ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIV, № 5 РАДИОФИЗИКА 1971

УДК 538 56 · 519 25 : 523.164

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЯРКОСТИ В РАДИОАСТРОНОМИИ

Л. Г. Содин

Восстановление яркости радиоисточника, исследуемого с помощью антенн ограниченных размеров, является некорректной задачей (обратной задачей для уравнения 1-го рода). Решение таких задач требует учета ошибок. В связи с этим рассмотрено решение обратной задачи для уравнений 1-го рода в классе случайных функций В качестве решения выбираются функции, полученные методом статистических оценок. Рассмотренный метод позволяет учитывать не только аддитивные, но и помехи других типов, в частности, мультипликативные.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование распределения радиояркости сводится к измерению функции $f(x)$ (в общем случае x — векторный аргумент), связанной с искомой функцией линейным интегральным преобразованием

$$f(x) = \int_a^b S(x, y)\, u(y)\, dy \qquad (c \leqslant x \leqslant d), \tag{1}$$

где $u(y)$ — распределение радиояркости, $S(x, y)$ — диаграмма направленности радиотелескопа.

Таким же соотношением описываются эксперименты, относящиеся к различным областям физики и техники связи (восстановление формы спектральной линии, синтез антенны с заданной, в частности, сверхнаправленной диаграммой, восстановление структуры кристалла по рентгенограмме, исследование источников гравитационных аномалий, декодирование сообщений и т. д.). В связи с этим мы не акцентируем внимание на радиоастрономических аспектах задачи, исследуя лишь трудности, связанные с некорректностью (1)*. Ядро преобразования (1) $S(x, y)$ отражает сглаживающие свойства прибора, кодирующего устройства, или метода измерений в целом и называется аппаратной функцией. Для идеального прибора $f(x) = u(x)$, это обеспечивается, если $S(x, y) = \delta(x - y)$ (δ — дельта-функция Дирака). Для реального прибора возникает проблема соответствия между измеренной $f(x)$ и искомой $u(y)$, что требует решения интегрального уравнения (1).

Физические аспекты задачи детально исследованы Раутианом [1]. Цыбаков и Яковлев [2] показали, что в постановке, соответствующей реальным физическим приборам (функция $u(x)$ финитна), задача (1) имеет решение, притом единственное. Одновременно было указано, что воз-

---

* Класс функций $S(x, y)$, встречающихся в радиоастрономических задачах, весьма широк: от типичных ядер вида $\sin(x-y)/(x-y)$ или $\exp[-(x^2+y^2)]$ до таких, как $\left|\int_{x-y}^{\infty} \exp(iau^2)\, du\right|^2$ при исследовании распределения яркости методом лунного покрытия.

можности восстановления* $u(x)$ ограничены погрешностями задания $f(x)$ и $S(x, y)$ (шумами). Особенностью процесса редукции является некорректность (1) в смысле Адамара, вытекающая из отсутствия непрерывной зависимости решения от левой части [3]. В силу этого малые погрешности могут привести к большим ошибкам в решении.

Работами Тихонова, Иванова и других авторов [4—7] разработан новый подход к некорректным задачам типа (1), основанный на последовательном учете шумов; вместо (1) рассматривается уравнение

$$f(x) = \int_a^b u(y)\, S(x, y)\, dy + n(x) \qquad (c \leqslant x \leqslant d), \tag{2}$$

