta_\nu - \beta_1) z' \right] dz'.$$

При определении области применимости выражений (13) можно исходить из обычного для теории возмущений требования (см. [14], стр. 376), чтобы полная энергия рассеянного поля составляла малую часть энергии падающей волны. Применительно к конкретным задачам оно включает в себя ограничения, накладываемые на длину неоднородного участка, характерный масштаб неоднородностей и дисперсию флуктуаций диэлектрической проницаемости.

Будем считать, что слой при $x=0$ имеет идеально проводящую подложку. В этом случае в систему собственных ТЕ волн входят только несимметричные волны [12, 13], и выражения для полей нормальных и псевдонормальных волн с учетом нормировки (7) записываются в виде

$$\Psi_n = \frac{1}{N_n} \left[-\frac{1}{\omega \mu_0} \right] \begin{cases} \sin g_n x & (0 \leq x \leq b) \\ \sin g_n b \exp[-p_n(x-b)] & (b \leq x \leq \infty) \end{cases}, \quad (14)$$

где

$$N_n = \sqrt{\frac{|\beta_n| (g_n b - \operatorname{tg} g_n b)}{\omega \mu_0 g_n}}, \quad g_n = \sqrt{k^2 \varepsilon - \beta_n^2}, \quad p_n = \sqrt{\beta_n^2 - k^2},$$

а собственные числа находятся из трансцендентного уравнения

$$p_n = -g_n \operatorname{ctg} g_n b,$$

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{N(x)} \left[-\frac{h_n}{\omega \mu_0} \right] \begin{cases} \sin gx & (0 \leq x \leq b) \\ v(x) \cos \kappa x + w(x) \sin \kappa x & (b \leq x \leq \infty) \end{cases}, \quad (15)$$

где

$$v(x) = \sin gb \cos \kappa b - (g/\kappa) \cos gb \sin \kappa b,$$

$$w(x) = \sin gb \sin \kappa b + (g/\kappa) \cos gb \cos \kappa b,$$

$$N(x) = \sqrt{\frac{\pi h}{\omega \mu_0} \left(\sin^2 gb + \frac{g^2}{x^2} \cos^2 gb \right)}, \quad g = \sqrt{k^2 \varepsilon - x^2}, \quad h = \sqrt{k^2 - x^2}.$$

Подставляя выражения (3), (14), (15) в формулы (10), находим коэффициенты связи в форме

$$a_{n1}(z, \kappa) = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{N_1 N(x)} \int_0^b \varepsilon_2(x, z) \sin gx \sin g_1 x dx, \quad (16)$$

$$a_{nm}(z) = -\frac{i\omega\varepsilon_0}{N_n N_m} \int_0^b \varepsilon_2(x, z) \sin g_n x \sin g_m x dx.$$

Совокупность выражений (8), (13), (16) определяет решение поставленной задачи в первом приближении рассматриваемого метода.

Полученное решение позволяет, в частности, оценить воздействие случайных неоднородностей на когерентную составляющую поля падающей волны по мере прохождения ею неоднородного участка. Если длина пути, проходимого волной в неоднородной среде, намного превышает радиус корреляции неоднородностей, то, в соответствии с выражениями (13), (14), фазовую добавку $\hat{j}(z)$ можно считать действительной нормальной случайной величиной, а ее дисперсия оказывается пропорциональной длине пути z :

$$\overline{[\hat{j}^{(1)}(z)]^2} = \frac{2\omega^2 \varepsilon_0^2 z}{N_1^4} \int_0^\infty B_\varepsilon(\xi' - \xi'', \zeta) d\zeta \int_0^b \int_0^b \sin^2 g_1 \xi' \sin^2 g_1 \xi'' d\xi' d\xi'',$$

где

$$B_\varepsilon(x' - x'', z' - z'') = \overline{\varepsilon_2(x', z') \varepsilon_2(x'', z'')}$$

— функция корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости, при этом для простоты будем полагать $\varepsilon_2(x, z) = 0$.

С помощью усреднения находим, что когерентная составляющая поля падающей волны экспоненциально затухает:

$$\overline{\Psi_1(x, z)} = \Psi_1 \exp(-i\beta_1 z - \beta_1' z),$$

и мнимая часть постоянной распространения выражается через дисперсию фазы:

$$\beta_1 = \frac{2}{z} \overline{[f^{(1)}(z)]^2}.$$

Предполагая, что функция корреляции $B_\varepsilon(x' - x'', z' - z'')$ является гауссовой:

$$B_\varepsilon(x' - x'', z' - z'') = \sigma_\varepsilon^2 \exp \left[-\frac{(x' - x'')^2 + (z' - z'')^2}{\rho^2} \right], \quad (17)$$

и на толщине слоя укладывается большое число неоднородностей ($b/\rho \gg 1$), для β_1 получим следующее простое выражение:

$$\beta_1 = \sigma_\varepsilon^2 \frac{\pi g_1 b k^4 \rho^2}{8\beta_1^2} \frac{6g_1 b - (4 - \cos 2g_1 b) \sin 2g_1 b}{(g_1 b - \operatorname{tg} g_1 b)^2}.$$

Критерием применимости полученного результата является условие $\beta_1 z \ll 1$.

Вклад в рассеянное поле в областях $x \gg b$, $z \leq 0$, $z \gg L$, даваемый псевдонормальными волнами, после несложных вычислений с использованием выражений (8), (13), (15) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Psi_r(x, z)_\pm = & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mp \frac{h}{\omega \mu_0} \right] \frac{v(x) + iw(x)}{N(x)} \exp[-i(xx \pm hz)] \times \\ & \times \int_0^L a_{+1}(z', x) \exp \left[\int_0^{z'} a_{11}(z'') dz'' - i(\beta_1 \mp h)z' \right] dz' dx, \end{aligned} \quad (18)$$

где верхний и нижний знаки соответствуют $z \gg L$ и $z \leq 0$. Проведя асимптотическую оценку интеграла по x в выражении (18), находим, что на больших расстояниях от неоднородного участка $kr = k\sqrt{x^2 + z^2} \gg 1$ вклад псевдонормальных волн представляет собой цилиндрическую волну излучения со случайной комплексной амплитудой:

$$\begin{aligned} \Psi_r(r, \theta) = & h \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{h}{\omega \mu_0} \right] \frac{v(x) + iw(x)}{N(x)} \int_0^L a_{+1}(z', x) \times \\ & \times \exp[-i(\beta_1 - h)z'] \exp \left(\int_0^{z'} a_{11}(z'') dz'' \right) dz' \frac{\exp[i(kr + \pi/4)]}{\sqrt{kr}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь и в дальнейшем под x и h будем понимать величины $x = k \sin \theta$, $h = k \cos \theta$, ($\theta = \arcsin(x/r)$). Как видно из выражения (19), в рассматриваемом приближении среднее поле излучения оказывается не равным нулю.

Используя (19), вычислим радиальную составляющую плотности потока мощности:

$$\begin{aligned} S_r(r, \theta) = & (h/4r) \int_0^L \int_0^L a_{+1}(z', x) a_{+1}^*(z'', x) \times \\ & \times \exp[-i(\beta_1 - h)(z' - z'') + Q(z', z'')] dz' dz'', \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$Q(z', z'') = \int_{z''}^{z'} a_{11}(z) dz. \quad (21)$$

Если считать $\varepsilon_2(x, z)$ нормальной случайной функцией, то согласно (16), (21) случайные величины $a_{+1}(z', x)$, $a_{+1}^*(z'', x)$, $Q(z', z'')$ также являются нормальными.

Усредняя выражение (20), получим

$$\begin{aligned} \overline{S_r(r, \theta)} &= \frac{h}{4r} \int_0^L \int_0^L \exp \left[\frac{1}{2} Q^2(z', z'') - i(\beta_1 - h)(z' - z'') \right] \times \\ &\times \overline{[a_{+1}(z', x) a_{+1}^*(z'', x) + Q(z', z'') a_{+1}(z', x) \times} \\ &\times Q(z', z'') a_{+1}^*(z'', x)] dz' dz''}. \end{aligned} \quad (22)$$

При вычислении амплитуд псевдонормальных волн (13) учитывалась случайная фазовая поправка $f^{(1)}(z)$ в падающей нормальной волне. В результате этого выражение (22) для среднего потока мощности излучения содержит, благодаря множителю $\exp(\overline{Q^2(z', z'')}/2)$, ряд по степеням дисперсии флуктуаций диэлектрической проницаемости σ_ε^2 , что соответствует до некоторой степени учету многократного рассеяния при преобразовании энергии нормальной волны в энергию, излученную из слоя.

Выражение (22) является довольно сложным для проведения численных расчетов, и в дальнейшем мы проведем его оценку при $Q(z', z'') = 0$, т. е. в чисто берневском приближении. Если воспользоваться функцией корреляции (15), то можно получить следующую формулу для коэффициента излучения (средней мощности, излученной неоднородным участком, при условии, что мощность падающей волны равна единице):

$$I = \frac{\sigma_\varepsilon^2 g_1 b k^4 \rho^2 L}{8\beta_1(g_1 b - \operatorname{tg} g_1 b)} \int_0^\pi F(\theta) d\theta. \quad (23)$$

Здесь диаграмма поля излучения $F(\theta)$ имеет вид

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \sin^2 gb + (\varepsilon - \cos^2 \theta) \cos^2 gb} \left[X(\alpha) \Lambda_1(c, p) - \right. \\ &- Y(\alpha, p, g_1) \Lambda_2(c, p) + X(\beta) \Lambda_1(c, d) - Y(\beta, d, -g_1) \Lambda_2(c, d) - \\ &- \frac{2}{c\sqrt{\pi}} (1 - \exp(-c^2 \cos gb \cos g_1 b)) \left. \left[\Lambda_1(c_z, d_z) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{d_z}{c_z} \Lambda_2(c_z, d_z) - \frac{1}{c_z \sqrt{\pi}} (1 - \exp(-c_z^2 \cos \beta_z L)) \right] \right], \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$X(x) = 1 + \frac{\sin 2xb}{2xb} - \frac{\sin 2gb}{2gb} - \frac{\sin 2g_1 b}{2g_1 b},$$

$$Y(x, y, z) = \frac{\cos^2 xb}{xb} - \frac{y}{c} - \frac{\cos^2 gb}{gb} - \frac{\cos^2 zb}{zb},$$

$$\Lambda_1(x, y) = \exp(-y^2) - \exp(-x^2) [U(y, x) \cos 2xy - v(y, x) \sin 2xy],$$

$$\Lambda_2(x, y) = v(y, 0) - \exp(-x^2) [U(y, x) \sin 2xy + v(y, x) \cos 2xy],$$

$$c = b/\rho, \quad c_z = L/\rho, \quad \alpha = g + g_1, \quad \beta = g - g_1,$$

$$p = \alpha\rho/2, \quad d = \beta\rho/2, \quad \beta_z = \beta_1 - h, \quad d_z = \beta_z\rho/2.$$

Функции

$$u(y, x) = \operatorname{Re} w(y + ix), \quad v(y, x) = \operatorname{Im} w(y + ix),$$

$$w(y + ix) = \exp[-(y + ix)^2] \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y+ix} \exp(t^2) dt \right)$$

изучены и протабулированы в [15]. Выражение (24) позволяет получить простые асимптотические формулы в случае, когда радиус корреляции оказывается мал по сравнению с толщиной волновода ($c \gg 1$) и длиной неоднородного участка ($c_z \gg 1$).

Первый множитель в диаграмме (23) обусловлен слоистой структурой рассматриваемой системы. В частности, благодаря этому множителю излучение в направлении распространения падающей волны ($\theta = 0$) и обратном ($\theta = \pi$) отсутствует. Это означает, что поле в самом слое на большом расстоянии от неоднородного участка определяется только совокупностью нормальных волн.

Результаты численного расчета нормированной диаграммы направленности $F(\theta)$ показаны на рис. 1 и 2. Скачок диэлектрической прони-

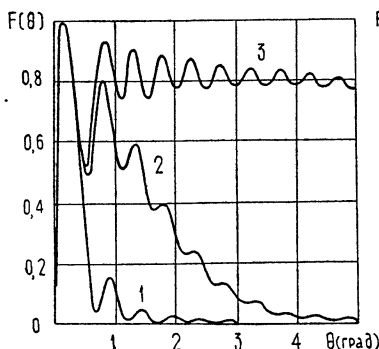


Рис. 1.

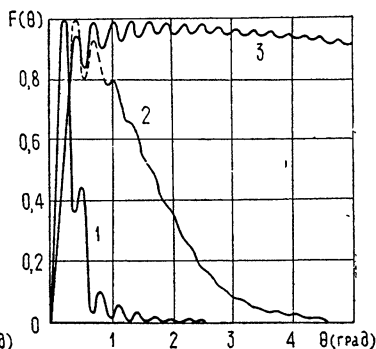


Рис. 2.

Рис. 1 Диаграмма направленности; $b/\lambda = 60$; 1 — $\rho/\lambda = 100$, 2 — $\rho/\lambda = 10$, 3 — $\rho/\lambda = 1$.

Рис. 2 Диаграмма направленности; $b/\lambda = 100$; 1 — $\rho/\lambda = 100$, 2 — $\rho/\lambda = 10$, 3 — $\rho/\lambda = 1$.

цаемости в слое $\Delta\epsilon = (\epsilon - 1) = 2 \cdot 10^{-5}$ по порядку величины выбирался равным приращениям, наблюдаемым в тропосферных слоях [16], и рассматривался неоднородный участок, длина которого намного превышает толщину слоя ($L/b = 100$).

Из расчетов следует, что ширина диаграммы направленности определяется толщиной слоя лишь до значений $b/\rho \sim 1$. При дальнейшем уменьшении радиуса корреляции диаграмма расширяется до величины, по порядку соответствующей излучению одиночной неоднородности ($\Delta\theta \sim \lambda/\rho$).

Помимо углового распределения изученной мощности с помощью ЭВМ был рассчитан коэффициент излучения (23), который показан на рис. 3 ($\Delta\epsilon = 2 \cdot 10^{-5}$, $L/b = 100$).

При толщине слоя, близкой к критическому значению (волна становится незатухающей при $b/\lambda > 55,9$, если $\Delta\epsilon = 2 \cdot 10^{-5}$), доля излученной мощности монотонно увеличивается с ростом радиуса корреляции. Однако с увеличением толщины слоя ($b/\lambda = 140, 160$) начинают проявляться его волноводные свойства. Это приводит к тому, что потери на излу-

ние возрастают с ростом радиуса корреляции лишь до значений ρ , сравнимых с толщиной слоя ($\rho/b \sim 1$).

Отметим, что кривые рис. 3 дают непосредственное представление о величине рассеянной из слоя мощности по сравнению с мощностью падающей волны и, таким образом, могут быть использованы в соответствии с [14] для установления области применимости проделанных расчетов.

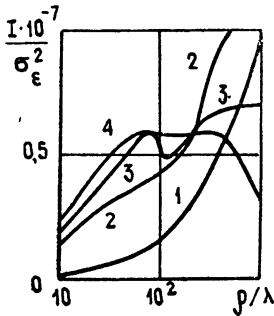


Рис. 3. Зависимость коэффициента излучения от масштаба неоднородностей; 1 — $b/\lambda = 60$, 2 — $b/\lambda = 120$, 3 — $b/\lambda = 140$, 4 — $b/\lambda = 160$.

В заключение авторы выражают благодарность Ю. А. Рыжову и В. В. Тамойкину за полезные критические замечания, высказанные при обсуждении настоящей работы на семинаре в НИРФИ (г. Горький).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дальнее тропосферное распространение ультракоротких радиоволн, под ред. Б. А. Введенского и др., изд. Сов. радио, М., 1965.
2. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
3. J. A. Lane, Nature, 204, 438 (1964).
4. В. Н. Беспалов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 3, 54 (1958).
5. М. Л. Исакович, Акуст. ж., 3, № 1, 37 (1957).
6. А. Д. Лапин, Акуст. ж., 4, № 3, 267 (1958).
7. Chen Yung Ming, Radio Sci., 1, № 6, 697 (1966).
8. A. E. Karbowski, Proc. IEE, 111, № 2, 222 (1964).
9. S. L. Richter, IEEE Trans., AP-15, № 1, 70 (1967).
10. S. L. Richter, P. Diament, S. P. Schlesinger, IEEE Trans., AP-15, № 3, 422 (1967).
11. S. L. Richter, P. Diament, S. P. Schlesinger, IEEE Trans., AP-15, № 3, 431 (1967).
12. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 1, 110 (1966).
13. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
14. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
15. В. Н. Фадеев, Н. М. Терентьев, Таблицы значений интеграла вероятности комплексного аргумента, ГИИТЛ, М., 1954.
16. Распространение ультракоротких радиоволн, перевод с англ под ред. Б. А. Шиллерова, изд. Сов. радио, М., 1954.

Сибирский физико-технический институт
при Томском университете

Поступила в редакцию
19 января 1970 г.

NORMAL WAVE SCATTERING ON RANDOM INHOMOGENEITIES OF STRATIFIED WAVEGUIDE

V. L. Mironov, V. B. Fortes

The problem of scattering of a normal wave of the dielectric layer on a randomly inhomogeneous section of the finite length is solved by the perturbation method using the field expansion over the full system of orthogonal waves. The imaginary part of the propagation constant of the coherent component of the incident wave caused by propagation through the inhomogeneous section is calculated. It is shown that the beamwidth of the scattered field outside the layer and the energy losses of the normal wave due to radiation depend considerably on the relations between the correlation radius of the inhomogeneities of the dielectric permittivity and the thickness of the stratified formation.

УДК 537.312.62

ЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ПЛНОК КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

К. К. Лухарев

Рассмотрена линейная электродинамика полосок из тонкой сверхпроводящей пленки. Найдено распределение тока в таких полосках, получены энергетические соотношения и эквивалентные схемы. Показано, что для реализации эффективных сверхпроводящих нелинейных реактивных элементов для СВЧ систем нужно использовать весьма узкие пленочные полоски.

1. ВВЕДЕНИЕ

Большой интерес в последнее время вызывает проблема создания систем СВЧ, использующих нелинейные электродинамические свойства сверхпроводников. При этом из целого ряда нелинейных явлений в сверхпроводниках [1-3] особый интерес представляет нелинейная реактивность типа Гинзбурга—Ландау [4] («ГЛ-нелинейность»)*. Она связана с зависимостью равновесной плотности сверхпроводящего конденсата от величины поля. Работаящий в режиме ГЛ-нелинейности однородный** сверхпроводник имеет, как и в линейном случае, малые диссипативные потери и связанный с этим низкий уровень собственных шумов.

Из большого числа работ, посвященных теоретическому и экспериментальному исследованию ГЛ-нелинейных свойств сверхпроводников, известно, что эти свойства сильнее всего проявляются у пленок с толщиной $d_0 \leq \lambda_b$, где λ_b — глубина проникновения слабого статического магнитного поля в массивный образец [1, 2]. По этой причине здесь будут рассмотрены лишь системы, состоящие из таких пленок.

Во всех известных автору работах по ГЛ-нелинейностям пленок явно оговаривается или подразумевается, что поля (например, вектор-потенциал \mathbf{A}) и плотность тока \mathbf{j} либо постоянны в пространстве, либо меняются только по одной координате. Следовательно, с точки зрения макроскопической электродинамики, рассматривался лишь весьма узкий класс задач: поведение бесконечной (весьма большой) по двум направлениям пленки.

В то же время как раз этот случай является малообещающим в смысле возможности эффективных нелинейных взаимодействий СВЧ волн, что связано с большими необходимыми мощностями СВЧ волн, при которых начинают проявляться ГЛ-нелинейные эффекты***.

Действительно, они заметно сказываются, когда амплитуды полей СВЧ волн H_0 сравнимы по величине с соответствующими критическими полями сверхпроводящего элемента. Если магнитное поле с двух сторон

* Мы будем применять этот термин несмотря на то, что такая нелинейность описывается собственно уравнениями Гинзбурга—Ландау [4] лишь при определенных условиях (см. [1, 2]).

** Под однородностью здесь понимается отсутствие промежуточного или смешанного состояния.

*** На этот факт внимание автора обратили В. М. Дмитриев и Г. Е. Чурилов.

пленки одинаково (разрушение полем), то требуемое $H_0 = H_{\uparrow\downarrow} \approx \sqrt{24} (\lambda/d_0) H_{cb}$, где H_{cb} — термодинамическое критическое поле массивного образца из того же металла, λ — глубина проникновения поля в пленку ($\lambda \geq \lambda_b$)*. При сколь-нибудь заметном отличии температуры пленки от критического значения T_c поле H_{cb} имеет порядок десятков и сотен эрстед, и соответствующие потоки мощности СВЧ волн

$$S = (c/8\pi) H_0^2 \quad (1)$$

находятся в диапазоне $10^{+6} \div 10^{+10}$ *вт·см⁻²*. Даже в наиболее оптимальном случае разрушения сверхпроводимости током (или, можно сказать, электрическим полем [5]), когда магнитные поля с двух сторон H_1 и H_2 сильно различаются и критическое поле понижается по сравнению с H_{cb} : $H_{\uparrow\downarrow} = |(H_1 - H_2)/2| = H_{cb} (d_0/\lambda) \sqrt{2/27}$, это понижение слишком мало (в лучшем случае 1—2 порядка), чтобы достаточно снизить требуемые мощности. То же можно сказать о применении полых и диэлектрических резонаторов, которые могут обеспечить снижение S в Q и ϵQ соответственно (Q — добротность, ϵ — диэлектрическая проницаемость).

Кроме того, даже при достижении нужных полей в рассмотренных случаях связь сверхпроводника с СВЧ полем, а следовательно, и энергообмен при нелинейных взаимодействиях будут крайне малы.

С другой стороны, при рассмотрении даже простейших конфигураций сверхпроводников, в которых \mathbf{j} и \mathbf{A} меняются хотя бы по двум координатам, сразу видны возможности устранения этих недостатков. Пусть, например, односвязная плоская пленка конечных размеров порядка b помещена в магнитное поле \mathbf{H} , которое имеет составляющую H_{\perp} , нормальную к плоскости пленки. В этом случае по ее периферии начинается течь интенсивный ток Мейснера, который достигает ГЛ-критического значения при полях $H_{\perp} \sim H_{\uparrow\downarrow} (\lambda/b)$. Поскольку отношение λ/b может быть легко сделано крайне малым ($\lambda \sim 10^{-5}$ *см*), это произойдет при весьма малых полях H_{\perp} , причем действие параллельной компоненты поля будет пренебрежимо малым. Вторая возможная ситуация возникает при удалении несущей незначительный ток середины пленки, в этом случае речь идет о поведении несущего ток пленочного кольца.

