

СОДЕРЖАНИЕ

Островский Л. А., Степанов Н. С. Нерезонансные параметрические явления в распределенных системах (Обзор)	489
Капустин П. А., Петровский А. А., Хрулев В. В., Кузнецова И. П., Пасека А. М. Наблюдение солнечного затмения 22 сентября 1968 г на частотах 214 и 950 $M\Gamma$	530
Илясов Ю. П. К вопросу о влиянии эффекта «путаницы» на чувствительность больших радиотелескопов при наблюдении дискретных источников	536
Кац Л. И., Стародубцев Г. П. Модуляция электромагнитных волн при распространении в плазме, помещенной в переменное магнитное поле	547
Игнатьев Ю. А. Расчет распределения ионизации в среднеширотном спорадическом слое E	554
Лещанский Ю. И., Лебедева Г. Н., Шумилин В. Д. Электрические параметры песчаного и глинистого грунтов в диапазоне сантиметровых, дециметровых и метровых волн	562
Власов С. Н., Таланов В. И., Хижняк А. И. О влиянии просветляющегося фильтра на поперечную структуру излучения твердотельных импульсных ОКГ	570
Богдан Д. А., Демидов Н. А. Измерение температуры атомов водорода в источнике пучка водородного квантового генератора	575
Алексеев Б. Ф., Белоногов А. М., Граммаков А. Г., Дитев А. А. О процессах получения свободной ядерной прецессии при экспоненциальном выключении поляризующего поля	580
Семенова Т. А. К теории многофotonного умножения частоты в газах	585
Гочелашивили К. С. Насыщение флуктуаций фокусированного излучения в турбулентной среде	592
Геранин В. А. Плотность вероятности длительности выброса нестационарного случайного процесса	597
Полищук В. К. Излучение щели в экране из-под диэлектрического слоя с продольной неоднородностью	600
Маненков А. Б. Открытые резонаторы с диэлектрическими стенками	606
Рамм А. Г. Приближенные формулы для тензора поляризуемости и емкости тела произвольной формы	613
Романовский В. А. Вклад вытекающих волн в излучение линейного источника, направляемое плоским непоглощающим слоем	621
Гильденбург В. Б., Марков Г. А., Шишко А. Я. О нелинейном резонансном поглощении в газоразрядной плазме	629
Краткие сообщения и письма в редакцию	
Жураховский В. А. Стационарный гофрированный поток электронов	635
Информация	
Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомагнетизм и аэрономия», т. X, № 6, 1970 г	638

УДК 621.391.8

НЕРЕЗОНАНСНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

(Обзор)

Л. А. Островский, Н. С. Степанов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	489
1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН НА ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕ	491
1. Общие соотношения	
Соотношения для частот и длительностей сигналов	492
Границные условия для электромагнитного поля	493
Границные условия в форме Лагранжа. Энергетические соотношения	493
2. Недиспергирующие среды	
Досветовое и сверхсветовое движение границы	494
Неподвижная среда	495
Взаимодействие сигнала с ударной волной	496
Движущаяся среда. Нормальное и наклонное падение	497
Ключевые системы	499
3. Диспергирующие среды	
Движущаяся плазма	501
Магнитоактивная плазма	501
Отражение от фронта ионизации	502
Диэлектрик с упругими диполями	502
4. Отражение от движущегося слоя	503
Слой прямоугольной формы	503
Слой произвольного профиля. Сопоставление с неподвижным слоем	504
5. Резонаторы и волноводы с движущимися границами	504
2. ВОЛНЫ В СРЕДАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ	
1. Преобразование спектра волн	506
Уравнения переноса для частоты и волнового вектора	508
Однородный волновой пакет	509
Неоднородный волновой пакет. Дисперсионное сжатие	510
2. Изменение амплитуды и энергии волн	511
Уравнение для амплитуд волн	511
Вариационный принцип в усредненной форме. Адиабатический инвариант	512
Изменение амплитуды в области дисперсионного сжатия. Квазиоптическое приближение	512
О тензоре диэлектрической проницаемости слабонестационарных и слабонеоднородных сред с дисперсией	514
3. Некоторые примеры	515
Недиспергирующая среда	515
Оценка точности геометрооптического приближения. Сравнение с точными решениями	517
Короткие импульсы в системе с дисперсией	518
Дисперсионное сжатие неоднородных сигналов	521
Примеры решений в квазиоптическом приближении	524

ВВЕДЕНИЕ

В последние 10—12 лет появилось довольно большое количество работ, посвященных изучению волн в распределенных системах с переменными параметрами. Однако систематическому анализу подвергся

лишь круг вопросов, относящихся к резонансным явлениям, когда изменения параметров периодичны во времени и пространстве, причем периоды этих изменений находятся в определенных соотношениях с частотой и волновым вектором распространяющихся волн*. Типичным для таких систем является усиление квазимохроматических волн вблизи некоторых дискретных значений частот. Подобные эффекты изучались в радиофизике (в связи с параметрическими усилителями бегущей волны, см., например, [1-3]), в физике плазмы («распадная» неустойчивость и параметрический резонанс в плазме [4-6]), в нелинейной оптике (параметрические генераторы света [7, 8], различные виды индуцированного рассеяния в приближении заданного поля [9, 10]).

Указанный класс задач, хотя он и весьма важен, является все же частным. Значительный интерес представляют и нерезонансные параметрические явления, когда на закон изменения параметров не наложено каких-либо специальных условий, и он может быть, в частности, апериодическим. В естественных условиях апериодическая нестационарность параметров среды может быть вызвана ее движением, нагреванием, ионизацией и т. д. (как это имеет место, например, в космической плазме). В лабораторных экспериментах изменение параметров волновой системы во времени достигается за счет движения неоднородных плазменных или электронных потоков, применением мощных полей накачки в нелинейных средах (полупроводники, сегнетоэлектрики, ферриты) и т. д. Здесь, как правило, невозможно накапливающееся увеличение энергии волн на фиксированных частотах, но может происходить эффективное преобразование спектра волн в широком диапазоне частот, причем, вообще говоря, энергия волн также существенно меняется. По этим вопросам также опубликовано довольно много работ, в которых рассматриваются различные частные задачи, однако единого подхода к ним в литературе нет.

В данном обзоре рассматриваются именно нерезонансные параметрические эффекты в линейных распределенных системах. Основное внимание уделено двум наиболее характерным предельным случаям: а) резкое изменение параметров на некоторой поверхности (движущейся границе), когда для отыскания частоты и амплитуды волн достаточно задать граничные условия на скачке параметров; б) плавное изменение параметров во времени и в пространстве, при этом анализ может быть проведен путем использования обобщений метода геометрической оптики. Заметим, что такая классификация, объединяющая как параметрические различные эффекты, обычно рассматриваемые независимо, отражает подход авторов (см. также [1]) и, разумеется, не является единственной возможной. Приводятся и некоторые промежуточные задачи, допускающие строгое исследование. Кроме перечисления конкретных задач, в обзоре обсуждаются также общие соотношения и качественные особенности параметрических явлений, связанные, в частности, с дисперсией; приводятся и некоторые результаты авторов, не опубликованные ранее. Наиболее подробно рассматриваются одномерные задачи, которые относительно просты и вместе с тем отражают специфику исследуемых вопросов. Конкретные расчеты, как правило, приводятся для плоских электромагнитных волн, однако в силу аналогии уравнений многие соотношения оказываются справедливыми и для волн в линиях передачи, а также для других, в том числе неэлектромагнитных, волновых систем.

* Передко под термином «параметрические» понимают вообще только такие резонансные эффекты, что, по нашему мнению, нецелесообразно.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН НА ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕ

1. Общие соотношения

Соотношения для частот и длительностей сигналов. Как известно, отражение электромагнитных волн от поверхности равномерно движущегося идеального проводника рассматривалось еще в [12] в связи с проблемами специальной теории относительности и электродинамики движущихся сред и затем неоднократно дискутировалось (см. например, [13, 14]). Однако сравнительно недавно исследование отражения и преломления волн на движущейся границе приобрело практический интерес в связи с возможностью использовать эти процессы для преобразования спектра волн ([15–18] и др.). Существенно, что этот эффект может быть значительным и при нерелятивистских скоростях границы, если волны являются медленными, в частности, если отражающий объект (например, плазма с резким фронтом) движется в замедляющей среде [16–18]. С появлением же новых нелинейных материалов (ферриты, полупроводники, нелинейные диэлектрики) стало в принципе возможным создавать сколь угодно быстро движущиеся перепады параметров волновой системы с помощью электромагнитных полей накачки (в частности, ударных волн [19, 20]) в макроскопически неподвижной среде.

Будем считать, что граница является плоской и достаточно резкой (по сравнению с характерными масштабами поля), а вне ее среда однородна и линейна по отношению к рассматриваемым слабым волнам. Пусть ω_0 и \mathbf{k}_0 — частота и волновой вектор падающей плоской волны, задача тогда сводится к определению значений ω_i , \mathbf{k}_i , а также амплитуд вторичных (т. е. отраженных и преломленных) волн.

Уравнения для ω_i , \mathbf{k}_i нетрудно получить из условия равенства частот и касательных к границе составляющих волновых векторов взаимодействующих волн в системе отсчета, где граница покойится, откуда следует:

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = \frac{1 - (V\mathbf{v}_0)/v_0^2}{1 - (V\mathbf{v}_i)/v_i^2}, \quad \mathbf{k}_{i\tau} = \mathbf{k}_{0\tau}, \quad (1.1)$$

где V — скорость движения скачка, $\mathbf{v}(\omega, \mathbf{k})$ — фазовые скорости волн, а индексом τ отмечены тангенциальные компоненты соответствующих векторов. При известных в каждой из двух разделенных границей областей дисперсионных уравнениях ($\omega = \omega(\mathbf{k})$) равенства (1.1) достаточны для отыскания ω_i и \mathbf{k}_i для всех вторичных волн.

В случае импульсных сигналов (волновых пакетов) существенно также изменение длительности вторичных пакетов (τ_i) по сравнению с первичным. Это изменение, очевидно, определяется групповыми скоростями волн ($u_i = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}_i}$); последние можно найти из условий (1.1). Учитывая, что длительность сигнала с однородным заполнением имеет порядок Δ^{-1} , где Δ — ширина спектра, и варьируя первое из равенств (1.1) по частоте, нетрудно получить

$$\frac{\tau_i}{\tau_0} = \frac{1 - (Vu_i)/u_i^2}{1 - (Vu_0)/u_0^2}. \quad (1.2)$$

Соотношение (1.2) справедливо также для амплитудно-модулированных волн, при этом величина τ^{-1} определяет характерную частоту модуляции в соответствующей волне. В частном случае изотропной недиспергирующей среды ($u = v$), как видно из (1.1) и (1.2), длительность импульса преобразуется обратно пропорционально частоте.

Из формул (1.1) и (1.2) следует, что наиболее эффективное преобразование частоты и длительности происходит в тех случаях, когда скорость скачка близка соответственно к фазовой и групповой скорости одной из волн (или превышает их). Подобные «околосветовые», а также «сверхсветовые» движения вполне возможны, если среда с резкой границей движется в замедляющей системе (диэлектрике) и, тем более, если скачок параметров создается волной накачки в нелинейной среде. Заметим, наконец, что рассматриваемые иногда однородные системы [21, 22], параметры которых одновременно изменяются во всех точках, представляют собой предельный случай движущейся границы с $V \rightarrow \infty$.

Необходимо отметить, что число вторичных волн в случае движущихся границ также заранее не известно. Чтобы выяснить, какие из удовлетворяющих равенствам (1.1) квазигармонических нормальных волн фактически возбуждаются на скачке, необходимо найти величины и направления групповых скоростей этих волн—по соображениям причинности возможны лишь те из них, которые удовлетворяют условиям излучения, т. е. уносят энергию от границы. Это приводит к некоторым особенностям взаимодействия сигналов со «сверхсветовой» границей, рассматриваемым ниже.

Границные условия для электромагнитного поля. Для определения амплитуд взаимодействующих волн необходимо использовать граничные условия, связывающие значения векторов E , H , B , D по обе стороны от скачка параметров. Считая, что на границе нет свободных поверхностных токов и зарядов, эти условия можно записать в виде (см., например, [13, 23, 131])

$$\begin{aligned} [n, E_2 - E_1] &= (V_n/c) (B_2 - B_1), \quad (B_2 - B_1, n) = 0, \\ [n, H_2 - H_1] &= (V_n/c) (D_2 - D_1), \quad (D_2 - D_1, n) = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где n — вектор нормали к поверхности разрыва, c — скорость света, индексы 1 и 2 относятся соответственно к областям впереди и позади скачка. Как обычно, соотношения (1.3) должны быть дополнены материальными уравнениями, связывающими векторы B , H , D , E . Эти уравнения в общем случае содержат линейные операторы, различные в областях 1 и 2.

Для справедливости условий (1.3) необходимо, чтобы протяженность реальной переходной области, аппроксимируемой разрывом, была мала по сравнению с соответствующими пространственными и временными масштабами волн (т. е. k_i^{-1} и ω_i^{-1}). Если дисперсией пренебречь, то из (1.3) следует, что поле (например, E_τ и D_τ) в окрестности границы в общем случае изменяется скачком как в пространстве, так и во времени. Такие задачи, часто рассматриваемые в литературе, имеют смысл, если длительность «скакка» параметра хотя и мала по сравнению с ω^{-1} , но достаточно велика для того, чтобы поляризация успевала следить за полем E . Кроме случаев, когда имеется движущаяся среда, подобная ситуация возможна, например, когда перепад параметров создается фронтом волны накачки, которая сама является собственной волной для данной среды с учетом нелинейности*.

Если же изменение параметров на границе является быстрым также по отношению ко всем колебательным и релаксационным процескам в среде, то наряду с (1.3) справедливо более сильное утверждение: при $V \neq c$ независимо от конкретного вида материальных уравнений

* Такой накачкой может служить, например, стационарная ударная волна (длительность последней не может быть меньше времени установления релаксационных процессов в среде).

все четыре вектора E, H, D, B на такой границе непрерывны. В самом деле, если бы, например, скачок E имел место, то, поскольку поляризация среды не успевает измениться, он распространялся бы как в вакууме, т. е. со скоростью света c . Поэтому при $V \neq c$ поле E (а тогда и B) должно оставаться непрерывным [24]*. Аналогичные рассуждения приводят к выводу о непрерывности H и D . Это обстоятельство, существенно упрощающее граничные условия по сравнению с (1.3), связано с типерболичностью уравнений электродинамики и имеет место для всех рассмотренных в литературе задач, в которых исследовались конкретные модели диспергирующих сред (см. ниже).

Граничные условия в форме Лагранжа. Энергетические соотношения. Используя обобщенные координаты, можно записать граничные условия на поверхности движущегося скачка параметров для произвольной распределенной системы [24]. Такой подход интересен, в частности, тем, что он позволяет при весьма общих предположениях получить соотношения, связывающие энергию и частоты волновых пакетов, взаимодействующих со скачком параметра.

Пусть система описывается плотностью функции Лагранжа $L(q, \dot{q}, q'_s, p)$, где $q(r, t) = q_1 \dots q_N$ — совокупность обобщенных координат, $\dot{q} = -\frac{\partial q}{\partial t}$, $q'_s = \frac{\partial q}{\partial x_s}$ — некоторый параметр, резко изменяющийся в окрестности $\Delta\zeta$ движущейся плоскости $\zeta = z - Vt = \zeta_0$. Тогда ясно, что в масштабе $\Delta\zeta$ можно учитывать только зависимость всех величин от одной переменной ζ , полагая $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta}$, $\frac{\partial}{\partial t} = -V \frac{\partial}{\partial \zeta}$, так как зависимость от остальных переменных существенно медленнее. Интегрируя уравнение Лагранжа по ζ на интервале $\Delta\zeta$, получим N условий:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q'_s} - V \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)_1 = \left(\frac{\partial L}{\partial q'_s} - V \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)_2. \quad (1.4a)$$

Далее учтем, что величина, фигурирующая в (1.4a) в скобках, конечно и неизменна по всей $\Delta\zeta$ и содержит, кроме p и q , производные $\frac{\partial q}{\partial \zeta}$. Следовательно, последние можно представить в виде $\frac{\partial q}{\partial \zeta} = f(q, p)$, где f —

конечные функции; тогда повторное интегрирование по ζ дает еще N равенств:

$$q_1 = q_2. \quad (1.4b)$$

Условия (1.3) суть частный случай (1.4a), (1.4b)**.

Если падающей волной является пакет конечной длительности, то поле по каждую сторону от границы представляет собой суперпозицию квазимохроматических волновых пакетов. Перемножив (1.4a) и (1.4b)

* Аналогично, если материальные уравнения содержат дифференциальные (по t) операторы порядка s относительно поляризации P , то, кроме самой величины P , непрерывны и ее производные по времени до $(s-1)$ -го порядка включительно.

** Если какая-либо из переменных q_s входит в L без своих производных, то для нее равенства (1.4) несправедливы и заменяются локальным соотношением $\frac{\partial L}{\partial q_s} = 0$;

при этом q_s может испытывать скачок на границе [24]. Это согласуется с соображениями, высказанными в предыдущем пункте для электромагнитных волн. Кроме того, (1.4b), вообще говоря, несправедливо в случаях синхронизма, рассматриваемых ниже (см. (1.6в), (1.6г)).

и используя равенства (1.1) и (1.2) для частот и длительностей волн, после некоторых преобразований можно получить соотношение [24].

$$I_0 = \sum I_i, \quad (1.5)$$

где $I_0 = (W_0/\omega_0) \operatorname{sgn} M_0$, $I_i = (W/\omega)_i \operatorname{sgn} M_i$, W_0 , W_i — энергии падающей и вторичных волн, $M_i = 1 - Vv_i/v_i^2$; суммирование в правой части проводится по всем вторичным волнам*.

В известной мере (1.5) является обобщением соотношений Мэнли—Роу, которые здесь неприменимы из-за нестационарности процесса.

В простейшем случае, когда все M_i положительны, соотношение (1.5) означает сохранение полного числа квантов при распаде падающей волны на прошедшие и отраженные. Однако при сверхсветовом (относительно фазовых скоростей) движении границы возможно рождение новых квантов в результате взаимодействия падающей волны с движущимся скачком параметра. Для этого нужно, чтобы хотя бы одна из вторичных волн лежала в области аномального допплер-эффекта по отношению к скорости границы (именно для таких волн $M < 0$).

Необходимо отметить, что соотношение (1.5) и само описание системы функцией Лагранжа L применимы лишь в тех случаях, когда на границе терпят скачок реактивные параметры среды, и в области скачка нет локальной диссипации энергии или вообще перехода энергии в другие виды, не учтенные лагранжианом L .

Далее приводятся некоторые конкретные примеры (большей частью одномерные), которые допускают наилучшее простое исследование и вместе с тем отражают специфику рассматриваемых эффектов. При этом рассматривается в основном преобразование волн в лабораторной системе отсчета; вопросы же, касающиеся релятивистских соотношений в движущихся средах, затрагиваются в минимальной степени, необходимой для решения соответствующих задач.

2. Недиспергирующие среды

Досветовое и сверхсветовое движение границы [11, 26]. Предположим, что выполнены указанные выше требования относительно длительности скачка, позволяющие пренебречь дисперсией, и рассмотрим здесь нормальное падение линейно поляризованной волны. При этом в каждой из областей 1 и 2 могут распространяться две волны $E_{\pm}(1, 2)$ со скоростями $v_{\pm}(1, 2)$ (индексы \pm относятся соответственно к прямым и обратным волнам, см. рис. 1). Будем считать заданной, например,

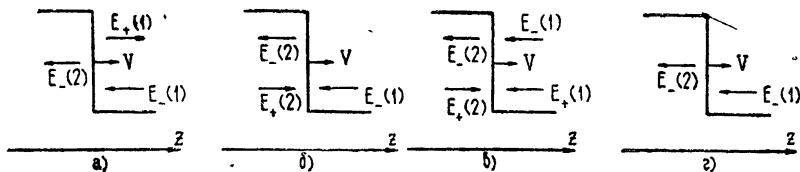


Рис. 1.