где $n(x)$ — отражающий ошибки в задании $f(x)$ шум, нормированный определенным образом. Весьма упрощенно результаты нового подхода формулируются так. Вводится семейство функций $u^\alpha(x)$, зависящих от параметра α, таких, что при $\alpha \to 0$ $u^\alpha(x) \to u(x)$ в каком-либо смысле. семейство $u^\alpha(x)$ находится решением корректного уравнения, получаемого путем некоторого видоизменения (1) (регуляризацией в терминологии Тихонова). Параметр α выбирается так, чтобы при $\|n\| \to 0$ $\alpha \to 0$. Существенным вопросом новой теории является выбор конкретного вида регуляризатора и численного значения параметра α. Ряд исследований ([6, 8] и др.) посвящен этому вопросу. К сожалению, всегда выбору регуляризатора приходится предпослать введение каких-либо априорных численных оценок искомой функции $u(x)$, для чего в большинстве случаев нет достаточных оснований (априорная трудность). Шаг вперед сделан рядом авторов, пришедших к статистическому рассмотрению задачи [9, 10]. Особенно интересны результаты Турчина [11—13]: введен статистический ансамбль решений, задаваемый плотностями распределения вероятностей, и в этом ансамбле отыскивается функция, удовлетворяющая (1) наилучшим, в некотором смысле, образом. Преимуществом такого подхода является физическое упрощение процесса выбора алгоритма редукции, более привычное и наглядное задание априорных сведений об искомой функции и, главное, учет шумов, адекватный их природе.

Физический смысл такого подхода состоит в следующем. Измеряя неизвестную функцию $u(x)$, мы предполагаем, что она выбирается из заданного ансамбля возможных функций. В частности, можно считать, что имеются некоторые ожидаемые заранее ее свойства, задаваемые, например, «средней» функцией $u_0(x)$; истинная функция может отличаться от средней в некоторых пределах, определяемых дисперсией в ансамбле, и т. п. Естественно, наиболее полной характеристикой ансамбля будет последовательность многомерных плотностей вероятностей для $u(x_1) \ldots u(x_N)$, $N \to \infty$.

В настоящей работе задача редукции сводится к задаче статистической оценки случайной функции по методу максимального правдоподобия или максимальной обратной вероятности [14, 15]. При этом получены новые разновидности регуляризаторов. В отличие от известных работ, кроме аддитивных, весьма естественным образом включаются в рассмотрение и другие виды помех. В реальных условиях возможны аддитивные, мультипликативные и помехи оператора [16]:

$$f(x) = m(x) \int_a^b u(y)\,[S(x, y) + \Delta S(x, y)]\, dy + n(x)^{**}. \tag{2a}$$

* Далее термины «восстановление» и «редукция» используются в смысле «решение обратной задачи».

** Мультипликативные помехи можно и не вводить, если записать $m(x)[S(x, y) + \Delta S(x, y)] - S(x, y) + \{m(x, y)\, \Delta S(x, y) + [m(x) - 1]\, S(x, y)\}$ и считать слагаемые в фигурных скобках помехами оператора.

Мультипликативные помехи обычно отражают изменчивость условий эксперимента; ошибки оператора обусловлены неточным знанием свойств приборов и их флуктуациями.

Метод статистических оценок, по-видимому, является наиболее общим для рассматриваемых задач. В ряде работ применялись частные приемы. Например, в [9] исследована редукция при условии минимума среднеквадратичной ошибки, в [16] заранее предполагалась линейность алгоритма решения задачи при мультипликативных помехах.

При статистическом рассмотрении некорректность исходной задачи (1) преодолевается заданием априорной плотности распределения для искомой функции $u(x)$. Так как применяемые плотности требуют очень быстрого (обычно экспоненциального) убывания вероятности появления больших значений u, решение, найденное методом статистических оценок, устойчиво.

Строго говоря, существование и устойчивость решения некорректной задачи требует специального математического доказательства. Однако, как будет видно из дальнейшего, регуляризованные статистическим методом уравнения аналогичны уже исследованным в известных работах по некорректным задачам, либо по теории оптимальной фильтрации и предсказания. Это позволяет нам придерживаться физического уровня строгости, не ставя под сомнение корректность основных результатов.

ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРИ АДДИТИВНЫХ ПОМЕХАХ

Так как в конечном счете решение конкретных обратных задач требует привлечения цифровых вычислительных средств, рассмотрим дискретный аналог (2):

$$f_m = \sum_{k=1}^{N} S_{mk} u_k + n_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, M) \tag{3}$$

или в матричной записи:

$$f = Su. \tag{3a}$$

Здесь u — N-мерный вектор сигнала, n — M-мерный вектор шума, f — M-мерный вектор измерений, S — аппаратная $N \times M$-матрица.

