ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIV, № 5 РАДИОФИЗИКА 1971

УДК 538 56

О ДИФФУЗИИ ЛУЧЕЙ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. И. Кляцкин, В. И. Татарский

Исследуются условия, при которых распространение лучей в среде со случайными неоднородностями может быть описано при помощи уравнения Эйнштейна—Фоккера. Показано, что это обоснованно лишь в приближении малых углов В этом приближении рассмотрена относительная диффузия пары лучей.

В отличие от одиночного луча распределение вероятностей для пары лучей не является гауссовым Средний квадрат расстояния между лучами растет пропорционально кубу пройденного расстояния, но коэффициент пропорциональности различен в области малых, и в области больших взаимных расстояний Последние отделены друг от друга небольшой областью экспоненциального роста, начало которой совпадает с началом области сильных флуктуаций интенсивности.

В целом ряде работ для описания распространения волн в среде со случайными неоднородностями используется уравнение диффузии лучей [1–4]. При этом само уравнение диффузии (уравнение Эйнштейна — Фоккера, которое в дальнейшем будет сокращенно обозначаться как УЭФ) выписывается обычно на основании интуитивных соображений, опирающихся на аналогию с хорошо известными задачами, приводящими к указанному уравнению. Само же динамическое уравнение задачи (в данном случае — уравнения для лучей) при этом используется только для подсчета коэффициентов, входящих в УЭФ.

Как отмечалось в работах [5, 6], при этом остается неясным, при каких условиях можно считать оправданным применение УЭФ (ряд таких условий был предложен в [6] из физических соображений). В то же время понятно, что должны существовать некоторые условия, накладываемые на входящие в динамическое уравнение функции, и некоторые ограничения на параметры, от которых зависит решение, при которых УЭФ будет являться логическим следствием динамических уравнений.

Первая часть этой работы посвящена выяснению условий, при которых это имеет место. Далее в работе рассматриваются некоторые новые задачи о диффузии лучей в приближении малых углов, а также исследуются границы применимости УЭФ. В Приложении описан удобный метод вывода УЭФ, соответствующего динамической системе произвольного вида.

1. О ВОЗМОЖНОСТИ ОПИСАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛУЧЕЙ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА—ФОККЕРА

С чисто формальной точки зрения к УЭФ приводит следующая схема. Пусть $\xi = \{\xi_1(s), \xi_2(s), \ldots, \xi_n(s)\}$ удовлетворяет системе динамических уравнений

$$\frac{d\xi_i(s)}{ds} = v_i(\xi, s) + f_i(\xi, s), \tag{1}$$

где $v_i(\xi, s)$ — детерминированные функции, а $f_i(\xi, s)$ — случайные функции $(n+1)$ переменной, обладающие следующими свойствами:

а) $f_i(\xi, s)$ — гауссово случайное поле в $(n+1)$-мерном пространстве (ξ, s);

$$\text{б)} \qquad \langle f_i(\xi, s)\rangle = 0; \tag{2}$$

$$\text{в)} \qquad \langle f_i(\xi, s)\, f_k(\xi', s')\rangle = 2\delta(s-s')\, F_{ik}(\xi, \xi', s).$$

В этом случае плотность вероятностей для решения $\xi(s)$ системы (1), т. е. функция

$$P_s(x) = \langle \delta(\xi_1(s)-x_1)\ldots\delta(\xi_n(s)-x_n)\rangle = \langle \delta_n(\xi(s)-x)\rangle$$

(здесь $\xi(s)$ — решение (1), соответствующее определенной реализации $f(\xi, s)$, а усреднение проводится по множеству всех реализаций f) удовлетворяет УЭФ

$$\frac{\partial P_s(x)}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial x_k}\{[v_k(x, s) + A_k(x, s)]\; P_s(x)\} - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_e}\,[F_{ke}(x, x, s)\; P_s(x)] = 0. \tag{3}$$

В уравнении (3) введено обозначение

$$A_k(x, s) = \left[\frac{\partial F_{ke}(x, y, s)}{\partial x_e}\right]_{y=x}$$

и по повторяющимся индексам производится суммирование.

Отметим, что для реальных задач корреляционная функция $\langle f_i(\xi, s)\, f_k(\xi', s')\rangle = B_{ik}(\xi, \xi'; s, s')$ не имеет, конечно, вида (2в). Поэтому непосредственно использовать схему (1)—(3) не удается. Для случая, когда условия (2а), (2б) выполнены, но условие δ-коррелированности (2в) нарушено, уравнение (3) является приближенным, причем в этом случае под $F_{ke}(x, y, s)$ следует понимать величину

$$F_{ke}(x, y, s) = \int\limits_0^s B_{ke}(x, y, s, s')\, ds'. \tag{4а}$$

Для статистически однородных по s случайных функций вместо (4а) при больших значениях $s \gg s_0$ можно использовать формулу

$$F_{ke}(x, y) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \langle f_k(x, s)\, f_e(y, s')\rangle\, ds'. \tag{4б}$$

Здесь s_0 — интервал корреляции $f(x, s)$ по переменной s. В этом случае вместо (3) имеет место уравнение

$$\hat{E}P_s(x) = -\frac{\partial S'_k(x, s)}{\partial x_k} + \ldots, \tag{5}$$

где $\hat{E}$ — оператор, стоящий в левой части (3), а $S'_k(x, s)$ — поправки к вектору плотности потока вероятности, связанные с конечностью величины s_0. Отметим, что при $s_0 \to 0$ правая часть (5) стремится к нулю, и мы возвращаемся к (3).