волну $E_-(1) = E_n$, падающую навстречу скачку; для определения остальных трех волн $E_+(1)$, $E_{\pm}(2)$ имеются два граничных условия (1.3). Поэтому задача будет вполне корректной в тех случаях, когда существование одной из неизвестных (вторичных) волн невозможно по

* Для некоторых частных случаев (недиспергирующей среды и изотропной плазмы) соотношения (1.5) были получены другим способом в [11, 25] (см. ниже).

условию излучения (т. е. волна не уносит энергию от границы). Это обстоятельство, в свою очередь, налагает определенные ограничения на соотношения между скоростью скачка V и скоростями u_{\pm} (1, 2). В общем случае здесь возможны четыре варианта [26, 11]:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } V < u_+(1, 2), & \text{б) } V > u_+(1, 2), \\ \text{в) } u_+(2) < V < u_+(1), & \text{г) } u_+(1) < V < u_+(2). \end{array} \quad (1.6)$$

Ясно, что в случае а не может возникнуть волна $E_+(2)$, а в случае б — волна $E_+(1)$ (рис. 1), и в обоих случаях задача решается без труда. Однако случаи в и г являются особыми и требуют специального рассмотрения. Действительно, если V имеет значение, промежуточное между $u_+(1)$ и $u_+(2)$, то область быстрого изменения параметров, отвечающая скачку, содержит точку синхронизма, где $u_+ = V$. Тогда траектория границы принадлежит одному из семейств характеристик исходного волнового уравнения. Следовательно, граничные условия (1.3) здесь связывают величины в окрестности характеристической линии, а такие задачи, как известно, являются особыми в математическом отношении.

Универсальные соотношения могут быть написаны лишь для частот. Как следует из (1.1), частоты волн связаны с частотой падающей волны ($\omega_-(1) = \omega_0$) явными соотношениями

$$\omega_+(1) = \omega_0 \frac{1 - V/u_-(1)}{1 - V/u_+(1)}, \quad \omega_{\pm}(2) = \omega_0 \frac{1 - V/u_-(1)}{1 - V/u_{\pm}(2)}. \quad (1.7)$$

Ввиду отсутствия дисперсии сигнал произвольной формы испытывает на границе преобразование без искажения формы, т. е. падающий сигнал вида $g(t)$ переходит в $K_t g(\omega_t t / \omega_0)$, где $K_t = \text{const}$, а ω_t определяется для каждой волны соотношениями (1.7). В частности, величины, обратные длительностям сигналов, преобразуются по (1.7). Однако вопрос о преобразовании амплитуд волн требует в общем случае дополнительного рассмотрения (см. ниже).

Неподвижная среда [11, 26, 37]. Рассмотрим сначала изотропную среду, в которой скачок параметров создается фронтом поля накачки. Этот случай, по-видимому, наиболее прост с точки зрения экспериментального исследования. Материальные уравнения для такой среды имеют вид $D(1, 2) = \epsilon_{1, 2} E(1, 2)$, $B(1, 2) = \mu_{1, 2} H(1, 2)$, и тогда в каждой области $u_{\pm}(1, 2) = \pm(c/\sqrt{\epsilon\mu})_{1, 2} = \pm u_{1, 2}$ и $E_{\pm} = \pm\rho H_{\pm}$, где $\rho = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Пользуясь граничными условиями (1.3), нетрудно найти, что в «досветовом» случае а амплитуды отраженной и прошедшей волн равны

$$E_+(1) = E_n \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \frac{1 + V/u_1}{1 - V/u_1}, \quad E_-(2) = E_n \frac{2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{1 + V/u_1}{1 + V/u_2}. \quad (1.8a)$$

В «сверхсветовом» случае б отраженной волны нет, а имеются две прошедшие волны с амплитудами

$$E_-(2) = E_n \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1} \frac{1 + V/u_1}{1 + V/u_2}, \quad E_+(2) = E_n \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\rho_1} \frac{1 + V/u_1}{1 - V/u_2}. \quad (1.8b)$$

Более сложен случай в, когда $u_1 > V > u_2$, и нет оснований заранее исключить какую-либо из трех неизвестных волн. Чтобы сделать задачу корректной в этом случае, необходимо отказаться от полностью «раз-

рывного» описания и конкретизировать структуру области «скачка» (напомним, что пренебрегая дисперсией, нельзя считать эту область бесконечно узкой). При этом оказывается достаточным рассмотреть два скачка (1 и 2), разделенных сравнительно плавной областью ширины d , где величина $u = c/\sqrt{\epsilon\mu}$

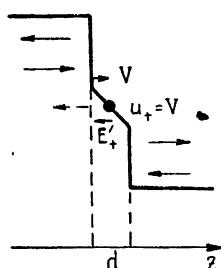


Рис. 2.

меняется от $V + \Delta u$ до $V - \Delta u$, а Δu — достаточно малая положительная величина (рис. 2). Тогда добавляется четвертая волна E'_+ , бегущая навстречу волне параметра в области d (волна E'_+ невозможна), и, применяя последовательно формулы (1.8а) и (1.8б) для скачков 1 и 3, а затем устремляя d и Δu к нулю, получим однозначное решение для результирующего скачка [26]:

$$\begin{aligned} E_{-}(1) &= E_n \frac{\rho' - \rho_1}{\rho' + \rho_1} \frac{1 + V/u_1}{1 - V/u_1}, \\ E_{-}(2) &= E_n \frac{\rho' + \rho_2}{\rho' + \rho_1} \frac{1 + V/u_1}{1 + V/u_2}, \\ E_{+}(2) &= E_n \frac{\rho_2 - \rho'}{\rho_2 + \rho'} \frac{1 + V/u_1}{1 - V/u_2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь ρ' — значение волнового сопротивления среды в точке синхронизма, в которой $u_+ = c/\sqrt{\epsilon'\mu'} = V$. Следовательно, для однозначного решения, вообще говоря, недостаточно задать параметры среды ϵ , μ до и после скачка; дополнительная информация сводится к заданию $\rho = \rho'$ (или, что то же самое, одного из параметров ϵ' , μ') в точке синхронизма. Заметим, впрочем, что если изменяется только один параметр, например, ϵ , то $\rho' = \mu V/c$ известно; при этом из (1.9) получим

$$E_{+}(1) = -E_n, \quad E_{-}(2) = E_{+}(2) = E_n u_2/u_1.$$

Нетрудно убедиться, что во всех трех рассмотренных случаях a, b, c выполняется соотношение (1.5) для числа квантов в волновых пакетах, в частности, в досветовом случае (1.8а) полное число квантов сохраняется, а в сверхсветовом (1.8б) число квантов в волне $E_{-}(2)$ всегда больше, чем в падающей.

Отметим роль синхронизма, когда скорость V близка к u_1 или u_2 . В этом случае согласно (1.8), (1.9) частота и энергия некоторых волн, участвующих во взаимодействии, неограниченно растут, а длительность сигнала падает до тех пор, пока не наступят ограничения, вызываемые неучтеными факторами (дисперсия, нелинейность, конечно длительности скачка и т. д.). Экспериментально значительное сжатие и расширение импульсных сигналов, взаимодействующих с фронтом поля на-качки, наблюдалось на радиочастотах в линиях с ферритом [27].

В работе [123] исследовалось также преобразование частот и амплитуд волн при наклонном падении волны на движущуюся границу в неподвижном диэлектрике.

Взаимодействие сигнала с ударной волной [19]. В случае c , когда $u_1 < V < u_2$, волна, падающая навстречу скачку, порождает только одну (прошедшую) волну $E_{-}(2)$ (рис. 1 g) и, с учетом двух условий (1.3), задача оказывается переопределенной. Для получения корректного решения здесь необходимо учитывать дополнительные факторы в самой постановке задачи, приводящие к изменению условий (1.3) для сигна-

ла. Для слабодиспергирующей среды таким фактором является нелинейность: если изменение параметра создается в нелинейной среде скачком поля накачки, то последний не может быть произвольным, а сам удовлетворяет условиям (1.3). Такой скачок является, как известно, электромагнитной ударной волной, причем неравенства ε , т. е. $u_1 < V < u_2$, необходимы для ее устойчивости [20]. Присутствие сигнала создает возмущение скорости ударного фронта, которое и служит недостающей неизвестной*. Линеаризуя (1.3) около значений поля ударной волны с учетом возмущения скорости при заданных нелинейных функциях $D(E)$, $B(H)$ (параметрами среды по отношению к малому сигна-

лу служат $\varepsilon = \frac{dD}{dE}$, $\mu = \frac{dB}{dH}$), получим [19]

$$E_{-}(2) = E_n \frac{1 + V/u_1}{1 + V/u_2}. \quad (1.10)$$

Соотношения (1.5) здесь уже несправедливы ввиду конечной диссипации энергии на ударном фронте.

Следует отметить, что случай ε — единственный, когда скачок параметров может быть создан непосредственно бегущей (ударной) волной поля накачки в данной системе. В остальных случаях такая волна неустойчива, и для соответствующего изменения параметров требуется либо источник другой физической природы (например, механическое движение), либо отдельная волновая система, в которой распространяется накачка, как это делается в экспериментах с линиями передачи радиодиапазона [27].

Движущаяся среда. Нормальное и наклонное падение. Если среда по одну или по обе стороны от границы движется относительно лабораторной системы отсчета, то условия (1.3) остаются в силе и изменяются лишь материальные уравнения. Соответствующие формулы для частоты и амплитуды волны нетрудно получить с помощью преобразований Лоренца; для различных случаев они исследованы в ряде работ [28–38, 123, 124]. Так, если диэлектрик с резкой границей движется в вакуме навстречу падающей волне, имеем

$$\frac{\omega_{+}(1)}{\omega_0} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad \frac{\omega_{-}(2)}{\omega_0} = \frac{1 - V/u_2}{1 - \beta}; \quad (1.11a)$$

$$\frac{E_{+}(1)}{E_n} = \frac{\rho_2 - 1}{\rho_2 + 1} \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad \frac{E_{-}(2)}{E_n} = \frac{2\rho_2}{\rho_2 + 1} \frac{1 - V/u_2}{1 - \beta}, \quad (1.11b)$$

где $\beta = V/c$, $u_2 = c/V \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ (магнитное поле каждой из волн пропорционально E/ρ , как и в неподвижной среде)**. Сравнивая эти выражения с (1.8а), легко видеть, что при $\beta \ll 1$, $V/u_2 \ll 1$ они совпадают с точностью до членов второго порядка малости.

Заметим, что указанное совпадение результатов для движущейся и неподвижной сред в нерелятивистском случае имеет место всегда. Действительно, при этом релятивистские поправки к уравнениям связи $B = \mu H$, $D = \varepsilon E$ имеют порядок β , но B и D сами входят в (1.3)

* Необходимость учета реакции сигнала связана с его группировкой: в данном случае характеристики одного из семейств сходятся в окрестности скачка, что без учета членности привело бы к неограниченному росту сигнала.

** В частном случае $\rho_2 \rightarrow 0$ выражения для $\omega_{+}(1)$ и $E_{+}(1)$ в (1.11) совпадают с решением классической задачи об отражении электромагнитных волн от движущегося идеального зеркала [12, 13].

с коэффициентом β , поэтому с точностью до β^2 движение самой среды не сказывается на результате. В релятивистском случае поведение волн для движущейся и неподвижной сред различно, однако соотношение (1.5) для числа квантов по-прежнему выполняется.

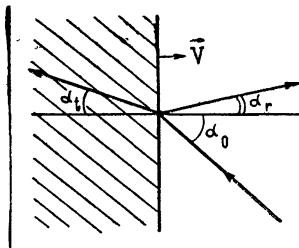


Рис. 3.

В работе [29] рассматривался случай наклонного падения волн из вакуума на движущийся диэлектрик (рис. 3). Пусть угол падения равен α_0 , тогда для углов отражения (α_r) и преломления (σ_r) можно найти соотношения, обобщающие закон Снеллиуса:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_r &= \frac{(1 - \beta^2) \sin \alpha_0}{(1 + \beta^2) \cos \alpha_0 - 2\beta}, \\ \operatorname{tg} \alpha_t &= \frac{(1 - \beta^2) \sin \alpha_0}{1 - \beta \cos \alpha_0} \left[\beta + \varepsilon \mu - 1 + \left(\frac{\beta - \cos \alpha_0}{1 - \beta \cos \alpha_0} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\beta = V/c$, ε и μ — проницаемости среды в сопровождающей системе отсчета. Таким образом, угол отражения здесь не равен углу падения. При сверхсветовом движении диэлектрика ($\beta > 1/\sqrt{\varepsilon \mu}$) появляется дополнительная особенность: при этом проекция групповой скорости преломленной волны на ось z в случае встречного движения первичной волны и границы изменяет знак, т. е. эта волна «сносится» средой.

При касательном падении ($\alpha_0 \rightarrow \pi/2$) в результате сноса волны углы отражения и преломления не равны $\pi/2$: $\operatorname{tg} \alpha_r \rightarrow (1 - \beta^2)/2\beta$, $\operatorname{tg} \alpha_t \rightarrow (1 - \beta^2) \left(\sqrt{\varepsilon \mu} - 1 + \beta^2 - \beta \right)^{-1}$. При этом потоки энергии отраженной и преломленной волны имеют конечные компоненты вдоль оси z .

Угол Брюстера, при котором поляризованныя в плоскости падения волна не отражается от границы, также зависит от скорости V . При встречном падении такой угол существует лишь для $\beta < \sqrt{(\varepsilon \mu - 1)(\varepsilon^2 - 1)^{-1}}$, при большей скорости среды отражаются волны обеих поляризаций.

Эти результаты нетрудно обобщить на случай, когда по обе стороны от границы имеются недиспергирующие среды с параметрами $\varepsilon_1, 2, \mu_1, 2$, дрейфующие как целое со скоростью V [29]. В отличие от неподвижных сред, при попутном движении границы и падающей волны здесь возможно полное внутреннее отражение не только при $\varepsilon_1 \mu_1 > > \varepsilon_2 \mu_2$.

В работах [30, 31] рассмотрены также случаи, когда соприкасающиеся среды движутся друг относительно друга. Подобная ситуация может иметь место при наличии газодинамических течений в среде. Например, движение среды нормально к границе (причем со скоростью, большей скорости распространения самого скачка) соответствует газодинамической ударной волне*. Другой предельный случай, когда относительное движение сред проходит параллельно границе раздела, отвечает тангенциальному разрыву. В этом случае изменения частоты волн не происходит; суммарная энергия отраженной и преломленной волн в отсутствие диссипативных процессов равна энергии падающей.

Результаты [22–31] повторяются и частично дополняются в ряде более поздних публикаций [32–38, 124].

* Заметим, что в литературе подробно рассматривалось взаимодействие акустических возмущений с ударными волнами (см., например, [39, 40]). Такая задача является особой в том же смысле, что и случай g в (1.6).

Ключевые системы [41, 42]. Изменение реактивных параметров среды может быть достигнуто в результате изменения некоторого диссипативного параметра, если потери энергии стремятся к нулю как при очень малых, так и при очень больших значениях последнего. При этом диссипация выполняет роль ключа, включающего или отключающего дополнительный реактивный параметр; так ведет себя, в частности, теплопроводность в газе в отношении звуковых волн. Электромагнитным примером недиспергирующей системы с ключевыми свойствами может служить линия, эквивалентная схема которой показана на рис. 4. Если сопротивление $R(t)$ быстро изменяется от большого ($R \rightarrow \infty$) до малого ($R \rightarrow 0$) значения (замыкание ключа) или, наоборот, от малого до большого (размыкание), то общая емкость линии изменяется на величину C'' .

К граничным условиям типа (1.3), связывающим значения напряжения \dot{U} и тока J на скачке, здесь необходимо добавить условие, которое описывает изменение напряжения U'' на емкости C'' . При замыкании ключей ($R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow 0$) это условие имеет вид $U'_2 = U_2$, и задача определена, если заданы величины U_1 , J_1 , U' перед скачком. В случае размыкания ($R_1 \rightarrow 0$, $R_2 \rightarrow \infty$) все величины остаются непрерывными на скачке.

В обоих случаях, как и выше, все волны определяются по заданной падающей [42]. Следует отметить, что для ключевых систем соотношение (1.5) в общем случае не выполняется. Суммарная энергия прошедших и отраженных волн оказывается всегда меньше энергии падающей волны. При замыкании энергия диссириуется из-за протекания кратковременного тока в ключах, а при размыкании энергия теряется лишь в том смысле, что она не переносится в каком-либо направлении, а остается в конденсаторах C'' . Заметим, что в линии конечной длины l с одинаковым первоначальным зарядом емкостей C'' при замыкании возникают волны в виде двух встречных прямоугольных импульсов с длительностями $l(V \pm u)^{-1}$.

Частоты волн в ключевой системе преобразуются так же, как и на реактивном скачке. В этом смысле такие системы могут оказаться весьма эффективными, несмотря на неизбежные потери, как это подтверждается экспериментом с импульсными сигналами [41].

3. Диспергирующие среды

При учете дисперсии среды фазовые и групповые скорости вторичных волн заранее неизвестны — для их определения нужно решить уравнения (1.1) совместно с дисперсионным уравнением $\omega = \omega(\mathbf{k})$ (которое здесь нелинейно) и лишь после этого можно исключить те или иные волны, сравнивая их групповые скорости со скоростью скачка. С другой стороны, как указывалось, для расчета амплитуд волн здесь вместо (1.3) можно пользоваться более простыми условиями непрерывности всех компонент поля на скачке параметров. Учет последнего обстоятельства, по-видимому, позволяет кратчайшим путем прийти к результатам ряда работ, в которых вместо этого используются релятивистские преобразования для полей.

Движущаяся плазма [15, 16]. Пусть электромагнитная волна нормально падает навстречу резкой границе плазмы, движущейся в недис-

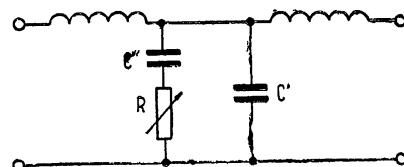


Рис. 4.

пергирующем диэлектрике (замедляющей системе) с проницаемостями ϵ , μ . В зависимости от величины $\beta' = \beta V_{\text{еп}} / (\beta = V/c)$ здесь, как и выше, возникают различные волны: при $\beta' < 1$ — отраженная ($E_+(1)$) и прошедшая ($E_-(2)$), а при $\beta' > 1$ — две прошедших волны $E_-(2)$ и $E_+(2)$ (групповая скорость последней меньше V). Частоты этих волн могут быть определены из (1.1):

$$\frac{\omega_+(1)}{\omega_0} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta'}, \quad \frac{\omega_-(2)}{\omega_0} = \frac{1 - \beta' \sqrt{Q}}{1 - \beta'}, \quad \frac{\omega_+(2)}{\omega_0} = \frac{1 + \beta' \sqrt{Q}}{1 - \beta'}, \quad (1.13a)$$

где $Q = [1 - \omega_p^2 \omega_0^{-2} (1 - \beta') (1 + \beta')^{-1}]$, а $\omega_p = (4\pi e^2 N/m\epsilon)^{1/2}$ — плазменная частота, являющаяся, как известно, релятивистским инвариантной величиной. Плаэма становится непрозрачной при $Q < 0$, и при релятивистских скоростях в движущуюся плаэму проходит волна с большим ω_0 , чем в неподвижную, а в сверхсветовом случае ($\beta' > 1$) плаэма становится неотражающей при любой концентрации.

Пользуясь (1.13a), нетрудно найти групповые скорости волн и затем из (1.2) соответствующие длительности волновых пакетов:

$$\frac{\tau_+(1)}{\tau_0} = \frac{1 - \beta'}{1 + \beta}, \quad \frac{\tau_-(2)}{\tau_0} = \frac{\beta' - \sqrt{Q}}{\sqrt{Q}(\beta' - 1)}, \quad \frac{\tau_+(2)}{\tau_0} = \frac{\beta' + \sqrt{Q}}{\sqrt{Q}(\beta' - 1)}. \quad (1.13b)$$

Отметим, что при $(\omega_p/\omega_0)^2 > (1 + \beta')^2$ групповая скорость волны $E_-(2)$ направлена в сторону скачка (но меньше V), что возможно как в досветовом, так и в сверхсветовом случае.