Зададим шум M-мерной плотностью вероятностей $p_n(n)$, считая ее известной точно. Очевидно, что этим определена условная плотность распределения f при заданном сигнале: $p(f \mid u) = p_n(f - Su)$. Априорная плотность для сигнала $p_u(u)$ фактически может зависеть от некоторых неизвестных до опыта параметров, например, может быть неизвестна дисперсия сигнала. В связи с этим запишем априорную плотность как $p_u(u \mid \beta)$, где β — неизвестный (быть может векторный) параметр. Введем также априорную плотность вероятностей для параметра $p_\beta(\beta)$. В ряде случаев можно будет положить $p_\beta(\beta) = \mathrm{const}$, считая любые значения β равновероятными. Совместный закон распределения для f, u, β запишем по формуле Байеса:

$$p(f, u, \beta) = p(f \mid u)\, p(u \mid \beta)\, p(\beta) = p_n(f - Su)\, p_u(u \mid \beta)\, p_\beta(\beta). \tag{4}$$

Определение неизвестного сигнала и параметра β может быть выполнено по методу статистических оценок [14]. Практически используются два вида оценок: оценки максимального правдоподобия $\hat{u}$, $\hat{\beta}$, определенные условием

$$p(f, \hat{u}, \hat{\beta}) = \max_{u, \beta} p(f, u, \beta), \tag{5}$$

и среднестатистические оценки

$$\bar{u} = \int u p(f, u, \beta)\, df d\beta du, \qquad \bar{\beta} = \int \beta p(f, u, \beta)\, df d\beta du. \tag{5a}$$

Мы будем пользоваться оценками (5). Примем для шума гауссову плотность с заданной ковариационной матрицей K_n [17]:

$$p_n(n) = [(2\pi)^M \det K_n]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(n,\ K_n^{-1} n)\right],$$

$$(K_n)_{ik} = \nu^2 R_{ik} = \langle n_i n_k \rangle, \qquad K_n = K_n^{\text{т}*}, \tag{6}$$

ν^2 — дисперсия, R_{ik} — коэффициент корреляции шума. Нетрудно показать, что из (5) получается линейный алгоритм решения обратной задачи тогда и только тогда, когда априорная плотность сигнала также гауссова. В связи с этим принимаем

$$p_u = [(2\pi)^N \det K_u]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(u - u_0,\ K_u^{-1} u - K_u^{-1} u_0\right)\right]. \tag{7}$$

Здесь

$$u_0 = \langle u \rangle, \qquad (K_u)_{ik} = \langle (u_i - u_{0i})(u_k - u_{0k}) \rangle, \qquad K_u = K_u^{\text{т}}.$$

Далее положим, что все u_i имеют одинаковую дисперсию σ^2, т. е. $K_{uik} = \sigma^2 R_{uik}$. Дисперсию будем считать неизвестным параметром плотности (7), априорно равновероятным. Подставив в (4) (6) и (7) и применив метод (5), найдем оценки $\hat{u}$ и $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{u} = \left(\alpha R_u^{-1} + S^{\text{т}} R_n^{-1} S\right)^{-1} S^{\text{т}} R_n^{-1} f + \alpha \left(\alpha R_u^{-1} + S^{\text{т}} R_n^{-1} S\right)^{-1} R_u^{-1} u_0$$
$$(\alpha = \nu^2 / \hat{\sigma}^2); \tag{8}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\left(\hat{u} - u_0,\ R_u^{-1}\hat{u} - R_u^{-1} u_0\right). \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что (8) — аналог регуляризатора Тихонова:

$$\alpha R_u^{-1} \hat{u} + S^{\text{т}} R_n^{-1} S \hat{u} = S^{\text{т}} R_n^{-1} f + \alpha R_u^{-1} u_0, \tag{8a}$$