Изложенные факты хорошо известны (см., например, [7, 8]). Не претендуя на новизну результатов, мы тем не менее сочли целесообразным привести в Приложении вывод УЭФ, а также поправок к нему, по работе Новикова [9]. Этот метод обладает высокой степенью автоматизма и удобен для практического использования. Им можно пользоваться и в случае, когда $n=\infty$ (см. [9–11]).

Обратимся к уравнениям лучей. В большинстве работ по диффузии лучей в качестве независимой переменной s используется длина луча l. Принимая l за независимую переменную, запишем уравнения лучей в форме

$$\frac{dr_k(l)}{dl}=\tau_k(l),\quad \frac{d\tau_i(l)}{dl}=(\delta_{ik}-\tau_i\tau_k)\frac{\partial\mu(\boldsymbol{r})}{\partial r_k},\tag{6}$$

$\mu=\ln n$, n — показатель преломления. Если ввести 6-векторы $\xi=\{r_1, r_2, r_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, $\boldsymbol{v}=\{\tau_1, \tau_2, \tau_3, 0, 0, 0\}$ и $\boldsymbol{f}=\{0, 0, 0, a_1, a_2, a_3\}$, где $a_i=(\delta_{ik}-\tau_i\tau_k)\dfrac{\partial\mu(\boldsymbol{r})}{\partial r_k}$, то систему уравнений (6) можно записать в виде (1). Условия (2а), (2б) могут быть приняты без особых оговорок. Однако что касается перехода к аппроксимации корреляционной функции для f при помощи δ-функции, то здесь мы сталкиваемся с непреодолимым затруднением. Дело в том, что $a_i=a_i(r,\tau)=a_i(\xi)$ и не зависит от $s=l$. Формально можно считать, что функция $B_{ke}(\xi, \xi'; s, s')$ (не зависящая в данном случае от s, s') имеет по переменной $(s-s')$ бесконечный интервал корреляции, ибо при сколь угодно большом росте величины $(s-s')$, но фиксированных ξ, ξ', эта функция не убывает. Таким образом, записать УЭФ, соответствующее динамической системе (6), не удается.

Можно, однако, записать уравнения лучей, взяв за независимую переменную координату z. Если уравнение луча искать в форме $\boldsymbol{R}_\perp=\boldsymbol{R}_\perp(z)$, где $\boldsymbol{R}_\perp=\{x, y\}$ — поперечное смещение, то вместо (6) будем иметь динамическую систему

$$\frac{d\boldsymbol{R}_\perp(z)}{dz}=\frac{\boldsymbol{\tau}_\perp}{\sqrt{1-\boldsymbol{\tau}_\perp^2}},\quad \frac{d\boldsymbol{\tau}_\perp(z)}{dz}=\frac{\boldsymbol{a}_\perp(\boldsymbol{R}_\perp, \boldsymbol{\tau}_\perp, z)}{\sqrt{1-\boldsymbol{\tau}_\perp^2}},\tag{7}$$

где $\boldsymbol{\tau}_\perp=\{\tau_x, \tau_y\}$, $\boldsymbol{a}_\perp=\{a_1, a_2\}$. Заметим, однако, что в этой форме уравнение лучей можно использовать лишь до первой точки поворота, где обращается в нуль знаменатель $\sqrt{1-\boldsymbol{\tau}_\perp^2}$. Отсюда вытекает, что в статистической задаче (7) можно использовать лишь в области, где мала вероятность отрицательных τ_z, т. е. в области малых углов отклонений луча. Для системы (7) $s=z$ уже входит в число аргументов $\boldsymbol{f}$, и поэтому здесь можно перейти к УЭФ.

Если вместо $\boldsymbol{\tau}_\perp$ ввести углы θ, φ согласно формулам $\tau_x=\sin\theta\cos\varphi$, $\tau_y=\sin\theta\sin\varphi$, получившуюся после этого систему уравнений записать в форме (1) и вычислить величины F_{ke} (по формуле (4б)), A_k, то мы получим следующее УЭФ для функции $P_z(\rho, \theta, \varphi)=\langle\delta_2(\boldsymbol{R}_\perp(z)-\rho)\times\delta(\theta(z)-\theta)\,\delta(\varphi(z)-\varphi)\rangle$:

$$\frac{\partial P_z(\rho, \theta, \varphi)}{\partial z}+\operatorname{tg}\theta\left[\cos\varphi\frac{\partial P_z}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial P_z}{\partial y}\right]+2D\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{P_z}{\sin 2\theta}\right]=$$

$$=D\left[\frac{\partial^2 P_z}{\partial\theta^2}+\frac{4}{\sin^2 2\theta}\frac{\partial^2 P_z}{\partial\varphi^2}\right].\tag{8}$$

Здесь $\rho=\{x, y\}$, D — коэффициент диффузии, который возникает при вычислении F_{ke} и соответствует принятой для (8) модели статистически однородных и изотропных флуктуаций μ:

$$D = \pi^2 \int\limits_0^\infty \varkappa^3 \Phi(\varkappa) d\varkappa, \tag{9}$$

$\Phi(\varkappa)$ — трехмерная спектральная плотность корреляционной функции μ. Выражение (9) для D совпадает с приводившимся в работах [1–4].

