ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIV, № 5 РАДИОФИЗИКА 1971

УДК 621.372.4

ОБ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССАХ В СФЕРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. И. Весницкий, А. В. Костров

Рассматривается задача об электромагнитных колебаниях в сферическом резонаторе с равномерно движущейся идеально проводящей границей. Приводится решение задачи для произвольных скоростей движения границы в случае симметричных мод. На основании полученного решения исследуются поля в центре резонатора и вблизи движущейся границы, а также рассматривается случай медленного движения границы.

Электродинамические системы, размеры которых изменяются во времени, стали изучаться сравнительно недавно, с 1960 г. Причем большинство появившихся за последние годы работ посвящено изучению волновых явлений в одномерных резонаторах с подвижными границами [1–6]. В частности, было показано, что в таких резонаторах возможно преобразование спектра сигналов, а также параметрическая генерация видеоимпульсов.

Представляет интерес рассмотреть поведение полей в резонансных электродинамических системах с дисперсией. Приближенными методами такая задача рассматривалась в [7] для сферического резонатора, граница которого медленно движется по периодическому закону. В работе [8] была решена задача о распространении волн в прямоугольном волноводе, один из поперечных размеров которого равномерно изменяется во времени. Ниже методами, изложенными в [8], исследуются электромагнитные колебания в сферическом резонаторе, радиус которого линейно зависит от времени.

Будем считать, что резонатор без заполнения и что потерями в его стенках можно пренебречь. Ограничимся случаем, когда вектор электрической напряженности имеет только одну, азимутальную компоненту E_φ (случай TM_{nm0} волн рассматривается аналогично). Тогда компоненты полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ можно выразить через волновую функцию $A(r, \vartheta, t)$:

$$E_\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}, \quad H_r = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\, A), \quad H_\vartheta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA), \tag{1}$$

где $A(r, \vartheta, t)$ удовлетворяет следующему волновому уравнению:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[\frac{\partial A}{\partial\vartheta} + \frac{A}{\operatorname{tg}\vartheta}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r} + A\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \tag{2}$$

При этом условия на подвижной границе запишутся в виде

$$E_\varphi - \frac{\dot a(t)}{c} H_\vartheta\Big|_{r=a(t)} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\dot a(t)}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA)\Big|_{r=a(t)} = 0. \tag{3}$$

Здесь $a(t) = a_0 + vt$ — радиус сферы, $\dot a(t) = v$ — скорость движения границы, которую далее будем полагать меньше скорости света c. Интегрируя условие (3) по поверхности $r = a(t)$ и выбирая постоянную интегрирования равной нулю, получаем

$$A\Big|_{r=a(t)} = 0. \tag{4}$$

Произведем в (2) замену переменных, положив

$$\rho = \frac{r}{a(t)}, \qquad \tau = \frac{a^2(t)}{\beta^2} - r^2, \qquad \vartheta = \vartheta, \tag{5}$$

где $\beta = v/c$. Тогда $\Psi(\rho, \vartheta, \tau) = A(r, \vartheta, \tau)$ должно удовлетворять уравнению

$$\begin{gathered}(1-\beta^2\rho^2)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}(1-\beta^2\rho^2)\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}(1-\beta^2\rho^2)\times\\ \times\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta} + \frac{\Psi}{\operatorname{tg}\vartheta}\right) = \beta^2\left(4\tau^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} + 2\tau\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}\right).\end{gathered} \tag{6}$$

Кроме того, из (4) следует, что

$$\Psi(\rho, \vartheta, \tau)\Big|_{\rho=1} = 0. \tag{7}$$

Решение (6), удовлетворяющее условию (7), будем искать методом разделения переменных, положив

$$\Psi(\rho, \vartheta, \tau) = R(\rho)\,\Theta(\vartheta)\,T(\tau). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (6), получаем следующие три уравнения в полных производных:

$$R'' + \frac{2}{\rho}R' + \left[\frac{\beta^2 d^2}{(1-\beta^2\rho^2)^2} - \frac{n^2}{\rho^2(1-\beta^2\rho^2)}\right]R = 0; \tag{9}$$

$$\Theta'' + \frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta}\Theta' + \left[n^2 - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\right]\Theta = 0; \tag{10}$$

$$T'' + \frac{2}{\tau}T' + \frac{d^2}{4\tau^2}T = 0, \tag{11}$$

n^2 и d^2 — постоянные разделения.