Амплитуды электрического поля волн при $\beta' < 1$ равны

$$\frac{E_+(1)}{E_n} = \frac{1 + \beta'}{1 - \beta'} \frac{1 - \sqrt{Q}}{1 + \sqrt{Q}}, \quad \frac{E_-(2)}{E_n} = \frac{2(1 - \beta' \sqrt{Q})}{(1 - \beta')(1 + \sqrt{Q})}, \quad (1.14a)$$

а при $\beta' > 1$

$$\frac{E_-(2)}{E_n} = \frac{(1 + \sqrt{Q})(1 - \beta' \sqrt{Q})}{2\sqrt{Q}(1 - \beta')}, \quad \frac{E_+(2)}{E_n} = \frac{(1 - \sqrt{Q})(1 - \beta' \sqrt{Q})}{2\sqrt{Q}(1 - \beta')}. \quad (1.14b)$$

В обоих случаях выполняются соотношения (1.5) для числа квантов. При этом фазовая скорость волны $E_+(2)$, возникающей в сверхсветовом случае, всегда меньше V , и на границе происходит рождение новых квантов.

Для нагретой плаэмы аналогичные задачи были рассмотрены с помощью кинетической теории [42—47]. Существенную роль здесь играет затухание Ландау, которое, в частности, приводит к уменьшению коэффициента отражения от границы при $Q < 0$.

Рассматривалось и наклонное падение плоской электромагнитной волны на границу движущейся плаэмы с вакуумом [48], а также на границу движущейся и неподвижной плаэмы [49—50]. В частности, при касательном движении плаэмы относительно границы с вакуумом коэффициенты отражения и проникновения и соответствующие углы α , и α' , не зависят от скорости движения [48], что и естественно, поскольку, как известно, выражение для показателя преломления $n(\omega)$ изотропной плаэмы не зависит от ее движения. В то же время последнее обстоятельство не означает инвариантности электромагнитных свойств изотропной плаэмы относительно дрейфа — тензор диэлектрической проницаемости движущейся плаэмы зависит от скорости дрейфа (появляется пространственная дисперсия [49]), в результате чего на границе двух

плазменных потоков отражение имеет место и в том случае, когда концентрация плазмы по обе стороны от границы одинакова*.

Магнитоактивная плазма. Результаты предыдущего пункта могут быть обобщены на случай, когда движущаяся плазма находится в постоянном магнитном поле [15, 18, 51, 52]. Для продольного магнитного поля ($H_0 \parallel V$) можно показать, что формулы типа (1.12)–(1.14) остаются в силе, но величина Q теперь имеет вид

$$Q = 1 - \frac{\omega_p^2 (1 - \beta')}{\omega_0 (1 + \beta')} \left(\omega_0 \mp \omega_H \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} \right)^{-1}, \quad (1.15)$$

где по-прежнему $\beta' = \beta \sqrt{\epsilon \mu}$, $\beta = V/c$, $\omega_H = eH_0/mc$, а знаки \mp отвечают необыкновенной и обычной волнам. Как и выше, при $\beta' > 1$ отраженная волна исчезает, и появляются две прошедших. Специфика магнитоактивной плазмы проявляется в том, что для необыкновенной волны величина Q может быть отрицательна и в сверхсветовом случае. При этом одна из прошедших волн затухает с удалением от границы, другая же нарастает [18] (эта неустойчивость связана, по-видимому, с аномальным допплер-эффектом). Заметим, что преобразование частоты волны (на 10–20%) при отражении от границы магнитоактивной плазмы в замедляющей системе наблюдалось экспериментально [51].

Отражение от фронта ионизации. Изменение концентрации электронов в неподвижной плазме может быть достигнуто действием ионизирующего излучения. Если ионизирующий фактор локализован в узком движущемся слое, то можно считать, что концентрация N изменяется скачком $\left(\frac{\partial N}{\partial t} = N_0 \delta(z - Vt) \right)$; положим также, что электрон освобождается из атома с нулевой начальной скоростью и что диэлектрическая проницаемость в нейтральной компоненты не изменяется существенно в результате ионизации. Здесь также возможны до и сверхсветовой случаи; досветовое движение рассмотрено в работе [53].

Поскольку скорости распространения волн заданной частоты в движущейся и неподвижной плазме в отсутствие внешнего магнитного поля одинаковы (см., например, [49]), то, как легко видеть, частоты волн и длительности волновых пакетов преобразуются по тем же формулам (1.13), что и для движущейся плазмы. Амплитуды волн по-прежнему могут быть найдены из условий непрерывности E_z и H_z , однако результат здесь получается другой. Особенность данной задачи связана с тем, что поле волны сообщает электрону, кроме колебательной, также и постоянную скорость, зависящую от фазы поля в момент ионизации атома. С этой скоростью связана постоянная во времени поперечная компонента магнитного поля. Учитывая это обстоятельство, в досветовом случае ($\beta' < 1$) получим [53]

$$\frac{E_+(1)}{E_n} = \frac{1 - \sqrt{Q}}{1 + \sqrt{Q}}, \quad \frac{E_-(2)}{E_n} = \frac{2}{1 + \sqrt{Q}}, \quad (1.16a)$$

а в сверхсветовом ($\beta' > 1$) —

$$\frac{E_-(2)}{E_n} = \frac{1 + \sqrt{Q}}{2 \sqrt{Q}}, \quad \frac{E_+(2)}{E_n} = \frac{\sqrt{Q} - 1}{2 \sqrt{Q}}. \quad (1.16b)$$

* Отметим также, что вдоль границы с касательным разрывом могут распространяться поверхностные волны, которые при определенных условиях оказываются неустойчивыми [50].

Что касается энергетических соотношений, то для осциллирующих компонент поля (1.5) теперь не выполняется, а суммарная энергия вторичных волн всегда меньше энергии падающей—часть ее расходуется на сообщение электрону постоянной составляющей скорости. Ситуация здесь похожа на ту, которая имеет место в случае «размыкания» в рассмотренных выше ключевых системах*.

Диэлектрик с упругими диполями. Строго говоря, в тех предыдущих примерах, где рассматривалась плазма, движущаяся в диэлектрике, пренебрежение дисперсией в последнем снова не позволяет считать скачок параметров бесконечно резким. Более последовательно влияние дисперсии на взаимодействие волн со скачком параметра можно проследить, рассматривая конкретную модель диспергирующей среды [24]. Примером может служить диэлектрик с упругими диполями, в котором распространяется резкий фронт поля накачки, изменяющего собственную частоту (коэффициент упругости) осцилляторов ω_s . Поле в такой среде описывается уравнениями четвертого порядка по t , и, соответственно, для решения граничной задачи нужно задавать четыре независимых граничных условия, в качестве которых можно взять условия непрерывности значений $E, H, P, \frac{\partial P}{\partial t}$ на скачке.

Если скорость скачка V достаточно мала и частота падающей навстречу скачку волны также мала ($\omega_0 \ll \omega_s$), то решение содержит четыре вторичные волны, из которых первые две (одна отраженная и одна преломленная) имеют частоты, близкие к $\omega_+(1)$ и $\omega_-(2)$ в формулах (1.7), справедливых для недиспергирующих сред при $V/u \ll 1$ (эти частоты также малы по сравнению с ω_s). Другие же две волны имеют частоты, близкие к $\omega_s(2)$, поэтому для них дисперсия существенна. Поскольку групповые скорости этих волн оказываются меньше V , они отстают от скачка; их амплитуды пропорциональны $(V/c)^2$.

Заметим, что переход к неподвижному скачку ($V \rightarrow 0$) здесь неправомерен—при $V \rightarrow 0$ скачок нельзя считать бесконечно резким во времени, и при $\omega_s d/V \gg 1$, где d —протяженность реального скачка, дисперсия перестает быть существенной; в результате для неподвижной границы остаются две вторичные волны (отраженная и преломленная) и оказываются справедливыми формулы (1.8 а).

4. Отражение от движущегося слоя

Слой прямоугольной формы. Приведенные выше результаты не трудно обобщить на случай, когда параметры испытывают несколько следующих друг за другом скачков, между которыми среда однородна. В частности, к таким задачам относится случай плоского слоя прямоугольного профиля. Если параметры среды до и после слоя одинаковы, то частота и направление распространения прошедшей через слой волны такие же, как у падающей; частоты волн внутри слоя по-прежнему определяются соотношениями (1.1). Для достаточно длинных сигналов, когда можно пренебречь искажением формы и длительности вследствие переотражений в слое, сохраняются также равенства (1.2). Амплитуды волн, разумеется, зависят от длины слоя и способа изменения параметров; в литературе рассматривались случаи, когда волна параметра создается прямоугольным импульсом поля накачки в нелинейной среде (феррите) [54], а также движением диэлектрической пластинки или слоя плазмы [55–62, 125]. Заметим, что в указанных системах энергии и частоты отраженных и прошедших через слой волновых пакетов связаны соотношениями (1.5).

* Особый случай, когда скорость фронта ионизации равна c , рассматривался в [132].

Естественно, что здесь возможны особенности резонансного характера. Например, при определенных значениях толщины слоя d , зависящих от частоты падающей волны и скорости движения слоя, отраженная волна не возникает, и вся энергия проходит через слой.

Слой произвольного профиля. Сопоставление с неподвижным слоем. Если движущаяся граница не является достаточно резкой (соответствующие масштабы переходной области порядка или более k^{-1}, ω^{-1}), то граничные условия (1.3) теряют силу, хотя соотношения (1.1), (1.2) для стационарного профиля слоя и длинных квазимонохроматических сигналов остаются справедливыми, если под ω_i, k_i, τ_i понимать значения соответствующих величин вне слоя. Для отыскания же амплитуд взаимодействующих волн и коэффициентов отражения и проникновения необходимо, вообще говоря, решать соответствующие уравнения с переменными коэффициентами, описывающие распространение волн в неоднородной и нестационарной среде. Известно, что точные аналитические решения таких уравнений удается найти лишь в небольшом числе частных случаев, и мы не будем на них здесь останавливаться. Однако ряд важных характерных особенностей движущихся слоев можно выяснить без получения явных решений, используя метод сопоставления с неподвижным слоем [62].

Сущность этого метода состоит в следующем. Очевидно, для бегущей волны параметра ($p = p(z - Vt)$) можно перейти от z, t к новым независимым переменным ζ, τ , которые допускают разделение переменных. Для этого достаточно взять $\zeta(z, t) = z - Vt$; существенно, что вторую переменную $\tau(z, t)$ можно выбрать таким образом, что уравнение для зависящего от ζ множителя будет совпадать с аналогичным уравнением для некоторого вспомогательного неподвижного слоя. В результате решения для движущегося слоя удается выразить через известные решения для неподвижного слоя; методы же отыскания последних хорошо разработаны. В работах [62, 25] возможность такого сопоставления была показана для электромагнитных волн в линиях передачи или неограниченной среде без дисперсии, а также для изотропной плазмы. Здесь кратко остановимся на последнем примере.

Пусть холодная неоднородная плазма движется со скоростью $V \parallel z$ в некоторой замедляющей среде с проницаемостью $\epsilon = \text{const}$, $\mu = 1$; для поперечных электромагнитных волн, распространяющихся в том же направлении, тогда нетрудно получить уравнение [83, 25]

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} A, \quad (1.17)$$

где A — поперечный векторный потенциал, $\omega_p^2(z, t) = 4\pi e^2 N(z, t)/m\epsilon$. Делая замену $A(z, t) = e^{i\omega'\tau} g(\zeta)$, где $\zeta = z - Vt$, $\tau = (t - \sqrt{\epsilon}z/c) \times (1 - \beta')^{-1}$, нетрудно показать, что функция $g(\zeta)$ совпадает с решением для неподвижного слоя плазмы с параметрами $N' = N(1 - \epsilon\beta^2)^{-1}$, $\epsilon' = \epsilon(1 - \epsilon\beta^2)^{-2}$; при этом постоянная разделения ω' имеет смысл частоты волн во вспомогательном слое*.

Выражая ω' через частоту падающей волны ω_0 ($\omega' = \omega_0(1 - V/v_0)$), для частот вторичных волн нетрудно получить соотношения (1.12); исследование групповых скоростей показывает, что в рассматриваемом случае не может быть более двух вторичных волн [25]. Наконец, сопоставление с неподвижным слоем позволяет выразить искомые коэффи-

* Формальная замена $z, t \rightarrow \zeta, \tau$ несколько напоминает релятивистский пересчет сопровождающей системе отсчета, однако она удобнее, поскольку в последнем случае материальные уравнения заменяются более сложными соотношениями Минковского.

циенты отражения (R) и проникновения (T) по мощности через аналогичные величины для неподвижного слоя (R' и T'). Так, в досветовом случае ($\beta' = V\sqrt{\epsilon}/c < 1$) имеем

$$R = R' \frac{\omega_r k_r}{\omega_0 k_0}, \quad T = T' \frac{n_{\text{эфф}}' (1)}{n_{\text{эфф}}' (2)} \frac{\omega_t k_t}{\omega_0 k_0}, \quad (1.18a)$$

где R' и T' берутся на частоте ω' , $(n_{\text{эфф}}')^2 = 1 - 4\pi\epsilon N'/m$. Очевидно, величины R' и T' в (1.18) зависят от профиля слоя (существенно, что профили вспомогательного и исходного слоев подобны) и могут сложным образом зависеть от ω' . Остальные же множители в (1.18a) описывают добавочный эффект, вызванный движением слоя. Для некоторых законов $N(t)$ коэффициенты R' и T' могут быть вычислены точно (например, для слоя Эпштейна), тогда из (1.18a) находятся и R , T . Заметим, что при одинаковых значениях N до и после слоя $T = T'$. Для резкого скачка концентрации формулы (1.18a) согласуются с (1.14a).

В сверхсветовом случае ($\beta' > 1$) формально следует положить $N' < 0$, т. е. сопоставляемый слой теперь соответствует не плазме, а некоторой искусственной среде с дисперсионным уравнением $c^2 k^2 = -\epsilon(\omega^2 + \omega_p^2)$. Это обстоятельство, однако, не препятствует применению метода сопоставления; в частности, здесь вместо (1.18a) получаем [25]:

$$T_- = \left(1 + \frac{R'}{T'}\right) \frac{n_{\text{эфф}}' (1)}{n_{\text{эфф}}' (2)} \frac{\omega_- k_-}{\omega_0 k_0}, \quad T_+ = \frac{R'}{T'} \frac{n_{\text{эфф}}' (1)}{n_{\text{эфф}}' (2)} \frac{\omega_+ k_+}{\omega_0 k_0}, \quad (1.18b)$$

где R' , T' — по-прежнему соответствующие коэффициенты для вспомогательного слоя. (Здесь отраженных волн не возникает, и две вторичные волны с частотами ω_{\pm} являются преломленными).

Согласно закону сохранения энергии для неподвижного слоя $R' + T' = 1$, откуда вместе с (1.18) следует соотношение, связывающее мощности взаимодействующих волн в движущемся слое; с учетом равенства (1.13б) для длительностей волновых пакетов оно согласуется с (1.5). Такие же соотношения получаются для волн в недиспергирующей среде или длинной линии с бегущим параметром [62]*. Заметим также, что метод сопоставления с неподвижным слоем удается применить и для наклонного падения волн на плоский движущийся слой, в том числе для случая, когда движущаяся неоднородность электронной концентрации создается волной ионизации [126]. В последнем случае, как и для резкой границы, соотношения (1.5) не выполняются — полное число квантов и суммарная энергия взаимодействующих волн всегда уменьшаются.

Если в некоторой области величина $(n_{\text{эфф}}')^2$ становится отрицательной (что возможно в досветовом случае), то отражение может быть практически полным ($R' \rightarrow 1$) и при плавном изменении параметров среды. В изотропной плазме такие «движущиеся зеркала» могут иметь место при наличии движущегося слоя с повышающейся концентрацией электронов; в магнитоактивной плазме или в феррите аналогичный результат может быть достигнут при помощи волны магнитного поля [63].

5. Резонаторы и волноводы с движущимися границами

Если кроме движущейся границы имеется другая отражающая поверхность, то волны испытывают многократные переотражения и систе-

* Исходя из уравнений Лагранжа, аналогичным методом можно показать, что соотношение (1.5) справедливо для произвольной недиссилиптивной распределенной системы с бегущей волной параметра [134].

ма представляет собой, вообще говоря, нестационарный резонатор. Здесь также возможны заслуживающие внимания нерезонансные (в смысле отсутствия параметрического резонанса) эффекты. Эти проблемы, однако, стоят несколько в стороне от темы данного обзора, и мы ограничимся кратким перечислением основных результатов.

Заметим, что рассмотренный в предыдущем пункте движущийся прямоугольный слой представляет собой частный случай таких систем, когда обе поверхности движутся в одну сторону с одинаковой скоростью; в результате здесь не происходит накапливающегося смещения частоты при переотражениях волн внутри слоя.

В литературе довольно подробно исследованы одномерные волны в свободном резонаторе с плоско-параллельными идеально отражающими стенками, одна из которых движется заданным образом со скоростью $V(t)$; граничное условие на движущейся стенке имеет вид $E_\tau = -[VB]/c$. С помощью метода Даламбера задача может быть сведена к решению функционального уравнения, связывающего на границах значения полей в бегущих навстречу волнах. Таким способом удается получить общее решение для случая равномерного движения стенки резонатора ($V = \text{const}$) [64, 65]; это решение может быть представлено в виде ряда «динамических» мод, каждая из которых является суперпозицией двух бегущих навстречу волн с переменными частотой и амплитудой. Естественно, что энергия поля растет при сжатии резонатора и уменьшается при его расширении. Аналогичным образом могут быть решены и некоторые более сложные задачи, в частности, когда стенка движется по закону $z(t) = \sqrt{a + bt^2}$, что соответствует равноускоренному движению в релятивистском смысле [64].

Следует отметить, что многократные переотражения волн в резонаторе с движущейся стенкой могут быть использованы для эффективного преобразования частоты [66, 67]. Таким путем в резонаторе с движущимся «плазменным поршнем» в сантиметровом диапазоне было достигнуто изменение частоты в 2,3 раза [67], тогда как при однократном отражении этот эффект составлял всего 10—20 %.

Накапливающийся эффект может быть достигнут также при периодическом движении одной из стенок с периодом, близким к времени пробега волн между стенками [68]. Для отыскания приближенных решений здесь снова удобен метод Даламбера, при этом в некоторых случаях целесообразно исходить из «фундаментальных» решений в виде коротких импульсов. При благоприятной фазе в такой системе в принципе возможно монотонное сжатие и усиление импульса за счет многократных переотражений от движущейся стенки, сопровождающееся расширением спектра и переносом его вверх. Практически достижимые скорости движения и добротности резонаторов, однако, недостаточны для реализации этого эффекта*.

Другой подход к подобным задачам связан с разделением переменных. Легко видеть, что если ввести новую переменную $\bar{z} = z/a(t)$, где $a(t)$ — координата движущейся границы, то в волновом уравнении появляются переменные коэффициенты, но зато краевая задача теперь формулируется на постоянном интервале ($0 \leq \bar{z} \leq 1$) [70—74]. Применяя метод разделения переменных, в некоторых конкретных случаях (движение границы с постоянной скоростью или по закону $a(t) = (a_0 + bt)^{-1}$ таким путем удается получить решение не только для собственных, но и для

* Похожий эффект может быть достигнут в радиотехнической модели этой системы — отрезке длинной линии, нагруженной на периодически изменяющуюся емкость или индуктивность. Очевидно, изменение реактивной нагрузки в определенной степени эквивалентно изменению электрической длины линии; если период изменения этой нагрузки близок к времени пробега волн в отрезке линии, возможен монотонный перенос спектра собственных колебаний вверх или вниз [69].