Однако уравнение (8) отличается от УЭФ, использовавшегося в [2–4]. В этих работах вместо P_z фигурировала функция $W_l(\theta, \varphi)$, которая, если пренебречь различием между l и z, связана с P_z соотношением

$$\sin\theta\, W_z(\theta, \varphi) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} P_z(\rho, \theta, \varphi)\, d^2\rho. \tag{10}$$

Интегрируя (8) по ρ, получим для W_z уравнение

$$\sin\theta \frac{\partial W_z}{\partial z} = D \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\operatorname{tg}\theta \frac{\partial}{\partial\theta}[\cos\theta\, W_z]\right\} + \frac{D}{\sin\theta\cos^2\theta} \frac{\partial^2 W_z}{\partial\varphi^2}. \tag{11}$$

В то же время в [2–4] приводится уравнение

$$\sin\theta \frac{\partial W_l}{\partial l} = D \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta \frac{\partial W_l}{\partial\theta}\right\} + \frac{D}{\sin\theta} \frac{\partial^2 W_l}{\partial\varphi^2}. \tag{12}$$

Очевидно, уравнения (12) и (11) будут совпадать, если в (11) положить $\cos\theta = 1$, что справедливо в области малых углов θ, и не учитывать различия между l и z.

Как отмечалось выше, уравнение (12), в котором l принято за независимую переменную, не удается обосновать, исходя из динамического уравнения задачи. Что касается (11), то это уравнение обладает существенным недостатком: в нем выделено направление z, что имеет смысл лишь до тех пор, пока $\theta \ll 1$. Так как и сама динамическая система (7) законна лишь при $\theta < \pi/2$, то ясно, что уравнение (11) имеет смысл лишь в области $\theta \ll 1$. Но в этой области уже не следует делать различия между θ и $\sin\theta$. В таком случае и (11), и (12) принимают одинаковый вид:

$$\frac{\partial W_z}{\partial z} = D\left\{\frac{1}{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\theta\frac{\partial W_z}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\theta^2}\frac{\partial^2 W_z}{\partial\varphi^2}\right\}. \tag{13}$$

Величины θ и φ при $\theta \ll 1$ связаны с $\boldsymbol{\tau}_\perp$ соотношениями $\tau_x = \theta\cos\varphi$, $\tau_y = \theta\sin\varphi$, т. е. являются полярными координатами на плоскости $\boldsymbol{\tau}_\perp$. Выражение в фигурных скобках в (13) является записанным в полярных координатах оператором Лапласа $\Delta_\perp W_z$, т. е. в декартовых координатах (13) имеет вид

$$\frac{\partial W_z}{\partial z} = D\left[\frac{\partial^2 W_z}{\partial\tau_x^2} + \frac{\partial^2 W_z}{\partial\tau_y^2}\right].$$

Это уравнение можно получить непосредственно из (7), если положить там $\sqrt{1-\boldsymbol{\tau}_\perp^2} \approx 1$. В этом случае вместо (7) мы получим приближенную систему уравнений для лучей в приближении малых углов:

$$\frac{d\boldsymbol{R}_\perp(z)}{dz} = \boldsymbol{\tau}_\perp(z), \qquad \frac{d\boldsymbol{\tau}_\perp(z)}{dz} = \nabla_\perp\mu(\boldsymbol{R}_\perp, z). \tag{14}$$

Эта система уравнений и будет в дальнейшем использоваться для расчета диффузии лучей.

2. ДИФФУЗИЯ ЛУЧЕЙ В МАЛОУГЛОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Соответствующее (14) УЭФ согласно (3) имеет вид

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + \tau_\perp \frac{\partial P_z}{\partial R_\perp} = D \frac{\partial^2 P_z}{\partial \tau_\perp^2} \tag{15}$$

(в такой форме оно приводится в [6]). Это уравнение легко решается, и его решение при начальном условии $P_0(R_\perp, \tau_\perp) = \delta(R_\perp)\delta(\tau_\perp)$ представляет гауссово распределение с моментами

$$\begin{gathered} \langle R_{\perp i}(z)\, R_{\perp k}(z)\rangle = \frac{2}{3} D\delta_{ik} z^3, \quad \langle R_{\perp i}(z)\tau_{\perp k}(z)\rangle = D\delta_{ik} z^2, \\ \langle \tau_{\perp i}(z)\, \tau_{\perp k}(z)\rangle = 2D\delta_{ik} z. \end{gathered} \tag{16}$$

Эти выражения хорошо известны (см., например, [6]).

