ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIV, № 5 РАДИОФИЗИКА 1971

УДК 538.56 : 519.25

ЗАМКНУТЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕГО ЛИНЕЙНОМУ УРАВНЕНИЮ

Г. И. Овчинников

Предлагается вывод замкнутых уравнений для статистических моментов случайного поля, удовлетворяющего линейному стохастическому уравнению в предположении, что исходное уравнение имеет решение. Полученные выражения для моментов позволяют обобщить результаты теории многократного рассеяния волн, где в качестве исходного используются волновое и параболическое уравнения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В последнее время в теории многократного рассеяния волн для определения моментов случайного поля получил развитие метод, когда, исходя из основного уравнения для поля, устанавливаются уравнения, которым удовлетворяют уже усредненные величины — моменты поля любого порядка [1–5]. Исходным уравнением для поля в указанных работах является волновое или параболическое уравнение, в связи с чем образовалось два подхода к решению задачи—выводу уравнения для усредненных величин.

Первый, более общий подход,—это метод функции Грина, основанный на суммировании ряда теории возмущения, с использованием диаграммной техники Фейнмана. В этом случае для случайного поля, удовлетворяющего волновому уравнению, удается получить уравнения для первого и второго моментов поля. Это так называемое уравнение Дайсона для средней функции Грина и уравнение Бете—Солпитера для ее ковариации [1, 2].

Второй подход—это метод параболического уравнения, когда принимается во внимание оптическая теорема и используется специальная модель среды или случайного процесса. Хотя такой подход и оказался эффективней, чем метод диаграммной техники (поскольку удалось установить уравнение для моментов поля любого порядка [3–5]), он не дает все же точного решения задачи. Так, в работе [3] при выводе уравнения для высших моментов поля, удовлетворяющего параболическому уравнению, был использован локальный метод для среды со слабыми случайными неоднородностями, а в работах [4, 5] аналогичные уравнения для моментов поля были получены в приближении марковского случайного процесса и гауссовых случайных неоднородностей показателя преломления.

Основная особенность задач, рассматриваемых в [1–5], заключается в том, что речь идет, во-первых, о стохастическом линейном уравнении параметрического вида, и, во-вторых, случайные параметры, характеризующие флуктуационные свойства среды, имеют нормальный закон распределения (последнее существенно для суммирования ряда диаграмм).

В настоящей статье предлагается вывод замкнутых уравнений для моментов поля, удовлетворяющего линейному стохастическому уравнению общего вида. Методом, аналогичным методу перенормировок

теории поля, удается получить уравнения для моментов поля, не прибегая к довольно громоздкой процедуре суммирования ряда диаграмм и не используя какой-либо модели случайного процесса. Предлагаемый метод позволяет объединить оба подхода и, в конечном счете, дает возможность выявить различные приближения и уяснить связь между ними. Поскольку задача решается в общем виде, то объектом применения теории могут быть уравнения и более общего вида, чем волновое или параболическое.

Итак, речь пойдет о стохастическом линейном уравнении, которому удовлетворяет случайное поле P:

$$LP = F, \tag{1}$$

F — функция, характеризующая внешние источники, в общем случае имеет случайный характер. Потребуем, чтобы оператор L был линейным невырожденным оператором, тогда

$$LM = 1, \tag{2}$$

где $M = L^{-1}$ есть линейный невырожденный оператор, обратный оператору L, 1 — единичный оператор (оператор тождественного преобразования). В общем случае линейные операторы L и M не коммутируют.

С учетом (2) уравнение (1) формально имеет решение

$$P = MF. \tag{3}$$

Согласно (1), случайная среда характеризуется величинами $L(x;\ \omega)$ и $F(x;\ \omega)$, зависящими от некоторого случайного параметра ω, причем значения ω суть точки вероятностного пространства Ω, в котором определена некоторая вероятностная мера [6]. Задавать вероятностное пространство и меру нет необходимости, если заданы $\langle L \rangle$ и $\langle F \rangle$, где угловые скобки обозначают вероятностное усреднение. Тогда любую случайную величину Z можно представить в виде суммы средней и флуктуационной составляющих:

$$Z = \langle Z \rangle + \tilde{Z}, \quad \langle \tilde{Z} \rangle = 0. \tag{4}$$

Таким образом, задача сводится к следующему: исходя из (1)—(3) и используя представление (4), необходимо установить соотношения для усредненных величин.

2. ФОРМАЛЬНЫЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

Рассмотрим первоначально уравнение (2) и установим соотношения для средних значений $\langle L \rangle$ и $\langle M \rangle$. Усредняя (2) и вычитая полученное уравнение из исходного, приходим к системе уравнений, эквивалентных исходному уравнению (2):

$$\langle LM \rangle = 1; \tag{5}$$

$$LM - \langle LM \rangle = 0. \tag{6}$$

С учетом (4) последние уравнения примут вид

$$\langle L \rangle \langle M \rangle + \langle \tilde{L}\tilde{M} \rangle = 1; \tag{7}$$

$$L\tilde{M} + (\tilde{L} \langle M \rangle - \langle \tilde{L}\tilde{M} \rangle) = 0. \tag{8}$$

Используя (8) и исходное выражение (2), замкнем уравнение (7) отно-

носительно $\langle M \rangle$, а уравнение (8) относительно $\tilde{M}$. Для этого решим формально (8) относительно $\tilde{M}$:

$$\tilde{M} = -M(\tilde{L}\langle M \rangle - \langle \tilde{L}\tilde{M} \rangle). \tag{9}$$

Действуя на (9) оператором $\tilde{L}$, получим

$$\tilde{L}\tilde{M} = -\tilde{L}M(\tilde{L}\langle M \rangle - \langle \tilde{L}\tilde{M} \rangle). \tag{10}$$

Усредняя далее выражение (10) и разрешая его относительно $\langle \tilde{L}\tilde{M} \rangle$, приходим к следующему соотношению:

$$\langle \tilde{L}\tilde{M} \rangle = -(1 - \langle \tilde{L}M \rangle)^{-1} \langle \tilde{L}M\tilde{L} \rangle \langle M \rangle. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (7) и (9), находим уравнения

$$(\langle L \rangle - Q)\langle M \rangle = 1; \tag{12}$$

$$\tilde{M} = -M(\tilde{L} + Q)\langle M \rangle, \tag{13}$$

где введено обозначение

$$Q = (1 - \langle \tilde{L}M \rangle)^{-1} \langle \tilde{L}M\tilde{L} \rangle. \tag{14}$$

Таким образом, формально уравнение (12) является замкнутым относительно среднего значения $\langle M \rangle$. Уравнение (13) также можно представить в замкнутом виде относительно $\tilde{M}$:

$$\tilde{M} = -\langle M \rangle (\tilde{L} + Q)\langle M \rangle [1 + (\tilde{L} + Q)\langle M \rangle]^{-1}. \tag{15}$$

Если в уравнении (6) оператор L записать как

$$L = (\langle L \rangle - Q) + (\tilde{L} + Q), \tag{16}$$

то приходим к соотношению

$$(\langle L \rangle - Q)\tilde{M} = -(\tilde{L} + Q)M + \langle (\tilde{L} + Q)M \rangle. \tag{17}$$

Учитывая, что на основании (11) и (14) второй член в правой части (17) равен нулю, и используя (12), получим из (17)

$$\tilde{M} = -\langle M \rangle (\tilde{L} + Q)M. \tag{18}$$

Замыкая (18) относительно $\tilde{M}$, приходим к соотношению

$$\tilde{M} = -[1 + \langle M \rangle (\tilde{L} + Q)]^{-1} \langle M \rangle (\tilde{L} + Q)\langle M \rangle. \tag{19}$$

Из (13) и (18) следует соотношение взаимности для оператора M и его среднего значения $\langle M \rangle$:

$$M(\tilde{L} + Q)\langle M \rangle = \langle M \rangle (\tilde{L} + Q)M. \tag{20}$$

В заключение отметим: если операторы L и M коммутируют ($LM = ML$), то для средних значений $\langle L \rangle$ и $\langle M \rangle$ справедливо соотношение

$$(\langle L\rangle - Q_L)\langle M\rangle = (\langle M\rangle - Q_M)\langle L\rangle, \tag{21}$$

где

$$Q_Z = (1 - \langle \tilde{Z}Z^{-1}\rangle)^{-1}\langle \tilde{Z}Z^{-1}\tilde{Z}\rangle. \tag{22}$$