Такие простейшие электродинамические системы обладают некоторыми общими особенностями, которые слабо зависят от точной формы пленки. Поэтому в настоящей работе будет изучен частный случай, который допускает наиболее простое рассмотрение, а именно, поведение одной и двух длинных пленочных полосок конечной ширины, размеры которых связаны соотношениями (рис. 1)

$$d_0 \ll d \ll b. \quad (2)$$

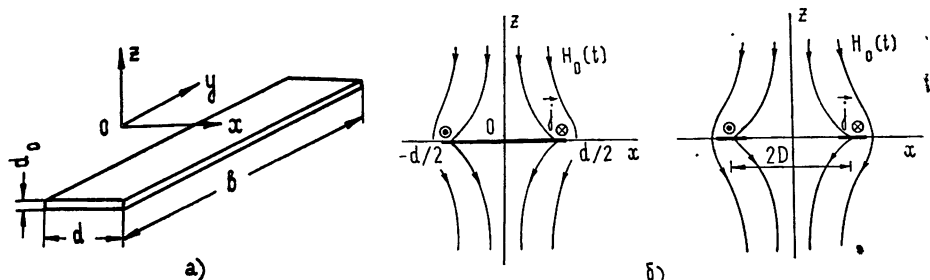


Рис. 1. Форма пленочной полоски (а) и расположение пленок в задачах 1 и 2 (б).

* Приводимые здесь оценки следуют из теории Гинзбурга — Ландау и становятся точными при выполнении условий ее применимости.

Толщину пленки будем считать малой по сравнению с глубиной проникновения и длиной когерентности ξ_0 :

$$d_0 \ll \lambda, \xi_0. \quad (3)$$

При этом будут рассмотрены две задачи, которые соответствуют рассмотренным выше возможностям.

Задача 1. Одна полоска помещена во внешнее перпендикулярное ее плоскости магнитное поле; полный ток через нее равен нулю.

Задача 2. В поле находятся две полоски на расстоянии $2D \gg d$; на достаточно больших расстояниях ($\pm b/2$) по оси y они замыкаются, образуя кольцо, так что полные токи, идущие через них, равны по величине и противоположны по направлению (рис. 1). Такая конфигурация не только отражает общие особенности сверхпроводящих пленок конечных размеров, но и является одной из наиболее удобных для экспериментальных исследований и практических применений [6].

В рассматриваемых системах могут иметь место два нелинейных явления: ГЛ-нелинейность при сохранении однородности и образование смешанного состояния, т. е. вхождение в пленку вихревых нитей, несущих квантованный магнитный поток. В настоящей работе будет рассмотрен только линейный случай, когда поля малы для осуществления обоих этих явлений.

2. ВЫВОД ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Составим уравнение для вектор-потенциала $A(\mathbf{r}, t) = A e^{i\omega t}$, он будет складываться из потенциала внешнего поля A_0 и потенциала токов, текущих в пленках:

$$A(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{c} \int \frac{j(\mathbf{r}')}{R} e^{i\omega R/c} d_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (4)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\mathbf{r}' = n_x x' + n_y y'$, а интеграл берется по площади пленок. Если задана зависимость $j(\mathbf{r}'_2)$ от $A(\mathbf{r}'_2)$, то формула (4) при $z=0$ является искомым интегральным уравнением для определения A и j . Более строго это уравнение можно получить, решая граничную задачу для вектор-потенциала вне пленок с соответствующими граничными условиями в плоскости xOy методом потенциала одиночного слоя (см., например, [7]).

Пусть частота ω изменения внешнего поля достаточно низка, так что для изучаемых систем пленок в плоскости xOz выполнено условие квазистационарности: $d, D \ll c/\omega$. Тогда можно считать задачу плоской:

$$A = n_y A, \quad j = n_y j. \quad (5)$$

Производя в (4) интегрирование по y' в пределах $[-b/2, b/2]$, получаем с учетом соотношения (2) для $z=0$:

$$A(x) = A_0(x) - \frac{2d_0}{c} \int j(x') \ln|x - x'| dx' + \text{const}. \quad (6)$$

В рассматриваемом здесь линейном случае при ограничении (3) плотность тока линейно связана с вектор-потенциалом в той же точке:

$$j(x) = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} [A(x) + C]. \quad (7)$$

При этом λ , вообще говоря, содержит мнимую часть, которая описывает диссипацию энергии: $\lambda^{-2} = \omega c^{-2} (\sigma_2 + i\sigma_1)$. Для не слишком высоких ча-

стот $\omega \ll \Delta/\hbar$ ($\Delta(T)$ — энергетическая щель) диссипация мала: $\sigma_1 \ll \sigma_2$ [1, 2, 8]. Сначала пренебрежем диссипацией, тогда λ действительно.

Постоянная по x величина C связана с возможностью различной калибровки вектор-потенциала и должна сохранять значение на каждом односвязном куске сверхпроводника.

Для одной полоски, не несущей ток, калибровку A и $A_0 = H_0 x + C_0$, очевидно, можно выбрать так: $C = C_0 = 0$ и, следовательно, $A(0) = A_0(0) = j(0) = 0$. Вводя нормированную координату $\xi = 2x/d$, получаем из (6) и (7)

$$A(\xi) = A_b(\xi) + \mu \int_{-1}^1 A(\xi') \ln |\xi - \xi'| d\xi', \quad A_b(\xi) = H_0 \frac{d}{2} \xi. \quad (8)$$

В силу линейности по A единственным параметром уравнения (8) является величина

$$\mu = dd_0/4\pi\lambda^2 = (2\pi)^{-1} d/\lambda_{\perp} > 0, \quad (9)$$

где $\lambda_{\perp} = 2\lambda^2/d_0$ — характерная глубина проникновения перпендикулярного поля в пленку [2]. Следует отметить, что для обычно используемых пленок ($d_0 \approx 10^{-6} \div 10^{-5}$ см, $d \approx 10^{-2} \div 1$ см) параметр μ весьма велик и становится сравним с единицей лишь для очень тонких и узких полосок.

Для двух полосок с током (задача 2) уравнение также приводится к виду (8). Действительно, константа C пропорциональна флюксу пленочного кольца [2]. Если до включения внешних полей $A_0(x, t)$ кольцо не несло тока ($j=0$ и $C=0$), то и при включении полей равенство C нулю сохраняется. Более того, даже если рассматривать две полоски конечной длины b , не образующие замкнутого сверхпроводящего контура, то при достаточно высоких частотах внешнего поля можно по-прежнему считать $C=0$. Поэтому для задачи 2 получаем

$$A(\xi) = A_0(\xi) + \mu \int_{-1}^1 A(\xi') \ln |\xi - \xi'| d\xi' - 2 \ln \frac{D}{d} \mu \int_0^1 A(\xi) d\xi, \quad (10)$$

где $\xi = 2(x - x_0)/d$, x_0 — середина одной из полосок. Обозначая

$$A_b(\xi) = A_0(\xi) - 2 \ln \frac{D}{d} \mu \int_0^1 A(\xi) d\xi \approx \text{const при } |\xi| \leq 1, \quad (11)$$

приходим к уравнению (8).

Нормируя $A(\xi)$ на величину «вынуждающего» поля на краю пленки $a(\xi) = A(\xi)/A_b(1)$, получаем для обеих задач

$$a_k(\xi) - \mu \int_{-1}^1 a_k(\xi') \ln |\xi - \xi'| d\xi' = f_k(\xi), \quad (12)$$

где индекс k указывает номер задачи, $f_1 = \xi$, $f_2 = 1$.

Следует отметить, что при анализе задачи 2 мы никак не использовали тот факт, что плоскость пленки совпадает с плоскостью кольца. Нетрудно показать, что уравнения (10)–(12) будут справедливы для полоски с удаленным хорошо проводящим экраном любого вида, например, для коаксиального кабеля с пленочной полоской в качестве жилы и радиусом экрана D .

Уравнения, подобные (4), были получены Купером [13] и Маркусом [14]. Последний анализировал их для случая $d_0 \approx \lambda$. В этом случае распределение тока на краях полоски еще близко к экспоненциальному, характерному для массивных сверхпроводников. В нашем случае ($d_0 \ll \lambda$) это распределение существенно другое.

3. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода на конечном отрезке (12) при произвольном μ не решаются аналитически. При малых $\mu \ll 1$ решение в первом приближении по μ есть

$$a_k(\xi) \approx f_k(\xi) + \mu \int_{-1}^1 f_k(\xi') \ln|\xi - \xi'| d\xi'. \quad (13)$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$a_1(\xi) = \xi + \frac{\mu}{2} [(1 - \xi) \ln(1 - \xi) - (1 + \xi) \ln(1 + \xi) - 2\xi], \quad (14)$$

$$a_2(\xi) = 1 - \mu \{ (1 - \xi) [\ln(1 - \xi) - 1] + (1 + \xi) [\ln(1 + \xi) - 1] \}.$$

Эти решения соответствуют случаю, когда «мощности» систем пленок μ и ток в них малы и вектор-потенциал близок к внешнему. Тогда распределение плотности тока (пропорциональной $a(\xi)$) будет близко к линейному, например, в задаче 2 — к постоянному. По-видимому, впервые критерий малости эффекта Мейснера, подобный условию $\mu \ll 1$, был упомянут Шенбергом ([9], стр. 171).

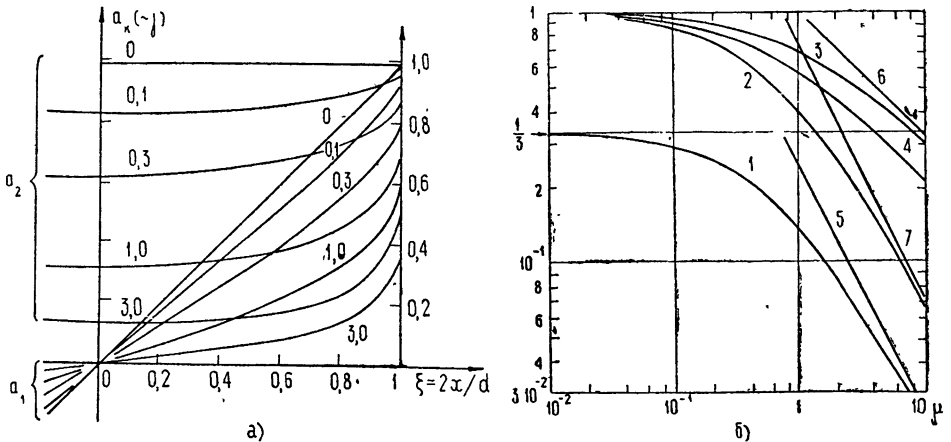


Рис. 2. Распределение потенциала (тока) на полоске при различных μ (а) и зависимость параметров этого распределения от μ (б). Тонкими линиями показаны зависимости, даваемые асимптотическими формулами (14) и (15); $1 - \int_0^1 a_1 \xi d\xi$, $2 - \int_0^1 a_2 d\xi$,

$$3 - a_2(1), 4 - a_1(1), 5 - (4\mu)^{-1}, 6 - \mu^{-1/2}, 7 - (2 \ln 2\mu)^{-1}.$$

В противоположном случае $\mu \gg 1$ системы пленок практически выталкивают внешнее поле, и $a_k(\xi) \rightarrow 0$. Решение уравнений (12) можно найти, пренебрегая a_k по сравнению с f_k , производя дифференцирование

по ξ обеих частей и применяя формулу Кюши для обращения сингулярного уравнения (см., например, [10]). В результате получаем

$$\begin{aligned} a_1(\xi) &= (\pi\mu)^{-1} \xi (1 - \xi^2)^{-1/2}, \\ a_2(\xi) &= (\pi\mu \ln 2)^{-1} (1 - \xi^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Второе из выражений (15) находилось ранее другими авторами (см. [11, 12] и замечание Гловера в [14]) из предположения о полной непроницаемости пленок для перпендикулярного магнитного поля.

Видно, что из-за расходимости выражений (15) при $\xi = \pm 1$ нельзя найти значения тока и поля на краях пленок. Это обстоятельство, а также то, что наиболее интересной является область значений параметра μ вблизи единицы, заставило провести численное решение уравнений (12) на ЭВМ. Они решались методом, подобным описанному в [15], но уточненному с помощью применения формулы Симпсона как в регулярных точках, так и в окрестности слабой особенности. Решение проводилось на машине БЭСМ-4 с автоматическим выбором шага. Результаты приведены на рис. 2. Видно, что плотность тока на краях остается конечной, но $|a'_k(\pm 1)| = \infty$ и, следовательно, магнитное поле имеет особенность.

4. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ ПЛЕНОК

1) *Оценка ГЛ-критического поля.* Эту оценку можно провести, не рассматривая последовательно нелинейную электродинамику систем. ГЛ-нелинейность осуществляется, когда максимальное значение вектор-потенциала (на краях пленок) достигает значения порядка критического $A_c = \sqrt{2} \lambda H_c$, где в величине H_c , как и в λ , должно быть учтено влияние рассеяния — объемного и на границах [1-3]. Поэтому можно считать приближенно критическим значением перпендикулярного внешнего поля H_{0c} такое значение H_0 , при котором в решении линейной задачи $A(1) = A_c$. Получаем:

$$\begin{aligned} (H_{0c}/H_c)_1 &= 2\sqrt{2} (\lambda/d) a_1^{-1}(1), \\ (H_{0c}/H_c)_2 &= \sqrt{2} (\lambda/D) a_2^{-1}(1) \left(1 + 2 \ln \frac{D}{d} \mu \int_0^1 a_2 d\xi \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Оба выражения (16) включают весьма малые величины λ/d , λ/D , что связано с приближением размагничивающего фактора систем к единице. Это резко снижает требуемые мощности СВЧ по сравнению с «параллельной» геометрией.

2) *Запасенная энергия.* С системой пленок в линейном случае связана дополнительная энергия [2]:

$$E = \frac{1}{8\pi} \int dr \left[\left(\frac{4\pi\lambda}{c} j \right)^2 + H^2 - H_0^2 \right] = \frac{1}{c} \int j A_0 dr_2, \quad (17)$$

где последний интеграл берется по объему пленок. Для энергии e на единицу длины одной плоскости по y получаем

$$e_1 = - \left(H_0 \frac{d}{2} \right)^2 \mu \int_0^1 a_1 \xi d\xi,$$

$$e_2 = - (H_0 D)^2 \left(\left(\mu \int_0^1 a_2 d\xi \right)^{-1} + l_r \right)^{-1}. \quad (18)$$

Удельные энергии e_k отрицательны; член $l_r = 2 \ln(D/d)$ в формуле для e_2 представляет собой погонную геометрическую (внешнюю) индуктивность одной полоски. Зависимость энергий e_k от параметра μ показана на рис. 3. При $\mu \rightarrow \infty$ $e_k = \text{const}$, что соответствует полному выталкиванию поля из объема $\sim d^2$ (или D^2).

3) *Управляемость.* Для создания различного рода управляемых элементов СВЧ важной величиной является

$$\eta_k = \mu \frac{\partial e_k}{\partial \mu}, \quad (19)$$

Рис. 3. Зависимость удельных энергий e_k (сплошные линии) и управляемостей η_k (пунктир) от μ ; e_2 и η_2 показаны для различных значений l_r .

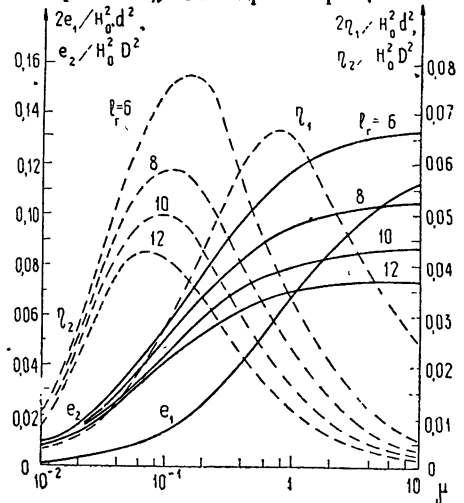


Рис. 3.

которая пропорциональна изменению энергии при малом изменении параметров сверхпроводящей пленки. Эту величину естественно назвать управляемостью. Зависимость управляемости от μ показана на рис. 3 пунктиром. Следует отметить, что управляемость в обеих задачах максимальна при $\mu \approx 10^{-1} \div 1$, т. е. для очень узких и тонких пленок ($d \ll \lambda_{\perp}$). Однако, если в задаче 1 это накладывает жесткое ограничение на величину максимальной управляемости, то в задаче 2 (пленочное кольцо или полоска с током) мы можем неограниченно увеличивать управляемость увеличением D (радиус кольца или расстояние до экрана). Следовательно, такая система при $\mu l_r \approx 1$ может эффективно запасать энергию и управлять СВЧ полем.

4) *Ток и индуктивность.* Используя связь тока и вектор-потенциала (7), получаем для величины тока через полоску в задаче 2

$$I = - c A_0 \mu \int_0^1 a_2 d\xi \left(1 + \mu l_r \int_0^1 a_2 d\xi \right)^{-1}, \quad (20)$$

откуда следует выражение для полной погонной индуктивности $l = -c A_0 / I$ (его можно получить и из (18)):

$$l = l_r + \left(\mu \int_0^1 a_2 d\xi \right)^{-1}. \quad (21)$$

Следовательно, полная индуктивность в линейном случае складывается из геометрической индуктивности l_r и собственной «кинетической» линейной индуктивности сверхпроводника [16–20]:

$$l_{\pi} = 4 \pi \lambda^2 / d d_0 \int_0^1 a_2 d\xi, \quad (22)$$

связанной с инерционными свойствами сверхпроводящего конденсата.

Как видно из (21), управляемость полной индуктивности (крутизна ее зависимости от μ) также характеризуется величиной η_2 (рис. 3). Величина l_n сравнима с l_r только при $\mu \ll 0,1$ (поскольку $l_r \approx 6 \div 12$ для всех практически возможных d и D). Так, для чистой оловянной пленки толщиной 10^{-6} см с диффузным рассеянием на границах равенство l_n и l_r , а следовательно, и достаточно высокая управляемость будут достигаться при $d \approx 10^{-3}$ см.

5. УЧЕТ ДИССИПАЦИИ

При $\sigma_1 \ll \sigma_2$ для учета диссипации достаточно в окончательных формулах сделать переход:

$$\mu = dd_0/4\pi\lambda^2 \rightarrow (dd_0/4\pi\lambda^2) [1 + i\sigma_1/\sigma_2]. \quad (23)$$

Тогда ток в задаче 2

$$I = \left(-l_r/cA_0 + \left(-cA_0\mu \int_0^1 a_2 d\xi + dd_0\sigma_1 \mathcal{E}_0 \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad (24)$$

где $\mathcal{E}_0 = -i(\omega/c)A_0$ — напряженность внешнего электрического поля. В силу равенства (24) эквивалентную схему единицы длины сверхпроводящей пленочной полоски с током можно представить в виде, показанном на рис. 4, причем проводимость $g = \sigma_1 dd_0$. Поскольку при частотах $\omega \ll \Delta(T)/\hbar$ имеют место соотношения $\sigma_1(\omega) \approx \text{const}$, $\sigma_2 \sim \omega^{-1}$ [8], в этом случае параметры эквивалентной схемы не зависят от частоты. Добротность линейной пленки будет оставаться высокой до частот $\omega \approx \omega_0 = \Delta(T)/\hbar$. Если в задаче 2 пленка не образует замкнутого кольца, то в ее эквивалентной схеме нужно учесть потери замыкающего нормального элемента. Пусть его проводимость G_1 достаточно высока: $G_1 b \gg g$. Тогда частота

$$\omega_1 = bG_1(l_n + l_r) \quad (25)$$

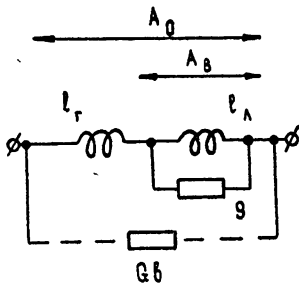


Рис. 4. Эквивалентная схема единицы длины сверхпроводящей пленки с током. Пунктиром показан учет диссипации в замыкающих элементах (для сверхпроводящего кольца $G_1 = \infty$).

дает нижний предел частот, при которых флюксоид в кольце будет сохраняться и справедлива калибровка $C = 0$. При частотах, сравнимых с ω_1 или ниже, система по-прежнему будет описываться уравнением (12), но вынуждающий потенциал будет меньше, чем это следует из выражения (11).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В сверхпроводящих плоских пленках существует значительный «поперечный эффект Мейснера», даже если их толщина поразительно меньше глубины проникновения магнитного поля. Достаточным условием равномерного распределения тока и поля в цилиндрических пленках является малость поперечного сечения (здесь dd_0) по сравнению с квадратом глубины проникновения. Анализ имеющихся в литературе данных (см., например, обзор в [18]) показывает, что ни в одном из известных нам экспериментов по исследованию критических токов в плоских пленках без компенсации требование $\mu \ll 1$ не было выполнено. Это, очевидно, является одной из причин, по которым ни в одном эксперименте не удавалось добиться таких больших значений критиче-

ских токов, которые следуют из теории ГЛ-нелинейности*. Даже в наиболее корректно поставленном эксперименте Джитльмана и др. [6] у большинства образцов величина μ при $T < 0,5 T_c$ была, по-видимому, больше 1, (что соответствует 115%-му увеличению плотности тока по краям (рис. 2)).

2. Достаточно высокой управляемости сверхпроводящей пленки можно добиться лишь при $\mu^{-1} \approx L_T \sim 10$, т. е. также лишь для очень тонких и узких полосок. Это требование оспаривается в силе и для пленки, нанесенной на круглую нить, хотя здесь распределение тока остается равномерным при любых значениях параметров. (Для такой пленки $\mu = dd_1/4\lambda^2$, d_1 — диаметр нити.)

3. Для осуществления в кольце из узкой пленки ($\mu \ll 1$) ГЛ-нелинейности требуются весьма малые поля. Действительно, из второй формулы (16) при $\mu \ll 1$ и, следовательно, $a_2(1) \approx 1$ получаем

$$H_{oc}/H_c = \sqrt{2}(\lambda/D) (1 + L_T/L_n). \quad (26)$$

Так, если полоска с $\lambda = 3 \cdot 10^{-5}$ см и $L_n = 10$ включена в полуволновой резонатор СВЧ с $Q = 10^2$ перпендикулярно магнитному полю на расстоянии $D = 10^{-1}$ см от стенки, то требуемая для достижения нелинейности мощность $P \approx 10$ мвт.