вынужденных колебаний резонатора, возбуждаемых произвольным источником [73].

С помощью аналогичного метода рассмотрено также распространение волн H -типа в прямоугольном волноводе с равномерно движущейся стенкой (параллельной вектору E) [74]. Общее решение здесь также можно представить в виде суперпозиции некоторых «динамических» мод. Заметим, что в рассмотренном случае средний поток энергии волны не меняется, хотя сама энергия растет при сжатии волновода (это легко понять, исходя из концепции Бриллюэна: при каждом отражении от стенки волна приобретает энергию, но угол отражения уменьшается, так что падает скорость переноса энергии вдоль оси волновода).

Упомянем еще, что некоторые решения были получены для волн в сферическом резонаторе с движущейся границей [75, 76].

2. ВОЛНЫ В СРЕДАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

1. Преобразование спектра волн

Уравнения переноса для частоты и волнового вектора. Перейдем теперь к рассмотрению противоположного предельного случая, когда параметры среды $p_i(r, t)$ являются достаточно медленными функциями времени и пространственных координат, так что можно ввести малый параметр

$$\chi \sim \frac{1}{\omega p_i} \left| \frac{\partial p_i}{\partial t} \right| \sim \frac{1}{kp_i} \left| \frac{\partial p_i}{\partial r} \right| \ll 1, \quad (2.1)$$

где ω и k — частота и волновой вектор распространяющихся в такой среде квазимохроматических волн. Вообще говоря, величины ω и k также будут переменными; будем сначала считать, что граничные и начальные условия таковы, что изменения ω и k имеют такой же порядок медленности: $\left| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right| \sim \chi \omega^2$, $\left| \frac{\partial \omega}{\partial r} \right| \sim \chi \omega k$ и т. д.

Условия (2.1) позволяют при рассмотрении волновых процессов применить метод геометрической оптики, обобщенный на случай нестационарных сред. Возможность такого обобщения, по-видимому, впервые была отмечена в [77]; в работе [78] было также показано, что при медленном изменении параметров среды остаются справедливыми обычные соотношения между плотностью и потоком энергии и групповой скоростью. Специального рассмотрения параметрических эффектов в этих работах, однако, не проводилось; для различных волновых систем это сделано в более поздних работах [79–100, 11, 21, 22]. При этом конкретная процедура вывода уравнений геометрической оптики может быть различной; в частности, для пространственно однородных ($p_i = p_i(t)$) или «бегущих» ($p_i = p_i(z - Vt)$) параметров среды волновые уравнения допускают разделение переменных, тогда геометрическое приближение может быть использовано для отыскания зависящего от t (или соответственно от $\zeta = z - Vt$) множителя [21, 22, 82]. В других случаях, например, для волн в одномерных системах без дисперсии, исходные уравнения могут быть преобразованы к виду, удобному для решения в виде рядов по переотраженным волнам без привлечения формального аппарата геометрической оптики [81, 84, 86]. Отметим, наконец, что в некоторых представляющих интерес случаях удается найти точные решения, справедливые и для быстрого изменения $p_i(r, t)$ [79, 80, 82, 62] (см. ниже п. 3).

Наиболее общая формулировка метода геометрической оптики состоит в следующем. Все величины, характеризующие волновое поле

(например, компоненты векторов E и H в электромагнитной волне), ищутся в виде

$$f_k(r, t) = A_k(r, t) e^{i\varphi(r, t)}, \quad (2.2)$$

где φ — эйконал, $A_k(r, t)$ — медленный по сравнению с $e^{i\varphi}$ множитель. Представив $A_k(r, t)$ в виде ряда

$$A_k(r, t) = A_k^{(0)} + \chi A_k^{(1)} + \chi^2 A_k^{(2)} + \dots, \quad (2.3)$$

из динамических уравнений соответствующей системы нетрудно получить последовательную систему уравнений для $A^{(0)}$, $A^{(1)}$ и т. д. (наиболее удобно это сделать, вводя «медленные» время и координаты $t_m = \chi t$, $r_m = \chi r$ [77]).

Из условия совместности уравнений нулевого приближения следует уравнение эйконала, которое мы запишем в виде

$$c^2 k^2 = \omega n^2(\omega, k, p_i), \quad (2.4)$$

где $\omega(r, t)$ и $k(r, t)$ связаны с эйконалом $\varphi(r, t)$ соотношениями

$$\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad k = -\nabla \varphi. \quad (2.5)$$

Существенно, что здесь зависимость $n(\omega, k, p_i)$ такая же, как при постоянных во времени и пространстве параметрах системы, т. е. вид «локального» дисперсионного уравнения при медленной вариации $p_i(r, t)$ в приближении геометрической оптики не меняется. Разумеется, эта зависимость может быть различной для разных типов волн, существующих в одной и той же волновой системе. Для слабопоглощающих систем, которые мы будем иметь в виду, в нулевом приближении потерями можно пренебречь, тогда величина n будет вещественной.

Соотношение (2.4) с учетом (2.5) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение относительно $\varphi(r, t)$, вид которого зависит от дисперсионных свойств конкретной системы. Как известно, интегрирование его представляет трудности даже для стационарных сред, когда параметры изменяются лишь в пространстве и частота распространяющихся волн неизменна. В нашем случае задача существенно усложняется, так как теперь величина $\omega(r, t)$ также является искомой переменной.

Для качественных, а иногда и количественных исследований преобразования спектра волн оказывается более удобным использовать уравнения, непосредственно определяющие изменения $\omega(r, t)$ и $k(r, t)$. Эти уравнения нетрудно получить [98], дифференцируя (2.4) соответственно по t и r и учитывая, что, согласно (2.5), $\frac{\partial k}{\partial t} = -\nabla \omega$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (u \nabla) \omega = -\omega \left(\frac{\partial n \omega}{\partial \omega} \right)^{-1} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\omega, k}; \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (u \nabla) k = \omega \left(\frac{\partial n \omega}{\partial \omega} \right)^{-1} \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)_{\omega, k}, \quad (2.6b)$$

где $u(\omega, k, p_i) = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{p_i}$ — групповая скорость волн; производные по t и r в правых частях уравнений берутся при постоянных ω и k .

Из (2.6) следует, что при $n = \text{const}$ возмущения ω и k распространяются в пространстве с групповой скоростью u . Изменение частоты для фиксированного группового фронта определяется степенью нестацио-

нарности среды (членом $\sim \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_{\omega, k}$ в (2.6а)), а изменение волнового вектора происходит при наличии пространственной неоднородности ($\left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)_{\omega, k} \neq 0$). Уравнений (2.6) (которые в отличие от (2.4), (2.5) являются квазилинейными) достаточно для полного решения задачи, т. е. отыскания $\omega(r, t)$ и $k(r, t)$ (а тогда и эйконала $\varphi(r, t)$) по заданным параметрам $p_t(r, t)$. Эти уравнения эквивалентны характеристической системе

$$dt = \frac{dr}{u} = \frac{d\omega}{p_\omega} = \frac{dk}{p_k}, \quad (2.7)$$

где через p_ω и p_k обозначены соответственно правые части (2.6а) и (2.6б). Равенства (2.7) определяют семейства групповых характеристик — «лучей» в четырехмерном пространстве r, t^* . Учитывая, что векторы u и k , согласно (2.4), связаны соотношением $u = c \left(\frac{\partial n_\omega}{\partial \omega} \right)^{-1} \left(\frac{k}{k} - \omega c \frac{\partial n}{\partial k} \right)$,

из (2.6б) нетрудно найти также уравнение лучей (точнее, траекторий групповых фронтов) в обычном пространстве. Например, для изотропной среды без пространственной дисперсии ($\left(\frac{\partial n}{\partial k} \right) = 0$, $c \left(\frac{\partial n_\omega}{\partial \omega} \right)^{-1} = u$,

$u \parallel s = \frac{k}{k}$) имеем [98]:

$$\frac{ds}{ds} = \left(\frac{\partial n}{\partial r_\perp} \right)_\omega, \quad (2.8)$$

где ds — элемент длины вдоль групповой траектории ($ds = u dt$), $\frac{\partial n}{\partial r_\perp}$ — поперечная к k и u составляющая величины $\left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)_\omega$. Формально отличие от стационарного случая [101] здесь лишь в том, что в левой части (2.8) фигурирует полная производная (для фиксированного группового фронта). В результате траектории двух последовательных фронтов (начинающих движение из одной точки пространства в одном и том же направлении, но в различные моменты) теперь могут не совпадать.

Заметим, что в (2.6) в принципе достаточно второго уравнения, поскольку входящую в него частоту ω можно исключить с помощью исходного соотношения (2.4), которое теперь играет роль алгебраического уравнения связи. В одномерном случае, который мы далее в основном будем рассматривать, можно, наоборот, из (2.6а) исключить $k = \omega n/c$, и достаточным является также уравнение для частоты, хотя и здесь (2.6б) может оказаться более удобным.

Однородный волновой пакет. Наиболее простые соотношения получаются для коротких импульсов, длина которых мала по сравнению с характерными пространственными и временными масштабами изменения параметров. Из характеристического уравнения $\frac{dz}{dt} = u$ в одномерном случае нетрудно получить соотношения, определяющие изменения временной длительности (τ) и пространственной протяженности (l) волнового пакета [98]:

* Возможность введения четырехмерных лучей естественным образом вытекает из гамильтоновой формы уравнений динамики и наиболее последовательно была указана, по-видимому, в [91, 93] (см. также [83, 90, 127, 128]).

$$\frac{d \ln \tau}{dt} = -\frac{\partial \ln u}{\partial t}, \quad \frac{d \ln l}{dz} = \frac{\partial \ln u}{\partial z}, \quad . \quad (2.9)$$

где, в отличие от (2.6) — (2.8), производные в правых частях уравнений берутся с учетом вариации ω и k (т. е., например, $\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\omega, k} + \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t}$).

Таким образом, деформация огибающей волнового пакета зависит от производных групповой скорости u ; в области $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$ происходит сжатие сигнала во времени (при $\frac{\partial u}{\partial s} < 0$ — в пространстве). Для сигналов с однородным заполнением тогда можно оценить ширину спектральной полосы $\Delta \approx 2\pi/\tau$.

Например, в случае пространственно-однородной среды $\left(\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_\omega = 0\right)$ согласно (2.6б) $k = k_0(\xi)$, где $\xi(z, t)$ — первый интеграл характеристического уравнения $\frac{dz}{dt} = u(k, t)$, $k_0(\xi)$ — произвольная функция, определяемая граничными и начальными условиями. Если в начальный момент пакет был однороден, то $k = k_0 = \text{const}$, а согласно второму из уравнений (2.9) также $l = l_0 = \text{const}$, т. е. пространственная структура волнового пакета остается неизменной, временные же характеристики пакета ω и τ изменяются из-за изменения фазовой и групповой скоростей соответственно, так что

$$\frac{\omega(t)}{\omega_0} = \frac{n_0}{n(t)}, \quad \frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{\tau_0}{\tau} = \frac{u(t)}{u_0}, \quad (2.10)$$

где индексом «0» отмечены начальные значения соответствующих величин. Относительная полоса частот Δ/ω тогда будет пропорциональна величине un , т. е. отношению групповой скорости к фазовой.

Вследствие независимости групповых фронтов в рассматриваемом приближении, уравнения (2.9) справедливы и для произвольно выделенного короткого цуга в волне, ограниченного групповыми траекториями, и характеризуют в этом случае компрессию или растяжение отдельных участков огибающей сигнала.

Неоднородный волновой пакет. Дисперсионное сжатие. Если локальная частота и волновое число на протяжении волны изменяются (неоднородный волновой пакет), то согласно (2.6) — (2.10) в диспергирующей среде групповые фронты могут догонять друг друга даже при $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\omega, k} = 0$. Решения для $\omega(z, t)$ и $k(z, t)$ здесь могут стать неоднозначными, что физически соответствует взаимному обгону групповых фронтов [83, 106]. Это явление аналогично пересечению лучей в обычной (стационарной) геометрической оптике, в частности, огибающие групповых траекторий в пространстве r, t отвечают каустикам*, вблизи которых рассматриваемое приближение несправедливо. Случай, когда все траектории пересекаются в одной точке, соответствует пространственно-временной фокусировке сигнала — при этом дисперсионное сжатие приводит к концентрации энергии волны в фокусе на минимальном интервале.

* Здесь, однако, не может быть замкнутых каустик, так как проекция траекторий на ось t не может менять знак.

вале, длительность которого имеет порядок $2\pi/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ определяется максимальной частотной девиацией.

Модуляция частоты волны может быть обусловлена как нестационарностью среды ($\bar{p}_i(t)$), так и граничными условиями. Например, в однородной стационарной среде ($p_i = \text{const}$) решение уравнения (2.6а) имеет вид $\omega = F(\xi)$, где $\xi = t - z/u(\omega)$ — произвольная функция [106]. Такое решение — простая (риманова) волна — хорошо известно в теории нелинейных волн в недиспергирующих средах [101]. Участки с $\frac{du}{dt} > 0$ сокращаются вплоть до появления в некоторой точке z^* , t^* неоднозначности (пересечения групповых фронтов); в этой точке амплитуда волны резко возрастает (см. ниже). Если функция $F(\xi)$ непрерывна вместе со своей первой производной, то значения z^* , t^* находятся из условий $\frac{\partial t}{\partial \omega} = 0$, $\frac{\partial^2 t}{\partial \omega^2} = 0$. Нетрудно, в частности, определить закон модуляции входного сигнала, необходимый для оптимальной компрессии, когда все групповые траектории в определенных областях пересекаются в одной точке*.

В средах с переменными во времени параметрами частотная модуляция появляется, вообще говоря, в процессе распространения волны, и тогда дисперсионное сжатие необходимо учитывать даже при немодулированном входном сигнале. Конкретные примеры рассматриваются ниже, здесь же только отметим, что вблизи точек обгона локальным изменением параметров (т. е. величиной $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\omega$ по сравнению с $\frac{\partial u}{\partial \omega} \times \frac{\partial \omega}{\partial t}$) можно пренебречь из-за относительно большей производной $\frac{\partial \omega}{\partial t}$, поэтому особенности изменения поля вблизи «каустик» в данном приближении те же, что и в однородной среде.

2. Изменение амплитуды и энергии волн

Уравнение для амплитуд волн. Уравнение для определения амплитуд $A_k^{(0)}$ нормальных волн (2.2) в методе геометрической оптики получается из условия совместности уравнений для поправок первого приближения ($A_k^{(1)}$); при этом все $A_k^{(0)}$ можно выразить линейными соотношениями через одну скалярную функцию $A_0(r, t)$ (например, одну из проекций вектора E). Конкретный вид уравнения для A_0 , разумеется, зависит от физической системы, а также от того, какая именно величина выбрана в качестве A_0 . Существенно, однако, что независимо от порядка исходной системы уравнения для A_0 и всех $A_k^{(r)}$ получаются первого порядка; в одномерном случае, когда параметры p_i и амплитуда A_0 являются функциями z и t , это уравнение всегда может быть сведено к виду

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} + u \frac{\partial A_0}{\partial z} + \left(\gamma \frac{\partial \omega}{\partial t} + v \right) A_0 = A_0 \sum \left(\alpha_i \frac{\partial p_i}{\partial t} + \beta_i \frac{\partial p_i}{\partial z} \right), \quad (2.11)$$

где коэффициенты α_i , β_i , γ , v — некоторые функции ω , k и параметров системы p_i **.

* Этот эффект используется для сжатия ЧМ сигналов в радиолокации [102], где, однако, расчеты обычно основаны на спектральном разложении и не могут быть просто обобщены на случай нестационарных сред.

** В таком же виде может быть записано уравнение для зависящего от продольной координаты z множителя и для волн в волноводе, заполненном зависящей от z и t средой, хотя структура поля в этом случае не является фактически одномерной [83, 95].

Уравнение (2.11) означает, в частности, что при $p = \text{const}$ возмущение амплитуды распространяется с групповой скоростью $v = \frac{d\omega}{dk}$; член

$\gamma \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right) A_0$ описывает изменение амплитуды в результате дисперсионного сжатия, член $v A_0$ при $v > 0$ учитывает диссипацию энергии в среде. Наконец, правая часть (2.11) соответствует эффектам, обусловленным нестационарностью среды.

Поскольку уравнение (2.11) линейно относительно A_0 , то интегрирование его и, тем самым, отыскание амплитуды и энергии нормальных волн не встречает принципиальных трудностей, если только выражения для $\omega(z, t)$ и $k(z, t)$ найдены из уравнений эйконала. Заметим, что уравнение типа (2.11) можно получить и для трехмерных задач; изменение амплитуд полей в этом случае определяется не только параметрическими эффектами и дисперсионным сжатием, но также расходимостью лучей (изменением сечения лучевой трубы).

Вариационный принцип в усредненной форме. Адиабатический инвариант. Полная энергия волны, распространяющейся в нестационарной среде, меняется как из-за возможной диссипации, так и за счет работы сил, изменяющих во времени реактивные параметры среды. Следует отметить, что уравнения поля в такой среде в общем случае не дают возможности разделить эти два типа эффектов. Наиболее общее определение «чисто реактивных» (недиссипативных) систем основано, по-видимому, на возможности применения вариационного принципа — линейная одномерная система описывается плотностью лагранжевой функции L , квадратичной по переменным поля z и t . Для квазипериодических процессов вместо L можно пользоваться усредненным (по периоду несущей частоты во времени и пространстве) лагранжианом \bar{L} , поскольку вклад осциллирующей части L в интеграл действия $S_d = \iint L dz dt$ на достаточно большом интервале исчезающе мал*. Подставляя в L искомые функции в виде $A_k e^{i\varphi}$ и усредняя, получим

$$\bar{L} = \sum_{i,k} f_{ik}(\omega, k, p_i) A_i A_k, \quad (2.12)$$

где вид функций f_{ik} определяется конкретной волновой системой. В качестве новых переменных здесь служат амплитуды A_k и фаза φ . Тогда уравнения движения, отвечающие (2.12), имеют вид

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial A_k} = 0; \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial k} \right). \quad (2.13b)$$

Уравнения (2.13 а) приводят к линейной однородной системе относительно A_k , откуда получается, во-первых, дисперсионное уравнение вида $\text{Det} \| f_{ik} \| = 0$, и, во-вторых, все A_k выражаются через некоторую произвольную функцию $A_0(z, t)$. Из (2.13 а) также следует, что $\bar{L} = 0$, как и должно быть в бегущей волне. Уравнение (2.13 б) определяет оставшуюся переменную A_0 . Если ввести средние плотность энергии

* Такой подход был впервые развит в [103] применительно к более общему классу нелинейных волн.

$w = \omega \frac{\partial \bar{L}}{\partial \omega}$ и плотность потока энергии $S = -\omega \frac{\partial \bar{L}}{\partial k} = wu$, то из (2.13 б) имеем [11]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{S}{\omega} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Локальное дисперсионное уравнение $\text{Det} \| f_{ik} \| = 0$ фактически совпадает с (2.4), из которого, как уже указывалось, следуют уравнения переноса (2.6) и (2.7). Что же касается (2.14), то оно эквивалентно уравнению для амплитуд (2.11), но имеет более наглядный физический смысл.

Из уравнения (2.14) вытекает соотношение, связывающее изменения частоты и энергии волнового пакета конечной длительности. В самом деле, проинтегрировав (2.14) по области пространства, охватывающей волновой пакет, получаем адиабатический инвариант

$$I = \int \frac{wdz}{\omega} = \text{const}, \quad (2.15)$$

Величина I , очевидно, имеет смысл числа квантов в волновом пакете; при однородном частотном заполнении ($\omega = \text{const}$) имеем $I = W_\omega$, где W — полная энергия импульса, $\omega(z, t)$ — его несущая частота.