На основе (14) легко получить и продольную корреляционную функцию смещений луча подобно тому, как это делалось в [13]. Умножим (14) на $R_\perp(z')$, где $z' < z$, и усредним. В результате получим

$$\frac{d\langle R_\perp(z) R_\perp(z')\rangle}{dz} = \langle \tau_\perp(z)\, R_\perp(z')\rangle,$$

$$\frac{d\langle \tau_\perp(z)\, R_\perp(z')\rangle}{dz} = \langle R_\perp(z')\, \nabla_\perp \mu(R_\perp, z)\rangle.$$

Но так как диффузионному приближению соответствует модель дельта-коррелированных по z неоднородностей, то $R_\perp(z')$ некоррелировано с «последующим» значением $\nabla_\perp \mu(R_\perp, z)$, т. е. $\langle R_\perp(z')\, \nabla_\perp \mu(R_\perp, z)\rangle = 0$ при $z' < z$. Отсюда $\langle \tau_\perp(z)\, R_\perp(z')\rangle = \langle \tau_\perp(z') R_\perp(z')\rangle = 2Dz'^2$. Подставив это значение в первое из уравнений и решив его при начальном условии $\langle R_\perp(z)\, R_\perp(z')\rangle|_{z=z'} = (4/3)Dz'^3$, найдем

$$\langle R_\perp(z)\, R_\perp(z')\rangle = 2Dz'^2\left(z - \frac{1}{3} z'\right),$$

$$\frac{\langle R_\perp(z)\, R_\perp(z')\rangle}{\sqrt{\langle R_\perp^2(z)\rangle \langle R_\perp^2(z')\rangle}} = \left(1 + \frac{3}{2}\zeta\right)(1+\zeta)^{-3/2}, \quad \zeta = |z - z'|/z_{\min}.$$

Рассмотрим теперь задачу о совместной диффузии двух лучей. В этом случае мы имеем следующую динамическую систему восьмого порядка:

$$\frac{dR_{\perp i}}{dz} = \tau_{\perp i}, \quad \frac{d\tau_{\perp i}}{dz} = \frac{\partial \mu(R_{\perp i}, z)}{\partial R_{\perp i}}, \tag{17}$$

$i = 1, 2$ — номера лучей. Введя 8-векторы $\xi = \{R_{\perp 1}, R_{\perp 2}, \tau_{\perp 1}, \tau_{\perp 2}\}$, $v = \{\tau_{\perp 1}, \tau_{\perp 2}, 0, 0, 0, 0\}$, $f = \left\{0, 0, 0, 0, \frac{\partial \mu(R_{\perp 1}, z)}{\partial R_{\perp 1}}, \frac{\partial \mu(R_{\perp 2}, z)}{\partial R_{\perp 2}}\right\}$, мы сможем записать систему (17) в форме (1). Вычисляя затем F_{ke} по формуле (4б) для случая статистически однородных и изотропных флуктуаций μ, получим

$$F_{ke}(x, x, s) = \begin{Vmatrix} 0_4 & 0_4 \\ 0_4 & W_4 \end{Vmatrix}, \quad W_4 = \begin{Vmatrix} D & 0 & W_{xx} & W_{xy} \\ 0 & D & W_{xy} & W_{yy} \\ W_{xx} & W_{xy} & D & 0 \\ W_{xy} & W_{yy} & 0 & D \end{Vmatrix}, \tag{18}$$

где 0_4 — нулевая матрица 4-го порядка,

$$W_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A(\rho)}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}, \quad \alpha,\ \beta = 1,\ 2, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y \tag{19}$$

и

$$A(\rho) = 2\pi \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\varkappa)\exp(i\varkappa\rho)\,d^2\varkappa, \quad \rho = R_{\perp 1} - R_{\perp 2}.$$

Функции $A_k(x,\ s)$ в данном случае равны нулю. Соответствующее (18) УЭФ имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial P_z(R_{\perp 1},\ R_{\perp 2},\ \tau_{\perp 1},\ \tau_{\perp 2})}{\partial z} + \tau_{\perp 1}\frac{\partial P_z}{\partial R_{\perp 1}} + \tau_{\perp 2}\frac{\partial P_z}{\partial R_{\perp 2}} = \\ = D\left[\frac{\partial^2 P_z}{\partial \tau_{\perp 1}^2} + \frac{\partial^2 P_z}{\partial \tau_{\perp 2}^2}\right] + 2\,\frac{\partial^2 W_{\alpha\beta}(R_{\perp 1} - R_{\perp 2})\,P_z}{\partial \tau_{\perp 1\alpha}\,\partial \tau_{\perp 2\beta}},\end{gathered} \tag{20}$$

где по индексам $\alpha,\ \beta = x, y$ производится суммирование.

В уравнении (20) можно ввести новые переменные $\rho = R_{\perp 1} - R_{\perp 2}$, $R = (1/2)(R_{\perp 1} + R_{\perp 2})$, $l = \tau_{\perp 1} - \tau_{\perp 2}$, $\tau = (1/2)(\tau_{\perp 1} + \tau_{\perp 2})$. После перехода к новым переменным оказывается возможным выполнить интегрирование по R и τ и получить в результате уравнение для функции

$$P_z(\rho,\ l) = \langle\, \delta_2(R_{\perp 1}(z) - R_{\perp 2}(z) - \rho)\,\delta_2(\tau_{\perp 1}(z) - \tau_{\perp 2}(z) - l)\rangle,$$

описывающей относительную диффузию двух лучей:

$$\frac{\partial P_z(\rho,\ l)}{\partial z} + l\,\frac{\partial P_z}{\partial \rho} = D_{\alpha\beta}(\rho)\,\frac{\partial^2 P_z}{\partial l_\alpha\,\partial l_\beta}. \tag{21}$$

Здесь

$$\begin{gathered}D_{\alpha\beta}(\rho) = 2\,[D\delta_{\alpha\beta} - W_{\alpha\beta}(\rho)] = 2\pi \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos\varkappa\rho]\ \varkappa_\alpha\varkappa_\beta\,\Phi(\varkappa)\,\times \\ \times\, d^2\varkappa = \frac{\rho_\alpha\rho_\beta}{\rho^2}\left[A''(\rho) - \frac{A'(\rho)}{\rho}\right] + \delta_{\alpha\beta}\left[\frac{A'(\rho)}{\rho} - A''(0)\right]\end{gathered} \tag{22}$$

и штрихами обозначены производные от функции $A(\rho)$ по скалярному аргументу.