Автор благодарен В. Н. Губанкову, В. В. Мигулину и В. В. Шмидту за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. А. Линтон, Сверхпроводимость, изд. Мир, М., 1964.
2. Де Жен, Сверхпроводимость металлов и сплавов, изд. Мир, М., 1968.
3. J. I. Gittleman, V. Rosenblum, PIRE, 52, № 10, 1138 (1964).
4. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 20, № 5, 1064 (1950).
5. И. О. Кулик, ЖЭТФ, 57, № 2, 600 (1969).
6. J. I. Gittleman, V. Rosenblum, T. E. Seidel, A. W. Wicklund, Phys. Rev., 137, № 2A, 527 (1965).
7. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1966.
8. Дж. Бардин, Дж. Шриффер, Новое в изучении сверхпроводимости, Физматгиз, М., 1962.
9. Д. Шенберг, Сверхпроводимость, ИЛ, М., 1955.
10. Интегральные уравнения, сер. СМБ, изд. Наука, М., 1968.
11. Дж. Бремер, Сверхпроводящие устройства, изд. Мир, М., 1964.
12. G. Swan, J. Math. Phys., 9, № 8, 1308 (1968).
13. L. N. Cooper, Proc. of LT-7, Toronto, 1961, p. 416.
14. P. M. Marcus, Proc. of LT-7, Toronto, 1961, p. 418.
15. А. Б. Бакушинский, в сб. Вычислительные методы и программирование, вып. X, изд. МГУ, 1968, стр. 9.
16. A. R. Sass, W. C. Stewart, J. Appl. Phys., 39, № 4, 1956 (1968).
17. P. Viga, RCA Rev., 29, № 3, 386 (1968).
18. А. П. Смирнов, Диссертация, ЛФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, Л., 1968.
19. R. Meservey, P. M. Tedrow, J. Appl. Phys., 40, № 5, 2028 (1969).
20. В. И. Скобелкин, Э. А. Жильцов, В. М. Пучков, ФТТ, 11, № 10, 2764 (1969).
21. К. К. Лихарев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 6, 919 (1971).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
12 января 1970 г.

* Другая причина — образование смешанного состояния — проанализирована автором в работе [21].

THE LINEAR ELECTRODYNAMICS OF SUPERCONDUCTING FILMS OF FINITE WIDTH

K. K. Likharev

The linear electrodynamics of strips of a thin superconducting film is considered. The current distribution in such strips is found. The energetic relations and equivalent circuits have been obtained. It is shown that rather narrow film strips are necessary to be used in order to realize the effective superconducting nonlinear reactive elements for UHF systems.

УДК 537.312.62

ОБРАЗОВАНИЕ СМЕШАННОГО СОСТОЯНИЯ В ПЛОСКИХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ПЛЕНКАХ

К. К. Лихарев

Рассмотрено образование смешанного состояния в плоских тонких сверхпроводящих пленках под действием внешнего поля и тока. Показано, что за счет вхождения вихрей с осями, нормальными к плоскости пленки, смешанное состояние образуется при весьма малых значениях полей и токов. Обсуждается соотношение между полями, при которых происходит вход вихрей в пленку и проявляется нелинейность типа Гинзбурга — Ландау.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрена линейная электродинамика систем, состоящих из одной или двух полосок сверхпроводящей пленки. В ней найдены также значения полей (и токов), при которых в пленках существенны ГЛ-нелинейные явления. Основной задачей настоящей работы является нахождение «первых критических» полей тех же систем, соответствующих началу образования смешанного состояния [2], и сравнение их с ГЛ-критическими полями.

Необходимость рассмотрения этих явлений обусловлена тем, что, если амплитудное значение СВЧ поля превышает первое критическое, то каждые полпериода происходит вход и выход в пленку одного или нескольких вихрей. Такое движение сопровождается значительной диссипацией [3], что резко ухудшает характеристики пленки как нелинейного реактивного элемента.

В изучаемых нами тонких ($d_0 \ll d$)* пленках в силу неизбежного присутствия нормальной в плоскости пленки компоненты магнитного поля l смешанное состояние возникает из-за вхождения вихрей с осями, нормальными к пленке [2–8]. При этом каждый вихрь несет один квант магнитного потока $\Phi_0 = \pi \hbar c / e \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ гс} \cdot \text{см}^2$ (как показано в [7], в тонких пленках многократно квантованные вихри неустойчивы).

Теория смешанного состояния пленок в перпендикулярных магнитных полях развита [4–8] лишь для таких значений полей, когда плотность уже велика, и можно пренебречь действием на вихри «краевых» мейснеровских токов [1]**. Напротив, для нахождения условий начала вхождения вихрей необходимо рассмотреть взаимодействие отдельного вихря с мейснеровскими токами. Для вихрей, оси которых параллельны поверхности пленки, подобная задача рассмотрена Шмидтом [9].

Анализ будет проведен методом термодинамического потенциала Гиббса, минимум которого соответствует состоянию равновесия системы [2].

2. ПОТЕНЦИАЛ ГИББСА

Поскольку изучаемые системы пленок представляют собой образцы с существенным размагничивающим фактором, обычное выражение для G (2), которое используется в случае цилиндрической геометрии:

* Обозначения см. в [1].

** Исключение составляет работа [6], в которой оценено первое критическое поле большого диска.

$$G = F - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H}\mathbf{H}_0 dr, \quad (1)$$

к ним непосредственно не применимо. В (1) F — свободная энергия образца, \mathbf{H} и \mathbf{H}_0 — соответственно полное и внешнее магнитные поля, интегрирование производится по объему образца. Выражение (1) будет, однако, справедливо для мысленно выделенного цилиндра, параллельного \mathbf{H}_0 , заключающего в себя образец, и настолько большого, чтобы искажениями поля $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$ вне цилиндра можно было пренебречь. Учитывая, что

$$F = E_s + \frac{1}{8\pi} \int H^2 dr + \text{const}, \quad (2)$$

где E_s есть часть энергии сверхпроводящего конденсата, связанная с наличием токов, имеем для G :

$$G = E_s + \frac{1}{8\pi} \int (\tilde{H}^2 - H_0^2) dr + \text{const}. \quad (3)$$

Переходя к вектор-потенциалу \mathbf{A} , получим, что изменение G , связанное со сверхпроводимостью образца, есть

$$\tilde{G} = E_s + \frac{1}{2c} \int \mathbf{j}(\mathbf{A} - \mathbf{A}_0) dr, \quad (4)$$

при этом калибровка \mathbf{A} и \mathbf{A}_0 должна быть одинаковой. Последний интеграл можно брать только по объему реального образца. Выражение (4) справедливо уже для произвольной геометрии.

В настоящей работе будет рассмотрен лишь случай, когда применимо обычное квазилинейное описание вихрей [5]. Для этого необходимо выполнение условий:

$$\xi \ll d, \lambda_{\perp}, \quad A_M \ll A_{\text{ГЛ}}. \quad (5)$$

Здесь A_M — вектор-потенциал, соответствующий мейснеровским токам, в лондоновской калибровке (в работе [1] он фигурировал как \mathbf{A}). При выполнении условий (5) можно использовать «линейное» выражение для E_s :

$$E_s = \frac{1}{8\pi} \int \left(\frac{4\pi\lambda j}{c} \right)^2 dr. \quad (6)$$

Если теперь выбрать лондоновскую калибровку \mathbf{A} и \mathbf{A}_0 :

$$\mathbf{A} = - \frac{4\pi\lambda^2}{c} \mathbf{j}, \quad (7)$$

то выражение для G (4) принимает простой вид:

$$\tilde{G} = - \frac{1}{2c} \int \mathbf{j}\mathbf{A}_0 dr, \quad (8)$$

а для пленок постоянной толщины d_0

$$\tilde{C} = \frac{1}{4\pi\lambda_{\perp}} \int \mathbf{A}\mathbf{A}_0 dr, \quad \lambda_{\perp} = 2\lambda^2/d_0. \quad (9)$$

Пользуясь выражением (9), вычислим потенциал G пленки с находящимся в ней одиночным вихрем. В силу линейности задачи

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_M + \mathbf{B}, \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{M0} + \mathbf{B}_0. \quad (10)$$

Здесь «вынуждающий» вектор-потенциал \mathbf{B}_0 введен для описания нарушения лондоновской калибровки из-за наличия ядра вихря [2, 5]. Вектор-потенциал вихря \mathbf{B} при этом должен находиться из решения интегрального уравнения, аналогичного (1.4)*:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) + \frac{1}{2\pi\lambda_{\perp}} \int \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \quad (11)$$

где \mathbf{r} , \mathbf{r}' , $\boldsymbol{\rho}$ — плоские радиус-векторы; центр вихря находится в точке $\boldsymbol{\rho}$. «Вынуждающее» поле \mathbf{B} должно удовлетворять условию квантования [2, 5]:

$$\text{rot } \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \pm n_z \delta_2(\mathbf{r}) \Phi_0, \quad (12)$$

где знак различен для двух возможных ориентаций поля вихря относительно плоскости пленки. При подстановке (10) в общее выражение (9) та часть E потенциала \tilde{G} , которая зависит от положения вихря в пленке, разбивается на две компоненты:

$$E = E_0 + E_f, \quad (13)$$

где собственная энергия вихря

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\lambda_{\perp}} \int \mathbf{B}\mathbf{B}_0 d\mathbf{r} > 0, \quad (14)$$

а энергия взаимодействия вихря с мейснеровскими токами

$$E_f = \frac{1}{2\pi\lambda_{\perp}} \int \mathbf{A}_M \mathbf{B}_0 d\mathbf{r}. \quad (15)$$

Выражения (13)—(15) справедливы для плоских пленок любой формы.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ E ДЛЯ ДЛИННЫХ ПЛЕНОЧНЫХ ПОЛОСОК

Для полосок, изучавшихся в работе [1], величину E можно выразить через рассчитанные в [1] функции $a(\zeta)$. Действительно, из (15) получаем для силы Лоренца, с которой мейснеровские токи действуют на вихрь:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho}) = -\nabla_{\boldsymbol{\rho}} E_f = \pm \Phi_0 [\mathbf{A}_M(\boldsymbol{\rho}) \times \mathbf{n}_z] / 2\pi\lambda_{\perp}. \quad (16)$$

Поскольку вектор-потенциал \mathbf{A}_M направлен вдоль полоски, то сила \mathbf{F} действует поперек полоски, и

$$E_f(\rho_x) = \pm \frac{\mu\Phi_0 A_b(1)}{2} \int_0^{2\rho_x/d} a(\zeta) d\zeta. \quad (17)$$

Для вычисления E_0 найдем сначала явное выражение для \mathbf{B} . Поскольку ток вихря при малых толщинах пленки в силу равенств (7) и (11) пропорционален \mathbf{B}_0 , вектор \mathbf{B}_0 должен удовлетворять условию непрерывности

$$\nabla \mathbf{B}_0 = 0 \quad (18)$$

и граничному условию на краях пленки: $(\mathbf{B}_0)_x = 0$ при $|x| = d/2$. Из (12) и (18) следует, что плоское векторное поле \mathbf{B}_0 гармонично везде,

* Т. е. уравнению (4) работы [1].

кроме $r = \rho$. Поэтому можно применить метод зеркальных изображений и получить

$$B_0(r - \rho) = \pm \frac{\Phi_0}{2\pi} \sum_k \frac{[n_z \times (r - r_k)]}{|r - r_k|^2} (-1)^k, \quad (19)$$

где r_k — центр k -го фиктивного вихря:

$$r_k = kdn_x + (-1)^k \rho. \quad (20)$$

Поскольку плоское поле B в общем случае, как видно из (11), негармонично, его трудно найти в явном виде.

При $\mu \ll 1$ (для узких и тонких полосок) можно считать, что

$$B(r) \approx \pm \frac{\Phi_0}{2\pi} \sum_{k=-k_0}^{+k_0} \frac{[n_z \times (r - r_k)]}{|r - r_k|^2} (-1)^k, \quad (21)$$

где $k_0 = \lambda_{\perp}/d \approx 1/\mu \gg 1$. Тогда из (14) получаем с логарифмической точностью (при $\Delta r = \frac{d}{2} - |\rho_x| > \xi$)

$$E_0(\rho_x) = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda_{\perp}} \left\{ \ln \frac{\lambda_{\perp}}{\xi} + \sum_{n=1}^{k_0/2} \ln \left[\left(\frac{2n-1}{2n} \right)^2 - \left(\frac{\rho_x}{nd} \right)^2 \right] \right\}. \quad (22)$$

При $\mu \gg 1$ энергия вихря такая же, как в неограниченной пленке [2], везде за исключением краев шириной порядка λ_{\perp} :

$$E_0(\rho_x) = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\lambda_{\perp}} \times \begin{cases} \ln(\lambda_{\perp}/\xi) & (\Delta r \gg \lambda_{\perp}) \\ \ln(\Delta r/\xi) & (\lambda_{\perp} \gg \Delta r > \xi). \end{cases} \quad (23)$$

Выражения (22), (23) справедливы с логарифмической точностью.

4. ПЛЕНКА БЕЗ ТОКА

Для пленки без тока, помещенной в перпендикулярное магнитное поле H_0 (задача 1 работы [1]), функция $a(\zeta)$ нечетна, и энергия взаимодействия E_f (17) симметрична относительно середины пленки. Это соответствует вталкиванию вихря с направлением собственного поля, совпадающим с H_0 , в середину пленки. Вид потенциальной «ямы» для такого вихря схематически показан на рис. 1а. При напряженностях поля H_0 , превышающих значение H_{c1} , которое соответствует равенству $E_0(0) = |E_f(0)|$, становится энергетически выгодным вхождение вихря в пленку. Такое значение H_{c1} по аналогии с массивными сверхпроводниками будем называть первым критическим полем. Для него из (17), (22) и (23), используя (1.14) и (1.15), получаем:

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{\pi d} \times \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{\perp}} \ln(\lambda_{\perp}/\xi) & \text{при } d \gg \lambda_{\perp} (\mu \gg 1) \\ \frac{2}{d} \ln(d/4\xi) & \text{при } d \ll \lambda_{\perp} (\mu \ll 1) \end{cases}. \quad (24)$$

Сравним первое критическое поле с полем H_{0c} , при котором на краях пленки сказывается ГЛ-нелинейность [1]. Используя (1.16) и известное выражение для H_c [2]:

$$H_c = \Phi_0/2\pi \sqrt{2}\xi\lambda, \quad (25)$$

получаем

$$H_{0c} = \left(\frac{\Phi_0}{\pi d} \right) \frac{1}{\xi a(1)}. \quad (26)$$

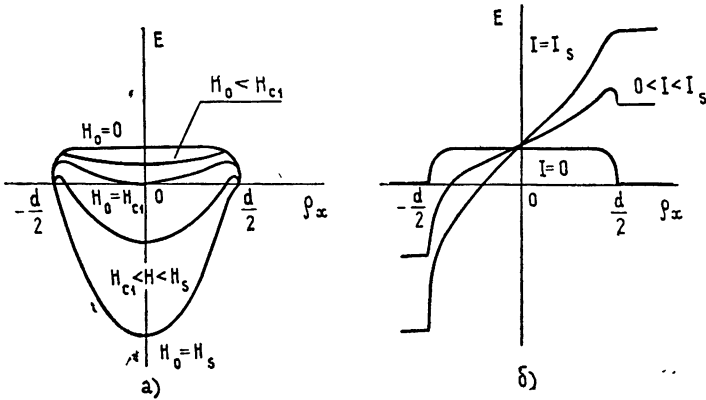


Рис. 1. Зависимость энергии вихря E от его положения для пленки во внешнем магнитном поле (а) и пленки с током (б).

На рис. 2 показана зависимость отношения H_{c1}/H_{0c} от ширины пленки. Поскольку развитая теория в силу условий (5) применима лишь для $H_{c1} \ll H_{0c}$, по ней нельзя судить, становится ли H_{c1} равным H_{0c} при $d \rightarrow \xi$.

Рассмотрим теперь вопрос о краевом потенциальном барьере (рис. 1 а), который препятствует вхождению вихрей при полях $H_{c1} <$

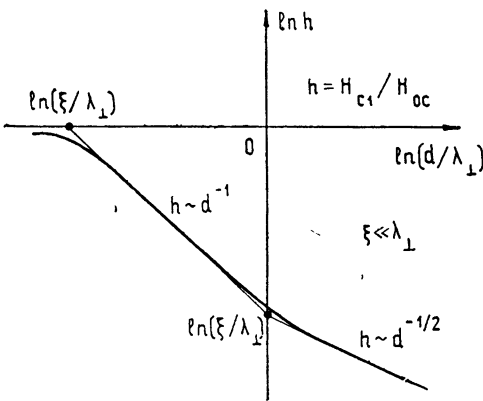


Рис. 2. Зависимость отношения H_{c1}/H_{0c} от ширины пленки. Крестиком отмечен предел справедливости квазилинейной теории.

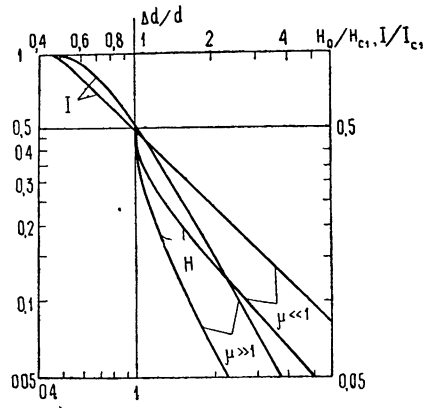


Рис. 3. Уменьшение ширины краевого барьера с ростом поля и тока.

$< H_0 < H_s$, где H_s — поле подавления барьера. В массивных сверхпроводниках II рода имеется аналогичный барьер [2], имеющий ширину $\sim \lambda_b$ и спадающий по экспоненте. В нашем случае барьер гораздо шире. На рис. 3 показано уменьшение ширины барьера Δd с увеличением внешнего поля. Хотя поле подавления барьера H_s имеет одинаковый порядок для узких и широких пленок:

$$H_s \approx \Phi_0/\pi d \xi a(1) = H_{0c}, \quad (27)$$

барьер в узких пленках относительно шире. Ширина барьера характеризует размер неоднородностей в пленке, которые могут привести к вхождению вихрей в данное поле.

Таким образом, можно с уверенностью сказать, что для широких пленок ($d \gg \lambda_{\perp}$) вихри будут входить в пленки до осуществления сколь-нибудь заметного уровня ГЛ-нелинейности. Для узких и тонких пленок ($d \ll \lambda_{\perp}$) поля H_{c1} и H_s уже более близки и барьер более широк. Если размеры неоднородностей в таких пленках достаточно малы, то в них, как показывают и эксперименты [10], реализуется во всяком случае начальная часть ГЛ-нелинейности.

5. ПЛЕНКА С ТОКОМ

Обратимся теперь к наиболее интересному случаю пленочной полоски, несущей ток (задача 2 работы [1]). Здесь функция $a(\zeta)$ четна, и энергия взаимодействия асимметрична относительно пленки, что соответствует «проталкиванию» вихрей поперек пленки текущим током. Распределение потенциала для одиночного вихря показано на рис. 1 б. Видно, что здесь первое криптическое поле (или ток), строго говоря, отсутствует, поскольку при сколь угодно малых токах энергетически выгодно пересечение пленки вихрями. Однако и в этом случае существует характерная величина тока

$$I_{c1} = \frac{c \Phi_0}{4 \pi^2 \lambda_{\perp}} \times \begin{cases} \ln(d/4\xi) & (d \ll \lambda_{\perp}) \\ \ln(\lambda_{\perp}/\xi) & (d \gg \lambda_{\perp}) \end{cases}, \quad (28)$$

при достижении которой происходит быстрое уменьшение потенциального барьера (рис. 3). Величину I_{c1} можно условно считать «первым критическим током пленки».

Окончательное подавление потенциального барьера происходит при токе

$$I_s \approx \frac{c \Phi_0}{\xi} \frac{\mu}{4\pi} \frac{\int_0^1 a d\zeta}{a(1)} = \frac{I_c}{2}, \quad (29)$$

примерно совпадающим с половиной характерного тока ГЛ-нелинейности I_c^* . Здесь, как и в случае пленки в поле, можно ожидать начала прохождения вихрей для широких пленок — при токах порядка I_{c1} (много меньших I_c), а для узких пленок с малыми неоднородностями — при токах порядка I_c .

1) В плоских сверхпроводящих пленках смешанное состояние осуществляется за счет вхождения вихрей с осями, нормальными к плоскости пленки. Смешанное состояние такого рода может индуцироваться как перпендикулярной компонентой внешнего магнитного поля, так и током, пропускаемым по пленке. Эти процессы наблюдаются экспериментально (см., например, [11]).

2) Только в весьма узких и тонких ($d \ll \lambda_{\perp}$) плоских пленках вхождение первых вихрей может происходить в полях, сравнимых с необходимыми для реализации ГЛ-нелинейности. Более точное рассмотрение конкуренции этих двух нелинейных процессов в таких пленках нужно проводить уже без ограничений (5), т. е. с учетом ГЛ-нелинейности и конечности размера зерна вихря ξ .

* Выражение (28), так же как и (27), справедливо с точностью до постоянного коэффициента, близкого к единице.

3) Хотя в данной работе рассмотрение было проведено для случая наиболее простой геометрии, аналогичным способом и для других случаев можно показать, используя выражения (13) — (15), что для плоских пленок с размерами больше λ_{\perp} однородное течение сверхпроводящего конденсата является неустойчивым при плотностях много ниже необходимой для проявления ГЛ-нелинейности. Это, в частности, относится к экспериментам типа Кларфейна, в которых нелинейные эффекты (параметрическое усиление, образование комбинационных частот и т. д.) возникают за счет квазипериодического движения вихрей в пленке [3].

Автор благодарен В. Н. Губанкову, В. В. Митулину и В. В. Шмидту за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. К. Лихарев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **14**, № 6, 909 (1971)
2. Де Жен, Сверхпроводимость металлов и сплавов, изд. Мир, М., 1968.
3. В. Н. Губанков, К. К. Лихарев, Н. М. Марголин, Письма в ЖЭТФ, **11**, № 5, 246 (1970).
4. M. Tinkham, Phys. Rev., **129**, 2413 (1963).
5. J. Pearl, Appl. Phys. Lett., **5**, № 4, 65 (1964); J. Appl. Phys., **37**, № 11, 4139 (1966).
6. K. Maki, Ann. Phys., **34**, № 3, 363 (1965).
7. G. Lasher, Phys. Rev., **154**, № 2, 345 (1967).
8. A. L. Fetter, P. C. Hohenberg, Phys. Rev., **159**, № 2, 330 (1967).
9. В. В. Шмидт, ЖЭТФ, **57**, № 6, 2095 (1969).
10. J. Gittleman, B. Rosenblum, T. E. Seidel, A. W. Wicklund, Phys. Rev., **137**, № 2A, A527 (1965).
11. И. М. Дмитренко, в сб. Тр. ЛТ-10, М., 1967, 2М, стр. 355.
12. В. П. Галайко, в сб. Тр. ЛТ-10, М., 1967, 2А, стр. 340.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
28 апреля 1970 г.