Перейдем теперь к выводу уравнения для $\langle P\rangle$. Согласно (1) и (4) уравнения для $\langle P\rangle$ и $\tilde{P}$ принимают вид

$$\langle L\rangle\langle P\rangle + \langle \tilde{L}\tilde{P}\rangle = \langle F\rangle; \tag{23}$$

$$L\tilde{P} + (\tilde{L}\langle P\rangle - \langle \tilde{L}\tilde{P}\rangle) = \tilde{F}. \tag{24}$$

Действуя на (24) оператором $\tilde{L}M$ и усредняя, приходим к уравнению

$$\langle \tilde{L}\tilde{P}\rangle = -\langle \tilde{L}M\tilde{L}\rangle\langle P\rangle + \langle \tilde{L}M\rangle\langle \tilde{L}\tilde{P}\rangle + \langle \tilde{L}M\tilde{F}\rangle. \tag{25}$$

Разрешая (25) относительно $\langle \tilde{L}\tilde{P}\rangle$, получим

$$\langle \tilde{L}\tilde{P}\rangle = -Q\langle P\rangle + T, \tag{26}$$

где

$$T = (1 - \langle \tilde{L}M\rangle)^{-1}\langle \tilde{L}M\tilde{F}\rangle. \tag{27}$$

Подстановка (26) в (23) дает замкнутое уравнение относительно момента $\langle P\rangle$

$$(\langle L\rangle - Q)\langle P\rangle = \langle F\rangle - T. \tag{28}$$

С учетом (12) уравнение (28) имеет решение

$$\langle P\rangle = \langle M\rangle(\langle F\rangle - T). \tag{29}$$

Усредняя (3) и сопоставляя с (29), получим

$$\langle \tilde{M}\tilde{F}\rangle = -\langle M\rangle T. \tag{30}$$

Изложенный метод аналогичен методу перенормировок теории многократного рассеяния волн, когда случайную величину представляют в виде суммы регулярной и случайной частей [2, 7]. Так, в работе [7] было получено уравнение для среднего поля давления, удовлетворяющего волновому уравнению

$$(\Delta + k_0^2 - Q_\varepsilon)\langle P\rangle = 0. \tag{31}$$

Выражение (31) непосредственно следует из (28) для $F = 0$ и оператора $L = \Delta + k_0^2(1 + \varepsilon)$, где Δ — оператор Лапласа, k_0 — волновое число в однородной среде, ε — флуктуации показателя преломления ($\langle\varepsilon\rangle = 0$, $\langle\varepsilon^2\rangle \ll 1$). Оператор Q_ε уравнения (31) определяется согласно (14) для $\tilde{L} = k_0^2\varepsilon$.

Таким образом, предложенный метод является обобщением метода перенормировок [2, 7] на случай линейного стохастического уравнения, что позволяет в общем виде получить замкнутые уравнения для высших моментов поля, удовлетворяющих уравнению (1).

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЫСШИХ МОМЕНТОВ

Полученные выражения для $\langle P \rangle$ и $\langle M \rangle$ нетрудно обобщить на случай моментов любого порядка. Запишем (1) и (2) для i-й точки пространства:

$$L_i P_i = F_i; \tag{32}$$

$$L_i M_i = 1, \tag{33}$$

где введено обозначение $Z_i = Z(x_i)$. Перемножая уравнения (32), (33) для $i = 1, 2, \ldots, n$, находим

$$(L_1 P_1) \cdots (L_n P_n) = F_1 \cdots F_n; \tag{34}$$

$$(L_1 M_1) \cdots (L_n M_n) = 1. \tag{35}$$

Далее, используя сочетательный закон и вводя обозначение

$$Z_{1,n} = (Z_1 \cdots Z_n), \tag{36}$$

представим (34) и (35) в виде, аналогичном (1) и (2):

$$L_{1,n} P_{1,n} = F_{1,n}; \tag{37}$$

$$L_{1,n} M_{1,n} = 1. \tag{38}$$

Используя представление (4), уже для (36) нетрудно обобщить соотношения разд. 2 для средних значений $\langle P \rangle$ и $\langle M \rangle$ на функции $\langle P_{1,n} \rangle$ и $\langle M_{1,n} \rangle$ — моменты поля n-го порядка:

$$(\langle L_{1,n} \rangle - Q_{1,n}) \langle P_{1,n} \rangle = \langle F_{1,n} \rangle - T_{1,n}; \tag{39}$$

$$(\langle L_{1,n} \rangle - Q_{1,n}) \langle M_{1,n} \rangle = 1, \tag{40}$$

где

$$Q_{1,n} = (1 - \langle \tilde{L}_{1,n} M_{1,n} \rangle)^{-1} \langle \tilde{L}_{1,n} M_{1,n} \tilde{L}_{1,n} \rangle; \tag{41}$$

$$T_{1,n} = (1 - \langle \tilde{L}_{1,n} M_{1,n} \rangle)^{-1} \langle \tilde{L}_{1,n} M_{1,n} \tilde{F}_{1,n} \rangle. \tag{42}$$

Выражения (39)—(42) можно обобщить и на случай моментов $\langle Z^*_{1,n} \rangle$ и $\langle Z_{1,i} Z^*_{i+1,n} \rangle$ (знак * указывает на переход к комплексно-сопряженной величине), поскольку для линейных невырожденных операторов имеем

$$LM = L^* M^* = (LM)^* = 1. \tag{43}$$

Таким образом, уравнение (39) есть формально замкнутое полилинейное уравнение n-го порядка относительно любых моментов n-го порядка случайного поля, удовлетворяющего линейному стохастическому уравнению (1).

Остановимся на некоторых представлениях уравнения (40), которое является фундаментальным для решения (39) при соответствующих краевых условиях. Если существует оператор $\langle L_{1,n} \rangle^{-1}$, то из (40) получаем формулу, связывающую $\langle M_{1,n} \rangle$ и $Q_{1,n}$:

$$\langle M_{1,n} \rangle = \langle L_{1,n} \rangle^{-1} (1 + Q_{1,n} \langle M_{1,n} \rangle). \tag{44}$$

Составим тождество

$$(\langle L_{1,n} \rangle - Q_{1,n}) = (\langle M_i \rangle^{-1} \langle (M_{1,n})_i \rangle^{-1} - K^i_{1,n}), \tag{45}$$

где введены следующие обозначения:

$$(Z_{1,n})_i = Z_1 \cdots Z_{i-1} Z_{i+1} \cdots Z_n, \tag{46}$$

$$K^i_{1,n} = (\langle L_i \rangle - Q_i)(\langle L_{1,n} \rangle - Q_{1,n})_i - (\langle L_{1,n} \rangle - Q_{1,n}).$$

Учитывая вид (44) и используя (45), получим из (40) выражение, связывающее $\langle M_{1,n} \rangle$ и $K^i_{1,n}$:

$$\langle M_{1,n} \rangle = \langle M_i \rangle \langle (M_{1,n})_i \rangle (1 + K^i_{1,n} \langle M_{1,n} \rangle). \tag{47}$$

Из (44) и (47) следуют простые соотношения для первых двух моментов в виде

$$\langle M_i \rangle = \langle L_i \rangle^{-1} (1 + Q_i \langle M_i \rangle) \quad (i = 1, 2); \tag{48}$$

$$\langle M_1 M_2 \rangle = \langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle (1 + K_{1,2} \langle M_1 M_2 \rangle); \tag{49}$$

$$K_{1,2} = -\langle \tilde{L}_1 \tilde{L}_2 \rangle + Q_{1,2} + Q_1 Q_2 - \langle L_1 \rangle Q_2 - \langle L_2 \rangle Q_1. \tag{50}$$

Полагая в (48) и (49) $L_2 = L_2^*$, $M_2 = M_2^*$, $L_i = [\Delta_i + k_0^2(1 + \varepsilon_i)]$, получим соответственно так называемое уравнение Дайсона для средней функции Грина и уравнение Бете—Солпитера для ковариации функции Грина исходного волнового уравнения [1, 2]. Однако ядра в указанных уравнениях [1, 2] представляют собой бесконечный ряд—сумму так называемых сильно связанных диаграмм ряда теории возмущений для гауссового случайного поля ε с нулевым средним.

К таким бесконечным рядам можно придти, если разложить оператор Q_i и $Q_{1,2}$ в ряд по степеням параметра $\tilde{L}_i$, полагая, что он мал и имеет нормальное распределение.