Единственным решением уравнения (10), однозначным и конечным внутри сферы, будут присоединенные полиномы Лежандра

$$\Theta(\vartheta) = P_k^{(1)}(\cos\vartheta). \tag{12}$$

Здесь $n^2 = k(k+1)$ (k — целое число). Решение же уравнения (11) имеет вид

$$T(\tau) = \tau^{-1/2}\{K\sin(q\ln\tau) + L\cos(q\ln\tau)\}, \tag{13}$$

где K и L — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий, а $q = (1/2)\sqrt{d^2-1}$.

Что касается уравнения (9), то его можно свести к гипергеометрическому уравнению Гаусса. Действительно, полагая

$$R(\rho) = z^{-(1/2)(1+k)}(1-z)^{(1/2)(\sqrt{1-d^2}+1)}U(z),$$

где $z = \beta^2\rho^2$, находим, что

$$z(z-1)\frac{d^2U}{dz^2} + [(1+\alpha_1+\alpha_2)z - \alpha_3]\frac{dU}{dz} + \alpha_1\alpha_2 U(z) = 0.$$

Здесь

$$1+\alpha_1+\alpha_2=\frac{3}{2}-k+\sqrt{1-d^2},$$

$$\alpha_3=\frac{1}{2}-k,$$

$$\alpha_1\alpha_2=\frac{1}{4}\left[1-d^2+\sqrt{1-d^2}+k(k+1)-2k\left(1+\sqrt{1-d^2}\right)\right].$$

Следовательно, решение для $R(\rho)$ запишется в виде

$$R(\rho)=(\beta\rho)^{-(k+1)}(1-\beta^2\rho^2)^{(1/2)(\sqrt{1-d^2}+1)}\times$$
$$\times\left[A_0F(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta^2\rho^2)+B_0(\beta\rho)^{2(1-\alpha_3)}F(\alpha_1-\alpha_3+1,\alpha_2-\alpha_3+\right.$$
$$\left.+1,\ 2-\alpha_3,\ \beta^2\rho^2)\right], \tag{14}$$

где через F обозначена гипергеометрическая функция Гаусса, A_0 и B_0 — постоянные коэффициенты.

Подставляя (12), (13) и (14) в (8), получаем точное решение уравнения (6). Однако следует отметить, что из-за сложности выражения (14) возникают трудности при отыскании собственных значений постоянной разделения d из граничного условия (7). Поэтому поступим следующим образом. Найдем решение (9), приближенно справедливое в непосредственной близости от границы ($\rho=1$). Это позволит нам, пользуясь условием (7), найти приближенные значения d.

Итак, пусть

$$d^2\gg n^2\left(\frac{1}{\rho^2\beta^2}-1\right). \tag{15}$$

Тогда из (9) получаем

$$R(\rho)=\frac{\sqrt{1-\beta^2\rho^2}}{\rho}\left\{c_1\cos\left(q\ln\frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho}\right)+c_2\sin\left(q\ln\frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho}\right)\right\}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (7), находим, что

$$c_1=0,\quad q_m=\frac{1}{2}\sqrt{d_m^2-1}=\frac{m\pi}{\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}}\qquad (m=1,2,3,\ldots). \tag{17}$$

Используя (17), неравенство (15) можно заменить следующим:

$$\left(\frac{2m\pi}{\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)^2+1\gg n^2\left(\frac{1}{\beta^2\rho^2}-1\right).$$

Это условие достаточно хорошо выполняется для «большого» резонатора, когда вдоль радиуса укладываются две пучности поля и более, и тем лучше, чем больше скорость движения границы.