Знание инварианта (2.15) полезно, в частности, тем, что из него можно однозначно найти изменение амплитуд волн для фиксированных групповых фронтов (без решения уравнения для амплитуд), если зависимость $\omega(z, t)$ известна. В работах [81, 94, 95] справедливость этого инварианта была показана для некоторых частных систем путем решения уравнения (2.11) (см. приведенные ниже примеры)*. Следует, однако, отметить, что применение вариационного принципа для расчета произвольных параметрических систем может быть затруднительным из-за того, что нельзя указать общего способа нахождения лагранжиана \bar{L} для системы с переменными параметрами и, как правило, написать лагранжиан сложнее, чем непосредственно уравнения движения. Кроме того, в обычном виде лагранжев формализм применим лишь для недиссипативных систем, хотя путем введения соответствующей диссипативной функции его можно обобщить и для волновых систем с потерями [105].

Изменение амплитуды в области дисперсионного сжатия. Квазиоптическое приближение. Выше уже указывалось, что при распространении неоднородных по заполнению волн имеет место эффект дисперсионного сжатия в области $\frac{du}{dt} > 0$. В точках опрокидывания, где $\frac{du}{dt} \rightarrow \infty$, из уравнения (2.11) следует $A_0 \rightarrow \infty$, как и должно быть на «каустике». Вблизи этих точек в (2.11) членами с $\frac{\partial p}{\partial t}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$ по сравнению с $\gamma \frac{\partial \omega}{\partial t}$

* Отметим, что сохранение полного числа квантов имеет место также для волн в идеальных резонаторах с медленно движущимися стенками ($\beta = V/c \ll 1$). Однако в общем случае происходит «перераспределение» квантов между различными модами резонаторов, и лишь при выполнении более жестких условий, когда частоты мод не слишком близки, поле в нестационарном резонаторе можно представить в виде суперпозиции независимых мод с квазистационарной пространственной структурой, в каждой из которых число квантов является адиабатическим инвариантом [104]. Для простейших (например, одномерных) систем соответствующее условие имеет вид $m\beta \ll 1$ где m — номер моды, т. е. для мод с большим m взаимодействие существенно даже при медленном движении границы.

можно пренебречь, и локальное поведение амплитудной огибающей будет таким же, как и при $p_i = \text{const}$, а именно [106]:

$$A^2(z, t) = A_0^2(\xi) \left| 1 - z \frac{du}{d\xi} \right|^{-1}. \quad (2.16)$$

Отсюда, в частности, следует, что в рассматриваемом приближении интенсивность волны вблизи точки z^* , соответствующей «опрокидыванию» частотной огибающей (см. конец п. 1 этого раздела), растет пропорционально $|z - z^*|^{-1}$.

В то же время из спектральных соображений ясно, что длительность сигнала при предельном сжатии не может быть меньше $\tau_{\min} \sim 2\pi/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ — максимальная девиация частоты. Поэтому выражение (2.16), а значит, и уравнение (2.11) перестают быть применимыми, когда длительность группы τ приближается к $2\pi/\Delta\omega$. В этом случае необходимо учитывать эффект дисперсионного расплывания волн, для чего в уравнениях следует учесть вторые производные амплитуды модулированной волны, которые раньше отбрасывались.

Рассмотрим волновой пакет с узким спектром в среде с медленно меняющимися параметрами. Если протяженность пакета в пространстве и во времени мала по сравнению с масштабами изменения параметров среды ($\left| \frac{\partial \ln p}{\partial t} \right| \ll \tau^{-1}$, $\left| \frac{\partial \ln p}{\partial r} \right| \ll \ell^{-1}$), то спектр его остается узким во всех точках, и распространение пакета вдоль групповых траекторий (лучей) в пространстве может быть рассмотрено в приближении квазиоптики [108]. Решение отыскивается в виде $A(V_\chi r, V_\chi t) \exp(i\varphi/\chi)$, где φ — эйконал, определяемый в геометрическом приближении, A — комплексная амплитуда; ее зависимость от $V_\chi r, V_\chi t$, где χ — определяемый (2.1) малый параметр — характеризует упомянутые ограничения, налагаемые на длительность пакета. При этом в уравнении для A удерживаются вторые производные. Приведем результат для одномерного случая. Переходя от z, t к переменным z, ξ , где $\xi(\chi z, \chi t)$ — интеграл уравнения характеристики $\frac{dz}{dt} = u$, и заменяя $A = \tilde{a}(\chi z, V_\chi \xi) \times A_0(\chi z, \chi \xi)$, где множитель A_0 описывает изменение A в геометрическом приближении, можно получить для \tilde{a} параболическое уравнение, типичное для квазиоптики, но с переменным коэффициентом:

$$\frac{\partial \tilde{a}}{\partial z} = -i\gamma \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{a}}{\partial \xi^2}, \quad (2.17a)$$

где $\gamma(\chi \xi, \chi z) = \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_p$ — дисперсионный параметр.

Если параметры среды изменяются не только медленно, но и на малую величину ($p = p_0 + p'(\chi z, \chi t)$, $|p'| \ll p_0$), то ограничений на длительность волнового пакета не требуется и решение можно искать в виде $A(\chi r, \chi t) \exp[i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})]$, где ω_0 и \mathbf{k}_0 теперь постоянные величины. В одномерном случае для комплексной амплитуды A с учетом членов второго порядка получается уравнение вида

$$\frac{\partial A}{\partial z} + (\nu + ip') A = -\frac{i\gamma_0}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \left(\alpha \frac{\partial p'}{\partial t} + \beta \frac{\partial p'}{\partial z} \right) A. \quad (2.17b)$$

Здесь $\xi = t - z/u_0$, u_0 — невозмущенная групповая скорость, ν — коэффициент потерь, α , β — те же, что и в (2.11). Уравнение (2.17b) позволяет, в частности, рассмотреть возникновение слабой модуляции в мо-

нохроматической волне, входящей в нестационарную среду с малым изменением параметров.

Существенно, что повышение порядка в уравнениях (2.17) по сравнению с геометрическим приближением устраняет особенности в решении вблизи области дисперсионного сжатия.

О тензоре диэлектрической проницаемости слабонестационарных и слабонеоднородных сред с дисперсией. При заданных материальных уравнениях нетрудно построить уравнения геометрического приближения в рамках феноменологической теории для произвольной среды как с временной, так и с пространственной дисперсией [96, 100]. Однако при этом следует учесть, что для таких сред, вообще говоря, изменяется вид материальных уравнений по сравнению со случаем стационарной и однородной среды. Пусть свойства среды задаются тензором $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}, p)$, определяющим отклик $\mathbf{D}(r, t)$ на строго гармоническую составляющую поля $\mathbf{E}(r, t) = E_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}r)]$, так что $D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} E_{0\beta} \times \exp[i(\omega t - \mathbf{k}r)]^*$. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае медленно изменяющихся параметров $p_i(r, t)$ (см. (2.1)) этот тензор может отличаться от соответствующего «квазистационарного» тензора $\epsilon_{\alpha\beta}^0(\omega, \mathbf{k}, p_i)$, найденного для $p_i = \text{const}$, на величины порядка χ . Вследствие малости этих поправок их можно отбросить в уравнении эйконала (2.4) (если они не приводят к каким-либо качественным особенностям), однако в уравнениях для амплитуд (2.11) они должны быть учтены.

В общем случае вычисление тензора $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}, p_i)$ требует рассмотрения микропроцессов в веществе и отыскания самосогласованных решений уравнений поля и уравнения движения зарядов. Однако для недиссилиптивных в указанном выше смысле систем антиэрмитовы поправки к тензору $\epsilon_{\alpha\beta}$ можно найти в рамках феноменологического подхода из условия сохранения адиабатического инварианта (2.15). Это условие приводит к следующей связи между $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\epsilon_{\alpha\beta}^0$ [99, 100]:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^0 + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{\alpha\beta}^0}{\partial t \partial \omega} - \frac{\partial^2 \epsilon_{\alpha\beta}^0}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{k}} \right) + O(\chi^2). \quad (2.18)$$

Для частного случая изотропной среды без пространственной дисперсии выражение (2.18) приводилось также в работах [109, 129]. Физически появление антиэрмитовых поправок к тензору $\epsilon_{\alpha\beta}$ означает, в частности, изменение фазовых соотношений между векторами \mathbf{D} и \mathbf{E} и связано с тем, что в среде с переменными параметрами $p_i(r, t)$ «стационарный» сдвиг фаз, определяемый равенством $D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}^0 E_\beta$, не успевает устанавливаться. Например, для изотропной плазмы ($\epsilon^0 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$) при $\omega_p = \text{const}$ колебания $\mathbf{D}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$ происходят в фазе, однако при изменении концентрации N во времени колебания $\mathbf{D}(t)$ будут отставать или опережать (в зависимости от знака $\frac{dN}{dt}$) по фазе

колебания $\mathbf{E}(t)$ в той же точке. Аналогичное рассогласование фаз имеет место и в неоднородной среде с пространственной дисперсией. Сравнение с результатами микротеории показывает, что выражение (2.18) справедливо для достаточно широкого класса сред, в частности, для движущейся изотропной и магнитоактивной плазмы [94, 95, 100, 130]. Однако при изменении электронной концентрации под воздействием ионизирующих источников соотношение (2.18) уже не имеет места.

* Для квазимохроматического поля $\mathbf{E}(r, t) = E_0(r, t) \exp[i\varphi(r, t)]$ в связывающем \mathbf{D} и \mathbf{E} материальном уравнении в приближении геометрической оптики добавляются члены, содержащие первые производные E_0 , ω и \mathbf{k} по t и r [96, 100].

3. Некоторые примеры

Недиспергирующая среда. Наиболее простым является случай, когда среда изотропна и не имеет ни временной, ни пространственной дисперсии ($\frac{\partial n}{\partial \omega} = 0$, $\frac{\partial n}{\partial k} = 0$, тогда $\frac{\partial u}{\partial \omega} = 0$). Уравнения (2.6) и (2.7) при этом линейны и могут быть проинтегрированы в общем виде, например:

$$\omega(r, t) = \omega_0(\xi) \exp \left[- \int_0^s c^{-1} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right) ds \right], \quad (2.19)$$

где, как и выше, $\xi(r, t)$ — решение характеристического уравнения $\frac{dr}{dt} = u$, функция $\omega_0(\xi)$ определяется из граничных или начальных условий; криволинейный интеграл вдоль луча берется при $\xi = \text{const}$.

В уравнении (2.11) для амплитуд волн в этом случае $\gamma = 0$, а коэффициенты u, α, β не зависят от частоты. Проиллюстрируем получающиеся в результате выражения на примере плоской электромагнитной волны, распространяющейся в недиспергирующей среде с $\epsilon = \epsilon(z, t)$, $\mu = \mu(z, t)$, $\sigma = \sigma(z, t)$. Рассмотрим полубесконечную систему ($z \geq 0$), пусть граничные условия при $z = 0$ имеют вид

$$E_x = \rho(0, t) H_y = E_{\text{вх}}(t) = E_0 \cos \omega_0 t, \quad (2.20)$$

где $\rho = \sqrt{\mu/\epsilon}$ — импеданс среды. Тогда при $z \geq 0$ можно найти [81]:

$$E_x(z, t) = \rho H_y(z, t) = \sqrt{\frac{\rho(z, t)}{\rho(0, t_{\text{вх}})}} \exp \left[- \int \left(\frac{\partial n}{\partial t} c^{-1} + \frac{1}{2} \rho \sigma \right) dz \right] E_{\text{вх}}(t_{\text{вх}}). \quad (2.21)$$

Здесь $n = \sqrt{\epsilon \mu}$, $t_{\text{вх}} = t - t_3$, $t_3 = c^{-1} \int_0^z ndz$ — время задержки волн в линии; все интегралы в (2.21) берутся при $t_{\text{вх}} = \text{const}$.

Как следует из (2.21), вариации параметров ρ и n приводят к существенно различным результатам. Медленное изменение $\rho(z, t)$ само по себе вызывает лишь трансформацию волн с сохранением переносимой мощности и энергии, тогда как вариации $n(z, t)$ влияют как на частоту и длительность, так и на мощность и энергию волн. При этом в отсутствие джоулевых потерь ($\sigma = 0$) из (2.21) для квазимонохроматического сигнала вытекает соотношение (2.15), которое в данном случае эквивалентно условию $S/\omega^2 = \text{const}$, где $S = (c/8\pi) E_x H_y$ — плотность потока энергии [79–81]. В области с $\frac{\partial n}{\partial t} < 0$ происходит повышение частоты и энергии сигнала, сопровождающееся в соответствии с (2.10) пропорциональным расширением спектра волнового пакета из-за сокращения длительности импульса τ . В результате даже при $\sigma = 0$ усиления амплитуд отдельных спектральных гармоник по сравнению с входным сигналом не происходит [81, 110, 111].

Примеры вычисления фигурирующих в (2.21) интегралов можно найти в работах [79–81]. Приведем здесь случай, когда параметр n меняется по закону синусоидальной бегущей волны: $n = n_0(1 + m \cos K\zeta)$, $\zeta = z - Vt$, где $\Omega = KV \ll \omega_0$ [80]. При этом результат существенно зависит от соотношения между скоростью распространения электромаг-

нитных волн (c/n) и волны параметра ($V = \Omega/K$). В несинхронном режиме ($|q| = |mn_0V(1 - \beta n_0)|^{-1} < 1$, $\beta = V/c$)

$$\Phi = \frac{\omega(z, t)}{\omega_0} = \frac{1 + q \cos \Omega t_{\text{вх}}}{1 + q \cos Kz},$$

$$t_{\text{вх}}(z, t) = \frac{2}{\Omega} \operatorname{Arctg} \left\{ \sqrt{\frac{1+q}{1-q}} \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2}(1-\beta n_0)\sqrt{1-q^2} Kz + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{1-q}{1+q}} \operatorname{tg} \frac{K\zeta}{2} \right] \right\}, \quad (2.22)$$

т. е. модуляция частоты здесь происходит периодически в пространстве (см. рис. 5 а), достигая максимума на расстоянии $\Delta/2 = \pi(K|1 - \beta n_0|\sqrt{1 - q^2})^{-1}$ от входа (одновременно пропорционально квадрату мгновенной частоты меняется и переносимая волной мощ-

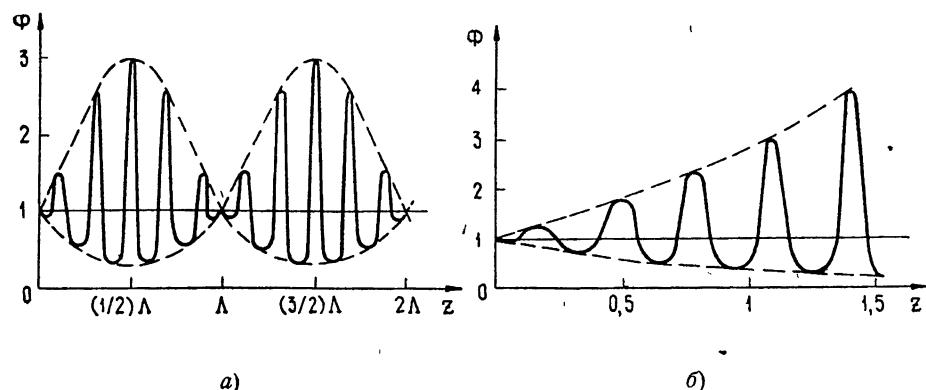


Рис. 5.

ность). В синхронном же режиме ($|q| > 1$) для некоторых цугов амплитуда и частота волн монотонно увеличиваются, например, при $\beta = 1/n_0$ ($q = \infty$)

$$\frac{\omega}{\omega_0} = (e^{mKz} \cos^2 \theta + e^{-mKz} \sin^2 \theta)^{-1}, \quad \theta = \frac{1}{2}(\Omega t - Kz) \quad (2.23)$$

(см. рис. 5 б).

Отметим, что некоторые вопросы модуляции фазы и частоты электромагнитных волн в системах с переменными параметрами рассмотривались также в [21, 112–114]. Экспериментальное наблюдение этого эффекта в длинной линии описано в работах [87, 97], где было показано, что таким способом можно получить большой индекс модуляции ($\Delta\omega/\Omega \gg 1$). Кроме того, в ряде работ рассматривалась фазовая модуляция света при помощи синхронной волны параметра, создаваемой СВЧ накачкой (так называемые модуляторы бегущей волны, см., например, [112]).

Выше рассматривалась полубесконечная система, так что при $z \geq 0$ существовала лишь одна прямая (прошедшая) волна. При более общих условиях, например, при падении волн из среды с постоянными параметрами на слой конечной толщины с переменным импедансом $\rho(z, t)$ имеет место локальное отражение от границ слоя. В результате внутри такого слоя, кроме прямой волны, будут присутствовать также волны, переотраженные от его границ. Решение в этом случае можно найти в виде сходящихся рядов по переотраженным волнам. Такая задача рассматривалась в работе [97], где теоретически и эксперименталь-

но исследовался параметрический модулятор частоты СВЧ-диапазона на распределенном полупроводниковом диоде.

Заметим, что в рассматриваемом случае недиспергирующих сред некоторые результаты, например, соотношения (2.9), (2.21) справедливы при более общих предположениях, чем подразумевалось выше. А именно, квазимонохроматичность волн здесь необязательна, и решение (2.21) годится, например, для видеосигналов (такие задачи рассматривались в работах [81, 115]); в этом случае уравнению (2.11) удовлетворяют мгновенные значения полей. В условиях медленности типа (2.1) при этом вместо ω^{-1} и k^{-1} должны фигурировать характерные масштабы изменения поля.

Как ясно из решения (2.21), пробегающий в среде с переменными параметрами импульс (в том числе и видеоимпульс) может быть усилен по мощности и укорочен по длительности. В системе с обратной связью (резонаторе) этот процесс будет многократно повторяться; такая система при определенных условиях может стать генератором коротких импульсов. Установившееся значение амплитуды, а также форма и длительность генерируемых импульсов будут, очевидно, зависеть от конкретного закона изменения параметров и потерь в системе, а также от ее нелинейных и дисперсионных свойств (учет которых существен для определения установившегося режима). Такие параметрические генераторы импульсов были реализованы экспериментально [116].

Отметим, наконец, что вследствие аналогии уравнений формулы (2.19)–(2.23) справедливы и для некоторых других волновых систем, например, для главных волн в недиспергирующих линиях передачи, а также для плоских акустических волн в слоистой нестационарной среде. Точное соответствие с уравнениями для E_x и H_y в последнем случае получается при использовании лагранжевых координат, причем аналогами E_x , H_y , μ и ϵ в акустической задаче соответственно являются избыточное давление, колебательная скорость, начальная плотность среды и величина $\rho_0(u^2\rho_m^2)^{-1}$, где $u(z, t)$ — скорость звука, $\rho_m(z, t)$ — переменная плотность среды, ρ_0 — начальное значение плотности [84]. В работах [117, 118] приведены результаты расчета и экспериментального измерения фазовой модуляции ультразвуковых волн в воде. Подобные же аналогии могут быть проведены и при исследовании упругих волн в твердых средах [119]. Были рассмотрены и трехмерные уравнения геометрической акустики нестационарной среды [133].

Оценка точности геометрооптического приближения. Сравнение с точными решениями. Чтобы оценить точность решения в приближении геометрической оптики, можно, как обычно, вычислить поправки более высокого порядка в (2.3) и сравнить их с основным членом. Для рассматриваемых в этом пункте одномерных волн в среде без дисперсии уравнения высших приближений также легко интегрируются и общее решение записывается в виде рядов, основные члены которых при условии (2.20) равны (2.21), а остальные соответствуют переотраженным волнам [81]. В частности, в [115] были рассмотрены искажения видеоимпульса в среде с переменными $n(z, t) = \sqrt{\epsilon\mu}$, $\rho(z, t) = \sqrt{\mu/\epsilon}$, вызываемые однократным отражением волн.