Выражение (46), устанавливающее связь между ядром уравнения (47) и оператором $Q_{1,n}$, определяемым согласно (41), позволяет связать соответствующие приближения операторов $Q_{1,n}$ и $K^i_{1,n}$. Для примера рассмотрим выражение (50). Если $\| \langle M \rangle^{-1} \tilde{M} \| \ll 1$, то в операторе Q_i можно положить $M \approx \langle M \rangle$, тогда

$$Q_i \approx \langle \tilde{L}_i \langle M_i \rangle \tilde{L}_i \rangle; \tag{51}$$

$$K_{1,2} \approx -\langle \tilde{L}_1 \tilde{L}_2 \rangle - \sum_{i \neq j = 1}^{2} \langle L_i \rangle \left[(1 - \langle M_i \rangle \langle L_i \rangle) Q_j - \langle \tilde{L}_j \langle M_i \rangle \tilde{L}_i \rangle \right]. \tag{52}$$

Если $\| \langle L \rangle^{-1} \tilde{L} \| \ll 1$, то, считая в выражении для Q_i $M \approx \langle L \rangle^{-1}$, имеем

$$Q_i \approx \langle \tilde{L}_i \langle L_i \rangle^{-1} \tilde{L}_i \rangle; \tag{53}$$

$$K_{1,2} \approx + \langle \tilde{L}_1 \tilde{L}_2 \rangle. \tag{54}$$

Если оператор $L(x; \omega)$ представить в виде суммы невозмущенного $L_0 = L(x; 0)$ и возмущенного $\delta L(x; \omega)$, $\langle \delta L \rangle \neq 0$ операторов, то при $\| L_0^{-1} \delta L \| \ll 1$ приходим к (53) с оператором L_{0i}^{-1}:

$$Q_i \approx \langle \tilde{\mathbb{L}}_i L_{0i}^{-1} \tilde{\mathbb{L}}_i \rangle. \tag{55}$$

Определяя оператор Q уравнения (28) в приближении (55) и полагая, что функция F не случайна, получаем результат работы [8]:

$$(\langle L \rangle - \langle \tilde{L} L_0^{-1} \tilde{\mathbb{L}} \rangle) \langle P \rangle = F + 0(\alpha^3), \tag{56}$$

где $\langle \mathbb{L} \rangle = L_0 + \alpha \langle \mathbb{L}_1 \rangle + \alpha^2 \langle \mathbb{L}_2 \rangle$, $\tilde{L} = \alpha (L_1 - \langle L_1 \rangle)$, α — малый параметр, по которому производится разложение в ряд оператора δL.

Вычисляя операторы Q и K уравнений (48) и (49) в приближении (55), получаем соответственно приближение Бурре для уравнения Дайсона и так называемое лестничное приближение для уравнения Бете—Солпитера [2].

4. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЫСШИХ МОМЕНТОВ ПОЛЯ

Хотя полилинейное уравнение (39) с учетом (40) и дает общее решение для моментов $\langle P_{1,n} \rangle$, однако в ряде случаев достаточно знать какое-нибудь частное решение, соответствующее упрощенному уравнению для моментов поля. Одним из таких уравнений может быть линейное уравнение с оператором в виде суммы или разности операторов исходного уравнения для поля. Так, в работах [3-5] такое частное уравнение для высших моментов поля, удовлетворяющего параболическому уравнению, и устанавливается для конкретной модели случайного процесса.

Итак, используя (32) и (33), составим следующие тождества:

$$L_i P_{1,n} = F_i (P_{1,n})_i; \tag{57}$$

$$L_i M_{1,n} = (M_{1,n})_i. \tag{58}$$

Поскольку уравнения (57) и (58) дают частное решение относительно точки i, то любая линейная комбинация частных решений будет являться формальным решением $P_{1,n}$ и $M_{1,n}$. Суммируя (57) и (58) по $i = 1, \ldots, n$, получим

$$H_n P_{1,n} = S_n; \tag{59}$$

$$H_n M_{1,n} = N_n, \tag{60}$$

где введены обозначения

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} L_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} F_i (P_{1,n})_i, \quad N_n = \sum_{i=1}^{n} (M_{1,n})_i. \tag{61}$$

