

УДК 538.56

КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ

B. И. Токатлы, Б. Е. Кинбер

Методом эталонного уравнения получены асимптотические решения волнового уравнения для полей с азимутальной зависимостью вида $e^{im\varphi}$. В качестве эталонного уравнения использовалось уравнение Бесселя. Решение, содержащее функцию Бесселя и ее производную с амплитудами, зависящими от пространственных координат, внешне похоже на точное решение волнового уравнения в цилиндрических координатах r, z, φ , где вместо переменных r и z в нем фигурируют координатные функции ρ, ζ и обычным эйконалом и показано, что амплитудные функции в нулевом приближении могут быть выражены через геометрооптические амплитуды

В технике СВЧ широко используются узкие волновые пучки, обладающие осесимметричной структурой или, по крайней мере, осесимметричной структурой соответствующих им конгруэнций лучей (поле имеет азимутальную зависимость вида $e^{im\varphi}$). Такого рода пучки используются, например, в квазиоптических линиях передачи, в открытых резонаторах, соответствуют собственным волнам круглых волноводов как регулярных, так и нерегулярных.

Конгруэнции лучей, соответствующие рассматриваемым пучкам, имеют 2 каустические поверхности—внешнюю и внутреннюю. Для осесимметричных полей ($m = 0$) внутренняя каустика вырождается в прямую — фокальную линию; для полей со слабой азимутальной зависимостью ($m = 1, 2$) радиус внутренней каустики порядка длины волны. Поэтому для описания этих полей вблизи каустики нельзя использовать асимптотическое разложение [1], содержащее функцию Эйри и ее производную.

В настоящей работе получены асимптотические разложения, пригодные для полей с азимутальной зависимостью вида $e^{im\varphi}$ при любом радиусе внутренней каустики и содержащие вместо функций Эйри функции Бесселя. При больших радиусах они автоматически переходят в асимптотические разложения указанного ранее вида.

Как и в случае [1], показана связь геометрооптического решения и решения в предлагаемой форме. Иными словами, аргументы функции Бесселя и ее производной выражаются через эйконалы лучей, а медленно меняющиеся функции связаны с амплитудой геометрического поля и радиусами кривизны волны.

В качестве примера приложения общей теории рассмотрено поле осесимметричного нерегулярного волновода при $m = 0$, т. е. в отсутствие азимутальной зависимости.

1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДНЫХ И КООРДИНАТНЫХ ФУНКЦИЙ

Будем искать решение скалярного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 \epsilon(r, z) u = 0 \quad (1)$$

для среды с осесимметричным законом изменения диэлектрической проницаемости

$$\epsilon = \epsilon(r, z)$$

(r, z — цилиндрические координаты) в форме

$$u = \left[A(\zeta, \rho) J_m(k\rho) + \frac{B(\zeta, \rho)}{ik} \rho \frac{dJ_m}{d\rho} \right] \exp[i(k\zeta + m\varphi)]. \quad (2)$$

В формуле (2) $J_m(k\rho)$ — функция Бесселя, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d^2 J_m}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dJ_m}{d\rho} + k^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) J_m = 0. \quad (3)$$

Постоянная $\rho_0 = m/k$ будет рассматриваться нами как независимый параметр; m — целое число, определяющее заданную азимутальную зависимость: A, B — амплитудные медленно меняющиеся функции; ρ, ζ, φ — координатные функции.

Координатные функции ρ, ζ и медленно меняющиеся функции A, B подлежат определению. Ниже мы запишем уравнения для этих величин. Координата φ имеет обычный смысл. Осесимметрия пучка при решении используется в том, что коэффициенты Ляме, координатные функции ρ, ζ и медленно меняющиеся функции A и B считаются не зависимыми от φ .

Будем считать, что координаты ρ, ζ, φ ортогональны, т. е.

$$\nabla \rho \nabla \varphi = \nabla \rho \nabla \zeta = \nabla \zeta \nabla \varphi = 0. \quad (4)$$

Подставляя (2) в (1), исключая вторую производную J_m с помощью (3), используя (4) и приравнивая нулю коэффициенты при J_m и $\frac{dJ_m}{d\rho}$ (в силу их линейной независимости), получим

$$-k^2 \left[\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) (\nabla \rho)^2 + (\nabla \zeta)^2 + \rho_0^2 (\nabla \varphi)^2 - \epsilon \right] A + \\ + ik[L_1 A + L_2 B] + \Delta A = 0; \quad (5)$$

$$-k^2 \left[\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) (\nabla \rho)^2 + (\nabla \zeta)^2 + \rho_0^2 (\nabla \varphi)^2 - \epsilon \right] B + \\ + ik[L_1 B + L_3 A] + \Delta B = 0, \quad (6)$$