Требование малости первой отраженной волны по сравнению с первичной для среды без поглощения приводит к неравенству [81, 2]:

$$\frac{1}{\omega} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} + cn \frac{\partial}{\partial z} \right) \ln \sqrt{\rho} \right| \ll 1 \quad (2.24)$$

(для негармонических волн вместо ω^{-1} входит характерный масштаб поля). Таким образом, для применимости приближения геометрической оптики необходима плавность изменения волнового сопротивления ρ , а сколь угодно быстрое изменение показателя преломления

$n(z, t)$ само по себе отражения не вызывает. В частности, при взаимно-пропорциональном изменении $\epsilon(z, t)$ и $\mu(z, t)$ (так, что $\rho = \sqrt{\mu/\epsilon} = \text{const}$) решение (2.21) является точным при любом законе $n(z, t)$ [79, 80]. Заметим, что при этом, согласно (2.19), (2.21), амплитуды полей (u и H) изменяются пропорционально мгновенной частоте.

Для бегущей волны параметра $\rho(z, t) = \rho(z - Vt)$ из условия (2.24) следует, что отражение будет тем меньше, чем ближе скорости распространения сигнала (c/n) к волнам параметра (V) (т. е. как раз тогда, когда параметрический эффект выражен наиболее сильно). Можно также указать на случай, когда отраженных волн вообще не возникает и при переменной величине $\rho(z, t)$ — это имеет место, если зависимости $\epsilon(z, t)$ и $\mu(z, t)$ имеют вид простой волны в нелинейной среде (так что $\rho(z, t) = \rho(\xi)$, где $\xi(z, t)$ — интеграл уравнения $\frac{dz}{dt} = cn^{-1}(z, t)$).

Если же $\rho(z, t) = \rho(\xi')$, где ξ' — интеграл уравнения $\frac{dz}{dt} = -cn^{-1}(z, t)$, то прямая волна возбуждает однократно отраженную (обратную) волну, которая больше не переотражается [81, 111, 133].

Следует отметить, что условие (2.24), вообще говоря, не является достаточным: в случае периодического изменения параметра отраженные волны при определенных условиях могут монотонно накапливаться; физически это соответствует резонансному отражению волн [2] и является обобщением брэгговского отражения на случай движущейся периодической неоднородности. Этот эффект уже относится к резонансным параметрическим явлениям, о которых говорилось в Введении, и в настоящем обзоре не рассматривается.

Короткие импульсы в системе с дисперсией. Как указывалось выше (см. (2.10)), в недиспергирующих средах произведение несущей частоты на длительность импульса и, соответственно, относительная ширина спектра Δ/ω сохраняются. Нетрудно показать, что аналогичные соотношения выполняются и для определенного класса систем с дисперсией [98]. А именно, если зависимость $n(\omega, p)$ в (2.4) имеет вид $n = \omega^{-1} f(\omega/p)$ (т. е. $k = k(\omega/p)$), где $f(\omega/p)$ — произвольная функция, $p(t)$ — переменный во времени параметр, то в пространственно-однородной системе ($k = \text{const}$) будет $\omega(t) \sim u(t) \sim p(t)$, так что $\omega t = \text{const}$, $\Delta/\omega = \text{const}$.

Подобное дисперсионное соотношение имеет место, например, для электромагнитных волн в волноводе, заполненном недиспергирующей средой с проницаемостями $\epsilon(t)$, $\mu(t)$:

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} - k_{\perp}^2, \quad (2.25)$$

где k_{\perp} — поперечное волновое число, определяемое типом волны и геометрией волновода в поперечном сечении, $p(t) = c/\sqrt{\epsilon \mu}$, c — скорость света. При медленном изменении $\epsilon(t)$, $\mu(t)$ тогда имеем $\omega(t) = c(k^2 + k_{\perp}^2)^{1/2} [\epsilon(t) \mu(t)]^{-1/2} = \omega_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 / \epsilon(t) \mu(t)}$, $\Delta(t)/\omega(t) = \text{const}$, как и для главных (TEM) волн, для которых $k_{\perp} = 0$, или плоских волн в неограниченной среде без дисперсии (см. (2.19)). Соотношение $S \sim \omega^2$ между мощностью и частотой волн здесь уже не выполняется, хотя, как нетрудно показать, при $\sigma = 0$ для пакета $W/\omega = \text{const}$. Более подробно изменения частоты и амплитуды волн в волноводе с $\epsilon(z, t)$, $\mu(z, t)$ рассмотрены в работах [82, 83, 88], причем в [82] и [88] имеются также примеры строгого расчета полей.

Иной результат получается, если переменной величиной в (2.25) является k_{\perp} . Изменение $k_{\perp}(t)$ в принципе возможно за счет медленно-

го движения одной из стенок волновода*. Кроме того, уравнение типа (2.25) с переменной величиной k_z имеет место для плоских электромагнитных волн в изотропной плаэме с переменной электронной концентрацией $N(z, t)$ [83, 62] (см. (1.17)) или в более общем случае — для ТЕ волн в волноводе, заполненном такой плаэмой [95]. В последнем случае эффективное значение k_z^2 оказывается равным $k_{z0}^2 + \omega_p^2(z, t)/c^2$, где ω_p — электронная плаэменная частота, k_{z0} — поперечное волновое число в отсутствие плаэмы в волноводе (здесь случай $k_{z0} = 0$ также соответствует ТЕМ волнам или плоским волнам в неограниченной плаэме). Интегрирование уравнения (2.6) при этом дает [95]

$$\omega^2(z, t) = \omega_0^2(\xi) + c^2 \int \frac{\partial k_z^2}{\partial t} dt, \quad (2.26)$$

где интеграл следует брать при $\xi = \text{const}$; таким образом, здесь частота волны для фиксированного фронта растет с увеличением концентрации N во времени.

Вариации амплитуды и энергии волн в нестационарной плаэме зависят от механизма изменения концентрации электронов. Можно показать, что недиссилиптивной (в смысле применимости лагранжиана (2.12)) рассматриваемая система является в случае, если изменение $N(z, t)$ происходит за счет движения неоднородной бесстолкновительной плаэмы (в частности, под воздействием мощных плаэменных волн) или же вследствие процессов рекомбинации (но без влияния ионизирующих источников). Приведем для указанных случаев выражения для векторов E и H в ТЕ волне [95]. Пусть граничное условие на входе системы ($z = 0$) задано в виде

$$A|_{z=0} = A_\perp(x, y) g(t) e^{i\omega_c t}, \quad (2.27)$$

где A — векторный потенциал ($E = -c^{-1} \frac{\partial A}{\partial t}$, $H = \text{rot } A$), функция $g(t)$ определяет формугибающей входного сигнала. Тогда в приближении геометрической оптики при $z \gg 0$

$$E = -iA_\perp \sqrt{k_{z0} k_z^{-1}} g(t_{bx}) \exp \left(\int_{t_{bx}}^t \frac{\partial}{\partial t} \ln \sqrt{u} dt \right) e^{i\varphi}, \quad H_\perp = \frac{ck}{\omega} [z_0 E], \quad (2.28)$$

где $t_{bx}(z, t) = t - \int_{(0, t_{bx})}^{(z, t)} \frac{dz}{u}$, z_0 — единичный вектор в направлении оси z .

Нетрудно убедиться, что из (2.28) следует инвариант (2.15). Выражения (2.28) существенно упрощаются для коротких импульсов в однородной среде ($\frac{\partial N}{\partial z} = 0$, $k_z = \text{const}$); при этом из (2.26) или непосредственно из (2.25) следует $\omega^2(t) = c^2 [k_z^2 + k_\perp^2(t)]$. Поскольку здесь $uv = c^2$, то изменения групповой и фазовой скоростей противоположны по знаку, так что согласно (2.10) имеем $\Delta \sim \omega^{-1}$, $\Delta/\omega \sim \omega^{-2}$, т. е. с ростом частоты происходит компрессия спектра сигнала. Амплитуды напряженностей E и H_\perp в (2.28) изменяются соответственно пропорци-

* Строгий расчет электромагнитных волн в волноводе с подвижной боковой стенкой дан в работе [7].

нально $\omega^{1/2}$ и $\omega^{-1/2}$, в результате поток энергии $S_z \sim EH_{\perp}$ не меняется, но полная энергия увеличивается из-за возрастания длительности импульса ($\tau \sim u^{-1} \sim \omega(t)$).

В работе [94] было рассмотрено распространение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме, дрейфующей с переменной скоростью $V(z, t)$ в направлении внешнего магнитного поля H_0 , которое также может быть медленно изменяющимся ($H_0(z, t)$). Дисперсионное уравнение при $k \parallel H_0$ имеет вид:

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2(\omega - kV)}{\omega^2(\omega - kV \mp \omega_H)}, \quad (2.29)$$

где $\omega_H = eH_0/mc$ — гирочастота электронов, знаки \pm относятся соответственно к обычновенной и необыкновенной волнам. Таким образом, здесь спектры волн зависят от изменения всех трех параметров $N(z, t)$, $V(z, t)$, $H_0(z, t)$. В частности, при $N=\text{const}$, $V=0$, $\omega \gg \omega_H$, ω_p и $H_0=H_0(t)$ уравнение (2.6 а) может быть проинтегрировано в квадратурах: $\omega^2(z, t) = \omega_0^2(\xi) \pm (3/2) \omega_p^3 [\omega_H(t) - \omega_{H0}]$. Член kV в (2.29) соответствует пространственной дисперсии; в [94] было показано, что этот член в нестационарной среде может быть существенным и в отсутствие равномерного дрейфа плазмы как целого. Инвариант (2.15) при пренебрежении столкновениями электронов здесь также оказывается справедливым.

Если изменение концентрации плазмы происходит под воздействием некоторых ионизирующих источников, то уравнения (2.26) для частоты волн в приближении геометрической оптики остаются в силе. Что же касается энергетических соотношений, то из физических соображений ясно, что равенство (2.15) здесь не выполняется. В самом деле, при $\frac{dN}{dt} > 0$ в соответствии с (2.26) частота распространяющихся волн будет увеличиваться, однако здесь нет работы внешних сил, которые могли бы увеличить электромагнитную энергию. Иначе говоря, подобная система при $\frac{dN}{dt} \neq 0$ является «диссипативной» и в отсутствие столкновений электронов в том смысле, что часть энергии волн переходит в энергию поступательного движения электронов [63, 83] (ср. разд. 1, п. 3).

В заключение отметим, что в системе с дисперсией возможно адабатическое сжатие или расширение спектра сигналов и без смещения несущей частоты [98]. Как ясно из (2.10), для этого нужно, чтобы вариация параметров изменяла групповую скорость волн, но не влияла на их фазовую скорость. На некоторой частоте ω_* это возможно, если дисперсионное уравнение вблизи этой частоты имеет вид

$$n(\omega, p) = n(h), \quad h = (\omega - \omega_*) g(\omega, p) + h_0(\omega), \quad (2.30)$$

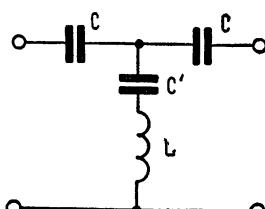


Рис. 6

где g и h_0 — произвольные дифференцируемые функции своих аргументов. В самом деле, здесь при $\omega = \omega_*$ имеем $(\frac{\partial n}{\partial t})_{\omega_*} = 0$ независимо от закона изменения $p(t)$, тогда как, вообще говоря, $\frac{du}{dt} \neq 0$. Нетрудно показать, что зависимости типа (2.30) реализуются в искусственной длинной линии, показанной на рис. 6, если в ней изменения $L(t)$ и $C'(t)$ связаны соотношением $\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{C'} = \omega_*^2 \frac{\partial L}{\partial t}$.

Дисперсионное сжатие неоднородных сигналов. Как ясно из уравнений (2.6), особенности поведения частотно-модулированных волн в диспергирующей среде (в частности, эффект дисперсионного сжатия) связаны в первую очередь с частотной зависимостью групповой (а не фазовой) скорости. Как известно, существуют волновые системы, в которых фазовая скорость от частоты зависит ($\frac{dn}{d\omega} \neq 0$), в то время как $\frac{du}{d\omega} = 0$.

Такая ситуация имеет место, например, для волн пространственного заряда в широком электронном потоке или продольных (плазменных) волн в холодной дрейфующей плазме. Для указанных систем $n(\omega) = cV_m^{-1}(1 \mp \omega_p/\omega)$, где $V_m(z, t)$ — скорость дрейфа пучка или плазмы, $\omega_p(z, t)$ — плазменная частота (знаки \pm относятся соответственно к быстрым и медленным волнам), так что $\frac{dn}{d\omega} = \pm \omega_p/V_m \omega^2 \neq 0$, тогда

как $u = V_m$ и $\frac{du}{d\omega} = 0$. В результате дисперсионное сжатие здесь отсутствует, и преобразование длительности пакета происходит по закону $\tau = \tau_0 \exp \int \frac{\partial}{\partial t} (cV_m^{-1}) dt$, куда частота волны не входит. Более подробный анализ решения соответствующей системы уравнений (которая здесь относится к параболическому типу) в приближении геометрической оптики дан в работе [86]*.

При наличии дисперсионного сжатия для исследования длинных сигналов недостаточно рассмотреть изменения ω и A вдоль характеристики, а нужно записать общее решение уравнений (2.6), (2.11). Это удается сделать, в частности, для довольно широкого класса задач, в которых параметры зависят от переменных $\zeta = at + bz$, где a и b — постоянные. Заметим, что если ввести функцию $s = bw + ak$, то из (2.6 а), (2.6 б) следует, что $\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial z} \right) s = 0$, т. е. s постоянно на групповых траекториях. Если вместо z, t в качестве независимых переменных выбрать ζ и η , где $\eta = a't + b'z$ (a' и b' — произвольные постоянные, причем $ab' \neq a'b$), то интегрирование уравнения (2.6) дает [83]:

$$\eta - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{a' + b'u(\zeta, s)}{a + bu(\zeta, s)} d\zeta = \Psi(s), \quad (2.31)$$

где $\Psi(s)$ — произвольная функция, а интеграл берется при постоянном значении s . Пользуясь (2.31), удается найти общий интеграл амплитудного уравнения; при этом для недиссилиптивных систем удобнее исходить из уравнения (2.14). Переходя к переменным ζ, Ψ , можно записать интеграл (2.14) в виде

$$I = \frac{W}{\omega} = Q(\Psi) \left/ \left(1 + \frac{ds}{d\Psi} \int_0^\zeta \frac{d\Phi}{ds} d\zeta \right) \right., \quad (2.32)$$

где Φ — подынтегральное выражение в (2.31). Как и в частном случае (2.16), выражение (2.32) расходится на каустиках.

* Возможность преобразования частоты волн в модулированных электронных потоках была качественно показана и экспериментально подтверждена в [120, 121].

Укажем несколько примеров систем, для которых применимо решение (2.31), (2.32).

а) Для неоднородной стационарной среды ($\rho = \rho(z)$) такие задачи рассматривались применительно к распространению модулированных по частоте волн в плазме (ионосфере) [107]. При этом удается получить условие оптимальной компрессии, когда все групповые траектории, заданные при $z = 0$ на конечном интервале t , пересекаются в одной точке z^*, t^* . В частности, при малых девиациях ω для этого необходима линейная модуляция частоты ($\omega(0, t) = \omega_0 + (t - t_0) T^{-1}$, $0 < t < T$). Заметим, что такая компрессия возможна как внутри слоя плазмы, так и для волны, отраженной от слоя в соответствующих точках поворота.

б) Были рассмотрены также некоторые задачи, относящиеся к волнам в однородных нестационарных средах ($\rho = \rho(t)$). Для волновода, заполненного недиспергирующей средой с заданными $\epsilon(t)$, $\mu(t)$ было получено решение в случае линейного изменения параметра $p(t) = \sqrt{\epsilon\mu}/c = p_0 + at$ [83].

В частности, при $\omega(0, t) = \omega_0 = \text{const}$ зависимость частоты от z и t дается неявным выражением

$$\ln \frac{\omega}{\omega_0} = -\alpha z \left[1 - \frac{k_\perp^2}{(p_0 + at)^2 \omega^2} \right]^{-1}, \quad (2.33)$$

где k_\perp — поперечное волновое число для данного типа волны.

В случае $\alpha < 0$ в некоторой точке z^* , определяемой равенством

$$\alpha z^* = \frac{k_\perp}{\omega_0 p_0} \left(\frac{\omega_0^2 p_0^2}{k_\perp^2} - 1 \right)^{3/2}, \quad (2.34)$$

на переднем фронте волны происходит «опрокидывание» частотной огибающей (рис. 7 а). На рис. 7 б показана зависимость потока энергии S_z от z для фиксированной групповой траектории: при $\alpha > 0$ рост S_z связан с нарастающей энергией в волне за счет изменения параметров, а при $\alpha < 0$ — с дисперсионным сжатием. Разумеется, для коротких импульсов отсюда могут быть получены результаты предыдущего пункта.

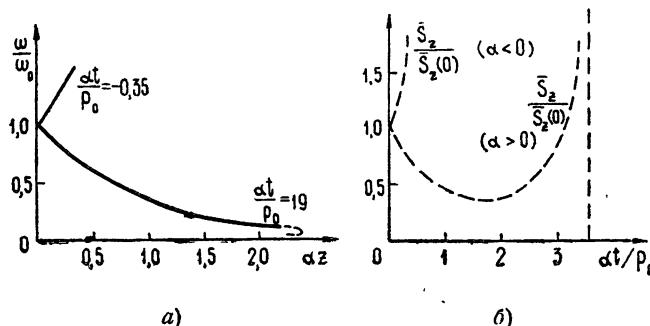


Рис. 7.

Другой пример — распространение волн в плазме с переменной концентрацией $N(t)$. Если, в частности, N изменяется линейно ($\omega_p^2 = \omega_{p0}^2 + at$), то для электромагнитной волны с $\omega(0, t) = \omega_0$ также возможно образование «каустики» на переднем фронте. Соответствующая координата равна

$$z^* = -\frac{c\omega_0}{\alpha} \sqrt{\omega_0^2 - \omega_{p0}^2} \left(1 - \sqrt{\frac{4\omega_{p0}^2}{\omega^2} - 3} \right). \quad (2.35)$$

Следовательно, «окрокидывание» происходит лишь при уменьшении $N(\alpha < 0)$ и при условии $3/4 < \omega_{p0}^2/\omega_0^2 < 1$. Заметим, что (2.35) верно и для продольной (плазменной) волны, если заменить s на тепловую скорость электронов v_T .

Подобные процессы могут играть определенную роль, например, для космической плазмы, где концентрация меняется при расширении плазмы из-за вспышек и взрывов, а также из-за процессов ионизации и рекомбинации.

в) Из вида уравнений (2.6), (2.7), (2.11) ясно, что в диспергирующей среде преобразование частоты и амплитуды волн может быть более эффективным, если изменение параметров происходит по закону бегущей волны, скорость которой близка к групповой скорости сигнала. Из решений, полученных для бегущей волны параметра ($p = p(z-Vt)$), отметим сначала стационарные волны «гибающихся»—решения, в которых ω , k и A являются функциями одной переменной $\zeta = z - Vt$ [63, 83, 94]. Такие решения удовлетворяют граничным условиям в случае, когда в полупространстве $\zeta \geq \zeta_0$, где параметры среды постоянны, задана монохроматическая волна. В области $\zeta < \zeta_0$ тогда справедливы равенства

$$\omega(\zeta) = k - \omega/V = s(\zeta_0) = s_0, \quad I(\zeta) = W/\omega = I(\zeta_0) \quad (2.36)$$

(второе равенство соответствует случаю недиссилиптивной среды, когда выполняется (2.14)).

Подобные решения рассматривались, в частности, применительно к электромагнитным волнам в движущейся плазме и волноводе с ферритом [63, 83]. Так, для движущейся (в том числе с релятивистской скоростью) неоднородной плазмы частота поперечной волны равна:

$$\omega(\zeta) = \frac{s_0}{1 - (\beta')^2} \left[1 + \beta' \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2(\zeta)[1 - (\beta')^2]}{s_0^2}} \right], \quad (2.37)$$

где $\beta' = Vn/c$, n — показатель преломления среды, через которую движется плазма. Заметим, что при достаточно высокой концентрации и $\beta' < 1$ величины ω и k становятся комплексными, т. е. имеется точка поворота. Как уже указывалось в предыдущем разделе, задачи об отражении волн от движущейся точки поворота рассматривались в работе [63].