Усредняя (59) и (60) и следуя методике разд. 2, запишем уравнения относительно моментов $\langle P_{1,n} \rangle$ и $\langle M_{1,n} \rangle$:

$$[\langle H_n \rangle - R(H_n)] \langle P_{1,n} \rangle = \langle S_n \rangle - R(S_n); \tag{62}$$

$$[\langle H_n \rangle - R(H_n)] \langle M_{1,n} \rangle = \langle N_n \rangle - R(N_n), \tag{63}$$

где введено обозначение

$$R(Z_n) = (1 - \langle \tilde{H}_n H_n^{-1} \rangle)^{-1} \langle \tilde{H}_n H_n^{-1} \tilde{Z}_n \rangle. \tag{64}$$

Полученные линейные уравнения n-го порядка не являются замкнутыми относительно функций моментов n-го порядка (как это имеет место для полилинейного уравнения n-го порядка), поскольку правая часть этих уравнений выражается через функции моментов $(n-1)$ порядка. Так, при неслучайной функции F правая часть (61) зависит от линейной комбинации моментов $\langle (P_{1,n})_i \rangle$ порядка $n-1$, т. е. приходим к цепочке зацепляющихся уравнений для моментов поля.

Обратимся к уравнению (63), устанавливающему связь между операторами линейного и полилинейного уравнений. Принимая во внимание (40) и (45), можно представить (63) в следующем виде:

$$[\langle H_n \rangle - R(H_n)] \langle M_{1,n} \rangle = [\langle H_n \rangle - W_n] \langle M_{1,n} \rangle - R(N_n), \tag{65}$$

где

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} [Q_i + \langle (M_{1,n})_i \rangle K_{1,n}^i]. \tag{66}$$

Операторы Q_i и $K^l_{1,n}$ определяются согласно (14) и (46) соответственно.

Непосредственно из (65) следует формула, связывающая оператор $R(H_n)$ с W_n:

$$R(H_n) = W_n + R(N_n)(\langle L_{1,n}\rangle - Q_{1,n}). \tag{67}$$

Подставляя (67) в (62) и используя выражение (39) и (30), получим

$$(\langle H_n\rangle - W_n)\langle P_{1,n}\rangle = \langle N_n\rangle(\langle F_{1,n}\rangle - T_{1,n}). \tag{68}$$

С учетом (63) из (65) следует соотношение

$$(\langle H_n\rangle - W_n)\langle M_{1,n}\rangle = \langle N_n\rangle. \tag{69}$$

Выражения (69) и (68) можно получить из (39) и (40), если подействовать на них оператором $\langle N_n\rangle$. Другими словами, решение для $\langle P_{1,n}\rangle$ ищется в виде суммы частных решений, каждое из которых удовлетворяет следующему уравнению:

$$[\langle L_i\rangle - (Q_i + \langle (M_{1,n})_i\rangle K^i_{1,n})]\langle P_{1,n}\rangle = \langle (M_{1,n})_i\rangle(\langle F_{1,n}\rangle - T_{1,n}) \tag{70}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Отметим, что представление уравнения (62) в виде (68) удобнее для случая $n = 2$, так, для $F = 0$ и $n = 2$ из (68) следует уравнение для $\langle P_1 P_2\rangle$:

$$\langle L_1\rangle + \langle L_2\rangle - (Q_1 + Q_2) - (\langle M_1\rangle + \langle M_2\rangle)K_{1,2}]\langle P_1 P_2\rangle = 0. \tag{70a}$$

В общем случае для моментов порядка $n > 2$ удобнее пользоваться уравнением (62), поскольку в приближении неслучайного оператора H_n^{-1} оператор $R(H_n)$ выражается через сумму корреляционных функций второго порядка случайного оператора $\tilde{L}$. В частности, при $\|\langle H_n\rangle^{-1}\tilde{H}_n\| \ll 1$, $H_n^{-1} \approx \langle H_n\rangle^{-1}$ имеем

$$R(H_n) \approx \langle \sum_{i=1}^{n} \tilde{L}_i \langle \sum_{i=1}^{n} L_i\rangle^{-1} \sum_{i=1}^{n} \tilde{L}_i\rangle. \tag{71}$$

Полученные соотношения можно обобщить и на случай комплексно-сопряженных моментов, представляя оператор H_n в виде

$$H_n = H_m + H_l^* = \sum_{i=1}^{m} L_i + \sum_{i=m+1}^{l} L_i^* \quad (n = m + l). \tag{72}$$