Из четности функции $A(\rho)$ следует, что

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{A'(\rho)}{\rho} = A''(0) = -2D.$$

Если l_0 — радиус корреляции для градиентов показателя преломления, то при $\rho \gg l_0$ функции $A''(\rho)$ и $A'(\rho)/\rho$ стремятся к нулю. Поэтому $\lim\limits_{\rho\to\infty} D_{\alpha\beta}(\rho) = 2D\delta_{\alpha\beta}$. Это соотношение означает, что при больших, по сравнению с l_0, начальных расстояниях между лучами их относительная диффузия происходит с удвоенным коэффициентом диффузии, что соответствует независимой диффузии каждого луча. Совместное распределение вероятностей в этом случае можно считать гауссовым. В общем же случае уравнение (21) решить не удается. Ясно лишь, что при переменном коэффициенте диффузии (22) решение не является гауссовым распределением.

Случай $\rho \ll l_0$ допускает, однако, более полный анализ. Разлагая в (22) $1 - \cos \varkappa\rho$ в ряд, получим, что при $\rho \ll l_0$

$$D_{\alpha\beta}(\rho) \approx \pi \rho_i \rho_j \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \varkappa_i \varkappa_j \varkappa_\alpha \varkappa_\beta \Phi(\varkappa) d^2\varkappa.$$

Ясно, что в статистически изотропном случае

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \varkappa_i \varkappa_j \varkappa_\alpha \varkappa_\beta \Phi(\varkappa) d^2\varkappa = B(\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}).$$

Сворачивая это равенство по парам индексов i, j и α, β, найдем, что

$$B = \frac{\pi}{4} \int\limits_0^{\infty} \varkappa^5 \Phi(\varkappa)\, d\varkappa$$

и

$$D_{\alpha\beta}(\rho) = \pi B(\rho^2 \delta_{\alpha\beta} + 2\rho_\alpha \rho_\beta). \tag{23}$$

Заметим, что величина B определяет в приближении геометрической оптики амплитудные флуктуации: $\sigma_\chi^2 = (1/3)\pi B z^3$ [12]; это можно было ожидать заранее, так как амплитудные флуктуации связаны с изменением сечения лучевой трубки, т. е. с относительными смещениями лучей. Коэффициенты диффузии $D_{\alpha\beta}$ можно использовать в форме (23) лишь в том случае, если средний квадрат расстояния между лучами мал по сравнению с l_0^2.

Если уравнение (22) с коэффициентами (23), т. е. уравнение

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + l_\alpha \frac{\partial P_z}{\partial \rho_\alpha} = \pi B\,[\rho^2 \delta_{\alpha\beta} + 2\rho_\alpha \rho_\beta]\, \frac{\partial^2 P_z}{\partial l_\alpha\, \partial l_\beta} \tag{24}$$

умножить на l^2 и проинтегрировать по всем ρ, l, то после интегрирования по частям получим уравнение

$$\frac{d\langle l^2(z)\rangle}{dz} = 8\pi B \langle \rho^2(z)\rangle. \tag{25}$$

Умножая (24) на ρ^2 и на ρl, получим таким же образом еще пару уравнений

$$\frac{d\langle \rho^2(z)\rangle}{dz} = 2\langle \rho l\rangle, \quad \frac{d\langle \rho(z)\, l(z)\rangle}{dz} = \langle l^2(z)\rangle. \tag{26}$$

Уравнения (25), (26) образуют замкнутую систему, решение которой, соответствующее начальным условиям $\langle \rho^2(0)\rangle = \rho_0^2$, $\langle \rho(0)\, l(0)\rangle = 0$, $\langle l^2(0)\rangle = 0$, имеет вид

$$\langle \rho^2(z)\rangle = \frac{1}{3}\rho_0^2 \left\{ e^{\alpha z} + 2e^{-\alpha z/2} \cos\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} z\right)\right\}; \tag{27}$$

$$\langle \rho(z)\, l(z)\rangle = \frac{\alpha}{6}\rho_0^2 \left\{ e^{\alpha z} - e^{-\alpha z/2}\left[\cos\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} z\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} z\right)\right]\right\}; \tag{28}$$

$$\langle l^2(z)\rangle = \frac{\alpha^2\rho_0^2}{6}\left\{ e^{\alpha z} - e^{-\alpha z/2}\left[\cos\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} z\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} z\right)\right]\right\}, \tag{29}$$