Выражая α_1, α_2 и α_3 через найденные из (17) значения d, получим решение для $R(\rho)$, приближенно справедливое во всем резонаторе ($0<\rho<1$), а затем и решение исходной задачи (1)—(3). Однако из-за сложности последнего ограничимся здесь исследованием поведения полей только вблизи движущейся границы и в центре резонатора.

Чтобы найти, как ведет себя решение в центре резонатора, при

$\rho \ll 1$, положим, что $n^2 \gg (\rho\beta d)^2$. Тогда уравнение (9) можно существенно упростить и единственное конечное внутри сферы решение последнего записать в виде

$$R(\rho) = \rho^k. \tag{18}$$

Окончательно, из (5), (8), (12), (13), (16)—(18) в случае $L = 0$, получаем следующие выражения для волновых функций, описывающих поля вблизи границы и в центре сферы соответственно:

$$A(r, \vartheta, t) = \frac{B_0}{r} P_k^{(1)}(\cos\vartheta) \left[\cos\left(\frac{m\pi}{\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}} \ln\frac{a-\beta r}{a_0}\right) - \cos\left(\frac{m\pi}{\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}} \ln\frac{a+\beta r}{a_0}\right)\right]; \tag{19а}$$

$$A(r, \vartheta, t) = \frac{B_0}{a(t)} P_k^{(1)}(\cos\vartheta) \left(\frac{r}{a}\right)^k \sin\left(\frac{m\pi}{\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}} \ln\frac{a^2-\beta^2 r^2}{a_0^2}\right). \tag{19б}$$

Отсюда видно, что вблизи поверхности сферы волновая функция с точностью до множителя $r^{-1} P_k^{(1)}(\cos\vartheta)$ представляет собой сумму падающей на границу и отраженной от нее волн, распространяющихся вдоль радиуса сферы, т. е. совпадает с волновой функцией, описывающей процессы в одномерном резонаторе, равномерно изменяющем свой размер [2, 8]. Если определить мгновенные частоты этих волн ω_{m+} и ω_{m-} как частные производные от фаз по времени, то найдем, что

$$\omega_{m+} = \frac{m\pi}{\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}} (a - \beta r)^{-1},$$

$$\omega_{m-} = \frac{m\pi}{\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}} (a + \beta r)^{-1}.$$

Следовательно, на движущейся поверхности $r = a(t)$

$$\frac{\omega_{m+}}{\omega_{m-}} = \frac{1+\beta}{1-\beta},$$

т. е. получаем известную формулу для эффекта Доплера.

В отличие от резонатора с неподвижными границами в рассматриваемой системе должна совершаться работа над полем Подставляя (19 а) в (1), можно найти выражения для полей, а затем и разность потоков падающей на границу и отраженной от нее волн. При $|\beta| \ll 1$ частоту волнового процесса можно приближенно принять равной $\omega_{m0} = m\pi[a \ln((1+\beta)/(1-\beta))]^{-1}$. В этом случае разность потоков для m-й моды, усредненная за период $2\pi/\omega_{m0}$, будет равна

$$\Delta s = \frac{v}{|v|} B_0 \frac{2k(k+1)}{2k+1} \beta^2 \frac{d_m^2 v^2}{a^2(t)} \left[\frac{1}{(1+\beta)^2} + \frac{1}{(1-\beta)^2}\right].$$

Таким образом, энергия внутри резонатора по мере схлопывания будет увеличиваться и в пределе, при $a(t)\to 0$, стремиться к бесконечности. Для расширяющейся сферы энергия в резонаторе будет, наоборот, уменьшаться.