В заключение рассмотрим уравнение (62) для моментов $\langle P_{1,m} P^*_{1,m}\rangle$ поля $P_j = P(x, \rho_j)$, удовлетворяющего параболическому уравнению

$$\left[2k_0 \frac{\partial}{\partial x} - i\Delta(\rho_j) - ik_0^2 \varepsilon(x, \rho_j)\right] P(x, \rho_j) = 0 \qquad (\langle \varepsilon\rangle = 0). \tag{73}$$

В этом случае в уравнении (62) $S_n = 0$, а оператор H_{2m} согласно (72) имеет вид ($Z_j = Z(x, \rho_j)$, $Z_j^* = Z^*(x, \rho_j')$)

$$H_{2m} = 2k_0 \frac{\partial}{\partial x} + i\sum_{j=1}^{m} \Delta(\rho_j') - \Delta(\rho_j) + ik_0^2 \sum_{j=1}^{m} \varepsilon(x, \rho_j') - \varepsilon(x, \rho_j). \tag{74}$$

Для вычисления $R(H_{2m})$ воспользуемся геометрооптическим приближением оператора H_{2m}^{-1}:

$$H_{2m}^{-1} \approx H_0^{-1} = (2k_0)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \, \Theta(x - x'), \tag{75}$$

где $\Theta(x - x')$ — единичная функция с $\Theta(0) = 1/2$.

Тогда с учетом (75) оператор $R(H_{2m})$, определяемый согласно (64) и (71), для статистически однородной среды примет вид

$$R(H_{2m}) \approx \langle \tilde{H}_{2m} H_0^{-1} \tilde{H}_{2m} \rangle = \frac{1}{2k_0} \int_{-\infty}^{\infty} dy \, \Theta(y) \, B_{m,m}(y; \rho_j, \rho_j'), \tag{76}$$

где

$$B_{m,m} = \langle \tilde{H}_{2m}(x; \rho_j, \rho_j') \tilde{H}_{2m}(x'; \rho_j, \rho_j') \rangle \quad (y = x - x').$$

Полагая далее, что на интервале $y \sim y_0$ функция $\Theta(y) \langle P_{1,m} P_{1,m}^* \rangle$ достаточно плавная по сравнению с функцией $B_{m,m}$, спадающей до нуля, приходим окончательно к уравнению Татарского—Чернова для высших моментов поля, удовлетворяющего параболическому уравнению (73):

$$\left[2k_0 \frac{\partial}{\partial x} + i \sum_{j=1}^{m} \Delta(\rho_j') - \Delta(\rho_j) + \frac{1}{4k_0} \int_{-\infty}^{\infty} B_{m,m}(x; \rho_j, \rho_j') \, dx \right] \langle P_{1,m} P_{1,m}^* \rangle = 0. \tag{77}$$

Уравнение (77) было получено в [3] методом локального приближения и в работах [4, 5] в приближении марковского случайного процесса и гауссовых ε.

Автор глубоко признателен С. М. Рытову, Ю. Н. Барабаненкову и Ю. А. Кравцову за интерес к данной работе и обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Барабаненков, Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, Состояние теории распространения волн в случайно-неоднородных средах, изд УФН, 102, № 1, 3 (1970).
2. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
3. Л А. Чернов, Акуст. ж., 15, № 4, 595 (1909).
4. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, № 6, 2106 (1969).
5. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса, АН СССР, Отд. океан., физ. атмосф. и геогр., препринт, М., 1970.
6. A. T. Bharucha-Reid, Proc. Sympos. Appl. Math., 16, 40 (1964).
7. В. Н. Алексеев, В. М. Комиссаров, Тр. Акуст. ин-та, 4, 27 (1968).
8. J. B. Keller, Proc. Sympos. Appl. Math., 16, 145 (1964).

Поступила в редакцию
6 июля 1970 г.

CLOSED EQUATIONS FOR THE MOMENTS OF A RANDOM FIELD SATISFIED THE LINEAR EQUATION

G. I. Ovchinnikov

The deduction of closed equations is suggested for statistical moments of the random field satisfying the linear stohastic equation under the assumption that the initial equation has a solution. The obtained expressions for the moments enable one to generalize the results of multiple wave scattering theory in which the wave and parabolic equation are used as the initial equation.