где $\alpha = \sqrt[3]{16\pi B}$. Для области $\alpha z \ll 1$ из (27)—(29) можно получить

$$\langle \rho^2(z) \rangle = \rho_0^2 \left(1 + \frac{1}{6}\, \alpha^3 z^3 + \ldots\right), \quad \langle \rho(z)\, l(z) \rangle = \frac{\rho_0^2}{4}\, \alpha^3 z^2 + \ldots,$$

$$\langle l^2(z) \rangle = \frac{1}{2}\, \rho_0^2 \alpha^3 z + \ldots$$

Если существует такой интервал значений z, на котором $\alpha z \gg 1$, но все еще $\rho_0^2 e^{\alpha z} \ll l_0^2$ (а такой интервал всегда существует для достаточно малых ρ_0), то в этой области происходит экспоненциальный рост $\langle \rho^2 \rangle$, $\langle \rho l \rangle$, $\langle l^2 \rangle$. Заметим, что начало этой области экспоненциального роста, определяемое условием $\alpha z \sim 1$, совпадает с началом области сильных флуктуаций интенсивности, так как $\alpha z \sim \sqrt[3]{Bz^3} \sim \sigma_\chi^{2/3}$.

Формулы (27)—(29) становятся несправедливыми, когда $\langle \rho^2(z) \rangle$ сравнимо с l_0^2. При бо́льших значениях z относительная диффузия описывается формулами (16), в которых D заменено на $2D$.

3. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ДИФФУЗИОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Как отмечалось выше, УЭФ для диффузии лучей удается обосновать только в малоугловом приближении. Отсюда, согласно (16), возникает первое из условий применимости метода

$$\langle \tau_\perp^2 \rangle \ll 1 \qquad \text{или} \qquad Dz \sim \frac{\sigma_\mu^2 z}{l_0} \ll 1. \tag{30}$$

Это ограничение накладывает очень слабое условие на поперечное смещение луча: $\langle R_\perp^2(z) \rangle \ll z^2$.

Рассмотрим теперь поправки, связанные с конечностью продольного радиуса корреляции. Для этого необходимо найти поправки к плотности потока вероятности, входящие в (5), а также учесть конечность верхнего предела интегрирования в (4 а). Ясно, что различие между (4 а) и (4 б) исчезает при выполнении условия

$$z \gg l_0. \tag{31}$$

Предполагая, что это условие выполнено, найдем величины f_{ke}, определяющие отклонения от УЭФ (см. Приложение, (П.1)):

$$f_{ke}(\xi_1, \xi_2, s) = \int_0^\infty s' B_{ke}(\xi_1, \xi_2, s, s - s')\, ds'. \tag{32}$$

Для уравнений (14) матрица f_{ke} имеет вид

$$f_{ke} = \begin{Vmatrix} 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & \varphi \end{Vmatrix}, \quad 0_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \varphi = \begin{Vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{12} \end{Vmatrix},$$

где

$$\varphi_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_\alpha\, \partial \rho_\beta} \int_0^\infty \zeta B_\mu(\rho, \zeta)\, d\zeta \tag{33}$$

и

$$\xi_1 = \{x_1, y_1, \tau_{x1}, \tau_{y1}\}, \; \xi_2 = \{x_2, y_2, \tau_{x2}, \tau_{y2}\}, \; \rho = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2\}.$$

Для статистически однородной и изотропной модели

$$\varphi_{\alpha\beta}(\rho) = -l_0^2 \sigma_\mu^2 \frac{\partial^2 U(\rho)}{\partial \rho_\alpha\, \partial \rho_\beta}, \tag{34}$$

где $U(\rho)$ — безразмерная функция от модуля вектора ρ.

Вычисляя поправки S'_k, в силу четности функции U по ρ, получим, что единственная отличная от нуля поправка равна

$$S'_k = \left\{0, 0, \varphi_{11}(0)\frac{\partial P_z}{\partial x} + \varphi_{12}(0)\frac{\partial P_z}{\partial y}, \ \varphi_{21}(0)\frac{\partial P_z}{\partial x} + \varphi_{22}(0)\frac{\partial P_z}{\partial y}\right\}, \tag{35}$$

так что уравнение (5) записывается в форме (ср. с уравнением (15))

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} + \tau_\perp \frac{\partial P_z}{\partial R_\perp} - D\frac{\partial^2 P_z}{\partial \tau_\perp^2} = -\varphi_{\alpha\beta}(0)\frac{\partial^2 P_z}{\partial \tau_{\perp\alpha}\,\partial R_{\perp\beta}}. \tag{36}$$

Уравнение (36) легко решается, если перейти от P_z к соответствующей характеристической функции. Решение имеет вид гауссова распределения с параметрами

$$\langle R_{\perp i}(z) R_{\perp k}(z)\rangle = \frac{2}{3} D\delta_{ik} z^3 - \frac{\varphi_{ik}(0) + \varphi_{ki}(0)}{2} z^2,$$

$$\langle R_{\perp i}(z)\tau_{\perp k}(z)\rangle = D\delta_{ik} z^2 - \varphi_{ki}(0) z,$$

$$\langle \tau_{\perp i}(z)\tau_{\perp k}(z)\rangle = 2D\delta_{ik} z.$$

Сравнивая эти формулы с (16), убеждаемся в том, что для применимости УЭФ должно выполняться неравенство