где операторы L_1, L_2, L_3 , действующие на функции A и B , суть

$$L_1 = \Delta \zeta + \rho_0 \Delta \varphi + 2 \nabla \zeta \nabla, \\ L_2 = \left(1 + \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) (\nabla \rho)^2 + \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) \rho \Delta \rho + 2 \rho \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right) \nabla \rho \nabla, \\ L_3 = \nabla \left(\frac{\nabla \rho}{\rho} \right) + 2 \frac{\nabla \rho}{\rho} \nabla. \quad (7)$$

Разлагая A и B в асимптотические ряды по $1/k$:

$$A = \sum_{n=0} (ik)^{-n} A_n, \quad B = \sum_{n=0} (ik)^{-n} B_n, \quad (8)$$

подставляя (8) в (5), (6) и приравнивая нулю коэффициенты при степенях k , получим

$$\left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}\right)(\nabla \rho)^2 + (\nabla \zeta)^2 + \rho_0^2(\nabla \varphi)^2 = \varepsilon; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} L_1 A_n + L_2 B_n &= -\Delta A_{n-1}, & A_{-1} &= 0, \\ L_1 B_n + L_3 A_n &= -\Delta B_{n-1}, & B_{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Система уравнений (4), (9) определяет координатные функции, уравнения (10)—функции A_n и B_n .

Мы не будем рассматривать технику решения этих уравнений и постановку начальных условий для них. Вместо этого мы покажем, что функции ρ , ζ , A_n , B_n могут быть определены, если известны обычные лучевые асимптотические разложения для полей, т. е. конгруэнции лучей и их амплитуды (2).

2. СВЯЗЬ КООРДИНАТНЫХ ФУНКЦИЙ ρ , ζ И ЭЙКОНАЛОВ

При $k(\rho - \rho_0) \gg (k\rho)^{1/3}$ для функции Бесселя и ее производной можно использовать дебаевское асимптотическое разложение.

$$J_m(k\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} [(k\rho)^2 - m^2]^{-1/4} \cos \psi; \quad (11)$$

$$\frac{dJ_m}{d(k\rho)} \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{[(k\rho)^2 - m^2]^{1/4}}{k\rho} \sin \psi, \quad (12)$$

$$\psi = \sqrt{(k\rho)^2 - m^2} - m \arccos \frac{m}{k\rho} - \frac{\pi}{4}.$$

Подставляя (11) и (12) в (2), находим

$$u \approx C_0 \exp\left(i k S^+ - i \frac{\pi}{4}\right) + D_0 \exp\left(i k S^- + i \frac{\pi}{4}\right), \quad (13)$$

где

$$S^\mp = \mp \left[\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} - \rho_0 \arccos \frac{\rho_0}{\rho} \right] + \zeta + \rho_0 \varphi = \quad (14)$$

$$= \mp \int \sqrt{1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2}} d\rho + \zeta + \rho_0 \varphi;$$

$$C_0 = A_0(\rho^2 - \rho_0^2)^{-1/4} + B_0(\rho^2 - \rho_0^2)^{1/4}, \quad (15)$$

$$D_0 = A_0(\rho^2 - \rho_0^2)^{-1/4} - B_0(\rho^2 - \rho_0^2)^{1/4}.$$

Используя (4), (9), легко проверить, что функции S^\mp удовлетворяют уравнению эйконала:

$$(\nabla S^\mp)^2 = \varepsilon(r, z). \quad (16)$$

Точно так же, определяя A_0 , B_0 из (15),

$$A_0 = \frac{C_0 + D_0}{2}(\rho^2 - \rho_0^2)^{1/4}, \quad B_0 = \frac{C_0 - D_0}{2}(\rho^2 - \rho_0^2)^{-1/4}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (10) с учетом (7), (14), получим, что функции C_0, D_0 удовлетворяют геометрооптическим уравнениям переноса:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(C_0^2 \nabla S^+) &= C_0[2 \nabla S^+ \nabla C_0 + C_0 \Delta S^+] = 0, \\ \operatorname{div}(D_0^2 \nabla S^-) &= D_0[2 \nabla S^- \nabla D_0 + D_0 \Delta S^-] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, выражение (13) — геометрооптическая форма решения для поля рассматриваемых волновых пучков.