причем R_u^{-1} играет роль сглаживающего функционала, α — параметра регуляризации. Как этого требует метод Тихонова, при

$$\nu^2 \to 0 \qquad \alpha = 0(\nu^2).$$

Введем обозначение

$$\left(\alpha R_u^{-1} + S^{\text{т}} R_n^{-1} S\right)^{-1} S^{\text{т}} R_n^{-1} = G. \tag{10}$$

Оператор G естественно назвать восстанавливающим. Для оценки влияния шумов на редукцию рассмотрим вектор средней условной ошибки: $\delta = \langle \hat{u} - u \mid n \rangle$ (усреднение по ансамблю сигналов). Очевидно, $\delta = Gn$. Мерой влияния шумов естественно взять $\Delta^2 = (1/N)\ \langle(\delta,\ \delta)\rangle$ (усреднение по шуму). Подсчет дает $\Delta^2 = (\nu^2/N)\ \mathrm{Sp}\, G R_n G^{\text{т}}$ $(\mathrm{Sp}\, A = \Sigma A_{ii})$. При $\alpha \to 0$ $\Delta^2 \to (\nu^2/N) \mathrm{Sp}\,(S R_n S^{\text{т}})^{-1}$, или при некоррелированном шуме $\Delta^2 \to (\nu^2/N)\, \mathrm{Sp}(S S^{\text{т}})^{-1}$. Величину $(1/N)\, \mathrm{Sp}\,(S S^{\text{т}})^{-1}$ целесооб-

* Верхний индекс т здесь и далее означает транспонирование.

разно использовать как меру корректности задачи. Для примера рассмотрим плохо обусловленную матрицу $S = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}9 \\ 0{,}9 & 1 \end{pmatrix}$. В этом случае $(1/N)\,\mathrm{Sp}\,(SS^{\mathrm{T}})^{-1} \approx 50$ и $\Delta^2 \approx 50\,\nu^2$ для нерегуляризованного решения. Запишем вектор оценки следующим образом:

$$\hat{u} = u + (GS - E)(u - u_0) + Gn,$$

полный вектор ошибки $\delta = Gn + (GS - E)\cdot(u - u_0) = Gn + L(u - u_0)$ (E — единичная матрица) слагается из случайной и систематической ошибок. При $\alpha \to 0$, $G \to S^{-1}$, $L \to 0$ главную роль играет случайная ошибка, при $\alpha \gg 1$, $G \to 0$ — систематическая. Дисперсию ошибки определим следующим образом: $\varepsilon^2 = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\delta_i^2 = D_n + D_u$, где первое слагаемое — дисперсия случайной, второе — систематической ошибок, причем

$$D_n = \frac{\nu^2}{N}\,\mathrm{Sp}\,(GR_nG^{\mathrm{T}}); \tag{11}$$

$$D_u = \frac{\sigma^2}{N}\,\mathrm{Sp}\,(LR_uL^{\mathrm{T}}). \tag{12}$$

Полученные соотношения аналогичны исследованным в [18] при анализе методов декодирования для линейных кодов. В упомянутой работе уделено внимание вычислительным процедурам для восстанавливающего алгоритма типа (10). В частности, предложено использовать дискретное Z-преобразование для обращения матриц, элементы которых зависят от разности индексов (матриц Теплица).

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

1) $R_u = R_n = E$ (некоррелированные сигнал и шум).

Уравнение восстановления

$$\alpha\hat{u} + S^{\mathrm{T}}S\hat{u} = S^{\mathrm{T}}f + \alpha u_0 \tag{8б}$$

является аналогом регуляризатора нулевого порядка А. Н. Тихонова. Метод определения параметра регуляризации

$$\alpha = \frac{\nu^2}{\hat{\sigma}^2}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}(u - u_0,\ u - u_0) \tag{9а}$$

соответствует предложенному Турчиным [13]*.

Рассмотренный случай следует считать наиболее важным. Анализ случаев с коррелированными отсчетами представляет интерес для оценки влияния R_u и R_n при выборе шага дискретности.