FORMATION OF A MIXED STATE IN PLANE SUPERCONDUCTING FILMS

K. K. Likharev

The formation of a mixed state in plane thin superconducting films under the action of external field and current has been considered. It is shown that due to entering the fluxes with the axes normal to the film plane, the mixed state forms at rather small values of the fields and currents. The relations between the fields are discussed at which the fluxes enter the film and the Ginzburg—Landau type nonlinearity takes place.

УДК 621.372.8.09 : 621.318

ОСОБЕННОСТЬ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ ОБРАЗЦА ФЕРРИТА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ВО ВНЕШНЕМ ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. А. Буц

Рассмотрена задача об отражении электромагнитной волны от образца феррита, помещенного во внешнее переменное магнитное поле. Показано, что при этом будет происходить смещение частот отраженной и прошедшей волн, обусловленное отражением электромагнитных волн от движущейся доменной стенки. Движение последней определяется величиной и частотой переменного внешнего магнитного поля. Получены формулы для смещения частот, а также для коэффициентов отражения и прохождения. Указаны простейшие возможности применения этого эффекта.

При наложении внешнего магнитного поля на образец феррита стенка, разделяющая область с различной ориентацией спинов, перемещается таким образом, что домены с намагниченностью, параллельной внешнему полю, растут, а домены с противоположной ориентацией спинов уменьшаются. Скорость передвижения стенки (внешнее магнитное поле около 10 э) для 180-градусной границы порядка скорости звука в феррите ($10^6 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$) [1].

Феноменологически область домена с намагниченностью, параллельной оси z , можно охарактеризовать следующими тензорами диэлектрической и магнитной восприимчивости [2]:

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & i\epsilon_a & 0 \\ -i\epsilon_a & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

У домена с противоположной ориентацией спинов будут отличаться знаки недиагональных компонент тензоров (1). Поэтому электромагнитная волна, падающая под некоторым углом к стенке, будет от нее отражаться*. Когда образец феррита помещается во внешнее магнитное периодическое поле, стенка начинает колебаться (собственная частота колебаний стенки ω_c порядка 10^{10} гц [1, 3]). При этом будет меняться частота как отраженной, так и прошедшей волны.

В настоящей работе мы рассмотрим задачу о прохождении и отражении электромагнитных волн от ферромагнитной пластины, находящейся в периодическом внешнем магнитном поле. Будем считать, что доменная стенка движется с постоянной скоростью навстречу падающей волне или от нее, т. е. магнитное поле меняется только по направлению, но не по величине. Частота внешнего поля меньше частоты собственных колебаний стенки ($\omega_{\text{вн}} < \omega_c$).

Пусть мы имеем образец феррита с линейным размером равным 1 см , на толщине которого укладываются два домена, разделенных 180-

* Задача об отражении электромагнитных волн от движущегося скачка внешнего магнитного поля в феррите была рассмотрена в работе [4].

градусной границей (ширина каждого домена порядка 10^{-3} см, а толщина доменной стенки порядка 10^{-6} см*). Спины в одном из этих доменов ориентированы параллельно оси z , в другом — антипараллельно. В этом случае для оптической и инфракрасной областей ($\lambda \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$ см) задачу можно разбить на две. Первая — это задача об отражении электромагнитной волны от границы среда — феррит, вторая — отражение от движущейся доменной стенки. Рассмотрим вначале два простейших случая падения, когда E - и H -волны в феррите разделяются.

1. Пусть на пластинку под углом φ к положительному направлению оси u падает E -волна (E_z, H_y, H_x), у которой отсутствует зависимость от z ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$). Тогда компоненту E_z для падающей и отраженной волн будем искать в виде

$$E_z^{(1)} = e^{i\gamma y + igx} + Re^{i\gamma y - igx} \quad (x < 0), \quad (2)$$

где

$$\gamma \equiv k \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \varphi, \quad g \equiv k \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \varphi, \quad k \equiv \omega/c,$$

ε_1, μ_1 — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, из которой волна падает на пластину. Множитель $e^{i\omega t}$, определяющий зависимость от времени, здесь и везде ниже опущен. Остальные компоненты поля определяются из уравнений Максвелла. В прошедшей волне

$$E_z^{(2)} = T \exp(i\gamma y + ik_{\perp} x) \quad (x > 0), \quad (3)$$

$$k_{\perp} \equiv \sqrt{k^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \gamma^2}, \quad \mu_{\perp} \equiv \mu - \mu_a^2/\mu.$$

Приравнивая на границе раздела ($x=0$) тангенциальные компоненты электромагнитного поля, получим коэффициент отражения и прохождения:

$$R_p \equiv \left| \frac{S_o}{S_n} \right| = |R|^2 = \left| \frac{Y_o - Y}{Y_o + Y} \right|^2, \quad (4)$$

$$T_p \equiv \left| \frac{S_{np}}{S_n} \right| = |T|^2 = \left| \frac{\varepsilon Y_o}{Y_o + Y} \right|^2,$$

где

$$Y_o \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \sin \varphi, \quad Y \equiv \frac{1}{k} \left(-\frac{\gamma}{\mu_{\perp}} + \frac{k_{\perp}}{\mu_1} \right), \quad \mu_{\perp} \equiv \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{i \mu_a}.$$

Найдем теперь коэффициент прохождения и отражения волны при падении на доменную стенку. Для этого стенку поместим в плоскость $x=0$, а поля запишем следующим образом:

$$E_z^{(2)} = \exp(ik_{\parallel} y + ik_{\perp} x) + R \exp(ik_{\parallel} y - ik_{\perp} x) \quad (x < 0),$$

$$E_z^{(3)} = T \exp(ik_{\parallel} y + ik_{\perp} x) \quad (x > 0). \quad (5)$$

Здесь $k_{\parallel} = k \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \mu_1} \cos \alpha = \gamma$, $k_{\perp} = k \sqrt{\varepsilon_{\perp} \mu_1} \sin \alpha$; α — отсчитываемый от положительного направления оси u угол падения волны на стенку.

В соответствии с граничными условиями находим**

* Рассматривается ферромагнитный монокристалл, имеющий одну ось легкого намагничивания.

** Релятивистскими эффектами для коэффициентов отражения и прохождения мы пренебрегаем.

$$R_p = 1 / \left[1 + \left(\frac{\mu}{\mu_a} \operatorname{tg} \alpha \right)^2 \right], \quad T_p = 1 / \left[1 + \left(\frac{\mu_a}{\mu} \operatorname{ctg} \alpha \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Из полученных формул видно, что для рассматриваемой поляризации падающей волны коэффициент прохождения и отражения от доменной стенки полностью определяется только компонентами тензора магнитной проницаемости.

Воспользовавшись инвариантностью фазы относительно преобразований Лоренца, получим (без учета дисперсии) следующее значение для частоты отраженной волны:

$$\omega_o = \omega_n \frac{1 \pm \beta \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}} \sin \alpha}{1 \mp \beta \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}} \sin \alpha}, \quad (7)$$

где $\beta = v/c$. Верхние знаки относятся к случаю стенки, движущейся навстречу волне, нижние — к случаю, когда волна догоняет стенку*. Так как фазовые скорости падающей и прошедшей волн одинаковы, то частота последней не меняется:

$$\omega_{\text{пр}} = \omega_n. \quad (8)$$

2. Пусть теперь на образец падает H -волна (H_z, E_x, E_y) и по-прежнему зависимость от z отсутствует ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$). Запишем поля вне пластины и внутри:

$$H_z^{(1)} = \exp(i\gamma y + igx) + R \exp(i\gamma y - igx) \quad (x < 0), \quad (9)$$

$$H_z^{(2)} = T \exp(i\gamma y + ik_{\perp} x) \quad (x > 0),$$

где

$$\gamma = k \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}} \cos \varphi, \quad g = k \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}} \sin \varphi,$$

$$k_{\perp} = \sqrt{k^2 \mu_{\parallel} \varepsilon_{\parallel} - \gamma^2}, \quad \varepsilon_{\parallel} = \varepsilon - \varepsilon_a^2 / \varepsilon.$$

Сшивая поля на поверхности образца, находим

$$R_p = \left| \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z} \right|^2, \quad T_p = \left| \frac{2Z_0}{Z_0 + Z} \right|^2, \quad (10)$$

где

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel}}} \sin \varphi, \quad Z = \frac{1}{k} \left[\frac{\gamma}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{k_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \right], \quad \varepsilon_{\parallel} = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_a^2}{i \varepsilon_a}.$$

Поля в области, занятой одним и другим доменом, будут иметь вид

$$H_z^{(2)} = \exp(ik_{\parallel} y + ik_{\perp} x) + R \exp(ik_{\parallel} y - ik_{\perp} x) \quad (x < 0),$$

$$H_z^{(3)} = T \exp(ik_{\parallel} y + ik_{\perp} x) \quad (x > 0), \quad (11)$$

$$k_{\parallel} = k \sqrt{\mu_{\parallel} \varepsilon_{\parallel}} \cos \alpha = \gamma, \quad k_{\perp} = k \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \mu_{\parallel}} \sin \alpha.$$

Подставляя поля в граничные условия, получаем

$$R_p = 1 / \left[1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_a} \operatorname{tg} \alpha \right)^2 \right], \quad T_p = 1 / \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} \operatorname{ctg} \alpha \right)^2 \right]. \quad (12)$$

* Например, в феррите-гранате иттрия для $\omega \sim 10^{14} \text{ сек}^{-1}$ смещение частоты отраженной волны равно $\omega_o \sim \omega_n \sim 10^{10} \text{ сек}^{-1}$. Компоненты тензора магнитной восприимчивости на этих частотах найдены в работе [5].

Для частот прошедшей и отраженной волн находим

$$\omega_o = \omega_n \frac{1 \pm \beta \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin \alpha}{1 \mp \beta \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \sin \alpha} \quad (\omega_{np} = \omega_n). \quad (13)$$

Таким образом, как видно из формулы (12), отражение H -волны определяется только компонентами тензора диэлектрической проницаемости, в то время как отражение E -волн — компонентами тензора магнитной проницаемости (6).

Рассмотрим теперь два более сложных случая, когда падающая на пленку волна зависит не от y ($\frac{\partial}{\partial y} = 0$), а только от z ($\frac{\partial}{\partial z} \neq 0$). Основной особенностью этого случая в отличие от рассмотренных выше является то, что E - и H -волны в феррите не разделяются, а падающая на образец волна возбуждает в нем две волны (обыкновенную и необыкновенную*). При отражении от движущейся доменной стенки каждая из этих волн возбуждает тоже две волны, смещение частот которых из-за различия в фазовых скоростях будет неодинаковым.

Решение задачи об отражении в этом случае разобьем на несколько этапов. Вначале найдем коэффициент возбуждения обыкновенной и необыкновенной волн, затем, рассматривая каждую из них в отдельности, исследуем отражение их от границы, разделяющей домены.

3. E -волна (E_z, H_x, H_y). Для этого поля в каждой из областей, где электродинамические свойства сред непрерывны, будем искать в виде

$$E_z^{(1)} = e^{i\gamma z + i\alpha x} + R e^{i\gamma z - i\alpha x} \quad (x < 0); \quad (14)$$

$$H_z^{(1)} = R_1 e^{i\gamma z - i\alpha x}$$

$$E_z^{(2)} = T e^{i\gamma z + i k_2 x} + T_1 A_1 e^{i\gamma z + i k_2 x} \quad (x > 0), \quad (15)$$

$$H_z^{(2)} = T A e^{i\gamma z + i k_2 x} + T_1 e^{i\gamma z + i k_2 x}$$

где

$$\gamma = k \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \cos \varphi, \quad g = k \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \varphi,$$

$$k_s^2 = p/2 - (-1)^s \sqrt{p^2/4 - q} \quad (s=1, 2),$$

$$p = k^2 (\epsilon_1 \mu_{\perp} + \epsilon_{\perp} \mu_1) - \gamma^2 (\epsilon_1/\epsilon + \mu_1/\mu),$$

$$q = \epsilon_1 \mu_1 \left[k^4 \epsilon_{\perp} \mu_{\perp} - 2k^2 \left(1 + \frac{\mu_a \epsilon_a}{\mu \epsilon} \right) \gamma^2 + \frac{\gamma^4}{\epsilon \mu} \right],$$

$$A \equiv \frac{i\gamma k \epsilon_1 (\epsilon_a/\epsilon + \mu_a/\mu)}{(k^2 \mu_{\parallel} \epsilon_{\perp} - \mu_{\parallel} \gamma^2/\mu - k_{\perp}^2)}, \quad A_1 \equiv - \frac{i\gamma k \mu_{\parallel} (\epsilon_a/\epsilon + \mu_a/\mu)}{(k^2 \mu_{\perp} \epsilon_1 - \epsilon_{\parallel} \gamma^2/\epsilon - k_2^2)}.$$

Первые слагаемые в (15) соответствуют обыкновенной волне, вторые — необыкновенной. Приравнявая тангенциальные компоненты поля на поверхности пластины, определим коэффициенты отражения и возбуждения волн**:

* Под обыкновенной мы будем понимать волну, которая существовала бы в феррите и при отсутствии гиротропии, под необыкновенной — волну, которая появляется только благодаря наличию недиагональных компонент тензора $\overset{\wedge}{\epsilon}$ и $\overset{\wedge}{\mu}$.

** Здесь и ниже мы будем выписывать коэффициенты отражения и возбуждения только для компонент поля (R_s, T_s), а не соответствующие величины по потоку (R_p, T_p), так как последние в общем случае громоздки.

$$R = (B - B_1)/(B + B_1), \quad T = 2/(B + B_1), \quad (16)$$

$$R_1 = 2A(1 - D)/(B + B_1), \quad T_1 = -2AD/(B + B_1), \quad D = \frac{Y_0 + Y_1}{Y_0 + Y_2},$$

где

$$B = 1 - AD, \quad B_1 = (1/Z_0)[Z_1 - Z_2 AA_1 D],$$

$$Z_0 = \frac{k \varepsilon_1}{g}, \quad Y_0 = \frac{k \mu_1}{g}, \quad Z_s = \frac{k \varepsilon_s}{k_s}, \quad Y_s = \frac{k \mu_s}{k_s} \quad (s=1, 2).$$

Посмотрим теперь, как будет отражаться каждая из этих двух волн от движущейся границы раздела двух доменов.

а) Обыкновенная волна.

Поля:

$$E_z^{(2)} = \exp(ik_{\parallel} z + ik_1 x) + R \exp(ik_{\parallel} z - ik_1 x) + R_1 A_1 \exp(ik_{\parallel} z - ik_2 x) \quad (x < 0); \quad (17)$$

$$H_z^{(2)} = A[\exp(ik_{\parallel} z + ik_1 x) + R \exp(ik_{\parallel} z - ik_1 x)] + R_1 \exp(ik_{\parallel} z - ik_2 x)$$

$$E_z^{(3)} = T \exp(ik_{\parallel} z + ik_1 x) - T_1 A_1 \exp(ik_{\parallel} z + ik_2 x) \quad (x > 0). \quad (18)$$

$$H_z^{(3)} = -TA \exp(ik_{\parallel} z + ik_1 x) + T_1 \exp(ik_{\parallel} z + ik_2 x)$$

Из граничных условий находим

$$R = A_1 G[V + W], \quad R_1 = G[V - W], \quad (19)$$

$$T = T_1 A_1 + R_1 A_1 + (1 + R), \quad T_1 = [2A(1 + R) + R_1(1 + AA_1)]/(1 - AA_1),$$

где

$$G = A \left(\frac{k_1}{k_2} - 1 \right) / (1 - AA_1), \quad V = \left(1 - AA_1 \frac{k_1}{k_2} \right)^{-1}, \quad W = \left(\frac{k_1}{k_2} - AA_1 \right)^{-1}.$$

Изменение частоты:

$$\omega_o = \omega_n \left[\frac{1 \pm \beta k_{10}}{1 \mp \beta k_{10}} \mp \frac{(k_{10} - k_{s0}) \beta}{1 \mp \beta k_{10}} \right], \quad (20)$$

$$\omega_{np} = \omega_n \frac{1 + \beta k_{10}}{1 + \beta k_{s0}}, \quad k_{s0} = k_s/k \quad (s = 1, 2).$$

Таким образом, частота прошедшей обыкновенной ($s = 1$) волны не меняется, а возбуждавшаяся необыкновенная ($s = 2$) волна имеет другую частоту.

б) Необыкновенная волна.

Поля:

$$H_z^{(1)} = \exp(i\gamma z + ik_2 x) + R_n \exp(i\gamma z - ik_2 x) + AR_n \exp(i\gamma z - ik_1 x) \quad (x < 0); \quad (21)$$

$$E_z^{(1)} = A_1[\exp(i\gamma z + ik_2 x) + R_n \exp(i\gamma z - ik_2 x)] + R_{1n} \exp(i\gamma z - ik_1 x)$$

$$H_z^{(2)} = T_n \exp(i\gamma z + ik_2 x) - T_{1n} \exp(i\gamma z + ik_1 x) A \quad (x > 0). \quad (22)$$

$$E_z^{(2)} = -A_1 T_n \exp(i\gamma z + ik_2 x) + T_{1n} \exp(i\gamma z + ik_1 x)$$

Из граничных условий

$$R_n = -R, \quad R_{1n} = -R_1(A \overleftrightarrow{A}_1, k_1 \overleftrightarrow{k}_2), \quad (23)$$

$$T_n = T(A \overleftrightarrow{A}_1, R \rightarrow R_n, R_1 \rightarrow R_{1n}), \quad T_{1n} = T_1(A \overleftrightarrow{A}_1, R \rightarrow R_n, R_1 \rightarrow R_{1n}).$$

Изменение частоты:

$$\omega_{\text{он}} = \omega_0(k_1 \leftrightarrow k_2), \quad \omega_{\text{пр н}} = \omega_{\text{пр}}(k_1 \leftrightarrow k_2). \quad (24)$$

Стрелки в скобках в выражениях (23) и (24) показывают, какие величины мы должны изменить в формулах (19) и (20), чтобы получить нужные выражения.

4. *H*-волна (H_z , E_x , E_y). Для определения амплитуд возбужденных обыкновенной и необыкновенной волн поля будем искать в виде

$$H_z^{(1)} = e^{i\gamma z + igx} + R e^{i\gamma z - igx} \quad (x < 0); \quad (25)$$

$$E_z^{(1)} = R_1 e^{i\gamma z - igx}$$

$$H_z^{(2)} = T \exp(i\gamma z + ik_2 x) + T_1 A \exp(i\gamma z + ik_1 x) \quad (x > 0). \quad (26)$$

$$E_z^{(2)} = T_1 \exp(i\gamma z + ik_1 x) + T A_1 \exp(i\gamma z + ik_2 x)$$

Выражения для R , R_1 , T и T_1 в (25), (26) можно получить из формул (16), если в них заменить k_1 на k_2 , A на A_1 , а все компоненты тензора магнитной проницаемости на соответствующие компоненты тензора диэлектрической проницаемости и наоборот. Задача же об отражении обыкновенной и необыкновенной волн от движущейся стенки уже решена в предыдущем пункте.

Указанная особенность отражения электромагнитных волн от ферритового образца, помещенного в переменное внешнее магнитное поле, может быть применена для эффективной модуляции излучения лазера и для изучения магнитной структуры ферритов*. Кроме того, этот эффект может оказаться полезным для осуществления генерирования электромагнитных волн в нужном диапазоне частот, особенно при использовании добавочного замедления и многократного отражения. (При наличии просветляющих пленок формулы (6)—(8), (12) и (13) будут справедливы и для других, сколь угодно больших длин волн.)

Нужно отметить, что обычно коэффициент преломления ферритовых образцов велик, поэтому если луч падает на него из вакуума, то прошедшая волна будет падать на доменную стенку под углом, мало отличающимся от $\pi/2$. Из формул (6), (12), (19) и (23) легко увидеть, что коэффициенты отражения от доменной стенки пропорциональны $\cos \alpha$ и стремятся к нулю, когда угол α стремится к $\pi/2$. Из тех же формул следует, что коэффициент отражения увеличивается при увеличении недиагональных компонент тензора диэлектрической или магнитной восприимчивости. Поэтому для практического осуществления модуляции необходима прозрачная призма с достаточно большим коэффициентом преломления, чтобы получить нужный угол падения и кристаллы с возможно большей гиротропией. Следует, однако, заметить, что сильно уменьшать угол падения нельзя, так как смещение частоты пропорционально синусу этого угла (см. (7), (13), (20) и (24)).

В заключение автор благодарит В. Г. Барьяхтара за полезные советы и обсуждение полученных результатов.

* Если внешнее магнитное поле меняется по гармоническому закону $H = H_0 \sin \Omega t$, то при $\omega \gg \Omega$ в формулы (7), (13), (20) и (21) нужно подставлять $v = v_0 \sin \Omega t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Деринг, сб. Ферромагнитный резонанс и поведение ферромагнетиков в переменных магнитных полях, ИЛ, М., 1952; И. Киттель, Я. Галт, сб. Магнитная структура ферромагнетиков, ИЛ, М., 1959.
2. А. В. Соколов, УФН, 50, № 2, 161 (1953).
3. Я. Смит, Х. Вейн, Ферриты, ИЛ, М., 1962.
4. А. М. Глуцкий, ЖТФ, 34, 1345 (1964).
5. В. В. Ганн, УФЖ, XI, № 8, 866 (1966).

Поступила в редакцию
28 июля 1970 г.

A PROPERTY OF ELECTROMAGNETIC WAVE REFLECTION FROM
FERRITE SAMPLE IN THE EXTERNAL VARIABLE MAGNETIC FIELD

V. A. Buts

The reflection of an electromagnetic wave from a ferrite sample placed in an external variable magnetic field is considered. It is shown that there will take place the frequency shift of reflected and passed waves due to electromagnetic wave reflection from the moving domain wall. The wall motion is determined by the magnitude and frequency of the variable external magnetic field. Formulas are obtained for the frequency shift as well as for the reflection and transmission coefficients. The simplest applications of the effect are pointed out.