Конгруэнция лучей, соответствующая решению в форме (13), имеет 2 каустические поверхности вращения. Через каждую точку, расположенную в области между внутренней и внешней каустиками, проходят два луча. Эйконал S^- соответствует лучу, еще не коснувшемуся внутренней каустики; S^+ — лучу, уже прошедшему ее. Определяя ∇S^\pm из (14), легко проверить, что при $\rho = \rho_0$ векторы ∇S^\pm касательны к поверхности $\rho = \rho_0$. Следовательно, поверхность $\rho = \rho_0$ является внутренней каустикой.

Формулы (14), (15) определяют геометрооптическую форму решения — эйконалы S^\pm , амплитуды C_0, D_0 — через координатные функции ρ, ζ, φ и A_0, B_0 . При известном в приближении геометрической оптики решении можно найти ρ, ζ, A_0, B_0 . Выражения для A_0, B_0 определяются с помощью (17), а

$$\zeta = \frac{S^+ + S^-}{2} - \rho_0 \varphi; \quad (19)$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2} - \arccos \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \frac{S^+ - S^-}{2}. \quad (20)$$

3. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПРИ $\rho \rightarrow \rho_0$

Покажем, что если $C_0/D_0 \rightarrow 1$ при $\rho \rightarrow \rho_0$, то A_0 и B_0 не имеют особенности при $\rho \rightarrow \rho_0$, и, следовательно, поскольку функции Бесселя конечны при $\rho \rightarrow \rho_0$, нулевой член асимптотического разложения (2) конечен при $\rho = \rho_0$.

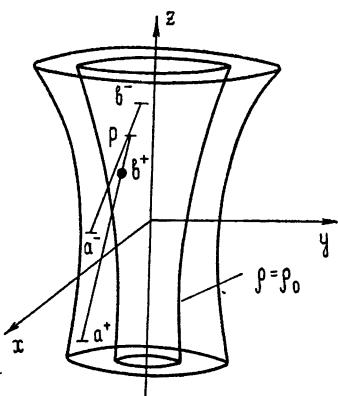


Рис. 1.

Введем обозначения (см. рис. 1): a^\pm, b^\pm — точки касания внешней и внутренней каустик луча, которому соответствует эйконал S^\pm ; p — точка наблюдения; $b^+p = l^+, p b^- = l^-, R^\pm = a^\pm b^\pm$. В принятых обозначениях интегралы уравнений (18) имеют вид

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{P(b^+)}{\sqrt{(R^+ + l^+)l^+}}, \\ D_0 &= \frac{Q(b^-)}{\sqrt{(R^- - l^-)l^-}}, \end{aligned} \quad (21)$$

где функции P, Q постоянны на луче.

Нас интересует поведение C_0 и D_0 при $\rho \rightarrow \rho_0$. Для простоты анализа будем

считать, что точка наблюдения p приближается к внутренней каустике по такому пути, при котором $l^+ = l^- = l$. Такой путь можно выбрать, поскольку функции P, Q, R, l непрерывны. Так как при выбранном пути все функции будут зависеть от l , то представим C_0 и D_0 в виде рядов по степеням l .

Согласно (21) эти ряды должны иметь вид

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\sqrt{l}} (C_{00} + C_{01}l + C_{02}l^2 + \dots), \\ D_0 &+ \frac{1}{\sqrt{l}} (D_{00} + D_{01}l + D_{02}l^2 + \dots). \end{aligned} \quad (22)$$

Условие $C_0/D_0 \rightarrow 1$ при $\rho \rightarrow \rho_0$ будет выполняться, если

$$C_{00} = D_{00}. \quad (23)$$

Учитывая (23), подставим (22) в (17), получим

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{(\rho^2 - \rho_0^2)^{1/4}}{\sqrt{l}} \left(C_{00} + \frac{C_{01} + D_{01}}{2} l + \frac{C_{02} + D_{02}}{2} l^2 + \dots \right), \\ B_0 &= \frac{\sqrt{l}}{(\rho^2 - \rho_0^2)^{1/4}} \left(\frac{C_{01} - D_{01}}{2} + \frac{C_{02} - D_{02}}{2} l + \dots \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Покажем теперь, что величина $(\rho^2 - \rho_0^2)^{1/4}/\sqrt{l}$ стремится к конечному пределу при $l \rightarrow 0$. Для этого разложим ρ в ряд по l , ограничившись первыми двумя членами разложения:

$$\rho = \rho_0 + (\nabla \rho)_0 l. \quad (25)$$

Здесь $(\nabla \rho)_0 = (\nabla \rho)|_{\rho=\rho_0}$, вектор l направлен от точки b^+ к точке наблюдения ($|l| = l$).