Подставляя (19 б) в (1) и полагая при этом $2\beta rd_m/a(t)\ll 1$, найдем выражения, описывающие поведение полей в центре резонатора:

$$E_\varphi=\frac{2(k+2)d_m\beta^2B_0}{a^2c^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{k+1}P_k^{(1)}(\cos\vartheta),$$

$$H_r=\frac{2d_m\beta B_0}{a^2}\left(\frac{r}{a}\right)^k\left[\frac{2}{\operatorname{tg}\vartheta}P_k^{(1)}(\cos\vartheta)-P_k^{(2)}(\cos\vartheta)\right],$$

$$H_\vartheta=2(k+2)d_m\beta B_0\left(\frac{r}{a}\right)^{k+2}P_k^{(1)}(\cos\vartheta).$$

Отсюда видно, что по мере расширения резонатора плотность электромагнитной энергии вблизи центра сферы убывает, и тем быстрее, чем сложнее распределение полей в зависимости от угла ϑ, т. е. чем больше k. При сжатии же резонатора энергия уменьшается. И в том и в другом случае плотность электрической энергии изменяется быстрее, чем плотность магнитной энергии в $a^2(t)$ раз. Кроме того, соотношение между этими энергиями зависит от скорости движения границ. Заметим также, что из выражения (19 б) для достаточно большого резонатора (больших номеров m) и нерелятивистских скоростей движения границы (когда процессы можно еще считать квазимонохроматическими) нетрудно найти, что мгновенная частота колебаний электромагнитных полей в центре сферы равна

$$\tilde{\omega}_m(t)=\frac{m\pi c}{a(t)}.$$

Остановимся теперь кратко на рассмотрении явлений в резонаторе, медленно изменяющем свои размеры. В этом случае решение уравнения (9), конечное внутри сферы, можно приближенно записать в виде

$$\rho^{-1}J_{k+1/2}(\rho\beta d).$$

Используя (5), (8), (12) и (13), найдем, что

$$A(r,\vartheta,t)=K\beta(ar)^{-1/2}P_k^{(1)}(\cos\vartheta)J_{k+1/2}(r\beta da^{-1})\times$$
$$\times\sin\left(\sqrt{d^2-1}\ln\frac{a}{a_0}\right). \tag{20}$$

Для входящей сюда постоянной разделения d из условия (7) получаем следующие значения:

$$d_m=\frac{\omega_{0m}}{v}a_0\qquad(m=1,2,3,\ldots),$$

где ω_{0m} — собственные частоты стационарного резонатора, радиус которого равен a_0.

Если $(ra)^{-1/2}J_{k+1/2}(r\beta d_m a^{-1})$ является медленной функцией по сравнению с $(d_m^2-1)^{1/2}\ln(a/a_0)$ (для расширяющегося резонатора это, по-видимому, выполняется всегда при $|\beta|\ll 1$), то под мгновенной частотой волнового процесса внутри резонатора можно понимать следующую величину:

$$\tilde{\omega}_m(t)=\left[\left(\frac{\omega_{0m}a_0}{v}\right)^2-1\right]^{1/2}va^{-1}.$$

Подставляя (20) в (1), нетрудно показать, что отношение полной энергии m-й динамической моды, усредненной за период $2\pi/\tilde{\omega}_m$, к мгновенной частоте $\tilde{\omega}_m(t)$ не зависит от времени, т. е.

$$\frac{W_m(t)}{\tilde{\omega}_m(t)} = I = \text{const}.$$

Интересно, до сколь больших скоростей это отношение является инвариантом. Чтобы ответить на такой вопрос, необходимо найти полную энергию внутри резонатора, исходя из точного решения, справедливого при любых $\beta < 1$. Для рассматриваемого здесь сферического резонатора из-за громоздкости выражения точного решения это сделать трудно. Однако для недиспергирующей системы, представляющей собой одномерный резонатор, одна из границ которого закреплена ($x = 0$), а другая движется по линейному закону ($x = a(t) = a_0 + vt$), можно показать, что его полная усредненная электромагнитная энергия пропорциональна значению мгновенной частоты на неподвижной границе при любых $|\beta| < 1$.