УДК 538.56

МАГНИТОСТАТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ФЕРРИТОВОГО ЭЛЛИпсоИДА С УЧЕТОМ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

В. Л. Лаунец, М. М. Новицкас, В. К. Шугуров

Для малого анизотропного эллипсоида, намагниченного до насыщения, приведена система уравнений, позволяющая определить частоты и амплитуды магнитостатических потенциалов внутри и вне эллипсоида для любого типа прецессии намагниченности. В частном случае однородного ферромагнитного резонанса приведено выражение для определения резонансных частот.

Спектр собственных частот колебаний вектора намагниченности изотропного ферритового сфероида в магнитостатическом приближении найден Уокером [1] (см. также [2]). В [3] (см. также [4]) путем подбора получены уравнения для резонансных частот простейших типов прецессии в шарике с учетом кристаллографической анизотропии. В общем виде задача не рассматривалась из-за математических трудностей. В [5] задача о магнитостатических типах прецессии в анизотропном шарике решалась в сферической системе координат. В результате была найдена связь между типами колебаний, различающимися числами симметрии l и m .

В настоящей статье определяется спектр колебаний ферритового эллипсоида с учетом анизотропии при помощи эллипсоидальных функций. Показано, что связь по анизотропии осуществляется только между типами с равными l и различающимися на четное число m .

1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Имеем ферритовый эллипсоид с полуосями A, B, C ; ось z направлена параллельно постоянному магнитному полю. Тензор, описывающий связь между переменными намагниченностью и напряженностью магнитного поля, можно записать в виде [5]

$$\begin{vmatrix} x_0 + \Delta, & -i\nu_0 \\ i\nu_0, & x_0 - \Delta \end{vmatrix}, \quad (1.1)$$

где

$$x_0 = \frac{\Omega_H}{\Omega_H^2 - \Omega^2 - \delta^2}, \quad \nu_0 = \frac{\Omega}{\Omega_H^2 - \Omega^2 - \delta^2},$$

$$\Delta = \frac{\delta}{\Omega_H^2 - \Omega^2 - \delta^2}, \quad \Omega_H = \frac{H}{4\pi M_0}, \quad \Omega = \frac{\omega}{4\pi\gamma M_0},$$

$$8\pi\delta = 3K_1 M_0^{-2} (3 \cos^2\alpha - 1),$$

$$H = H_0 \cos(\widehat{M_0 H_0}) - \frac{4\pi}{3} M_0 + \frac{K_1}{2M_0} (4 - 20 \sin^2\alpha - 15 \cos^4\alpha),$$

α — угол между направлением вектора M_0 и кристаллографической осью $[001]$, K_1 — первая константа анизотропии.

В магнитостатическом приближении магнитное поле

$$H = \nabla \Psi.$$

Поэтому из соотношения $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ с учетом (1.1) получаем дифференциальное уравнение для потенциала Ψ

$$\left[(1 + \kappa_0 + \Delta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1 + \kappa_0 - \Delta) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi = 0,$$

которое удобнее переписать в виде

$$\left[\frac{1}{1 + \kappa_0 - \Delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{1 + \kappa_0 + \Delta} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{(1 + \kappa_0)^2 - \Delta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi = 0. \quad (1.2)$$

В системе координат

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x, & y' &= \beta y, & z' &= \gamma_0 z, \\ \alpha &= \sqrt{1 + \kappa_0 + \Delta}, & \beta &= \sqrt{1 + \kappa_0 - \Delta}, & \gamma_0 &= \alpha\beta \end{aligned} \quad (1.3)$$

(1.2) переходит в уравнение Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \Psi = 0, \quad (1.4)$$

а эллипсоид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1 \quad (1.5)$$

деформируется в

$$\frac{x'^2}{\alpha^2 A^2} + \frac{y'^2}{\beta^2 B^2} + \frac{z'^2}{\gamma^2 C^2} = 1. \quad (1.6)$$

Геометрия уравнений (1.5) и (1.6) показывает, что решения внутренней и внешней ($\kappa_0 = \nu_0 = \Delta = 0$) задач следует искать в эллипсоидальных системах координат. В случае внешней задачи введем координаты ρ, μ, ν с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{(\rho^2 - a^2)(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}{(a^2 - b^2)a^2}}, \\ y &= \sqrt{\frac{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{(a^2 - b^2)b^2}}, & z &= \rho \frac{\mu\nu}{ab}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В случае внутренней задачи, т. е. для решения уравнения (1.4), введем ρ', μ', ν' , определяемые формулами, аналогичными (1.7). Одна из координатных поверхностей является эллипсоидом

$$\frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x'^2}{\rho'^2 - a'^2} + \frac{y'^2}{\rho'^2 - b'^2} + \frac{z'^2}{\rho'^2} = 1.$$

Потребуем, чтобы при $\rho = \rho_0$ первый эллипсоид совпал с (1.6), а при $\rho' = \rho'_0$ второй — с (1.6). Этим определяются параметры координатных систем:

$$\begin{aligned} a^2 &= C^2 - A^2, \quad b^2 = C^2 - B^2, \quad \rho_0 = C, \\ a'^2 &= \gamma_0^2 C^2 - \alpha^2 A^2, \quad b'^2 = \gamma_0^2 C^2 - \beta^2 B^2, \quad \rho'_0 = \gamma_0 C. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Вместо μ , ν (μ' , ν') будем пользоваться переменными θ , φ , φ [6]

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \varphi &= \sqrt{\frac{(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)}{(a^2 - b^2)a^2}}, \\ \sin \theta \sin \varphi &= \sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{(a^2 - b^2)b^2}}, \\ \cos \theta &= \frac{\mu\nu}{ab} \end{aligned} \quad (1.9)$$

и аналогично для θ' и φ' . Координатная система ρ , θ , φ не является ортогональной, но при решении нашей задачи ее удобство заключается в том, что угловая часть потенциала может быть выражена через сферические функции. Это облегчает сшивание полей на границе. На поверхности эллипсоида $\rho = \rho_0$ ($\rho' = \rho'_0$) углы $\theta = \theta'$ и $\varphi = \varphi'$, т. е. в этом случае угловые части выражаются через единую систему ортонормированных функций.

2. УСЛОВИЯ СШИВАНИЯ

Решение уравнения Лапласа в эллипсоидальной системе координат представляется в виде произведения функций Ламе:

$$\Psi_{ll} = R_{ll}(\rho) \Theta_{ll}(\mu) \Phi_{ll}(\nu). \quad (2.1)$$

Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют Θ_{ll} и Φ_{ll} , имеют вид [6, 7]

$$\begin{aligned} \sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)} \frac{\partial}{\partial \mu} \Theta_{ll}(\mu) \right] &= \\ &= -[l(l+1)(\mu^2 - b^2) + t^2 a^2] \Theta_{ll}(\mu), \\ \sqrt{(a^2 - \nu^2)(b^2 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\sqrt{(a^2 - \nu^2)(b^2 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_{ll}(\nu) \right] &= \\ &= -[l(l+1)(b^2 - \nu^2) - t^2 a^2] \Phi_{ll}(\nu). \end{aligned}$$

Умножив первое на Φ , второе — на Θ и сложив, получаем уравнение для $U_{ll} = \Theta_{ll} \Phi_{ll}$, из которого следует определить собственные значения l . Переписав это уравнение в координатах θ и φ согласно (1.9), после несложных алгебраических преобразований находим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) U_{ll} = -l(l+1) U_{ll},$$

что совпадает с соответствующим уравнением для сферических функций Y_{lm} . Это означает, что любую функцию Ламе можно представить линейной комбинацией сферических функций

$$U_{ll} = \sum_m a_{lm} Y_{lm}, \quad l = 0, 1, \dots,$$

причем в последнюю формулу входят Y_{lm} с m одной четности.

Перейдем теперь к граничным условиям. Решение внутри эллипсоида

$$\Psi_{it}^{\text{вн}} = A_{it}^{\text{вн}} R_{it}(\rho') U_{it}(\theta', \varphi'), \quad (2.2)$$

Вне эллипсоида поля описываются потенциалом падающей

$$\Psi_{it}^{\text{пад}} = A_{it}^{\text{пад}} R_{it}(\rho) U_{it}(\theta, \varphi) \quad (2.3)$$

и рассеянной волн

$$\Psi_{it}^{\text{рас}} = A_{it}^{\text{рас}} Q_{it}(\rho) U_{it}(\theta, \varphi). \quad (2.4)$$

Здесь Q_{it} — функция Ламе второго рода. Равенство тангенциальных составляющих поля на эллипсоиде в силу ортогональности U_{it} приводит к уравнению

$$A_{it}^{\text{вн}} = A_{it}^{\text{рас}} + A_{it}^{\text{пад}}, \quad (2.5)$$

где использована нормировка

$$R_{it}(\rho'_0) = R_{it}(\rho_0) = Q_{it}(\rho_0) = 1. \quad (2.6)$$

Нормальная составляющая магнитной индукции B_n в координатах ρ', θ', φ' имеет вид

$$B_n^{\text{вн}} = \frac{\gamma_0}{C} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho'} - \frac{i\nu_0}{AB} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi'}.$$

Отсюда, положив $x_0 = y_0 = \Delta = 0$, находим нормальную составляющую внешнего магнитного поля

$$H_n = \frac{1}{C} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho}.$$

Поскольку производная $\frac{\partial}{\partial \varphi} U_{it}$ является линейной комбинацией функций U_{it} с тем же числом l , то условия сшивания представляются системой уравнений, состоящей из независимых групп, каждая из которых характеризуется своим l . Следовательно, при сшивании решений на поверхности эллипсоида функции с разными l между собой не перемешиваются. Это и означает, что анизотропия ($\Delta \neq 0$) и несферичность ($A \neq B \neq C$) не ведут к связи между типами lm с разными числами l .

Индексы магнитоэластических колебаний lm при $A = B \neq C$, $\Delta = 0$ совпадают с уокеровскими [1], а при $A = B = C$, $\Delta = 0$ — с флетчеровскими [8]. При $\Delta \neq 0$ магнитоэластические типы, естественно, будут характеризоваться теми же числами l и m , но резонансные частоты их будут отличны от резонансных частот соответствующих изотропных образцов.

Итак, равенство нормальных составляющих дает уравнения

$$\begin{aligned} \sum_m A_{lm}^{\text{вн}} \left\{ \gamma_0 \frac{\partial}{\partial \rho'} - i \frac{C}{AB} \nu_0 \frac{\partial}{\partial \varphi'} \right\} R_{lm}(\rho') U_{lm}(\theta', \varphi') \Big|_{\rho'=\rho'_0} = \\ = \sum_m \left\{ A_{lm}^{\text{рас}} \frac{\partial}{\partial \rho} Q_{lm}(\rho) + A_{lm}^{\text{пад}} \frac{\partial}{\partial \rho} R_{lm}(\rho) \right\} U_{lm}(\theta, \varphi) \Big|_{\rho=\rho_0}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из системы уравнений (2.5) и (2.7) определяются амплитуды и резонансные частоты полей.

3. СЛУЧАЙ $l = 1$

При $l = 1$ имеются три функции, которые в переменных ρ , θ , φ для падающего поля имеют вид

$$\begin{aligned}\Psi_{1z} &= \frac{\rho}{\rho_0} Y_{1,0}, \\ \Psi_{1x} &= \sqrt{\frac{\rho^2 - a^2}{\rho_0^2 - a^2}} U_{1x}, \quad U_{1x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{1,1} - Y_{1,-1}), \\ \Psi_{1y} &= \sqrt{\frac{\rho^2 - b^2}{\rho_0^2 - b^2}} U_{1y}, \quad U_{1y} = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{1,1} + Y_{1,-1}),\end{aligned}\quad (3.1)$$

где Y_{lm} — сферические функции, функции Q_{it} выражаются через эллиптические интегралы. Мы не приводим здесь соответствующих формул.

Условия сшивания не перемешивают Ψ_{1z} с остальными двумя функциями. Поэтому тип колебаний $(1z) \equiv (10)$ можно рассматривать отдельно. Нетрудно показать, что определитель системы двух уравнений (2.5) и (2.7) не обращается в нуль, т. е. резонанса не будет.

Как видно из (3.1),

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} U_{1x} = iU_{1y}, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} U_{1y} = iU_{1x},$$

поэтому граничные условия (2.7) перемешивают функции U_{1x} и U_{1y} , и их следует рассматривать вместе. С точки зрения классификации решений [8] $(1, 1)$ не существует отдельно от $(1, -1)$. Другими словами, если падающее поле на поверхности эллипсоида содержит лишь составляющую $(1, 1)$, для чего необходимо $A_{1x}^{\text{пад}} = A_{1y}^{\text{пад}}$, то в эллипсоиде будут возбуждаться оба типа прецессии $(1, 1)$ и $(1, -1)$.

Резонансные частоты определяются корнями уравнений

$$\left(\beta^2 \frac{C}{A^2} - \frac{Q'_{1x}}{Q_{1x}} \right) \left(\alpha^2 \frac{C}{B^2} - \frac{Q'_{1y}}{Q_{1y}} \right) = \frac{C^2}{A^2 B^2} \nu_0^2. \quad (3.2)$$

В случае анизотропного шарика ($A = B = C$) уравнение (3.2) переходит в формулу (3.3) работы [9]. Если отклонение эллипсоида от сферы мало, т. е. $(C-A)/C \ll 1$, $(B-A)/C \ll 1$, то из (3.2) находим

$$\left[\beta^2 + \frac{A^2}{5C^4} (17C^2 - 4A^2 - 3B^2) \right] \left[\alpha^2 + \frac{B^2}{5C^4} (17C^2 - 4B^2 - 3A^2) \right] = \nu_0^2. \quad (3.3)$$

При малых полях анизотропии ($2K_1/M_0 \ll H_0$) можно принять, что H_0 совпадает с M_0 , и тогда в случае шарика ($A = B = C$) формула (3.3) совпадает, естественно, с приведенными в [3, 10].

В качестве примера рассмотрим резонансные частоты малого юфеоида ($A = B \neq C$). Для этого введем малый параметр

$$\varepsilon_0 = \frac{A^2 - C^2}{C^2} \ll 1.$$

В этом случае равенство (3.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{\gamma} &= \left\{ \left[H_0 + \frac{K_1}{M_0} (2 - \sin^2 \alpha - 3 \sin^2 2\alpha) \right] \left[H_0 + \frac{K_1}{M_0} (2 - 4 \sin^2 \alpha - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha) \right] + 4\pi M_0 \frac{2\varepsilon_0}{15} \left[H_0 + \frac{K_1}{2M_0} (4 - 20 \sin^2 \alpha + 15 \sin^4 \alpha) \right] \right\}^{1/2}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Формула (3.4) справедлива для всех α при $2|K_1|/M_0 \ll H_0$. Для любых H_0 формула справедлива при $\alpha = 0$ и при $\alpha = 55^\circ 44'$ соответственно для $K_1 > 0$ и $K_1 < 0$. Этим направлениям соответствуют оси легкого намагничивания. При H_0 порядка $2|K_1|/M_0$ выражение справедливо для $\alpha = 0$, $\alpha = 54^\circ 44'$ и $\alpha = 90^\circ$.

Из (3.4) видно, что при $2|K_1|/M_0 \ll H_0$ отклонение формы образца от сферической приводит к увеличению или уменьшению резонансной частоты в зависимости от знака ε_0 . При этом зависимость ω от α не изменяется и совпадает с приведенной в [10]. Сдвиг частоты за счет несферичности в этом случае будет

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\varepsilon_0}{15} \frac{4\pi M_0}{H_0}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Walker, Phys. Rev., **105**, 390 (1957).
2. Сб. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах (под ред. А. Г. Гуревича), ИЛ, М., 1961.
3. I. Solt, P. Fletcher, J. Appl. Phys., **31**, 100 (1960).
4. Сб. Нелинейные свойства ферритов в полях СВЧ (под ред. А. Л. Микаэляна), ИЛ, М., 1963.
5. В. Д. Кривченко, А. И. Пильшиков, ЖЭТФ, **43**, 573 (1962).
6. Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.
7. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1960.
8. P. Fletcher, R. Bell, J. Appl. Phys., **30**, № 5, 687 (1959).
9. В. Л. Лаунец, М. М. Новицкас, В. К. Шугуров, Литовский физический сборник, **8**, 3 (1970).
10. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, М., 1960.

Вильнюсский научно-исследовательский институт
радиоизмерительных приборов

Поступила в редакцию
23 апреля 1970 г.

MAGNETOSTATIC FERRITE ELLIPSOID OSCILLATIONS WITH ACCOUNT OF CRYSTALLOGRAPHIC ANISOTROPY

V. L. Launets, M. M. Novitskas, V. K. Shugurov

A system of equations permitting to determine the frequency and amplitude of magnetostatic potentials inside and outside the ellipsoid for any type of the magnetization precession is given for a small anisotropic ellipsoid magnetized up to saturation. In a particular case of a homogeneous ferromagnetic resonances the expression is given to determine the resonance frequencies.

УДК 538 56

О ВЛИЯНИИ КРАЯ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНО ЭТОМУ КРАЮ

К. А. Барсуков, С. Х. Бекова

Исследовано влияние края замедляющей полуплоскости на излучение поверхностных волн заряженной частицей, движущейся параллельно этому краю. Рассмотрение проводится на базе теоремы взаимности.

В теории взаимодействия движущихся источников с замедляющими поверхностями простейшей является задача о взаимодействии точечного источника с бесконечной плоской поверхностью (см., например, [1, 2]). Вместе с тем в любом реальном эксперименте замедляющая плоскость всегда ограничена, и края плоскости существенным образом скажутся на излучении.

Ниже этот эффект исследуется на примере полубесконечной плоскости с односторонней проводимостью, когда источник поля, заряд, движется параллельно ее краю. Эта простейшая модель позволяет также провести качественное исследование вопроса и в случае замедляющей плоскости конечных размеров.

Пусть мимо края анизотропно проводящей полуплоскости $z = 0$, $x \geq 0$ по траектории $x = x_0$, $y = vt$, $z = z_0$ движется точечный заряд величины q . Фурье-составляющая тока, возбуждаемого зарядом, определяется выражением

$$j_{\omega} = \frac{q}{2\pi} \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \exp\left(-i \frac{\omega}{v} y\right). \quad (1)$$

Очевидно, что зависимость всех величин поля излучения частицы от координаты y будет, как и у источника (1), задаваться множителем $\exp\left(-i \frac{\omega}{v} y\right)$. Это обстоятельство означает отсутствие пространственного поля в излучении частицы. В самом деле, волновой вектор такого излучения определяется соотношением $k^2 = \omega^2/c^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Но в силу сказанного $k_y = \frac{\omega}{v} > \frac{\omega}{c}$, так как $v > c$, и, следовательно, предыдущее равенство является невозможным. Таким образом, движущаяся частица может возбудить лишь поверхностную волну вдоль замедляющей плоскости, у которой $k_z^2 < 0$.

Ясно, что полное поле движущегося источника может быть найдено с помощью метода парных интегральных уравнений (см., например, [3]). Однако прямое применение этого метода приводит к сложным результатам, мало пригодным для физического анализа. Поэтому ниже мы проведем соответствующее рассмотрение на базе теоремы взаимности [4], в которой существенным образом будет использована работа [5]. В этой работе методом Винера—Хопфа получено решение задачи

о дифракции поверхностной волны, набегающей на край полубесконечной замедляющей плоскости:

Теорему взаимности здесь наиболее удобно применить в форме леммы Лоренца, как это делается при расчете возбуждения волноводов [4]. Лемму Лоренца в нашем случае запишем в виде [6]

$$\oint_S \{ [E_1^* H_2] + [E_2 H_1^*] \} n ds = - \frac{4\pi}{c} \int_V (j_2 E_1^* + j_1^* E_2) dv, \quad (2)$$

где S — поверхность, ограничивающая некоторый объем V , n — ее внешняя нормаль, а индексы «1» и «2» относятся соответственно к полям, возбуждаемым токами j_1 , j_2 , и звездочка, например, у H_1^* , означает величину, комплексно-сопряженную с H_1 .

В качестве объема V мысленно выберем прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям (см. рис. 1) с ли-

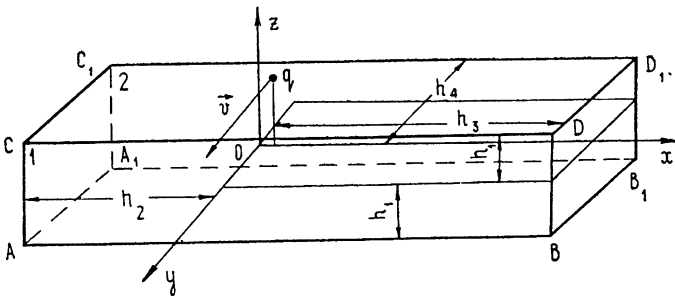


Рис. 1.

нейными размерами, указанными на этом рисунке. Выбор величины этих размеров будет указан ниже. Во всяком случае $h_1 > z_0$, так что часть траектории движущегося заряда попадает внутрь указанного объема. В качестве поля 2 в (2) возьмем интересное нас поле движущегося заряда, а в качестве поля 1 — дифракционное поле набегающей из бесконечности на край замедляющей плоскости поверхностной волны, волновой вектор которой образует угол φ с осью Ox , равный

$$\varphi = - \operatorname{arctg} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \beta}, \quad (3)$$

где α — угол наклона направления проводимости замедляющей плоскости к оси Ox , $\beta = v/c$. Зададим эти поля с помощью векторного потенциала $A(A_{1,2}, 0, 0)$, имеющего единственную отличную от нуля составляющую в направлении проводимости полуплоскости, причем векторы поля определяются формулами

$$E = \frac{c}{i\omega} \operatorname{rot} \operatorname{rot} A, \quad H = \operatorname{rot} A. \quad (4)$$

Выражение для фурье-составляющей поля 1 заимствуем из работы [5]:

$$A_1 = \frac{\omega [(\omega/v)(\operatorname{tg} \alpha + \beta \sec \alpha + i \sqrt{1 - \beta^2})^{1/2}]}{c \pi \cos \alpha} \int_{\xi} \left\{ \exp \left(-i\omega x - \right. \right. \\ \left. \left. - x|z| - i \frac{\omega}{v} y \right) d\omega \right\} \left\{ \left(\omega - i \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right)^{1/2} \left[\left(\omega + \frac{\omega}{v} \operatorname{tg} \alpha \right)^2 - k^2 \sec^2 \alpha \right]^{-1} \right\}, \quad (5)$$

где C — контур интегрирования, проходящий по действительной оси с обходом полюсов

$$\omega = -\frac{\omega}{v} \operatorname{tg} \alpha \pm k \sec \alpha \quad (6)$$

снизу, и $x = \left[\omega^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2) \right]^{1/2}$.