Будем считать, что $\epsilon = 1$ (это непринципиальное ограничение). Тогда

$$l = l \nabla S^+. \quad (26)$$

Из (14) следует, что

$$\nabla S^+ = \frac{1}{\rho} \sqrt{\rho^2 - \rho_0^2} \nabla \rho + \nabla \zeta + \rho_0 \nabla \varphi. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (25) и используя (27) и (4), найдем

$$\frac{(\rho^2 - \rho_0^2)^{1/4}}{\sqrt{l}} = \sqrt{\frac{\rho + \rho_0}{\rho}} (\nabla \rho)_0^2. \quad (28)$$

Таким образом, величина $(\rho^2 - \rho_0^2)^{1/4}/\sqrt{l}$ стремится к конечному пределу при $l \rightarrow 0$ ($\rho \rightarrow \rho_0$), и, значит, из формул (24) следует, что A_0 и B_0 стремятся к конечному пределу при $\rho \rightarrow \rho_0$, т. е. разложение (2) пригодно в окрестности каустики.

4. СИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В НЕРЕГУЛЯРНОМ КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

В качестве примера рассмотрим распространение собственных волн без азимутальной зависимости ($m = 0$) в нерегулярном круглом волноводе. В регулярном волноводе эти волны соответствуют волне H_{0n} .

Будем считать, что нерегулярный волновод с одной стороны ($z \rightarrow -\infty$) переходит в регулярный круглый волновод, а с другой ($z \rightarrow \infty$) — в конический рупор. Поле и на стенке волновода удовлетворяет условию Дирихле.

Пусть в регулярной части волновода ($z \rightarrow -\infty$) возбуждается волна вида

$$u = J_0(\alpha kr) e^{i\gamma kz}, \quad \alpha = \mu/k, \quad \gamma = \sqrt{1-\alpha^2}, \quad (29)$$

μ — корень уравнения $J_0(\mu) = 0$, r, z — цилиндрические координаты. Для определения поля u по формуле (2) нужно найти координатные функции ζ , ρ и амплитудные функции A, B . При $m = 0$ координатные функции ρ, ζ выражаются через эйконалы S^+ и S^- в явном виде:

$$\zeta = \frac{S^+ + S^-}{2}, \quad \rho = \frac{S^+ - S^-}{2}. \quad (30)$$

Кроме того, при $m = 0$ решение уравнения эйконала сводится к определению самосогласованной конгруэнции лучей в меридиальной плоскости, что эквивалентно определению лучевой структуры поля в симметричном плоском нерегулярном волноводе с начальным условием

$$\cos \beta(z) \rightarrow \mu/k \quad (z \rightarrow -\infty),$$

где $(\pi/2 - \beta)$ — угол между осью z и лучом, отраженным от стенки волновода.

Так как определение самосогласованной конгруэнции лучей и, в частности, функций S^\pm в плоском нерегулярном волноводе подробно рассмотрено в [2, 3], то будем считать ρ и ζ известными функциями.

Найдем теперь амплитудные функции A и B в нулевом приближении, т. е. определим A_0 и B_0 . Записывая решение уравнений (18) в форме (21) и требуя, чтобы при $\rho = \rho_0$ $C_0/D_0 = 1$, а на стенке волновода поле u обращалось в нуль, получим A_0 и B_0 :

$$A_0 = \rho \frac{P_0 + Q_0}{2}, \quad B_0 = \frac{P_0 - Q_0}{2},$$

$$P_0(r, z) = \hat{Q}(z_1) \left\{ \rho r \left[1 + \frac{f(z_1) + r}{l(z_1) \cos \beta(z_1)} \right] \right\}^{-1/2},$$

$$Q_0(r, z) = \hat{Q}(z_2) \left\{ \rho r \left[1 + \frac{\sqrt{(z - z_2)^2 + [f(z_2) - r]^2}}{l(z_2)} \right] \right\}^{-1/2}.$$
(31)

Здесь r, z — цилиндрические координаты точки наблюдения p ; $r = f(z)$ — уравнение стенки волновода; z_1 — координата точки пересечения со стенкой волновода луча, который приходит в точку наблюдения, пересекая ось волновода; z_2 — относится к лучу, который не пересекает ось волновода, приходя в точку наблюдения; l — расстояние по лучу от внешней каустики до стенки волновода. Функция $\hat{Q}(z)$ определяется из функционального уравнения, совпадающего с соответствующим уравнением в плоской задаче [3]:

$$\hat{Q}[z + \tau(z)] = \left[1 + \frac{\tau(z)}{l(z) \sin \beta(z)} \right]^{-1/2} \hat{Q}(z),$$
(32)

где $\tau(z)$ — функция, определяемая при расчете самосогласованной конгруэнции лучей (см. [2, 3]).