Если R_u или $R_n \neq E$, возникают дополнительные трудности при обращении корреляционных матриц. Однако для случая экспоненциальной корреляции $R_{ik} = \exp(-p\,|i-k|) = r^{|i-k|}$ это удается сделать в явном виде.

2) $R_n = E$, $R_u = \| r^{|i-k|} \|_1^N$.

* В [13] нет формулы типа (9 а), но если довести выкладки этой работы до конца, получим $\alpha = \nu^2/(N-1)(\hat{u}, \hat{u})$, что соответствует $\nu^2/\bar{\sigma}^2$, где $\bar{\sigma}^2$ найдено по (5 а). В ряде работ [6–8, 19, 20] предложены другие меры выбора α, однако убедительного физического обоснования для них нет.

Матрица, обратная $\| r^{|i-k|} \|_1^N$, имеет вид

$$R_u^{-1} = \frac{1}{1-r^2} \begin{bmatrix} 1 & -r & 0 \ldots 0 \\ -r & 1+r^2 & -r \;.\; .\; 0 \\ 0 & -r & 1+r^2 \,.\, .\, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix},$$

а уравнение восстановления

$$\alpha [(1+r^2)\hat{u}_k - r(\hat{u}_{k+1} + \hat{u}_{k-1})] + (1-r^2) \sum_{i=1}^{N} (S^{\text{т}}S)_{ki} \hat{u}_i =$$
$$= (1-r^2)(S^{\text{т}}f)_k + \alpha [(1+r^2) u_{0k} - r(u_{0k+1} + u_{0k-1})] \tag{8в}$$
$$(k = 2, 3, \ldots, N-1).$$

Для $k=1$ и $k=N$ слагаемые в квадратных скобках имеют вид

$$\hat{u}_1 - r\hat{u}_2 \quad \text{и} \quad u_{01} - r u_{02}.$$

Нетрудно видеть, что при $r \to 1$ (8в) переходит в регуляризатор Тихонова второго порядка.

3) $R_u = E, \qquad R_n = \| r^{|i-k|} \|_1^N.$

Из (8) с учетом приведенного выражения для матрицы, обратной R_n,

$$\alpha \frac{1+r}{1-r} \hat{u} + S^{\text{т}}S\hat{u} = S^{\text{т}}f + \alpha \frac{1+r}{1-r} u_0. \tag{8г}$$

Видно, что коррелированность отсчетов шума требует эквивалентного увеличения параметра регуляризации.

В реальных условиях вид корреляции не существен. Важен лишь интервал корреляции, являющийся мерой «протяженности» характерных изменений распределения яркости. В связи с этим на практике всегда можно использовать исследованный выше случай экспоненциальной корреляции. При этом величина r должна выбираться в соответствии с тем, какова протяженность деталей распределения яркости, подлежащая восстановлению, т. е. представляющая интерес в данном конкретном физическом эксперименте.

Для иллюстрации рассмотрим еще случай негауссовой априорной плотности вероятностей сигнала. Выберем Г — распределение с независимыми отсчетами [17]:

$$p_u(u) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{N} \dfrac{u_i^{m_i - 1} \exp(-u_i/c_i)}{c_i \Gamma(m_i)} & (u_i \geqslant 0) \\ 0 & (u_i \leqslant 0) \end{cases}.$$

При гауссовом шуме с независимыми отсчетами из (5)

$$\nu^2 \frac{1-m_k}{u_k} + \sum_{i=1}^{N} (S^{\text{т}}S)_{ki} \hat{u}_i = (S^{\text{т}}f)_k - \frac{\nu^2}{c_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{13}$$

Как видно из (13), алгоритм восстановления — нелинейный.

В тех случаях, когда аппаратный оператор имеет полную систему собственных векторов (функций)*, наглядные соотношения можно получить для спектров величин**, входящих в (8) [21, 22]. В частности, если оператор непрерывный и разностный, следует использовать разложения по собственным функциям конечного преобразования Фурье — по волновым функциям вытянутого сфероида [23, 24].