Перейдем теперь к вычислению поверхностного интеграла в выражении (2) и одновременно укажем, каким образом мы производим выбор величин $h_1 - h_4$.

Как уже говорилось выше, поля в рассматриваемой нами области затухают при удалении от замедляющей полуплоскости. Поэтому, выбирая размеры h_1 и h_2 на рис. 1 достаточно большими, значение интегралов по граням AA_1CC_1 , AA_1BB_1 и CC_1DD_1 можно сделать исчезающе малыми (в принципе h_1 и h_2 можно устремить к бесконечности). Кроме того, поскольку подынтегральная функция в (2) не зависит от координаты y , то интегралы по граням $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ взаимно сокращаются.

Величину же h_3 на рис. 1 возьмем настолько большой, что на грани BB_1DD_1 поля 1 и 2 представляются в виде бегущих поверхностных волн. В этом случае поле 1 определяется вычетами в интеграле (5) в полюсах (6):

$$A_1 = \exp \left[i \frac{\omega (\sin \alpha + \beta)}{v \cos \alpha} x - i \frac{\omega}{v} y - \frac{\omega (1 + \beta \sin \alpha)}{v \cos \alpha} |z| \right] + R \exp \left[i \frac{\omega (\sin \alpha - \beta)}{v \cos \alpha} x - i \frac{\omega}{v} y - \frac{\omega (1 - \beta \sin \alpha)}{v \cos \alpha} |z| \right], \quad (7)$$

где

$$R = \frac{\beta + \sin \alpha + i \cos \alpha \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \sin \alpha} \exp \left(i \frac{\pi}{2} \right), \quad (8)$$

и волновой вектор отраженной волны образует угол $\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - \beta}$ с осью Ox , а поле 2 задается соотношением

$$A_2 = A_0 \exp \left[i \frac{\omega (\sin \alpha - \beta)}{v \cos \alpha} x - i \frac{\omega}{v} y - \frac{\omega (1 - \beta \sin \alpha)}{v \cos \alpha} |z| \right], \quad (9)$$

где A_0 — искомая амплитуда поля 2.

Заметим, что здесь коэффициент отражения R не имеет простого энергетического смысла и $|R|^2$ нельзя представить как отношение потока энергии отраженного и падающего поля. Дело заключается в том, что волновые числа падающей и отраженной волны, вообще говоря, не равны друг другу, и угол падения поверхностной волны не равен углу отражения (подробнее см. [5]).

Если теперь найти необходимые компоненты полей из (5), (7) и (9), подставить их в (2), где $J_1 = 0$, а единственная составляющая тока J_2 определяется соотношением (1), то неизвестная амплитуда A_0 выразится соотношением

$$A_0 = -\frac{q \left[(\omega/v) (\beta \sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha + i \sqrt{1 - \beta^2}) \right]^{1/2}}{2 \pi c (1 - \beta \sin \alpha)} \int_C \left\{ \left[\omega \cos \alpha + \right. \right.$$

$$+ \frac{\omega}{v} (1 - \beta^2) \operatorname{tg} \alpha \left] \exp(i\omega x_0 - x |z_0|) d\omega \right\} \left\{ \left(\omega + i \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \beta^2} \right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\omega + \frac{\omega}{v} \operatorname{tg} \alpha \right)^2 - k^2 \sec^2 \alpha \right]^{-1} \right\}. \quad (10)$$

Энергия излучения, подсчитанная на единицу длины траектории заряда по вектору Пойнтинга с помощью формул (4) и (9), может быть записана в виде

$$\frac{dW_\omega}{dy} = \frac{2\omega(1 - \beta \sin \alpha)}{\beta} |A_0|^2. \quad (11)$$

Формула (10), в частности, показывает, что величина амплитуды A_0 экспоненциально убывает с ростом z_0 , и ее максимальное значение приходится на $z_0 = 0$. Следовательно, наибольший практический интерес представляют малые по сравнению с длиной волны излучения значения z_0 , и в дальнейшем мы ограничимся исследованием случая $z_0 = 0$.

При $x_0 > 0$, $z_0 = 0$ интеграл в (10) вычисляется в конечном виде. Действительно, при $x_0 > 0$, $z_0 = 0$, как нетрудно видеть, подынтегральная функция не имеет других особенностей, кроме простых полюсов (6) в верхней полуплоскости переменной ω , вычеты в которых дают возможность получить для A_0 следующее выражение:

$$A_0 = \frac{iq}{2c} \left[1 + \frac{i\beta \cos \alpha - \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \sin \alpha} \exp\left(-2i \frac{\omega}{c} \sec \alpha\right) \right] \exp\left(i \frac{\omega}{v} x_0 \times \right. \\ \left. \times (\beta \sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \right). \quad (12)$$

Подстановка (12) в (11) позволяет представить выражение для энергии излучения в виде

$$\frac{dW_\omega}{dy} = W_\omega^{(0)} \left[1 - \sqrt{1 - \beta^2} \sin^2 \alpha \cos\left(\delta + 2 \frac{\omega}{c} x_0 \sec \alpha\right) \right], \quad (13)$$

где $\delta = \operatorname{arctg} \frac{\beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ и $W_\omega^{(0)} = \frac{q^2 \omega}{vc}$ — энергия излучения, приходящаяся

на единицу длины траектории заряда при движении заряда вдоль бесконечно протяженной замедляющей плоскости. Второй член в квадратных скобках в (13) описывает взаимодействие движущегося заряда с отраженной от края поверхностной волной. Этот эффект будет особенно заметен при движении заряда перпендикулярно направлению проводимости полуплоскости, когда $\alpha = 0$. Так, например, если

$$\frac{\omega}{c} x_0 = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (14)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, то величина энергии излучения удвоится, а при

$$\frac{\omega}{c} x_0 = \pi n - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (15)$$

поверхностная волна вообще отсутствует. Естественно, что эти оба эффекта будут искажаться наличием конечной проводимости у решетки и в полной мере проявятся лишь при движении заряда вблизи края полуплоскости.

При $x_0 < 0$ вычисление интеграла в (10) преобразует формулу (10) к виду

$$A_0 = \frac{q}{2ic} \left[\frac{i\beta \cos \alpha - \sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \sin \alpha} \Phi \left\{ \left(\frac{\omega}{v} |x_0| (\operatorname{tg} \alpha + \beta \sec \alpha - i\sqrt{1-\beta^2}) \right)^{1/2} \right\} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(-2i \frac{\omega}{c} x_0 \sec \alpha \right) + \Phi \left\{ \left(\frac{\omega}{v} |x_0| (\operatorname{tg} \alpha - \beta \sec \alpha - i\sqrt{1-\beta^2}) \right)^{1/2} \right\} \right] \times \\ \times \exp \left(i \frac{\omega}{v} x_0 (\beta \sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \right), \quad (16)$$

где $\Phi(\mu) = \frac{2e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-i^2 t) dt$. Эта функция просто выражается через интегралы Френеля, для которых имеются достаточно подробные таблицы.

Энергия излучения движущегося заряда может быть найдена опять по формуле (11), в которой выражение для A_0 берется из (16). При достаточно больших значениях $|\mu|$ можно использовать для функции $\Phi(\mu)$ известное асимптотическое представление [7], которое приводит к следующей формуле для энергии излучения:

$$\frac{dW_\omega}{dy} = \frac{2q^2(1-\beta^2)\cos\alpha}{\pi c(1-\beta^2\sin^2\alpha)|x_0|} \exp\left(-2\frac{\omega}{v}|x_0|\sqrt{1-\beta^2}\right), \quad (17)$$

причем условие применимости этой формулы имеет вид

$$\frac{\omega}{v}|x_0| \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right| \gg 1. \quad (18)$$

В рассматриваемом случае энергия излучения сильно падает при удалении траектории заряда от края замедляющей полуплоскости. Особенно сильно это убывание происходит при $\alpha = 0$ и несколько уменьшается при увеличении угла α .

Заметим в заключение, что предлагаемый метод расчета может быть применен при исследовании возбуждения любой замедляющей импедансной полуплоскости, если только известно решение соответствующей дифракционной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. N. Karp, F. C. Karal, IEEE Trans., AP-12, 470 (1964).
2. К. А. Барсуков, Л. Г. Нарышкина, ЖТФ, 36, 225 (1966).
3. В. Нобл, Метод Винера—Хопфа, ИЛ, М., 1962.
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
5. К. А. Барсуков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 82 (1967).
6. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 56, № 5, 481 (1947).
7. Таблицы интегралов Френеля, изд. АН СССР, М., 1953.

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию
25 мая 1970 г.

ON THE INFLUENCE OF SLOWING-DOWN PLANE EDGE ON RADIATION FROM
A CHARGED PARTICLE MOVING PARALLEL TO THE EDGE

K. A. Barsukov, S. Kh. Bekova

The influence of the slowing-down half-plane edge on the surface wave radiation from a charged particle moving parallel to this edge is investigated. Consideration is made on the basis of the reciprocity theorem.

УДК 538.56

ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ И ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

А. Г. Кулькин, Ю. Г. Павленко

Показано, что при параметрическом воздействии переменного магнитного поля на систему нерелятивистских частиц, движущихся в скрещенных полях, в определенных условиях возможно экспоненциальное нарастание мощности индуцированного излучения.

В работах [1, 2] было показано, что в системе электронов, движущихся в скрещенных статическом электрическом и магнитном полях, индуцированное излучение может преобладать над индуцированным поглощением на одной из собственных частот. Электроны отдают энергию электромагнитному полю излучения, причем средняя интенсивность индуцированного излучения оказывается постоянной величиной. Однако можно значительно повысить излучаемую мощность, осуществляя параметрическое воздействие переменного магнитного поля на систему заряженных частиц. При параметрическом резонансе амплитуда колебаний частиц экспоненциально возрастает. Это приводит к усилению сигнала за счет мощности переменного магнитного поля. Таким образом, переменное магнитное поле играет роль генератора накачки.

В настоящей заметке мы обсудим указанный механизм параметрического усиления индуцированного излучения. Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном переменном магнитном поле, направленном вдоль оси z ,

$$\mathbf{H} = (0, 0, Hf), \quad f = 1 + h \cos \omega_1 t, \quad (1)$$

и электростатическом с потенциалом

$$\Phi = -\frac{k}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2). \quad (2)$$

Потенциал (2) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$ и может быть реализован соответствующей конфигурацией металлических поверхностей. H — ведущее поле, h — коэффициент модуляции ($h \ll 1$). Изменение во времени магнитного поля приводит к возникновению вихревого электрического

$$\mathbf{E}_\sim = \frac{Hf}{2c}(y, -x, 0). \quad (3)$$

Рассматривая среднюю мощность, передаваемую частице вихревым полем, можно заключить, что если частота ω_1 близка к частоте

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_2^2} \quad (\omega_0 = eH/mc, \quad \omega_2^2 = 2ke/m), \quad (4)$$

то переменная составляющая магнитного поля оказывает наиболее интенсивное воздействие на движение частицы. Далее рассматривается только случай $\omega_1 \approx \Omega$.

В присутствии электромагнитной волны уравнения движения имеют вид

$$\ddot{u} + i\omega_0 f \dot{u} + \left(\frac{i\omega_0 \dot{f}}{2} - \frac{\omega_z^2}{2} \right) u = \frac{e}{m} E_+; \quad (5)$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0. \quad (6)$$

Здесь $u = x + iy$, $E_+ = E_x + iE_y$, где напряженность электрического поля волны в дипольном приближении

$$E = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \sum_{k, \lambda} \frac{i\omega}{c} (c_{k, \lambda} e^{-i\omega t} - c_{k, \lambda}^* e^{i\omega t}) e_\lambda. \quad (7)$$

Коэффициенты c связаны со спектральной плотностью падающей электромагнитной волны соотношением

$$I(\omega) = \frac{2\omega^4 c}{(2\pi c)^3} \sum_{\lambda} |c_\lambda|^2. \quad (8)$$

Начальные энергии частиц будем считать одинаковыми, а начальные фазы полностью некоррелированными. Тогда мгновенная мощность индуцированного излучения, усредненная по начальным фазам, определяется выражением [3]

$$P = -en \langle v, E \rangle = -en \operatorname{Re} \langle \dot{u}_1 E_- \rangle, \quad (9)$$

где v_1 — возмущение скорости частицы, обусловленное воздействием электромагнитной волны (7), n — плотность частиц. Переходя к новой переменной w ,

$$u = w \exp \left[- \int \frac{i\omega_0}{2} f dt \right], \quad (10)$$

из (5) получим уравнение

$$\ddot{w} + \frac{1}{4} (\omega_0^2 f^2 - 2\omega_z^2) w = \frac{e}{m} E_+ \exp \left[\int \frac{i\omega_0}{2} f dt \right]. \quad (11)$$

Найдем решение уравнения (11). В случае $\Omega^2 \gg \omega_0^2 h$ и не слишком большой амплитуды поля E энергия частицы мало изменяется за период собственных колебаний. В силу этого для нахождения первого приближения удобно воспользоваться методом усреднения [4].

Перепишем предварительно (11) в эквивалентной форме:

$$\ddot{w} + \left(\frac{\omega_1}{2} \right)^2 w = F, \quad (12)$$

$$F = \frac{1}{4} [(\omega_1^2 - \Omega^2) - 2h\omega_0^2 \cos \omega_1 t - h^2 \cos^2 \omega_1 t] w + \frac{eE_+}{m} \times \exp \left[\int \frac{i\omega_0}{2} f dt \right].$$

Согласно [4] переходим к новым переменным a_1 и a_2 :

$$w = a_1 \exp \left(\frac{i\omega_1 t}{2} \right) + a_2 \exp \left(- \frac{i\omega_1 t}{2} \right); \quad (13)$$

$$\dot{w} = \frac{i\omega_1}{2} a_1 \exp \left(\frac{i\omega_1 t}{2} \right) - \frac{i\omega_1}{2} a_2 \exp \left(- \frac{i\omega_1 t}{2} \right). \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует условие

$$\dot{a}_1 \exp\left(\frac{i\omega_1 t}{2}\right) + \dot{a}_2 \exp\left(-\frac{i\omega_1 t}{2}\right) = 0. \quad (15)$$

Подставляя (13) и (14) в (12) и учитывая (15), найдем уравнения для амплитуд a_1 и a_2 :

$$\dot{a}_1 = -\frac{i}{\omega_1} F(\omega) \exp\left(-\frac{i\omega_1 t}{2}\right), \quad \dot{a}_2 = \frac{i}{\omega_1} F(\omega) \exp\left(\frac{i\omega_1 t}{2}\right). \quad (16)$$

После усреднения получим уравнения, учитывающие только систематические изменения a_1 и a_2 :

$$\dot{a}_1 = -i(\Delta\lambda a_1 - \lambda_0 a_2) + \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \frac{\omega e_0}{m \omega_1} \left[c_+ \exp\left[-i\left(\omega - \frac{\omega_0 - \omega_1}{2}\right)t\right] - c_+^* \exp\left[i\left(\omega - \frac{\omega_1 - \omega_0}{2}\right)t\right] \right], \quad (17)$$

$$\dot{a}_2 = i(\Delta\lambda a_2 - \lambda_0 a_1) - \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \frac{e_0 \omega}{m \omega_1} c_+ \exp\left[-i\left(\omega - \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}\right)t\right];$$

$$\lambda_0 = \frac{\omega_0^2 h}{2\omega_1}, \quad \Delta\lambda = \frac{1}{4\omega_1} \left[(\omega_1^2 - \Omega^2) - \frac{\omega_0^2 h^2}{2} \right]. \quad (18)$$

Интегрирование уравнений (17) в отсутствие электромагнитной волны позволяет заключить, что если частота ω_1 лежит в интервале

$$\sqrt{\Omega^2 - \omega_0^2 h + \omega_0^2 h^2/2} \leq \omega_1 \leq \sqrt{\Omega^2 + \omega_0^2 h + \omega_0^2 h^2/2}, \quad (19)$$

то частица движется по спиралеобразной кривой. Радиус кривизны спирали и расстояние от оси z до центра кривизны экспоненциально нарастают со временем. Центр спирали вращается с угловой скоростью $|(\omega_0 - \omega_1)/2|$, а вокруг этого центра обращается частица с угловой скоростью $(\omega_0 + \omega_1)/2$ таким образом, что периодически (с периодом $2\pi/\omega_1$) проходит вблизи оси z . Для того, чтобы эти частоты были разнесены достаточно далеко, выберем значения h , ω_0 и Ω так, что $\omega_0^2 h \ll 2\omega_0^2 \ll \omega_0^2$. При этом Ω , а вместе с ней и ω_1 по порядку величин совпадают с циклотронной частотой

$$\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} \sim \frac{\omega_0^2}{2\omega_0} = \Omega_1, \quad \frac{\omega_0 + \omega_1}{2} \sim \omega_0.$$

Мы рассмотрим взаимодействие частицы с электромагнитной волной, частота которой $\omega \sim \Omega_1$. В этом случае интересующее нас решение системы (17) имеет вид

$$a_1 = ae^{\lambda t} + be^{-\lambda t}, \quad a_2 = ae^{\lambda t - i\gamma} + be^{-\lambda t + i\gamma}; \quad (20)$$

$$a = \frac{1}{2i \sin \gamma} \frac{e \omega}{m \omega_1} \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \int_0^t \exp\left[-\lambda t' + i\gamma - i\left(\omega - \frac{\omega_0 - \omega_1}{2}\right)t'\right] dt' c_+; \quad (21)$$

$$b = -\frac{1}{2i \sin \gamma} \frac{e \omega}{m \omega_1} \sqrt{\frac{4\pi}{V}} \int_0^t \exp\left[\lambda t' - i\gamma - i\left(\omega - \frac{\omega_0 - \omega_1}{2}\right)t'\right] dt' c_+;$$

$$\lambda = \sqrt{\lambda_0^2 - (\Delta\lambda)^2}, \quad \cos \gamma = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \quad \sin \gamma = \frac{\lambda}{\lambda_0}. \quad (22)$$

Из (22) и (18) следует, что амплитуды a_1 и a_2 , определенные соотношениями (20), экспоненциально нарастают в области неустойчивости (19). Заметим, что при точном резонансе $\omega_1 = \Omega \approx \omega_0$

$$\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} = \Omega_1, \quad \sin \gamma = \sqrt{1 - \frac{\hbar^2}{4}}, \quad \cos \gamma = -\frac{\hbar}{2}.$$

Из (10) и (14), учитывая (20), найдем возмущение скорости u_1 . Подставляя u_1 в (9), опуская нерезонансные члены и суммируя по значениям k и λ , соответствующим электромагнитной волне (7), получим выражение для мгновенной мощности излучения

$$dP = P(t) d\omega d\Omega,$$

$$P(t) = \frac{e^2 n \Omega_1 I}{mc \omega_1 \sin \gamma} \frac{(\omega_0 - \omega_1)}{\lambda^2 + (\Delta\omega)^2} \left\{ \Delta\omega [\operatorname{ch} \lambda t \sin \Delta\omega t \sin \gamma - \operatorname{sh} \lambda t \cos \Delta\omega t \cos \gamma] + \lambda [\operatorname{sh} \lambda t \cos \Delta\omega t \sin \gamma + \operatorname{ch} \lambda t \sin \Delta\omega t \cos \gamma] \right\}. \quad (23)$$

Здесь $\Delta\omega = \omega - (\omega_0 - \omega_1)/2$. Мы будем рассматривать подробно случай точного резонанса, когда $\sin \gamma \approx 1$, $\cos \gamma \approx 0$.

В нашей постановке задачи релаксационные процессы должны быть учтены дополнительно. Взаимодействие между частицами существенно влияет на движение частиц; если $\lambda < 1/\tau$ (τ — среднее время жизни частицы).

В этом случае через интервал времени $t \gg \tau$ устанавливается стационарный режим взаимодействия излучения с системой частиц. Средняя мощность излучения может быть определена соотношением [5]

$$P_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} P(t) \frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau) dt. \quad (24)$$

Подставляя (23) в (24), находим ($\Delta\omega = \omega - \Omega_1$)

$$P_{\text{ср}} = \frac{\pi e^2 \Omega_1}{mc \Omega} \frac{I(\omega)}{[(\Delta\omega)^2 + \lambda^2]^2} \left\{ \frac{(\Delta\omega)^2 - (\lambda - 1/\tau)\lambda}{(\Delta\omega)^2 + (\lambda - 1/\tau)^2} + \frac{(\Delta\omega)^2 - (\lambda + 1/\tau)\lambda}{(\Delta\omega)^2 + (\lambda + 1/\tau)^2} \right\}. \quad (25)$$

При $\lambda \ll 1/\tau$ влияние параметрического возбуждения подавлено релаксационными процессами. В этом случае (25) совпадает с формулой (13) работы [1].

Рассмотрим теперь другой крайний случай $\lambda \gg 1/\tau$. Тогда релаксационные процессы не оказывают заметного влияния на движение частиц, которое теперь определяется только их взаимодействием с внешними полями. Пусть на систему падает электромагнитная волна со спектральной плотностью

$$I(\omega) = \frac{u_0}{(\omega - \omega_p)^2 + \nu^2}.$$

Средняя мощность, излучаемая за время $T > 1/\lambda$ в элемент телесного угла $d\Omega$, определяется теперь соотношением

$$P(T) = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^{\infty} P_{\omega}(t) d\omega. \quad (26)$$

Результат интегрирования по ω существенным образом зависит от соотношения между шириной спектрального распределения ν и величиной λ . Рассмотрим два предельных случая возбуждения системы излучением с узким и широким спектрами. В первом случае $\nu \ll \lambda$, т. е. спектр возбуждения расположен в узкой по сравнению с λ областью вблизи частоты ω_p . Тогда

$$P(T) = \frac{2\pi^2 e^2 n}{mc T \nu} \frac{u_0 \Omega_1}{[(\Delta\omega_p)^2 + \lambda^2] \Omega} \{ [\lambda^2 - (\Delta\omega_p)^2] \times \\ \times (\operatorname{ch} \lambda t \cos \Delta\omega_p T e^{-T\nu} - 1) + 2\lambda \Delta\omega_p \operatorname{sh} \lambda T \sin \Delta\omega_p T e^{-T\nu} \}, \quad (27)$$

Из (27) следует, что при резонансном возбуждении $\Delta\omega_p = \Omega - \omega_p = 0$ наблюдается индуцированное излучение, мощность которого растет $\sim (1/T) \exp [(\lambda - \nu) T]$. При нерезонансном воздействии ($\Delta\omega_p \neq 0$) индуцированное излучение периодически (с периодом $2\pi/\Delta\omega_p$) сменяется индуцированным поглощением.