$$z \gg \frac{\max \varphi_{ik}(0)}{D}. \tag{37}$$

Но, как следует из (34), $\varphi_{ik}(0) \sim \sigma_\mu^2$, в то время как $D \sim \sigma_\mu^2/l_0$. Поэтому условие (37) фактически совпадает с (31).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим систему уравнений (1), причем пусть $f_i(\xi, s)$ удовлетворяет условиям (2а), (2б). Для дальнейшего нам понадобится вариационная производная $\delta\xi_i(s)/\delta f_l(\eta, s')$. Чтобы найти ее, проинтегрируем (1) по s от 0 до s, а затем подействуем на это равенство оператором $\delta/\delta f_e'(\eta', s')$ (правила обращения с оператором вариационного дифференцирования можно найти, например, в [12], приложение 1; аналогичные вычисления содержатся в [11]). В результате получим

$$\frac{\delta\xi_l(s)}{\delta f_e(\eta', s')} = \delta_{le}\delta_n(\xi(s') - \eta') + \int_{s'}^{s} d\tau [\nabla_k v_l(\xi(\tau), \tau) + \nabla_k f_l(\xi(\tau), \tau)] \frac{\delta\xi_k(\tau)}{\delta f_e(\eta', s')}. \tag{П.1}$$

В этом равенстве нижний предел интегрирования взят равным s', так как при $\tau < s'$ вариационная производная под знаком интеграла обращается в нуль ($\xi_k(\tau)$, функционально не содержит «последующих» значений f). Полагая в (П.1) $s' = s$, получаем

$$\frac{\delta\xi_l(s)}{\delta f_e(\eta', s)} = \delta_{le}\delta_n(\xi(s) - \eta'). \tag{П.2}$$

Нам понадобится, однако, значение вариационной производной и при $s' \neq s$. Для этого общего случая (П.1) представляет собой интегральное уравнение. Мы получим разложение решения этого уравнения в ряд Тейлора по переменной $(s - s')$. Основной член этого разложения дается формулой (П.2). Дифференцируя (П.1) по s' и полагая затем $s' = s$, найдем с учетом (П.2) значение производной $\left\{ \frac{\partial}{\partial s'} \times \times \left[\frac{\delta \xi_i(s)}{\delta f_e(\eta', s')} \right] \right\}_{s'=s}$. Это позволяет написать первые два члена разложения в ряд Тейлора:

$$\frac{\delta \xi_i(s)}{\delta f_e(\eta, s')} = \delta_{ie} \delta_n(\xi(s) - \eta) + (s - s') \{ \delta_{ie} \nabla_k [\delta_n(\xi(s) - \eta) \times$$

$$\times (v_k(\eta, s) + f_k(\eta, s)] + [\nabla_e v_i(\eta, s) + \nabla_e f_i(\eta, s)] \delta_n(\xi(s) - \eta)\} + \quad (\text{П.3})$$

$$+ O((s - s')^2), \qquad \nabla_k \equiv \frac{\partial}{\partial \eta_k}.$$

Перейдем теперь к выводу УЭФ. Введем плотность вероятности

$$P_s(x) \equiv \langle \delta_n(\xi(s) - x) \rangle. \quad (\text{П.4})$$

Дифференцируя (П.4) по s, получим

$$\frac{\partial P_s(x)}{\partial s} = \left\langle - \frac{\partial \delta_n(\xi(s) - x)}{\partial x_k} \frac{d\xi_k(s)}{ds} \right\rangle = - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \delta_n(\xi(s) - x) \times$$

$$\times [v_k(\xi, s) + f_k(\xi, s)] \rangle = - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \delta_n(\xi(s) - x) [v_k(x, s) + \quad (\text{П.5})$$

$$+ f_k(x, s)] \rangle = - \frac{\partial}{\partial x_k} \{ v_k(x, s) P_s(x) + \langle f_k(x, s) \delta_n(\xi(s) - x) \rangle \}.$$

Для вычисления второго слагаемого в правой части (П.5) применим формулу Новикова — Фурутцу [9]

$$S_k(x, s) \equiv \langle f_k(x, s) \delta_n(\xi(s) - x) \rangle =$$

$$= \int \ldots \int d^n \eta \int_0^s ds' \langle f_k(x, s) f_e(\eta, s') \rangle \left\langle \frac{\delta}{\delta f_e(\eta, s')} [\delta_n(\xi(s) - x)] \right\rangle. \quad (\text{П.6})$$

После выполнения вариационного дифференцирования появляются производные $\delta \xi_l(s)/\delta f_e(\eta, s')$, для которых мы используем разложение (П.3). В результате после несложных выкладок получаем разложение

$$S_k(x, s) = \tilde{A}_k(x, s) P_s(x) - \frac{\partial}{\partial x_e} [\tilde{F}_{ke}(x, x, s) P_s(x)] + S'_k(x, s), \quad (\text{П.7})$$

где введены обозначения

$$\tilde{F}_{ke}(x, y, s) = \int_0^s B_{ke}(x, y; s, s')\, ds'; \quad (\text{П.8})$$

$$\tilde{A}_k(x, s) = \left[\frac{\partial F_{ke}(x, y, s)}{\partial x_e} \right]_{y=x}, \quad (\text{П.9})$$