Если изменение N вызвано не движением плазмы, а волной ионизации, то выражения для ω и k , как уже отмечалось, не изменяются, а в формуле (2.36) для энергии волны появится дополнительный множитель, зависящий от ζ .

г) Роль «группового синхронизма» проще всего выяснить для случая малых периодических изменений параметров среды ($p = p_0 + p'(\zeta)$, $|p'| \ll p_0$). Тогда можно положить $s = s_0 + s'$, где s' мало, и найти приближенное решение уравнений для ω и A . В частности, при $p'(\zeta) = p_m \sin K\zeta$, $\omega(0, t) = \omega_0 = \text{const}$ для частоты ω ($\omega = \omega_0 + \omega'$) имеем

$$\omega' = - \frac{v_0 \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_k p_m}{u_0 - V} (\sin K\zeta + \sin \Omega \Psi), \quad (2.38)$$

где $u_0 = u(\omega_0, p_0)$, $\Omega = KV$, $\Psi = t - \frac{z}{u_0} \left(1 - s' u_0^{-1} \frac{\partial u}{\partial s} \right)$, $s' = \omega'(1/u_0 - 1/V)$.

Второй член в этом неявном выражении отвечает уже упоминавшейся простой волне частоты, т. е. частотная огибающая снова искается вплоть до точки «опрокидывания» $z^* = u_0 |u_0/v_0 - 1|/p_m \Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \omega} \right) \times \left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_k$. Из-за наличия двух слагаемых в (2.38) на интервале $0 < z < z^*$

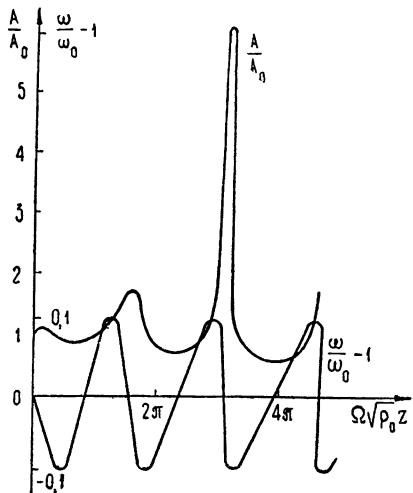


Рис. 8.

волна частоты испытывает пространственные биения с периодом $\pi u_0/\Omega (1 - u_0/V)$ (рис. 8). Из (2.38) видно, что величина ω' растет с приближением к групповому синхронизму, когда $u_0 \rightarrow V$ (однако при $1 - u_0/V \leq p_m/p_0$ формула (2.38) теряет применимость).

Примеры решений в квазиоптическом приближении. Рассмотрим сначала уравнение (2.17 а). Отметим прежде всего, что, как и в случае постоянных параметров, это уравнение имеет частное решение в виде гауссова импульса: $\tilde{a} \sim \sqrt{q} \times \exp(-q\xi^2)$, где $q = q(z, \xi \sqrt{\chi})$ — комплексная функция. При этом из (2.17 а) следует, что

$$q = q_0 \left[q_0 - 4i \int_{z_0}^z \gamma \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 d\xi \right]^{-1}, \quad (2.39)$$

где q_0 и z_0 — вообще говоря, функции $\xi \sqrt{\chi}$. Соответствующее решение $A = \tilde{a}A_0$ таково, что интенсивность зависит от ξ по гауссову закону, а мгновенная частота изменяется по ξ линейно. Изменение параметров такого импульса по z зависит как от вида $\gamma(\xi \sqrt{\chi}, z \sqrt{\chi})$ в (2.39) (эффекты дисперсионного расплывания), так и от функции $A_0(z \sqrt{\chi}, t \sqrt{\chi})$ (непосредственное воздействие изменения параметров в геометрическом приближении). В области, где $\text{Im } q \gg \text{Re } q$, спектр импульса определяется частотной модуляцией, и решение совпадает с результатом «геометрического» анализа. Однако в окрестности точки наибольшего сжатия $\text{Im } q$ обращается в нуль, а $\text{Re } q$ остается конечным и, следовательно, особенность в решении устраняется. Подобные решения рассматривались, в частности, применительно к электромагнитным волнам в плазме с зависящей от z или t концентрацией [108].

Для малых изменений параметров, когда справедливо уравнение (2.17 б) ($\varphi = 0$), удается решить задачу о модуляции волны, монохроматической на границе среды. Пусть $p = p_0 + p' \sin \Omega(t - z/V)$, где $p' \ll p_0$. Если еще $p'/p_0 \ll \Omega/\omega_0$, то в волне мало изменяются как частота, так и амплитуда волны ($A = A_0 + A'$), причем φ и A' модулированы синусоидально по t с частотой Ω . Вдали от группового синхронизма возникает также пространственная модуляция с периодом $\Lambda_1 = -\pi u_0/\Omega (1 - u_0/V)$, так же как и в случае (2.38). Здесь нет искажений огибающих во времени, но максимальные (за период Λ_1) девиации амплитуды и частоты изменяются по z с периодом $\Lambda_2 = 4\pi/\gamma_0 \Omega^2$ (как и для слабомодулированной волны в диспергирующей среде с постоянными параметрами [122]).

Групповому синхронизму здесь отвечают два близких значения скорости параметра $V = u_0 (1 \pm \gamma_0 \Omega u_0 / 2)$. Решение для A' и φ при этом имеет нарастающую вдоль z компоненту: $A'/A_0 = \pm \varphi = \omega_0 (p'/p_0) z \cos \Omega \times (t - z/V)$. Это решение справедливо вплоть до точки $z' \sim u_0 p_0 / \omega p'$, после чего необходимо учитывать искажения огибающих, описываемые решением типа (2.36). Заметим, что, если волна параметра создается одной из собственных волн среды, то групповой синхронизм означает равенство между групповой скоростью сигнала и фазовой скоростью волны параметра. «Синхронная» модуляция такого рода реализуется в нелинейной оптике [112] и, по-видимому, может возникать в космических условиях, если групповая скорость радиоволны близка к фазовой скорости продольной (плазменной или ионно-звуковой) волны в плазме.

Авторы выражают признательность А. В. Гапонову и С. М. Рытову за ряд ценных замечаний по структуре данного обзора.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. K. Tien, H. Suhl, A travelling wave ferromagnetic amplifier, Proc. IRE, 46, № 4, 700 (1958).
2. Н. С. Степанов, О резонансном отражении волн в системе с периодически изменяющимися параметрами, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 4, № 4, 656 (1961).
3. E. S. Cassedey, The parametric coupling of modes of propagation in nonlinear media, Electromagnetic wave theory (Proc. of URSI Symposium, 1965), Pergamon Press, 1967, part 2, p. 543.
4. В. Н. Орловский, Р. З. Сагдесев, Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы, ЖТФ, 32, 1291 (1962).
5. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Параметрическая генерация электромагнитных волн в магнитоактивной плазме, ЖЭТФ, 45, № 11, 1473 (1963).
6. В. П. Силин, Параметрический резонанс в плазме, ЖЭТФ, 48, № 6, 1679 (1965).
7. С. А. Ахманов, Р. В. Ходлов, Параметрические усилители и генераторы света, УФН, 88, № 3, 439 (1966).
8. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Параметрические генераторы света (Обзор), Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 5, 631 (1970).
9. Н. Бломберген, Вынужденное комбинационное рассеяние света, УФН, 97, № 2, 397 (1969).
10. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
11. L. A. Ostrovskii, N. S. Stepanov, Nonresonance parametric phenomena in distributed systems (Selected Papers from the URSI Symp. on electromagn. waves, Stresa, Italy, 1968); Alta Frequenza, 38, No. speciale, 204 (1969).
12. А. Эйнштейн, К электродинамике движущихся тел, Собрание научных трудов, т 1, изд. Наука, М., 1965, стр. 7.
13. В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, М., 1947.
14. А. М. Глуцюк, Указатель литературы по электродинамике движущихся сред, изд. ИРЭ АН УССР, 1967.
15. K. Landeckeg, Possibility of frequency multiplication and wave amplification by means of some relativistic effects, Phys. Rev., 86, № 6, 852 (1952) (перевод, сб. Миллиметровые и субмиллиметровые волны, ИЛ, М., 1959, стр. 179).
16. M. A. Lampert, Reflection of electromagnetic waves by Cerenkov electron gas, Phys. Rev., 102, 299 (1956) (перевод, сб. Миллиметровые и субмиллиметровые волны, ИЛ, М., 1959).
17. Я. Б. Файнберг, Ускорение частиц в плазме, Атомная энергия, 6, № 4, 431 (1959).
18. Я. Б. Файнберг, В. С. Ткалич, Об отражении электромагнитной волны от плазмы, движущейся через диэлектрическую среду при наличии постоянного магнитного поля, ЖТФ, 29, № 4, 491 (1959).
19. Л. А. Островский, О взаимодействии слабых сигналов с ударными электромагнитными волнами, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 2, № 5, 833 (1959).
20. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Ударные электромагнитные волны. (Обзор). Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 9—10, 1376 (1967).

21. F. R. Morgenthaler, Velocity modulation of electromagnetic waves, *IRE Trans., MTT-6*, 167 (1958).
22. L. B. Felsen, G. M. Whitman, Wave propagation in time-varying media, *IEEE Trans., AP-18*, № 2, 242 (1970).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
24. Л. А. Островский, Взаимодействие электромагнитных волн с движущейся границей в диспергирующих средах, Доклад на симпозиуме по дифракции волн, Ленинград, 1970.
25. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, Об отражении и преломлении электромагнитных волн в движущейся неоднородной плазме, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 14, № 1, 19 (1971).
26. Л. А. Островский, Б. А. Соломин, Корректность задач о взаимодействии волн с движущимся скачком параметра, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 8, 1183 (1967).
27. Б. А. Соломин, О нелинейном преобразовании видеосигналов в управляемой линии передачи с ферритом, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, 9, № 5, 673 (1966).
28. Б. М. Болотовский, С. Н. Столяров, Формулы Френеля на движущейся границе раздела двух сред, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 6, 117 (1961).
29. С. Н. Столяров, Взаимодействие электромагнитных волн с движущейся границей раздела двух сред, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 4, 671 (1962).
30. О. С. Мергелян, Отражение и преломление электромагнитных волн в случае движущейся среды, ДАН Арм. ССР, 34, № 2, 65 (1962).
31. С. Н. Столяров, Отражение и преломление электромагнитных волн на движущихся границах двух сред, ЖТФ, 33, № 5, 565 (1963).
32. C. Yeh, Reflections and transmission of electromagnetic waves by moving dielectric, *J. Appl. Phys.*, 36, № 11, 3513 (1965).
33. V. P. Pucci, Reflection and refraction of electromagnetic waves by a moving dielectric medium, *J. Appl. Phys.*, 38, № 2, 662 (1967).
34. S. W. Lee, Y. T. Lo, Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving uniaxially anisotropic medium, *J. Appl. Phys.*, 38, № 2, 870 (1967).
35. C. Yeh, Brewster angle for a dielectric medium moving at relativistic speed, *J. Appl. Phys.*, 38, № 13, 5194 (1967).
36. H. Berger, Reflection and transmission of electromagnetic power at moving interfaces, *J. Appl. Phys.*, 39, № 7, 3512 (1968).
37. C. S. Tsai, B. A. Auld, Wave interaction with moving boundaries, *J. Appl. Phys.*, 38, № 5, 2106 (1967).
38. T. Shiozawa, K. Hazama, General solution to the problem of refraction and transmission by a moving dielectric medium, *Radio Sci.*, 3, № 6, 569 (1968).
39. Д. И. Блохинцев, Движущийся приемник звука, ДАН СССР, 47, № 1, 22 (1945).
40. В. И. Конторович, Отражение и преломление звука на ударных волнах, Акуст. ж., 5, № 3, 314 (1959).
41. Б. А. Соломин, Параметрическое преобразование спектра видеоимпульсов в ключевой линии, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 2, № 6, 1227 (1966).
42. Л. А. Островский, Б. А. Соломин, Преобразование сигналов в ключевых параметрических линиях, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 12, 1732 (1967).
43. В. И. Курялко, К кинетической теории отражения электромагнитных волн от движущейся плазмы, ЖТФ, 31, № 1, 71 (1961).
44. В. И. Курялко, В. И. Мирошниченко, Отражение электромагнитных волн плазмой, Укр. физ. ж., 6, № 3, 415 (1961).
45. В. И. Курялко, Отражение электромагнитных волн от плазмы, движущейся в волноводе медленных волн, ЖТФ, 31, № 8, 899 (1961).
46. В. И. Мирошниченко, Кинетическая теория отражения электромагнитных волн от движущейся плазмы, Укр. физ. ж., 11, № 4, 451 (1966).
47. В. И. Мирошниченко, Кинетическая теория отражения электромагнитных волн от движущейся плазмы, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 4, 666 (1966).
48. C. Yeh, Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving plasma medium, *J. Appl. Phys.*, 37, № 8, 3079 (1966).
49. В. Г. Гавриленко, Г. А. Лупанов, Н. С. Степанов, К вопросу об отражении электромагнитных волн в неоднородной движущейся плазме, ЖТФ, 41, № 3, 534 (1971).
50. В. Г. Гавриленко, Г. А. Лупанов, Н. С. Степанов. О генерации электромагнитных волн струйными течениями в плазме, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 5, 700 (1970).
51. О. Г. Загороднов, Я. Б. Файнберг, А. М. Егоров, Об отражении электромагнитных волн от плазмы, движущейся в волноводах медленных волн, ЖЭТФ, 38, № 1, 7 (1960).

52. B. R. Shawla, H. Unz, Reflection and transmission of normally incident waves by a semi-infinite longitudinally drifting magneto-plasma, *Nuovo Cimento*, **B57**, № 2, 399 (1968).
53. В. И. Семенова, Об отражении электромагнитных волн от фронта ионизации, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 8, 1077 (1967).
54. А. М. Глущук, Отражение и преломление электромагнитной волны движущимся в нелинейной среде слоем поля, *ЖТФ*, **34**, № 8, 1345 (1964).
55. C. Yeh, K. F. Case, Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving dielectric slab, *Phys. Rev.*, **144**, № 2, 665 (1966).
56. С. Н. Столяров, Отражение и прохождение электромагнитных волн, падающих на движущуюся диэлектрическую пластинку, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **10**, № 2, 284 (1967).
57. А. И. Кондратенко, Об отражении электромагнитных волн от движущегося магнитоактивного слоя плазмы, Укр. физ. ж., **13**, № 2, 236 (1968).
58. C. Yeh, Reflection and transmission of electromagnetic waves by a dielectric slab, *Phys. Rev.*, **167**, № 3, 875 (1968).
59. С. Н. Столяров, Взаимодействие электромагнитных волн с движущейся в среде диэлектрической пластинкой, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **11**, № 4, 542 (1968).
60. С. Н. Столяров, Взаимодействие электромагнитных волн с диэлектрическим слоем, состоящим из смеси покоящейся и движущейся сред, *ЖТФ*, **39**, № 8, 1388 (1969).
61. J. A. Kong, D. K. Cheng, Reflection and transmission of electromagnetic waves by a moving uniaxially anisotropic slab, *J. Appl. Phys.*, **40**, № 5, 2206 (1969).
62. Н. С. Степанов, Об отражении волн от произвольной движущейся неоднородности, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, № 5, 908 (1962).
63. Г. И. Фрейдман, Отражение электромагнитных волн в гиротропных средах от волны магнитного поля, *ЖЭТФ*, **41**, № 1, 226 (1961).
64. N. L. Balazs, On the solution of the wave equation with moving boundaries. *J. Math. Analys. Appl.*, **3**, № 3, 472 (1961).
65. Р. И. Баранов, Ю. М. Широков, Электромагнитное поле в оптическом резонаторе с подвижным зеркалом, *ЖЭТФ*, **53**, № 6 (12), 2123 (1967).
66. В. И. Курيلко, Об отражении электромагнитных волн от движущихся поверхностей, *ЖТФ*, **30**, № 5, 504 (1960).
67. О. Г. Загороднов, Я. Б. Файнберг, А. М. Егоров, Л. И. Болотовский, Умножение частоты с помощью «склонивания» плазмы, *ЖТФ*, **31**, № 3, 297 (1961).
68. В. Н. Красильников, А. М. Панкратов, Электромагнитные поля в резонаторах с колеблющейся границей, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, № 8, 59 (1968).
69. Н. С. Степанов, О параметрически связанных колебаниях в системе с большим числом степеней свободы, *Радиотехника и электроника*, **15**, № 9, 1885 (1970).
70. О. А. Степченко, О сжатии электромагнитного поля между двумя плоскостями, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, **6**, № 6, 695 (1963).
71. О. А. Степченко, Приближенное решение волнового уравнения для резонаторных систем с движущейся стенкой, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, **6**, № 6, 701 (1963).
72. О. А. Степченко, Нестационарный процесс в волноводных резонаторах с движущейся стенкой, Изв. высш. уч. зав.—Радиотехника, **7**, № 1, 71 (1964).
73. А. И. Весницкий, Решение неоднородного волнового уравнения с условиями на движущейся границе, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
74. А. И. Весницкий, Распространение волн в волноводе с подвижными стенками, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **12**, № 6, 935 (1969).
75. В. Н. Красильников, Электромагнитные колебания в сферической полости с меняющимся во времени радиусом, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, вып. 8, 43 (1968).
76. А. И. Весницкий, А. В. Костров, Нестационарные процессы в равномерно расширяющемся сферическом резонаторе, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, (в печати).
77. С. М. Рытов, Модулированные колебания и волны, Тр ФИАН СССР, **2**, № 1, 40 (1940).
78. С. М. Рытов, Некоторые теоремы о групповой скорости электромагнитных волн, *ЖЭТФ*, **17**, № 10, 1930 (1947).
79. И. Аверков, Л. А. Островский, Распространение колебаний в системах с параметрами, зависящими от времени, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **1**, № 4, 46 (1958).
80. С. И. Аверков, Н. С. Степанов, Распространение волн в системах с бегущим параметром, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **2**, № 2, 203 (1959).
81. Н. С. Степанов, Распространение волн в системах с переменными параметрами, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **3**, № 4, 672 (1960).