Аналог (8) для спектров получим, учтя, что операция перемножения операторов и функций была определена таким образом, что ей соответствует перемножение спектров:

$$W_{\hat{u}} = \frac{W_u + W_n/W_s + W_u(|W_n|^2/|W_s|^2 \widetilde{W})}{1 + |W_n|^2/|W_s|^2 \widetilde{W}}. \tag{14}$$

Здесь $\widetilde{W}$ — спектр K_u. Смысл остальных величин определен индексами. Как видно из (14), в результате редукции правильно воспроизводится та часть спектра сигнала, где шумы малы, и отсекаются области спектра, сильно искаженные шумами. В этих областях восстановленный спектр совпадает с априорным. Фактически процесс восстановления сводится к аналитическому продолжению спектра и к оптимальной по Винеру*** его фильтрации. Аналогичная процедура для частного случая рассмотрена в [23]. Из (14) также нетрудно выделить случайную $\sim W_n/W_s$ и систематическую $\sim W_u |W_n|^2/|W_s|^2 \widetilde{W}$ ошибки. Если W_s сравнительно медленно убывает с ростом номера гармоники, имеется потенциальная возможности и достаточно малом уровне шума правильно воспроизвести сколь угодно широкую область спектра. Но реализация этой возможности крайне сложна. Пусть $W_s(\omega) = S_0(1 + \omega^2/\Omega^2)^{-1}$, тогда при $|W_n|^2 = N$ правильно воспроизводится спектр в области частот $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_m$, где $\omega_m \approx \Omega\,[W_u(0)\,S_0/N]^{1/4}$, и незначительное увеличение ω_m требует резкого снижения шумов.

Обычно спадание W_s происходит значительно быстрее, чем в рассмотренном примере, и это усиливает сделанный вывод. Отметим, что задача правильного воспроизведения спектрального интервала, более широкого, чем у аппаратной функции, вполне аналогична задаче синтеза антенн со сверхнаправленными диаграммами.

Случай мультипликативных помех рассмотрим на простом примере. Пусть

$$f_m = a_m \sum_{k=1}^{M} S_{mk} u_k \qquad (m = 1, 2, \dots, M). \tag{15}$$

Для a_k в (15) возьмем Г-распределение [17]. Все a_k считаем независимыми и одинаково распределенными с $\langle a_k \rangle = 1$. Тогда

$$p(a_1 \dots a_m) = \begin{cases} \prod\limits_{m=1}^{M} \dfrac{(ra_m)^r \exp(-ra_m)}{a_m \Gamma(r)} & (a_m \geqslant 0) \\ 0 & (a_m < 0) \end{cases}. \tag{16}$$

Заменяя из (15) $a_m = f_m/(Su)_m$, получим для условной плотности распределения результатов измерений

---

* Оператор $S^{\tau}S$ удовлетворяет условиям, при которых имеется система ортонормированных собственных функций с положительным спектром Если такой системы S не имеет, можно применить разложение по собственным функциям $S^{\tau}S$.

** Т. е. для коэффициентов разложения по данной системе собственных векторов (функций).

*** Последнее объясняется выбором гауссовой плотности для шума.

$$p(f\,|\,u) = \mathrm{const}\exp\left[-r\sum\frac{f_m}{(Su)_m} - r\sum\ln(Su)_m\right].$$

Для u выберем априорный нормальный закон (7). Тогда оценка максимального правдоподобия определяется уравнением

$$\frac{1}{r}\left(K_u^{-1}\hat{u}\right)_n + \sum_{m-1}^{M}\frac{S_{mn}}{(Su)_m}\left[1 - \frac{f_m}{(Su)_m}\right] = \frac{1}{r}\left(K_u^{-1}u_0\right)_m. \qquad (18)$$

Как следует из (18), решение задачи редукции при мультипликативных помехах сводится к решению системы нелинейных уравнений. Поиск оптимальных методов решения таких систем — задача весьма актуальная, но выходящая за рамки данной работы.