В случае возбуждения широким спектром $\nu \gg \lambda$ величину $I(\omega)$ можно считать постоянной в области частот вблизи Ω_1 . Поэтому из (26) находим

$$P(T) = \frac{2\pi^2 e^2 n I(\Omega_1) \Omega_1}{mc \Omega \lambda} e^{-T\lambda} (\operatorname{ch} \lambda T + \operatorname{sh} \lambda T). \quad (28)$$

Мощность излучения при $\lambda T \gg 1$ здесь не зависит от времени:

$$P = \frac{2\pi^2 e^2 n \Omega_1}{mc \Omega \lambda} I(\Omega_1). \quad (29)$$

Рассмотрим теперь механизм излучения в том случае, когда частота ω_1 лежит вне области неустойчивости (19). При этом $\lambda = i\delta$ ($\delta^2 = (\Delta\lambda)^2 - \lambda_0^2 > 0$), и частица движется в финитной области. По-прежнему будем считать, что $\omega_0^2 h \ll 2\omega_2^2 \ll \omega_0^2$, а частота $\omega_1 < \omega_0$. Тогда средняя мощность индуцированного излучения определяется выражением ($\Delta\omega = \omega - \frac{\omega_0 - \omega_1}{2}$)

$$P_\omega = \frac{\pi e^2 (\omega_0 - \omega_1) n}{2mc \omega_1 \delta \tau} I(\omega) \left\{ \frac{\Delta\lambda + \delta}{(\Delta\omega - \delta)^2 + 1/\tau^2} - \frac{\Delta\lambda - \delta}{(\Delta\omega + \delta)^2 + 1/\tau^2} \right\}.$$

Поскольку $|\Delta\lambda| > \delta$, то при условии, что спектр внешнего излучения отличен от нуля на частоте $(\omega_0 - \omega_1)/2 + \delta$, ($\omega_0 - 2\Omega_1 < \omega_1 < \omega_0$, $\delta > 1/\tau$), становится возможным излучение вблизи значения частоты

$$\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} + \sqrt{(\Delta\lambda)^2 - \lambda_0^2}.$$

При этом на частоте $(\omega_0 - \omega_1)/2 - \delta$ имеет место поглощение.

Обсудим, для каких частиц может быть реализован рассмотренный механизм излучения на СВЧ частотах. Радиотехнические методы позволяют получить переменное магнитное поле частотой $\omega_0 \sim 10^6 \div 10^7$ гц. Для ионов с зарядом Z циклотронная частота $\omega_0 = m_0 Z / m 10^4$ Нэрт (m_0 — масса протона). Отсюда находим возможные значения ведущего поля $H = \frac{m}{m_0 Z} (10^2 \div 10^3)_{\text{эрт}}$. Считая, что в реальных условиях мож-

но использовать магниты с $H \leq 10^4$ эрст, найдем, что $m/m_0 Z \leq 10 \div 10^2$. Заметим, что частота Ω_1 , вблизи которой возникает индуцированное излучение, не зависит от массы и заряда иона $\Omega_1 = kc/H$ ($2\omega_z^2 \ll \omega_0^2$).

В заключение авторы выражают благодарность А. А. Соколову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Павленко, Д. В. Гальцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 6, 1232 (1966).
2. А. А. Соколов, Ю. Г. Павленко, Оптика и спектроскопия, 12, вып. 1, 4 (1967).
3. И. И. Собельман, И. В. Тютин, УФН, 79, 595 (1963).
4. П. Л. Капица, УФН, 78, 181 (1962).
5. М. Борн, Оптика, Государственное научно-техническое издательство Украины, 1937, стр. 582.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
24 августа 1970 г.

INDUCED RADIATION IN CROSSED ELECTROSTATIC AND VARIABLE MAGNETIC FIELDS

A. G. Kul'kin, Yu. G. Pavlenko

It is shown that in the definite conditions the power of induced radiation may exponentially increase under the parametric action of the variable magnetic field on the system of nonrelativistic particles moving in crossed fields.

УДК 538 56

ИНДУЦИРОВАННЫЙ ТОРМОЗНОЙ ЭФФЕКТ В НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Ф. В. Бункин, Р. В. Карапетян

Рассматривается индуцированный тормозной эффект в немонохроматическом поле излучения в первом борновском приближении по потенциалу рассеяния (кулоновскому). Для величины χ , характеризующей среднее изменение энергии электрона при одном акте рассеяния, установлено асимптотическое поведение в слабом и сильном полях. Условие применимости теории возмущения по полю излучения представлено в виде, не конкретизирующем форму спектра.

1. Индуцированный тормозной эффект на нерелятивистских электронах в слабом монохроматическом поле излучения был изучен в работах [1]; распространение на случай сильного монохроматического поля было дано в работах [2, 3]. Индуцированный тормозной эффект на релятивистских электронах в монохроматическом поле рассматривался в [4].

В настоящей статье излагаются результаты исследования индуцированного тормозного эффекта при рассеянии нерелятивистских электронов на кулоновском центре в немонохроматическом поле излучения. Форма спектра, а также его интегральная интенсивность при этом остаются в большей степени произвольными. Полученные результаты могут найти применение, в частности, при теоретическом анализе лавинного пробоя газов под действием мощных немонохроматических источников излучения (например, разрядных ламп).

2. Рассмотрим рассеяние электрона на потенциале $V(\mathbf{r})$ в присутствии однородного электрического поля $E(t)$, являющегося реализацией стационарного гауссова случайного процесса со спектральной интенсивностью $S_E(\omega)$.

Волновая функция электрона в переменном не зависящем от пространственных координат поле, как известно, имеет вид

$$\Psi_p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} p\mathbf{r} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau [p - (e/c) \mathbf{A}(\tau)]^2 / 2m\right\}, \quad (1)$$

где $\mathbf{A}(t)$ — векторный потенциал поля. В дальнейшем $\mathbf{A}(t)$ будет считаться также стационарным случайным процессом со спектральной интенсивностью $S_A(\omega) = (c^2/\omega^2) S_E(\omega)$ (c — скорость света). Заметим, что необходимым условием стационарности процесса $\mathbf{A}(t)$ является условие $S_E(0) = 0$ (см., например, [5]).

Рассматривая потенциал рассеяния $V(\mathbf{r})$ как возмущение системы «свободный электрон + поле», находим в первом порядке теории возмущений дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma_{p_0 p} = \frac{m}{p_0} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} |c_{p_0 p}(t)|^2, \quad (2)$$

где

$$c_{p_0 p}(t) = \frac{V(p_0 - p)}{i\hbar} \int_0^t d\tau \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{p_0^2 - p^2}{2m} \tau - \frac{i}{\hbar} \frac{e}{mc} (p - p_0) \int_0^\tau A(\Theta) d\Theta \right]$$

и

$$V(p) = \int d^3r V(r) \exp \left(\frac{i}{\hbar} p r \right).$$

Здесь p_0, p — импульсы поступательного движения электрона до и после рассеяния соответственно.

Полученное выражение (2) представляет собой сечение для одной реализации случайного процесса $E(t)$. Нас будет интересовать усредненное по случайному полю дифференциальное сечение. На основании гауссовых свойств $E(t)$ (а следовательно, и $A(t)$) получаем

$$\begin{aligned} \langle d\sigma_{p_0 p} \rangle &= \frac{m}{p_0} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} |V(p_0 - p)|^2 \frac{2}{\hbar^2} \int_0^\infty dt \cos \left(\frac{p_0^2 - p^2}{2m\hbar} t \right) \times \\ &\times \exp_2 \left\{ - \frac{2e^2 [(p_0 - p) n]^2}{m^2 \hbar^2 c^2} \int_0^\infty d\omega S_A(\omega) \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь n — единичный вектор поляризации поля.

В приложениях основной интерес представляет среднее изменение энергии электрона при одном акте рассеяния. Такое изменение удобно характеризовать величиной

$$\kappa = \int \frac{p^2 - p_0^2}{2m} \langle d\sigma_{p_0 p} \rangle. \quad (4)$$

Если $\kappa > 0$, то в результате рассеяния электрон ускоряется, если же $\kappa < 0$, — тормозится.

Подставив (3) в (4), проинтегрировав по частям в интеграле по времени и сделав замену $p - p_0 = q$, получаем

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{2m}{\hbar p_0} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3q (q n)^2 |V(q)|^2 \times \\ &\times \int_0^\infty dt f'(t) \exp [-(qn)^2 f(t)] \sin \left(\frac{q^2 + 2p_0 q}{2m\hbar} t \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$f(t) = \frac{2e^2}{\hbar^2 m^2} \int_0^\infty d\omega \frac{S_E(\omega)}{\omega^2} \frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2}. \quad (6)$$

Дальнейшие результаты относятся к конкретному потенциалу рассеяния, а именно, к кулоновскому: $V(r) = ze^2/r$. В этом случае в (5) удастся проинтегрировать по q , и в результате получаем

$$\kappa = \frac{2z^2 e^6}{\sqrt{\pi} m p_0 \hbar^2} \int_0^\infty d\omega \frac{S_E(\omega)}{\omega^3} F(\omega), \quad (7)$$

где

$$F(\omega) = \sqrt{2m\hbar} \operatorname{Im} \int d\Omega \cos^2 \psi_1 \times \quad (8)$$

$$\times \int_0^\infty dt \frac{\sin \omega t}{\sqrt{t}} \frac{\exp \{-\cos^2 \psi_2 (p_0^2 t / 2m\hbar) / [2m\hbar f(t)/t] \cos^2 \psi_1 - i\}}{\sqrt{[2m\hbar f(t)/t] \cos^2 \psi_1 - i}}.$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 — углы между вектором q и векторами n и p_0 соответственно, а $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Для оценок интеграла (8) важным оказывается тот факт, что функция $2m\hbar f(t)/t$ при изменении t от 0 до ∞ является ограниченной сверху.

а) Рассмотрим случай, когда

$$\max [2m\hbar f(t)/t] \ll 1. \quad (9)$$

Это условие соответствует слабым напряженностям поля $\langle E^2 \rangle$.

Следует отметить, что для монохроматического поля, когда $S_E(\omega) = \frac{1}{2} E_0^2 \delta(\omega - \omega_0)$ (E_0 , ω_0 — амплитуда и частота поля), величина $\max [2m\hbar f(t)/t]$ приближенно равна $e^2 E_0^2 / m\hbar \omega_0^3$, т. е. параметру разложения теории возмущений (см. [2, 3]). Таким образом, можно считать, что условие (9) является обобщением условия применимости теории возмущений для анализа индуцированного тормозного эффекта на случай немонохроматического поля излучения.

В рассматриваемом случае под интегралом (9) член $2m\hbar f(t)/t$ можно положить равным нулю и получить

$$F(\omega) = 2\pi \sqrt{\pi} \frac{m\hbar}{p_0} \left[F_1(\omega) \Theta \left(1 - \frac{2m\hbar\omega}{p_0^2} \right) + F_2(\omega) \Theta \left(\frac{2m\hbar\omega}{p_0^2} - 1 \right) \right], \quad (10)$$

где

$$F_1(\omega) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \Theta_0 - 1) \left[\sqrt{1+\xi} - \sqrt{1-\xi} - \xi \ln \frac{(1+\sqrt{1+\xi})(1+\sqrt{1-\xi})}{\xi} \right] + \quad (10a)$$

$$+ \sin^2 \Theta_0 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \xi}}{1 + \sqrt{1 - \xi}};$$

$$F_2(\omega) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \Theta_0 - 1) \left[\sqrt{1+\xi} - \xi \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \xi}}{\sqrt{\xi}} \right] + \quad (10б)$$

$$+ \sin^2 \Theta_0 \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \xi}}{\sqrt{\xi}}.$$

Здесь $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, Θ_0 — угол между векторами n и p_0 , $\xi = 2m\hbar\omega/p_0^2$.

Наличие ступенчатых функций в (10) является следствием закона сохранения энергии — электрон при торможении не может терять энергии большей, чем $p_0^2/2m$. Это приводит к тому, что всегда $F_2(\omega) > 0$.

Если спектр излучения $S_E(\omega)$ быстро спадает на высоких частотах, и при этом оказывается, что $\xi_{\max} = (2m\hbar/p_0^2) \omega_{\max} \ll 1$ (быстрый электрон и низкочастотный спектр), то формулы (7) — (10 б) приводят к следующему результату, естественным образом обобщающему соответствующий результат для монохроматического поля (см. [1]):

$$\kappa = -\frac{4\pi z^2 e^6 m}{p_0^4} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega \frac{S_E(\omega)}{\omega^2} \left[(3\cos^2\theta_0 - 1) \ln \frac{2p_0^2}{m\hbar\omega} - 2\cos^2\theta_0 \right]. \quad (11)$$

Из (11) видно, что некогерентность поля слабо сказывается на характерной величине угла между векторами \mathbf{n} и \mathbf{p}_0 , при прохождении через который знак κ меняется на противоположный.

Если же в спектре излучения $S_E(\omega)$ присутствует минимальная частота и при этом оказывается, что $\xi_{\min} = \frac{2m\hbar}{p_0^2} \omega_{\min} \gg 1$ (медленный электрон и высокочастотный спектр), то получаем

$$\kappa = \frac{2^{5/2} \pi z^2 e^6}{3m^{1/2} \hbar^{3/2} p_0} \int_{\omega_{\min}}^{\infty} d\omega S_E(\omega) / \omega^{7/2}. \quad (12)$$

б) В случае сильного поля, когда выполняется условие, обратное (9), т. е. $\max [2m\hbar f(t)/t] \gg 1$, определенного результата можно достичь, если монотонный характер поведения функции $2m\hbar f(t)/t$ от t преобладает над ее осциллирующим характером. Это может иметь место, если спектр излучения $S_E(\omega)$ не имеет ярко выраженного максимума, т. е. ширина спектра имеет тот же порядок величины, что и частота, при которой спектральная интенсивность $S_E(\omega)$ принимает максимальное значение (видеоспектр).

Допуская это свойство спектра $S_E(\omega)$ выполненным, потребуем, кроме того, выполнения следующих условий:

$$\Omega_0 \equiv \frac{2e^2}{m\hbar} \int_0^{\infty} d\omega S_E(\omega) / \omega^2 \gg (1/\tau) \quad (13)$$

и

$$\hbar\Omega_0 \gg p_0^2/m. \quad (14)$$

Здесь τ — время корреляции случайного процесса $E(t)$.

Условие (13) предполагает большие напряженности поля и относительно большие времена корреляции. Неравенство (14) означает, что колебательная (средняя) энергия электрона намного превышает энергию его поступательного движения.

При этих предположениях основной вклад в интеграл по времени в формуле (8) вносят значения $t \ll \tau$. В этой области значений t функция $2m\hbar f(t)/t \approx \Omega_0 t$, и показатель экспоненты в (8) мал. Поэтому получаем

$$F(\omega) = \frac{\sqrt{2}\pi m^{1/2} \hbar^{1/2}}{\Omega_0^{1/2}} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin[(\omega/\Omega_0)x]}{x^2} \int_{\sqrt{1+x^2-x}}^1 dy \sqrt{1-y^2}/y. \quad (15)$$

Если спектр излучения $S_E(\omega)$ имеет максимальную частоту, и при этом $(\omega_{\max}/\Omega_0) \ll 1$ (условие, выполнимое в большом диапазоне частот, так как частота Ω_0 достаточно высока), то для главного члена асимптотического разложения находим

$$F(\omega) = \frac{\pi m^{1/2} \hbar^{1/2}}{2^{1/2} \Omega_0^{3/2}} \omega \left(\ln \frac{\omega}{4\Omega_0} \right)^2, \quad (16)$$

$$x = \frac{2^{1/2} \pi^{1/2} z^2 e^6}{m^{1/2} \hbar^{3/2} p_0 \Omega_0^{3/2}} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega \left(\ln \frac{\omega}{4\Omega_0} \right)^2 S_E(\omega)/\omega^2.$$

Рассмотрим, наконец, отдельно случай высокочастотного спектра, когда $\xi_{\min} = (2m\hbar/p_0^2) \omega_{\min} \gg 1$. Результат теории возмущений, относящийся к этому случаю, приведен в пункте а). При $\xi_{\min} \gg 1$ в формуле (8) экспонента является медленно меняющейся функцией от времени по сравнению с $\sin \omega t$, и в нулевом приближении по $(1/\xi_{\min})$ можно написать

$$F(\omega) = \pi \sqrt{2m\hbar} \int_0^{\infty} dt \frac{\sin \omega t}{\sqrt{t}} \frac{1}{[2m\hbar f(t)/t]^{3/2}} \int_0^1 dy \sqrt{1-y^2}/y. \quad (17)$$

$$\sqrt{1 + [2m\hbar f(t)/t]^2 - 2m\hbar f(t)/t}$$

В случае поля слабой интенсивности, когда выполняется условие (9), нулевой член в разложении правой части (17) по степеням $2m\hbar f(t)/t$ равен $(2\pi\sqrt{2\pi/3})(\sqrt{m\hbar}/\omega)$, и после подстановки последнего в (7) получаем результат, совпадающий, как и следовало ожидать, с (12).

Для сильного поля, когда $\max [2m\hbar f(t)/t] \gg 1$, зависимость $F(\omega)$ от поля в основном определяется множителем $[2m\hbar f(t)/t]^{-3/2}$, так как во внутреннем интеграле в (17) преобладает логарифмическая зависимость от поля. В случае монохроматического поля частоты ω_0 и амплитуды E_0 получаем

$$F(\omega) = \pi \sqrt{\frac{2m\hbar}{\omega_0}} \int_0^{\infty} dz \frac{\sin z}{\sqrt{z}} \frac{1}{[\rho(1 - \cos z)/z]^{3/2}} \times$$

$$\times \int_0^1 dy \sqrt{1-y^2}/y,$$

$$\sqrt{1 + [\rho(1 - \cos z)/z]^2 - [\rho(1 - \cos z)/z]}$$

$$x = \frac{z^2 e^6}{\sqrt{\pi} m p_0 \hbar^2} \frac{E_0^2}{\omega_0^3} F(\omega_0) > 0,$$

где

$$\rho = \frac{2e^2 E_0^2}{m\hbar \omega_0^3} \gg 1.$$

Из (18) видно, что $x \sim E_0^{-1}$ с точностью до множителя, логарифмически зависящего от E_0 . Подобная асимптотическая зависимость от напряженности E_0 сильного поля была получена в работе [6] для величины, совпадающей по смыслу с x .

Остановимся на пределах применимости вышеприведенного рассмотрения.

Во-первых, мы ограничились дипольным приближением по отношению к полю излучения. Оно справедливо, если как поступательная, так и колебательная (средняя) скорости электрона малы по сравнению со скоростью света, т. е.

$$c \gg \frac{1}{m} \sqrt{p_0^2 + 2m\hbar\Omega_0}. \quad (19)$$

Во-вторых, мы воспользовались борновским приближением по отношению к потенциалу рассеяния. В случае кулоновского потенциала $V(r) = ze^2/r$ оно приводит к известному ограничению — «начальная» скорость электрона должна быть достаточно большой. В нашей задаче под этой скоростью следует подразумевать величину $(1/m)\sqrt{p_0^2 + 2m\hbar\Omega_0}$. Тогда должно выполняться условие

$$\frac{ze^2}{\hbar} \ll \frac{1}{m} \sqrt{p_0^2 + 2m\hbar\Omega_0}. \quad (20)$$

В заключение авторы выражают благодарность М. В. Федорову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Marcuse, Bell Syst. Techn. J., **41**, 1557 (1962); **42**, 415 (1963).
2. S. Rand, Phys. Rev., **136**, B231 (1964).
3. Ф. В. Бункин, М. В. Федоров, ЖЭТФ, **49**, 1215 (1965).
4. М. М. Денисов, М. В. Федоров, ЖЭТФ, **53**, 1340 (1967)
5. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд Наука, М., 1966.
6. В. П. Силин, ЖЭТФ, **47**, 2254 (1964).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
26 июня 1970 г.

INDUCED BREMSSTRAHLUNG EFFECT IN NONMONOCHROMATIC RADIATION FIELD

F. V. Bunkin, R. V. Karapetyan

The induced bremsstrahlung effect in the nonmonochromatic radiation field is considered in the first Born approximation over the scattering (Coulomb) potential. The asymptotic behaviour in weak and strong fields is established for the value α characterizing the mean change of the electron energy at one event of scattering. The applicability condition of the perturbation theory over the radiation field is represented in the form which does not concretize the form of the spectrum.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 533.95

**НАБЛЮДЕНИЕ МАГНИТНОГО МОМЕНТА ПЛАЗМЫ, НАВЕДЕННОГО
СВЧ ПОЛЕМ**

Г. Д. Лобов, В. В. Штыков

Ранее сообщалось [1, 2] о наблюдении наведенного СВЧ полем магнитного момента в плазме, помещенной в постоянное магнитное поле H_z . Как отмечалось в [2], при воздействии на плазму двух гармонических электрических полей с частотами ω_1 и ω_2 ($E \perp H_z$) в плазме возникает магнитный момент, изменяющийся во времени с разностной частотой $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$, которому при $\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$ соответствует следующая величина комплексной амплитуды намагниченности:

$$\dot{M}_z(\omega_3) = \frac{\epsilon_0 e \omega_0^2}{4m\omega} \left[\frac{\dot{E}_+(\omega_1) \dot{E}_+(\omega_2)}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu^2} - \frac{\dot{E}_-(\omega_1) \dot{E}_-(\omega_2)}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu^2} \right], \quad (1)$$

где ω_0 и ω_H — плазменная и циклотронная частоты, ν — частота соударений электрона с частицами газа,

$$\dot{E}_\pm(\omega_i) = \dot{E}_x(\omega_i) \pm j\dot{E}_y(\omega_i).$$

Если внешнее магнитное поле равно нулю, то (1) принимает вид

$$\dot{M}_z(\omega_3) = \frac{\epsilon_0 e \omega_0^2}{4m(\omega^2 + \nu^2)} [\dot{E}_+(\omega_1) \dot{E}_+(\omega_2) - \dot{E}_-(\omega_1) \dot{E}_-(\omega_2)]. \quad (2)$$

Из (2) следует, что при определенных условиях в плазме возникает намагниченность и в отсутствие магнитного поля. Это обстоятельство есть проявление особенностей движения свободных электронов плазмы под действием электрического поля, которое (движение) наиболее просто обнаружить, если в плазме действует гармоническое поле с круговой поляризацией. При этом намагниченность плазмы равна

$$M_z(0) = \pm \frac{\epsilon_0 e \omega_0^2}{4m\omega(\omega^2 + \nu^2)} |\dot{E}_\pm|^2.$$

Возникновение намагниченности плазмы под действием СВЧ колебания с круговой поляризацией экспериментально наблюдалось в диапазоне волн вблизи 3 см.