Таким образом, решение осесимметричной задачи (круглый нерегулярный волновод) при $m = 0$ и решение плоской задачи (плоский нерегулярный волновод) могут быть выражены в нулевом приближении через функции S^\pm, \hat{Q} , которые определяются в обоих случаях одной и той же системой функциональных уравнений, но удовлетворяют разным

начальным условиям при $z \rightarrow -\infty$ и различным образом входят в само решение.

Исходя из полученных формул, определим поле в волноводе при $z \rightarrow \infty$. Для этого введем сферические координаты R, θ, φ , поместив начало координат в точку $z = z_0$, лежащую на оси волновода. Сферические и цилиндрические координаты связаны соотношениями

$$r = R \sin \theta, \quad z = z_0 + R \cos \theta. \quad (33)$$

Подставив (33) в (31) и устремив R к бесконечности, найдем асимптотическое представление для A_0 и B_0 при $R \rightarrow \infty$, используя которое, получим формулу, определяющую поле и при $R \rightarrow \infty$:

$$u = \frac{e^{ikR}}{R} G(\theta); \quad (34)$$

$$G(\theta) = \frac{1}{2} \left\{ [\hat{Q}(z_1^*) \sqrt{l(z_1^*)} + \hat{Q}(z_2^*) \sqrt{l(z_2^*)}] J_0(k \rho^*) + \right. \quad (35)$$

$$\left. + i [\hat{Q}(z_1^*) \sqrt{l(z_1^*)} - \hat{Q}(z_2^*) \sqrt{l(z_2^*)}] J_1(k \rho^*) \right\} \sqrt{\frac{\rho^*(\theta)}{\sin \theta}} \exp \left(ik \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2} \right),$$

$$\rho^*(\theta) = \frac{1}{2} (\Phi_1(\theta) - \Phi_2(\theta)),$$

$$\Phi_1 = \xi(z_1^*) - [(z_1^* - z_0) \cos \theta - f(z_1^*) \sin \theta],$$

$$\Phi_2 = \xi(z_2^*) - [(z_2^* - z_0) \cos \theta + f(z_2^*) \sin \theta].$$

В этих формулах звездочкой отмечены величины, которым соответствует точка наблюдения, находящаяся в бесконечности ($R = \infty$). Функция $\xi(z)$ находится из функционального уравнения

$$\xi(z + \tau) = \xi(z) + \frac{\tau(z)}{\sin \beta(z)}$$

при определении самосогласованной конгруэнции лучей [3].

В заключение отметим, что аналогичным образом можно рассмотреть и случай $m \neq 0$, но при этом определение самосогласованной конгруэнции лучей представляет собой более сложную задачу, чем при $m = 0$, и поэтому случай $m \neq 0$ будет рассмотрен в дальнейшем отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 7, № 4, 664 (1964).
2. Б. Е. Кинбер, Н. Е. Мальцов, В. И. Токатлы, Радиотехника и электроника, 15, № 12, 2512 (1970).
3. В. И. Токатлы, Радиотехника и электроника (в печати).

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию
13 июля 1970 г.

SHORT-WAVE ASYMPTOTICS OF AXI-SYMMETRICAL WAVE BEAMS

V. I. Tokatly, B. E. Kinber

The asymptotic solutions of a wave equation for the fields with azimuth dependence of $e^{im\varphi}$ -type are obtained, using the etalon equation. Bessel equation is used as the latter one. The solution having the Bessel function and its derivative with the amplitudes, depending on spatial coordinates, is formally similar to a strict solution of wave equation in the cylindrical coordinates r, z, φ , where instead of the variables r and z the coordinate functions ρ and ζ are given. The relation between the coordinate functions ρ, ζ and the ordinary eikonal is found. It is shown that the amplitude functions in a zero approximation may be expressed in terms of the geometrical amplitudes.