а $S'_k(x, s)$ представляется рядом

$$S_k'(x,\ s) = S_k^{(2)}(x,\ s) + S_k^{(3)}(x,\ s) + \ldots \qquad (П.10)$$

Первые два слагаемых в (П.7), соответствующие первому члену в (П.3), приводят к УЭФ. С величинами S_k' связаны отклонения от этого приближения. В ряде (П.10) первые два члена соответствуют линейному по $(s-s')$ члену в (П.3); члены, обозначенные многоточием, соответствуют более высоким степеням $(s-s')$ в формуле (П.3). Поскольку выражение для S_k' может понадобиться для оценки поправок к УЭФ, приведем определяющие $S_k^{(2)}$ и $S_k^{(3)}$ формулы:

$$S_k^{(2)}(x,\ s) = \frac{\partial}{\partial x_e}\left\{\lambda_{ke,\,j}^{(2)}(x,\ s)\left[v_j(x,\ s)P_s(x) + \tilde{A}_j(x,\ s)P_s(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\tilde{F}_{jm}(x,\ x,\ s)P_s(x)\right)\right]\right\},\ \lambda_{ke,\,j}^{(2)}(x,\ s) = \left[\frac{\partial f_{ke}(x,\ y,\ s)}{\partial y_j}\right]_{y=x},$$

$$f_{ke}(x,\ y,\ s) = \int\limits_0^s (s-s')\ B_{ke}(x,\ y,\ s,\ s')ds', \qquad (П.11)$$

$$S_k^{(3)}(x,\ s) = \lambda_{ke,\,m}^{(1)}(x,\ s)\,Q_{em}(x,\ s) - \frac{\partial}{\partial x_m}\left[f_{ke}(x,\ x,\ s)\,Q_{em}(x,\ s)\right],$$

$$\lambda_{ke,\,m}^{(1)}(x,\ s) = \left[\partial f_{ke}(x,\ y,\ s)/\partial x_m\right]_{y=x},$$

$$Q_{em}(x,\ s) = P_s(x)\,\nabla_e v_m(x,\ s) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\Lambda_{mj,\,e}^{(1)}(x,\ s)\,P_s(x)\right],$$

$$\Lambda_{mj,\,e}^{(1)}(x,\ s) = \left[\partial \tilde{F}_{mj}(x,\ y,\ s)/\partial x_e\right]_{y=x}.$$

Следующие члены разложения, обозначенные в (П.10), многоточием, содержат в качестве коэффициентов величины

$$f_{ke}^{(m)}(x,\ y,\ s) = \int\limits_0^s (s-s')^m B_{ke}(x,\ y,\ s,\ s')\,ds',\ \ f_{ke}^{(1)} = f_{ke}$$

при $m \geqslant 2$ и производные от них по координатам.

Подставляя (П.7) в (П.5), получаем (5). В случае, если B_{ke} имеет вид

$$B_{ke}(x,\ y,\ s,\ s') = 2\delta(s-s')\,F_{ke}(x,\ y,\ s),$$

получаем $\tilde{F}_{ke} = F_{ke}$, $f_{ke}^{(m)} \equiv 0$ при всех $m \geqslant 1$, и все поправки, входящие в S_k', обращаются в нуль, так что в случае выполнения условия (2 в) справедливо УЭФ.

В общем же случае мы имеем уравнение, которое отличается от УЭФ в двух отношениях: заменой F_{ke} на $\tilde{F}_{ke}$ и появлением в (5) правой части. Отличие $\tilde{F}_{ke}$ от F_{ke} заметно лишь в области $s \lesssim s_0$, где s_0 — интервал корреляции B_{ke} по переменной $(s-s')$. Учет S_k', как было показано, позволяет уточнить область применимости УЭФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Харанен, ДАН СССР, 88, № 2 (1953).
2. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958.
3. Н. Г. Денисов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 1, № 5—6, 34 (1958).

4. В. М. Комиссаров, Изв. высш уч. зав.—Радиофизика, **9,** № 2, 292 (1966).
5. Д. Б. Келлер, сб. Гидродинамическая неустойчивость, изд. Мир, М, 1964.
6. Е. Л Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, изд. АН СССР, М., 1961.
7. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
8. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М, 1966
9. Е. А. Новиков, ЖЭТФ, **47,** 1919 (1964).
10. В. И. Татарский, ЖЭТФ, **56,** № 6, 2106 (1969).
11. В. И. Татарский, Распространение коротких волн в среде со случайными неоднородностями в приближении марковского случайного процесса. Препринт ООФАГ АН СССР, М., 1970.
12. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
12. В. И. Кляцкин, Изв. высш. уч зав.—Радиофизика, **13,** № 7, 1069 (1970).

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
17 июля 1970 г.

BEAM DIFFUSION IN A MEDIUM WITH RANDOM IRREGULARITIES

V. I. Klyatskin, V. I. Tatarskii

Conditions are investigated under which the beam propagation in the medium with random irregularities may be described using Einstein—Fokker equation. This is shown to be substantiated only in small angular approximation. The relative diffusion of a pair of beams is considered in this approximation. In contrast to a single beam, the probability distribution for the beam pair is not Gaussian. The mean square of the distance between the beams grows proportionally to the cubic of the traveled distance but the coefficient of proportionality is different in the region of small and large mutual distances. The latters are separated from each other by the region of exponential growth the origin of which coincides with that of the region of strong intensity fluctuations.