В эксперименте использовалась плазма газового разряда (см. рис. 1), возбуждаемого в трубке (2) с кольцевыми электродами (5). Трубка наполнялась неонем при давлении 4,5 мм рт. ст. Длина трубки составляла 70 мм, диаметр — 30 мм. Так как расстояние между электродами было около 18 мм, то в основном мы имели дело с катодными частями анодального тлеющего разряда. При изменении разрядного тока от 3 до 20 ма падение напряжения на трубке возрастало от 200 до 360 в. Газоразрядная трубка помещалась в круглый металлический волновод (1). Для упрощения регистрации намагниченности СВЧ поле модулировалось с частотой 100 кГц. В этих условиях изменение намагниченности приводит к появлению ЭДС в катушке индуктивности (3), окружающей трубку

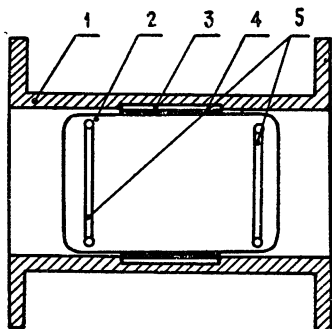


Рис. 1. Экспериментальный макет.

$$|U_{\text{ВЫХ}}| = \mu_0 N S \Omega M_z.$$

Здесь Ω — частота модуляции, S — площадь катушки, N — число витков катушки.

В экспериментах использовалась катушка с $N \approx 100$ витков, которая была намотана поверх электростатического экрана (4). Последний служил для устранения нежелательных наводок электрического характера.

Для преобразования линейной поляризации в круговую использовалась поворотная диэлектрическая пластина длиной $\lambda/4$, установленная в отрезке круглого волновода. Поляризатор был установлен перед газоразрядной трубкой так, что, вращая пластину, можно было воздействовать на плазму газового разряда колебаниями с любым типом поляризации. На рис. 2 представлена зависимость напряжения, снимаемого с катушки, от угла поворота пластины поляризатора. Качественное совпадение экспериментальной (1) и теоретической (2) зависимостей может служить подтверждением того, что наблюдаемый эффект обязан возникновению магнитного момента свободных электронов плазмы под действием СВЧ излучения.

Поскольку с ростом разрядного тока концентрация электронов увеличивается, то при увеличении разрядного тока следует, согласно (2), ожидать пропорционального увеличения напряжения на катушке. Это действительно подтверждается экспериментально (см. рис. 3). Однако в формулах (1) и (2) под E подразумевается поле, дейст-

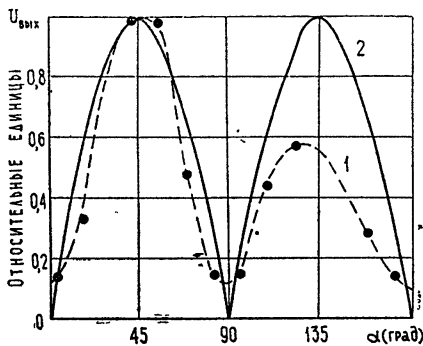


Рис. 2. Экспериментальная (1) и теоретическая (2) зависимости напряжения на катушке от угла поворота пластины поляризатора.

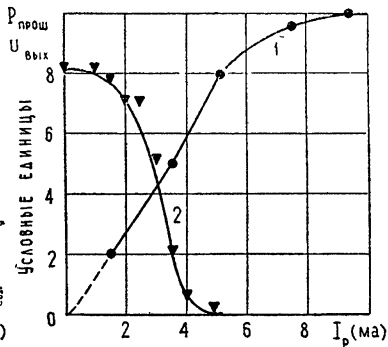


Рис. 3. Зависимость напряжения на катушке (1) и величины прошедшей мощности СВЧ колебаний через плазму (2) от величины разрядного тока в трубке.

вующее в плазме. При малых концентрациях плазмы это поле мало отличается от поля падающей волны. При увеличении концентрации электронов необходимо учесть это отличие, вводя, например, коэффициенты отражения и прохождения. Учитывая, что в нашем случае по самым грубым оценкам число столкновений электронов с молекулами газа $\nu < 6 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$, а частота сигнала $\omega \approx 6 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$, легко пояснить не только замедление роста напряжения при увеличении разрядного тока (см. рис. 3), но и экспериментально наблюдаемое уменьшение выходного эффекта при таких токах, когда $\omega \approx \omega_0$. На правочерность такого предположения указывает также факт увеличения отраженной мощности и уменьшения прошедшей через разрядный промежуток мощности СВЧ колебаний при увеличении тока разряда (см. рис. 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Д. Лобов, В. В. Штыков, Радиотехника и электроника, 13, № 12, 2251 (1968).
2. В. В. Штыков, Доклады НТК по итогам НИР за 1968—1969 гг., секция радиотехническая, подсекция «Линии передачи и волноводные устройства», МЭИ, М., 1969.

ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОСЛАБЛЕНИЯ РАДИОВОЛН 1,3 и 0,86 мм В ДОЖДЯХ*

Ю. И. Малышенко, И. Х. Ваксер

Известно, что радиоволны миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов при своем распространении в земной атмосфере испытывают ослабление как молекулами некоторых газов, так и различными гидрометеообразованиями. Ранее в ИРЭ АН УССР были проведены теоретические и экспериментальные исследования влияния различных гидрометеообразований на распространение миллиметровых радиоволн (частично эти результаты описаны в [1]); впоследствии расчеты ослабления γ и обратного рассеяния η в дождях были продолжены в субмиллиметровом диапазоне [2] с использованием значений диэлектрической проницаемости воды из [3]. В работе [2] показано, что на распространение радиоволн коротковолновой части миллиметрового диапазона и субмиллиметрового диапазона значительное влияние оказывают реально существующие дождевые капли с диаметрами $D < 0,5$ мм. В то же время сведений о распределении этих капель по размерам, необходимых при расчетах γ и η , в литературе недостаточно. Имеется всего одна работа [4], в которой приведены единичные распределения для нескольких десятков дождей. В связи с этим обстоятельством, а также ввиду того, что при выполнении расчетов γ и η делаются некоторые допущения, которые в реальных метеообразованиях не всегда имеют место, возникает необходимость в экспериментальном определении этих величин.

В данной работе приводятся результаты измерения коэффициента ослабления в дождях вертикально поляризованных радиоволн в коротковолновой части миллиметрового и в длинноволновой части субмиллиметрового диапазонов на приземной трассе небольшой протяженности — 120 м (вследствие значительной неоднородности на длинных трассах [5, 6]) при двукратном ее прохождении.

Для измерения γ в слабых дождях на такой трассе потребовались специальные меры для повышения чувствительности установки, что было достигнуто применением в измерительной аппаратуре схемы компенсации. Амплитудно-модулированное излучение от генератора по квазиоптическому тракту подводилось к антенне (система Кассегрейна, диаметр основного зеркала 300 мм, облучатель — лучевод). Сигналы, поступающие с приемной антенны (диаметр основного зеркала 620 мм) и с делителя луча, встречного в передающий тракт, детектировались и после узкополосных усилителей в обоих каналах поступали на вход схемы компенсации. Сигнал разбаланса, возникающий при появлении дождя на трассе, усиливался узкополосным усилителем и через катодный повторитель подавался на самописец. Калибровка ослабления производилась периодически прецизионным квазиоптическим аттенуатором в приемном тракте. Применение схемы компенсации позволило заметно снизить амплитудные нестабильности генератора излучения вследствие того, что они воздействовали в равной мере на оба плеча схемы и компенсировались. По такому принципу работали две установки на длинах волн 1,3 и 0,86 мм.

Параллельно с радиоизмерениями производилась запись интенсивности дождя в 2-х точках трассы с помощью пювниографов, а также периодически брались пробы дождевых капель для получения распределения по размерам. Так как интенсивность дождя может значительно изменяться за время, меньшее одной минуты [5, 6], были приняты специальные меры для уменьшения постоянной времени пювниографов.

Известно [7, 8], что в оптическом диапазоне измеренный коэффициент ослабления может заметно отличаться от теоретического в результате попадания излучения, рассеянного каплями дождя, в приемную антенну с конечным углом зрения. Соответствующими вычислениями показано, что в нашем случае этим эффектом можно пренебречь.

Погрешность в измерении зависимости $\gamma(I)$ складывается из погрешностей измерений уровня сигнала и интенсивности осадков. В результате использования схемы компенсации первую погрешность удалось заметно снизить — в основном она определялась уходом нуля схемы в продолжительных дождях и, как правило, не превышала 10%. Погрешность измерения умеренных и сильных дождей соответствовала инструментальной для пювниографа (5—7%), а при измерении слабых дождей могла достигать 15%.

Сопоставление записей радиосигнала и интенсивности дождя (см. рис. 1) позволяет получить несколько точек для зависимости $\gamma(I)$. Сводка значений $\gamma(I)$, полученных в 1967—69 гг. на волнах 1,3 и 0,86 мм, приведена на рис. 2. Отсутствие однозначной зависимости между коэффициентом ослабления и интенсивностью дождя наблюдалось и в других диапазонах [1, 8, 9]. Частично это вызвано погрешностями измерений, но главным образом связано с тем обстоятельством, что дожди с одинаковой интен-

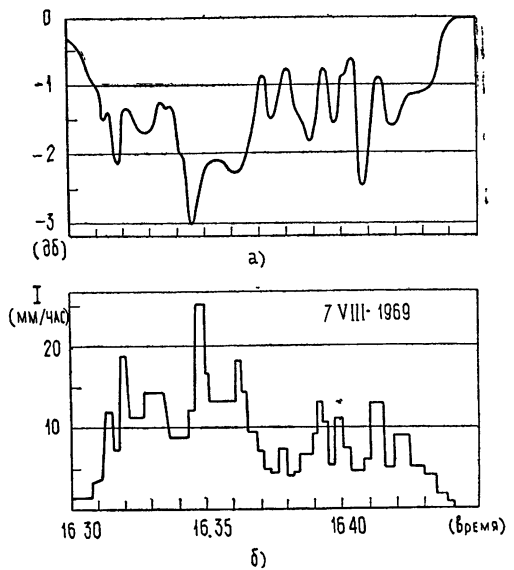
* Предварительные результаты работы доложены на IX Всесоюзной конференции по распространению радиоволн, г. Харьков, июнь 1969 г.

сивностью могут иметь различающиеся распределения $N(D)$ и, следовательно, вызывать различное ослабление радиоволн. Статистическая обработка измеренных коэффициентов ослабления показала, что усредненные по методу наименьших квадратов зависимости $\bar{\gamma}_{изм}(I)$ на волнах 1,3 и 0,86 мм близки друг к другу, поэтому приведем $\bar{\gamma}_{изм}(I)$ для одной из волн $\lambda = 1,3$ мм:

$$\bar{\gamma}(\text{дб} \cdot \text{км}^{-1}) = 0,76I (1 < I(\text{мм} \cdot \text{час}^{-1}) \leq 10) \leq 10, \quad (1)$$

$$\bar{\gamma} = 3,2 + 0,33I (10 < I \leq 50).$$

Рис. 1. Запись во времени измеренных потерь передачи радиосигнала с длиной волны 1,3 мм в дожде (а) и интенсивности дождя (б).



Сплошной линией на рис. 2 нанесена расчетная зависимость $\gamma_{расч}(I)$ для $\lambda = 1,3$ мм, полученная в [2] для функции распределения по размерам, составленной из двух частей: в области диаметров капель $D \geq 0,5$ мм бралась функция распределения $N(D)$ Беста [10], а в области $D < 0,5$ мм — экспериментальные данные для $N(D)$ Поляковой [4] (как показали расчеты, значения γ , η не зависят от выбора границы «сшивания» указанных $N(D)$ в пределах диаметров капель $0,4 \div 1,1$ мм). Легко видеть, что между усредненными экспериментальными (1) и расчетными зависимостями $\gamma_{расч}(I)$ наблюдается удовлетворительное соответствие.

Кроме сравнения усредненных зависимостей можно сопоставить результаты единичных измерений коэффициентов ослабления $\gamma_{изм}$ с расчетными $\gamma_{расч}$ (если значения последних вычислены по данным непосредственного замера $N(D)$ на трассе в тот же момент времени [1]). Соответствующие примеры $\gamma_{изм}$ и $\gamma_{расч}$ нанесены на рис. 2 знач-

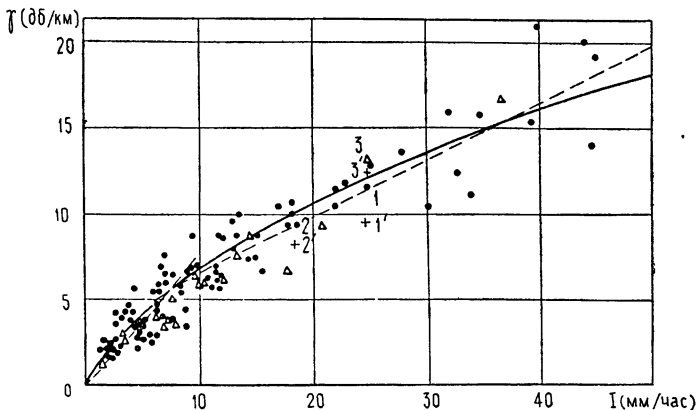


Рис. 2. Экспериментальные и расчетные зависимости коэффициента ослабления от интенсивности дождя. Обозначения: сплошная линия — расчетная зависимость [2]; ●, Δ — измеренные значения ослабления на волнах 1,3 и 0,86 мм соответственно.

ками 1—1', 2—2', 3—3'. При сравнении этих величин следует учесть, что рассчитанные по таким $N(D)$ коэффициенты должны быть несколько меньше измеренных, так как метод фильтровальной бумаги практически не дает информации о каплях с диаметром $D < 0,4 \div 0,5$ мм, оказывающих влияние на ослабление радиоволн $1,3 \div 0,8$ мм. С учетом этого обстоятельства можно считать, что и в этом случае $\gamma_{изм}$ и $\gamma_{расч}$ удовлетворительно согласуются.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Усик'ов, В. Л. Герман, И. Х. Ваксер, Укр. физ. ж., **6**, № 5, 618 (1961).
2. И. Х. Ваксер, Ю. И. Малышенко, Л. Е. Копилович, Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана, **6**, № 9, 956 (1970).
3. Ю. И. Малышенко, И. Х. Ваксер, Укр. физ. ж., **15**, № 9, 1496 (1970).
4. О. Д. Бартенева, Е. Н. Довгялло, Е. А. Полякова, Тр. Главной геофизической обсерватории, вып. 220, 85 (1967).
5. D. C. Hogg, Science, **159**, № 3810, 39 (1968).
6. R. A. Semplak, H. E. Keller, Bell. Syst. Techn. J., **48**, № 6, 1745 (1969).
7. К. С. Шифрин, Рассеяние света в мутной среде, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
8. T. S. Chu, D. C. Hogg, Bell. Syst. Techn. J., **47**, № 5, 723 (1968).
9. R. G. Mudhurst, IEEE Tr. on Antennas and Prop., AP-13, № 4, 550 (1965).
10. A. C. Best, Quart. J. Roy. Met. Soc., **76**, № 327, 16 (1950).

Институт радиопизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
1 июня 1970 г.

УДК 538.56 : 519.25

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ЛУЧЕЙ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. И. Татарский

В целом ряде работ распределение вероятностей для лучей в среде со случайными неоднородностями исследуется при помощи уравнения Эйнштейна — Фоккера (см., например, [1—5]). В работе [6] было отмечено, что это уравнение может быть обосновано лишь в приближении малых углов отклонения лучей от первоначального направления распространения. Из физических соображений ясно, что при дальнейшем распространении луча в неоднородной среде будут происходить дальнейшие флуктуации направления распространения, и закон распределения вероятностей должен стремиться к изотропному. Однако эту дальнейшую эволюцию закона распределения уже нельзя описывать при помощи уравнения Эйнштейна — Фоккера.

Тем не менее оказывается возможным получить точное решение этой задачи для предельного распределения вероятностей без обращения к уравнению Эйнштейна — Фоккера.

Если $n(r)$ — показатель преломления, $\mu \equiv \ln n$, l — длина, отсчитываемая вдоль луча, то уравнения последнего имеют вид

$$\frac{dr(l)}{dl} = \tau(l), \quad \frac{d\tau(l)}{dl} = \nabla^2 \mu - \tau(\nabla^2 \mu). \quad (1)$$

Мы используем для τ сферическую систему координат

$$\tau = \{ \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta \},$$

так что уравнения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dl} &= \cos \varphi \sin \theta, \quad \frac{dy}{dl} = \sin \varphi \sin \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \cos \theta, \\ \frac{d\theta}{dl} &= \cos \theta \left[\cos \varphi \frac{\partial \mu}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] - \sin \theta \frac{\partial \mu}{\partial z}, \\ \frac{d\varphi}{dl} &= - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \frac{\partial \mu}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Функцию распределения вероятностей

$$W(l, r_0, \theta_0, \varphi_0) \equiv \langle \delta_{\mathbf{r}}(r(l) - r_0) \delta(\theta(l) - \theta_0) \delta(\varphi(l) - \varphi_0) \rangle \quad (3)$$

будем находить в два этапа. На первом этапе зафиксируем одну из реализаций $\mu(r)$

и рассмотрим задачу с вероятностными начальными условиями. Если при $l = 0$ (и при фиксированной функции $\mu(\mathbf{r})$) задано начальное условие

$$W(0, r, \theta, \varphi) = W_0(r, \theta, \varphi), \quad (4)$$

то дальнейшая эволюция распределения W описывается уравнением Лиувилля, соответствующим динамической системе (2). Если система имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

то соответствующее ей уравнение Лиувилля записывается в форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(x_1, \dots, x_n, t) W(t, x_1, \dots, x_n)] = 0. \quad (6)$$

Так как уравнения (2) имеют вид (5), то при помощи формулы (6) легко выписать уравнение для функции W , относящееся к зафиксированной функции $\mu(\mathbf{r})$. Это уравнение можно преобразовать к следующему уравнению для функции $P(l, r, \theta, \varphi) \equiv$

$$\equiv W(l, r, \theta, \varphi) \sin \theta, \text{ нормированной условием } \int_0^\pi d^3 r \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\pi}^\pi d\varphi P(l, r, \theta, \varphi) = 1:$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P}{\partial l} + \frac{\partial P}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial z} \sin \theta - \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \mu}{\partial y} \sin \varphi \right] \cos \theta \right\} + \\ & + \frac{\partial P}{\partial \varphi} \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} \sin \varphi - \frac{\partial \mu}{\partial y} \cos \varphi \right] = \cos \varphi \sin \theta \left[\frac{\partial P}{\partial x} - 2P \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] + \\ & + \sin \varphi \sin \theta \left[\frac{\partial P}{\partial y} - 2P \frac{\partial \mu}{\partial y} \right] + \cos \theta \left[\frac{\partial P}{\partial z} - 2P \frac{\partial \mu}{\partial z} \right] = \tau (\nabla P - 2P \nabla \mu). \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы получить отсюда уравнение для W , соответствующее среде со случайными неоднородностями, уравнение (7) следует усреднить по μ . При усреднении членов вида μP можно использовать формулу Фуруцу — Новикова (см., например, [7-9]), после чего возникают новые неизвестные функции, и полная система уравнений для W оказывается бесконечной. Если в этой цепочке уравнений считать отличными от нуля лишь первые две неизвестные функции и соответственно этому сохранить лишь первые два уравнения, то придем к уравнению Эйнштейна — Фоккера в форме, приводящейся в [1]. Однако оказывается, что полученное таким образом уравнение справедливо лишь в области небольших l , где малы угловые отклонения луча, что находится в согласии с результатами работы [6].

Можно, однако, получить точное решение неусредненного уравнения (7), соответствующее установившемуся режиму. Это решение аналогично распределению Гиббса в статистической механике, которое является решением стационарного уравнения Лиувилля. Искомое решение не должно зависеть от l, θ, φ . Легко видеть, что таким решением уравнения (7) является функция, удовлетворяющая уравнению $\nabla P = 2P \nabla \mu$, т. е.

$$P(l, r, \theta, \varphi) = P_0 \exp [2\mu(\mathbf{r})]. \quad (8)$$

Последнее выражение является аналогом формулы Больцмана.

Учитывая, что $\mu = \ln n$, будем иметь

$$P(l, r, \theta, \varphi) = P_0 n^2(\mathbf{r}).$$

Константа P_0 может быть определена из условия нормировки (что имеет смысл лишь для конечного объема):

$$P(l, r, \theta, \varphi) = \frac{n^2(\mathbf{r})}{4\pi \int n^2(\mathbf{r}) d^3 r}. \quad (9)$$

Теперь не представляет труда выполнить усреднение по n , что приводит к формуле

$$\langle P(l, r, \theta, \varphi) \rangle = \left\langle \frac{n^2(\mathbf{r})}{4\pi \int n^2(\mathbf{r}) d^3 r} \right\rangle. \quad (10)$$

Если можно считать, что интеграл от n^2 не флуктуирует, то $\langle P \rangle \sim \langle n^2(\mathbf{r}) \rangle$. Этот результат имеет простой смысл: так как лучи изгибаются в сторону увеличения n , то плотность вероятностей больше в той области, где больше $\langle n^2 \rangle$.

Автор благодарит Н. Г. Денисова, обсуждение с которым затронутого вопроса явилось стимулом для написания данной заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
2. В. Я. Харанен, ДАН СССР, 88, № 2, 253 (1953).
3. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 34 (1958).
4. В. М. Комиссаров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 2, 292 (1966).
5. С. Н. Liu, К. С. Yeh, Alta Frequenza, 38, № Speciale, 137 (1969).
6. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 5, 706 (1971).
7. К. Furutsu, J. Res. NBS, 67-D, 303 (1963).
8. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, № 5, 1919 (1964).
9. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, № 6, 2106 (1969).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
4 января 1971 г.