---

1. Решение некорректной обратной задачи весьма естественным образом выглядит в статистической постановке, позволяющей использовать методы теории статистических оценок и адекватно учитывающей свойства помех.

2. Статистический подход в частных случаях приводит к конкретным алгоритмам восстановления, аналогичным полученным методом А. Н. Тихонова, а также в работах, основанных на спектральном рассмотрении. Учет разнообразия свойств сигналов и помех позволяет получить ряд новых алгоритмов решения обратной задачи, оптимальных для каждого случая.

3. Априорные данные об исследуемом процессе наиболее естественно вводятся именно в статистической постановке задачи.

В заключение автор считает своим долгом выразить признательность В. С. Артюху, И. Л. Вербицкому и В. П. Яковлеву, с которыми обсуждались вопросы, рассмотренные в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. С Г. Раутиан, УФН, **66**, вып. 3, 475 (1958).
2. Б С. Цыбаков, В. П Яковлев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 5—6, 98 (1958).
3. М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, Сиб. математ. ж—л, **7**, № 3, 559 (1966).
4. А. Н. Тихонов, ДАН СССР, **151**, № 3, 501 (1963).
5. В. К. Иванов, ДАН СССР, **145**, № 2, 270 (1962).
6. А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, ЖВММФ, **4**, № 3, 564 (1964).
7. D. Phillips, J. Assoc. Comput. Mach., **9**, № 1, 84 (1962).
8. В. Я Арсенин, В. В. Иванов, ЖВММФ, **8**, № 2, 310 (1968).
9. C. W. Helstrom, J. Opt. Soc. Amer., **57**, № 3, 297 (1967).
10. А. П Петров, ЖВММФ, **7**, № 3, 648 (1967).
11. В. Ф. Турчин, ЖВММФ, **7**, № 6, 1270 (1967).
12. В. Ф Турчин, ЖВММФ, **8**, № 1, 230 (1968).
13. В. Ф. Турчин, В. З. Нозик, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **5**, № 1, 29 (1969).
14. К. Хелстром, Статистическая теория обнаружения сигналов, ИЛ, М., 1963.
15. С. Р Рао, Линейные статистические методы и их применение, изд Наука, М., 1968.
16. D. Slepian, J. Opt. Soc. Amer., **57**, № 7, 918 (1967).
17. М Д. Кендалл, А. Стьюарт, Теория распределений, изд. Наука, М., 1966.
18. W. H. Pierie, Bell. Syst. Techn. J., **47**, № 6, 1065 (1968).
19. В. Б. Гласко, Ю. М. Тимофеев, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **4**, № 3, 303 (1968).
20. А. Н Тихонов, В В Виткевич, В. С Артюх, В. Б. Гласко, А. В. Гончарский, А Г. Ягола, Астрон ж, **46**, вып 3, 472 (1969).
21. S. Twomey, J. Francl. Inst., **279**, № 2, 95 (1965).

22. В. А. Морозов, ЖВМ и МФ, **10**, № 4, 818 (1970).
23. G. I. Buch, J. J. Guistincic, IEEE Trans., **AP-15**, № 3, 376 (1967).
24. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Научные труды РИ АН СССР, **10**, вып. 1—2, 336 (1968).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
28 июля 1969 г.

APPLICATION OF THE METHOD OF STATISTICAL ESTIMATIONS IN SOLVING THE PROBLEM OF THE BRIGHTNESS RECONSTRUCTION IN RADIOASTRONOMY

L. G. Sodin

The brightness reconstruction of the radio source, observed using antennas with limited dimensions, is an incorrect problem (the inverse problem for the 1-st kind equations). In order to solve such problems, the errors must be taken into account. In this connection the inverse problem for the 1-st kind equation in the class of random functions is solved. The solution is sought in the form of functions obtained by the method of statistical estimations. The method considered enables one to take into account not only the additive but also the other types of noises, in particular, multiplicative.