Действительно, в этом случае точное решение запишется в виде [2, 8]

$$A_m(x, t) = B_{0m}\left[\cos\left(q_m \ln\frac{a - \beta x}{a_0}\right) - \cos\left(q_m \ln\frac{a + \beta x}{a_0}\right)\right],$$

где B_{0m} — постоянная, определяемая из начальных условий; $q_m = m\pi\,[\ln(1 + \beta)/(1 - \beta)]^{-1}$. Найдем отсюда $E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$ и $H = \frac{\partial A}{\partial x}$, а затем и полную энергию $W_m(t)$ внутри резонатора:

$$W_m(t) = \frac{B_{0m}^2 a_0^2}{4\pi a(t)(1 - \beta^2)}\left\{1 + \frac{(-1)^m}{1 + 4q_m^2}\left[2 q_m \sin\left(2q_m \ln\frac{a\sqrt{1 - \beta^2}}{a_0}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \cos\left(2q_m \ln\frac{a\sqrt{1 - \beta^2}}{a_0}\right)\right]\right\}.$$

Усредняя это выражение за время $T = (a/v)\,(e^{\pi/q_m} - 1)$, получаем, что

$$\overline{W_m(t)}^T = B_{0m}^2 a_0^2\,[\,4(1-\beta^2)a(t)\,q_m\,(e^{\pi/q_m} - 1)]^{-1}.$$

В то же время мгновенная частота на неподвижной границе ($x = 0$), определенная как производная от фазы по времени, равна

$$\tilde{\omega}_m(t) = vq_m\,a^{-1}(t).$$

Следовательно,

$$\frac{\overline{W_m(t)}^T}{\tilde{\omega}_m(t)} = \text{const}$$

для любых скоростей движения границы. Что касается времени, по которому производилось усреднение, то, как нетрудно видеть, при $|\beta| \ll 1$ или больших номерах мод оно совпадает с удвоенным периодом мгновенной частоты $\tilde{\omega}_m(t)$.

Таким образом, оказывается, что введенный для медленных квазипериодических движений адиабатический инвариант формально сохраняется (по крайней мере, в линейном движении, а возможно, что и для нелинейных тоже) при любых скоростях движения, в том числе и при $v \to c$. Однако легко показать, что в соответствии с (17) при $v \to c$ период усреднения $T \to \infty$, т. е. фактически объединяет внутри себя все осцилляции поля, и, следовательно, величина $\overline{\tilde{W}_m^T}/\omega_m$ перестает быть адиабатическим инвариантом.

В заключение авторы выражают благодарность М. А. Миллеру за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Курилко, ЖТФ, 30, № 5, 504 (1960).
2. N. L. Balazs, J. Mathem. Analysis Appl., 3, 3 (1961).
3. О. А. Стеценко, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 6, № 6, 695 (1963).
4. О. А. Стеценко, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 6, № 6, 701 (1963).
5 Р. И. Баранов, Ю. М. Широков, ЖЭТФ, 53, вып. 6 (12), 2121 (1967).
6 В. Н Красильников, А. М. Панкратов, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, 8, 59 (1968).
7. В Н. Красильников, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, 8, 43 (1968).
8 А. И. Весницкий, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 12, № 6, 935 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
19 августа 1970 г.

ELECTROMAGNETIC PROCESSES IN SPHERICAL RESONATOR WITH A MOVABLE BOUNDARY

A. I. Vesnitskii, A. V. Kostrov

Electromagnetic oscillations in a spherical resonator with the uniformly moving perfect conducting boundary are considered. The problem is solved for the arbitrary velocities of the boundary motion in the case of symmetrical modes. On the basis of the obtained solution there are investigated the fields in the resonator center and near the moving boundary. The case of slow boundary motion is also considered.