82. С. И. Аверков, Ю. Г. Хронопуло, Электромагнитные волны в диспергирующих системах с параметрами, зависящими от времени, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 5, 818 (1960).
83. Л. А. Островский, О приближении геометрической оптики для волн в линиях передачи с переменными параметрами, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 2, 293 (1961).
84. Н. С. Степанов, Об одном параметрическом явлении в акустике, Акуст. ж., 8, № 1, 139 (1962).
85. S. Weinberg, Eikonal method in magnetohydrodynamics, Phys. Rev., 126, 1899 (1962).
86. Н. С. Степанов, О приближении геометрической оптики для волн пространственного заряда, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 1, 112 (1963).
87. Л. А. Островский, Модуляция сигналов в линиях передачи с периодически меняющимися параметрами, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 4, 752 (1963).
88. К. А. Барсуков, К теории волновода с нестационарным заполнением, Радиотехника и электроника, 9, № 7, 1173 (1964).
89. К. А. Барсуков, Б. М. Болотовский, Излучение осцилляторов в неоднородной и нестационарной среде, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 8, № 4, 760 (1965).
90. Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, М., 1965.
91. R. M. Lewis, Asymptotic theory of propagating waves, Arch. Ratl. Mech. Anal., 20, № 3, 191 (1965).
92. В. Н. Красильников, Распространение электромагнитных волн в параметрических средах в приближении геометрической оптики, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, изд. ЛГУ, вып. 6, 76 (1966).
93. R. M. Lewis, Asymptotic theory of transients, Electromagnetic waves theory, Pergamon Press, 1967.
94. Н. С. Степанов, О адабатическом преобразовании спектра электромагнитных волн в магнитоактивной плазме, ЖЭТФ, 53, № 12, 2186 (1967).
95. Н. С. Степанов, О преобразовании спектра волн в диспергирующей среде с медленно изменяющимися параметрами, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 700 (1968).
96. Ю. А. Кравцов, Приближение геометрической оптики в общем случае неоднородных и нестационарных сред с частотной и пространственной дисперсией, ЖЭТФ, 55, № 10, 1470 (1968).
97. А. И. Весницкий, Н. С. Степанов, В. Н. Шабанов, О параметрическом модуляторе частоты на распределенном диоде, Радиотехника и электроника, 14, № 2, 326 (1969).
98. Н. С. Степанов, Об адабатическом преобразовании спектра волн в нестационарной среде с дисперсией, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 2, 183 (1969).
99. Ю. А. Кравцов, Н. С. Степанов, Геометрическая оптика и сохранение адабатического инварианта, ЖЭТФ, 57, № 11, 1730 (1969).
100. Ю. А. Кравцов, Н. С. Степанов, Геометрическое приближение для электромагнитных волн в неоднородных и нестационарных диспергирующих средах, Доклад на симпозиуме по дифракции волн, Ленинград, 1970.
101. Л. Д. Ландau, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Физматгиз, М., 1957.
102. Я. Д. Ширман, В. Н. Голиков, Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров, изд. Сов. радио, М., 1963.
103. G. B. Whitham, A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian, J. Fluid Mech., 22, № 2, 273 (1965).
104. К. А. Горшков, О колебаниях электромагнитного поля в нестационарных резонаторах, Дипломная работа, Горьковский университет, 1969.
105. Л. А. Островский, Е. М. Пелиновский, Метод усреднения и обобщенный вариационный принцип для несинусоидальных волн, Препринт НИРФИ, 1970.
106. Л. А. Островский, О распространении ЧМ сигналов в диспергирующих системах, Радиотехника и электроника, 10, № 7, 1176 (1965).
107. Л. А. Островский, Дисперсионное сжатие ЧМ волн в неоднородной плазме, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 9, 1333 (1969).
108. Л. А. Островский, И. А. Папилова, Дисперсионное сжатие частотно-модулированных сигналов в неоднородной плазме, Доклад на симпозиуме по дифракции волн, Ленинград, 1970.
109. Л. П. Питаевский, Энергетические силы в прозрачной среде с дисперсией, ЖЭТФ, 39, 5 (11), 1450 (1960).
110. G. M. Roe, M. R. Boyd, Parametric energy conversion in distributed systems, Proc. IRE, 47, 1213 (1959).
111. R. Landauer, Parametric amplification along nonlinear transmission lines, J. Appl. Phys., 31, № 3, 479 (1960).
112. Г. П. Катыс, Н. В. Кравцов, Л. Е. Чижов, С. М. Коновалов, Модуляция и отклонение оптического излучения, изд. Наука, М., 1967.

113. А. Л. Микаэлян, И. Г. Тетельбаум, Управление частотой электромагнитных волн при помощи ферритов, Радиотехника и электроника, 4, № 12, 2077 (1959).
114. D. S. Sarkar, P. I. John, The propagation of electromagnetic waves in a periodically varying medium, J. Inst. Telecommun. Eng., 11, № 12, 1515 (1968).
115. Н. С. Степанов, Распространение волн в некоторых системах с переменными параметрами, Диссертация, Горьковский университет, 1963.
116. А. И. Весницкий, Л. А. Островский, В. В. Папко, В. Н. Шабанов, Импульсная параметрическая генерация в распределенных системах, Письма в ЖЭТФ, 9, № 5, 274 (1969).
117. Г. С. Горелик, В. А. Зверев, К вопросу о взаимодействии звуковых волн, Акуст. ж., 1, № 4, 339 (1955).
118. В. А. Зверев, А. И. Калачев, Измерение взаимодействия звуковых волн в жидкостях, Акуст. ж., 4, № 4, 320 (1958).
119. Н. С. Степанов, К вопросу о взаимодействии продольных и поперечных упругих волн, Акуст. ж., 13, № 2, 270 (1967).
120. В. П. Тычинский, В. Г. Федоров, Преобразование частоты в ЛБВ с трубкой дрейфа, Радиотехника и электроника, 2, № 10, 1306 (1957).
121. В. П. Тычинский, К вопросу о преобразовании частоты при помощи специального электронного прибора, Радиотехника и электроника, 1, № 12, 1525 (1956).
122. В. А. Зверев, Об одном новом методе исследования дисперсии ультразвука, Сб. памяти А. А. Андронова, изд. АН СССР, М, 1955, стр. 657.
123. H. Fujita, H. Moriguchi, Reflection and transmission of a plane electromagnetic wave at a fast moving boundary, Proc. IEEE, 56, № 9, 1605 (1968).
124. H. Fujioka, F. Nihei, N. Kumagai, Interaction of plane electromagnetic waves by a moving conducting semi-infinite dielectric, J. Appl. Phys., 39, № 4, 2161 (1968).
125. B. R. Shawla, H. Unz, Reflection and transmission of electromagnetic waves normally incident on a plasma slab moving uniformly along a magnetostatic field, IEEE Trans. Ant. and Propag., 17, № 6, 771 (1969).
126. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, Отражение и преломление электромагнитных волн движущейся областью ионизации, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, (в печати).
127. H. Poeverlein, Sommerfeld-Runge law in three and four dimensions, Phys. Rev., 128, № 2, 956 (1962).
128. J. Bazer, J. Hargley, Geometrical Hydromagnetics, J. Geophys. Res., 68, № 1, 147 (1963).
129. В. У. Гурович, В. И. Карпман, К динамике электрозвуковых волн в жидкости и плазме, ЖЭТФ, 56, № 6, 1952 (1969).
130. Ю. А. Кравцов, А. И. Кугушев, А. В. Черных, О поправках к «квазистационарному» значению тензора диэлектрической проницаемости плавнонекоднородной электронной плазмы, ЖЭТФ, 59, № 6(12), 2160 (1970).
131. R. C. Costen, D. Adamson, Three-dimensional derivation of the electrodynamic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary, Proc. IEEE, 53, № 9, 1181 (1965).
132. В. В. Борисов, Предельный переход к скорости света в задаче о падении плоской волны на движущийся фронт ионизации, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 9, 1376 (1970).
133. Л. А. Островский, К теории волновых движений нестационарных сжимаемых сред, ПММ, 37, № 5, 924 (1963).
134. Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов, Применение вариационных методов к исследованию распространения волн в системах с бегущими параметрами, ПМТФ (в печати).

УДК 523.164.78

НАБЛЮДЕНИЕ СОЛНЕЧНОГО ЗАТМЕНИЯ 22 СЕНТЯБРЯ 1968 г. НА ЧАСТОТАХ 214 И 950 Мгц

*П. А. Капустин, А. А. Петровский, В. В. Хрулев,
И. П. Кузнецова, А. М. Пасека*

Приведены кривые затмения солнечного радиоизлучения 22 сентября 1968 года для частот 214 и 950 Мгц. Определены основные локальные источники повышенного радиоизлучения и их параметры. Для кривых затмения подобраны распределения радиояркости по диску Солнца. Получены эффективные температуры незатменного Солнца и его радиодиаметры.

Наблюдения радиоизлучения Солнца во время затмения 22 сентября 1968 года проводились на радиоастрономической станции НИРФИ в Старой Пустыни на частотах 950 и 214 Мгц с помощью радиотелескопов с параболическими рефлекторами диаметром 8 и 12 м соответственно. Использовавшиеся радиотелескопы были описаны ранее в работах [1–3]. В табл. 1 приведены основные параметры радиотелескопов.

Таблица 1

Основные параметры радиотелескопов

Диаметр параболоида (м)	Частота (Мгц)	Ширина полосы пропускания на уровне 0,5 по мощности (Мгц)	Флуктуационная пороговая чувствительность при $\tau = 1$ сек ($^{\circ}$ К)	Ширина луча на уровне 0,5 по мощности	$D_{\text{гл}}$	$(1 - \beta_{\text{гл}}) \eta$
8	950	25	0,3	$2^{\circ}46 \times 2^{\circ}46$	5154	0,6
12	214	1,2	1,0	$4^{\circ}06 \times 4^{\circ}36$	430	0,66

Приведенные в таблице значения коэффициентов направленного действия (КНД) по главному лепестку на уровне -20 дБ по мощности $D_{\text{гл}}$ были вычислены как средние геометрические КНД, отвечающих диаграммам в E - и H -плоскостях.

Параметр $(1 - \beta_{\text{гл}}) \eta$, где $\beta_{\text{гл}}$ — фактор рассеяния вне главного лепестка, η — КПД антенно-фидерного тракта, был измерен по радиоизлучению дискретного источника Кассиопея-А.

Методика наблюдений заключалась в непрерывной регистрации интенсивности радиоизлучения Солнца в течение затмения. Радиотелескопы калибровались в начале и в конце наблюдения затмения по источнику Кассиопея-А.

Плотность потока радиоизлучения Солнца вычислялась по формуле

$$S_{\odot} = \frac{n_{\odot}}{n_K} S_K, \quad (1)$$

где n_{\odot} и n_K — показания выходного прибора, соответствующие интен-

сивности радиоизлучения Солнца и Кассиопеи-А соответственно, S_k — плотность потока радиоизлучения Кассиопеи-А, принятая равной $3000 \cdot 10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ на частоте 950 МГц ,^[4] и $10500 \cdot 10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ на частоте 214 МГц .

Эффективная температура Солнца определялась по формуле

$$T_\odot = \frac{n_\odot}{n_k} \frac{\lambda^3}{2k\Omega} S_k, \quad (2)$$

где λ — длина волны, k — постоянная Больцмана, Ω_\odot — телесный угол видимого диска Солнца.

Обстоятельства затмения в оптическом диапазоне были следующие [5]: площадь группы пятен в миллионных долях полусфера Солнца (S_p) составляла 163 для группы № 376 (четыре пятна, площадь наибольшего 151), 106 для группы № 379 (21 пятно, площадь наибольшего 59), 619 для группы № 381 (30 пятен, площадь наибольшего 299), 33 для группы № 384 (4 пятна, площадь наибольшего 19), 28 для группы № 385 (3 пятна, площадь наибольшего 15), 19 для группы № 382 (2 ядра, площадь наибольшего 16).

Магнитное поле группы № 385 — 1800 эрст (N), № 376 — 3000 эрст (S), № 381 — 3000 эрст (N и S), № 379 — 2000 эрст (S). Имелось три хромосферных вспышки в областях группы пятен № 376, 379, 381.

Относительное изменение плотности потока радиоизлучения при солнечном затмении на частотах 950 и 214 МГц показано на рис. 1* (крив-

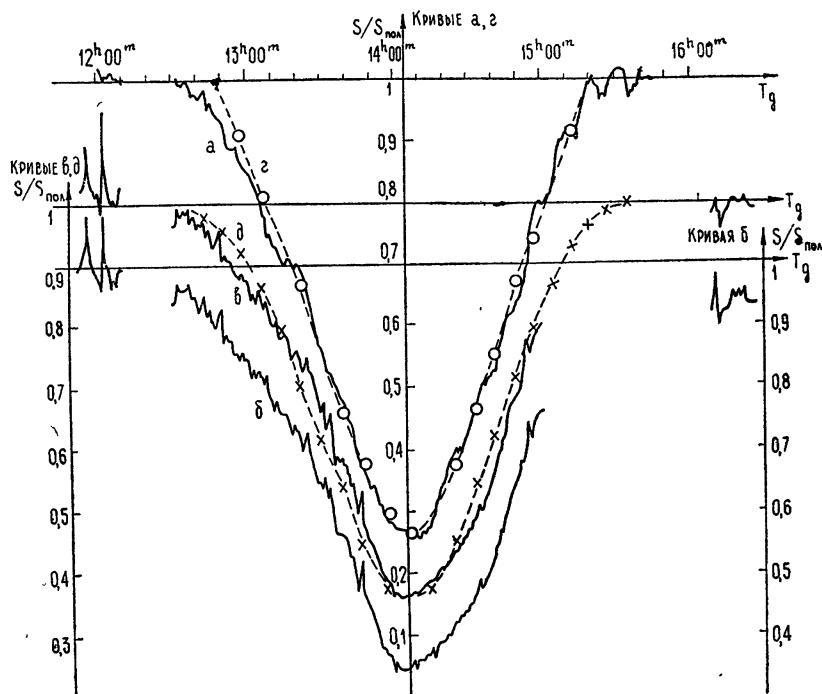


Рис. 1. Кривые солнечного радиозатмения:

a—кривая затмения на 950 МГц, *b*—кривая затмения на 214 МГц, *c*—исправленная кривая на 214 МГц, *g*—кривая затмения на 950 МГц, построенная по полученному распределению радиояркости вдоль диска Солнца, *d*—кривая затмения на 214 МГц, построенная по полу-ченному распределению радиояркости вдоль диска Солнца.

* Во время затмения плотность потока радиоизлучения незатменного Солнца на частоте 214 МГц понизилась (рис. 1, кривая *b*). Поэтому кривая *c* строилась в предположении равномерного уменьшения плотности потока радиоизлучения за время затмения.

вые *a* и *b*). Плотности потоков радиоизлучения незатменного Солнца $S_{\text{пол}}$ составляют на частоте 950 MГц $65 \cdot 10^{-22} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$, на частоте 214 MГц — $10,7 \cdot 10^{-22} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$. Эффективные температуры — $0,39 \cdot 10^6 \text{ град}$ и $1,26 \cdot 10^6 \text{ град}$ соответственно.

Таблица 2

Особенности кривых затмения

Номер особой точки	Декретное время						Соответствие оптическим локальным источникам. Примечания	
	950 MГц			214 MГц				
	начало	центр	конец	начало	центр	конец		
1	12 ^h 48 ^m			13 ^h 20 ^m	12 ^h 43 ^m		13 ^h 23 ^m	
2	13 ^h 22 ^m	13 ^h 25 ^m	13 ^h 31 ^m	13 ^h 25 ^m	13 ^h 26 ^m , 5	13 ^h 30 ^m	Целый ряд всплесков производной, соответствующих покрытию в оптическом диапазоне местоположению флоккулы, источник <i>S</i> ₁ , табл. 3.	
3	13 ^h 26 ^m	13 ^h 31 ^m	13 ^h 36 ^m	13 ^h 31 ^m	13 ^h 34 ^m	13 ^h 37 ^m	Соответствует покрытию локального источника вблизи группы пятен № 376.	
4	13 ^h 38 ^m	13 ^h 43 ^m , 5	13 ^h 47 ^m , 5	13 ^h 38 ^m	13 ^h 42 ^m	13 ^h 47 ^m	Соответствует покрытию локального источника вблизи группы пятен № 385.	
5	13 ^h 44 ^m	13 ^h 48 ^m	13 ^h 52 ^m	13 ^h 43 ^m	13 ^h 47 ^m	13 ^h 51 ^m	Соответствует покрытию локального источника южнее группы пятен № 379.	
6	13 ^h 51 ^m	13 ^h 54 ^m	13 ^h 57 ^m	13 ^h 48 ^m	13 ^h 52 ^m	13 ^h 55 ^m	Соответствует покрытию сложного локального источника в районе групп пятен № 382 и 384. Картина усложняется открытием локальных источников в районе флоккулы (особая точка <i>I</i>) с центром в $T_d \sim 14^{\text{h}}01^{\text{m}}$.	
7	14 ^h 12 ^m	14 ^h 18 ^m	14 ^h 24 ^m		~14 ^h 17 ^m		Соответствует открытию локального источника вблизи группы пятен № 385.	
8	14 ^h 27 ^m	14 ^h 32 ^m	14 ^h 37 ^m	14 ^h 27 ^m	14 ^h 31 ^m	14 ^h 33 ^m	Соответствует открытию локального источника вблизи группы пятен № 376.	
9	14 ^h 40 ^m	14 ^h 43 ^m	14 ^h 48 ^m	14 ^h 35 ^m	14 ^h 43 ^m	14 ^h 51 ^m	Соответствует открытию локального источника вблизи группы пятен № 379.	
10	14 ^h 48 ^m	14 ^h 55 ^m , 5	15 ^h 00 ^m	14 ^h 47 ^m	14 ^h 53 ^m , 5	14 ^h 58 ^m	Соответствует открытию локального источника южнее группы пятен № 381.	
11	15 ^h 02 ^m , 5	15 ^h 06 ^m , 5	15 ^h 11 ^m	—	—	—	Соответствует открытию локального источника вблизи группы пятен № 382 и 384. На частоте 214 MГц нет данных из-за помехи.	

На кривых затмения можно заметить целый ряд особенностей, соответствующих локальным источникам повышенного излучения. Пропуски на кривых отвечают интервалам времени, когда наблюдалась помехи.

Для выделения особенностей, соответствующих локальным источникам повышенного излучения, кривые были обработаны методом, аналогичным описанному Drago и Noci [6]. На рис. 2 приведены обработанные производные плотностей потока солнечного радиоизлучения. Все выявленные особенности даны в табл. 2*.

По особым точкам кривой затмения были нанесены дуги на оптическую карту Солнца [5], соответствующие положениям «переднего» и «зад-

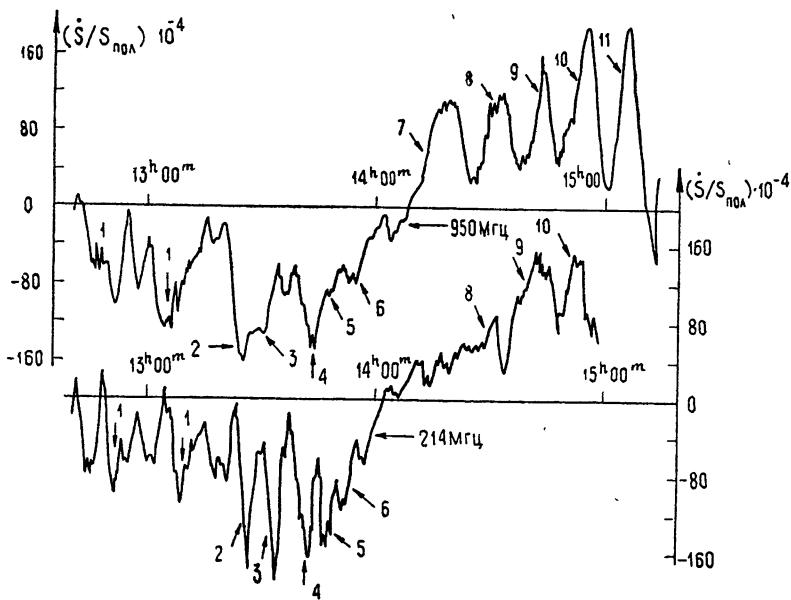


Рис. 2. Производные плотностей потока солнечного радиоизлучения.

Таблица 3

Параметры локальных источников повышенного радиоизлучения

Номер источника	950 Мгц					214 Мгц					Соответствие номеру особенностей (табл. 2)
	D	$S_u/S_{\text{пол}}$	S_u	T_u/T_\odot	T_u	D	$S_u/S_{\text{пол}}$	S_u	T_u/T_\odot	T_u	
S_1^{**}	~6	~7,5	~4,9	~4,1	~1,6	~3	~4	~0,42	~4	~6	1
	~6	~6	~3,9	~4,1	~1,6	~3	~4	~0,42	~4	~5	
S_2	3	5	3,3	5,3	2,0	~1,8	3,5	0,38	26	33	3,7
S_3	3,6	4,75	3,1	4,0	1,5	~2,5	3,5	0,38	14	17,5	2,8
S_4	3,6	4,1	2,7	3,4	1,3	~3,8	~8	0,86	11,5	14,5	4,9
S_5	4,6	5,0	3,3	2,6	1,0	~3,3	6	0,64	11	14,0	5,10
S_6	3,3	4,2	2,7	4,2	1,6						6,11

* В таблицу вносились лишь те особенности, которые имели по два отклика, соответствующие покрытию и открытию Луной источников повышенного излучения. Особенности с одним откликом не выделялись (например, между точками 3 и 4 для частоты 950 Мгц).

** Источник S_1^* имеет по два максимума (рис. 2).

нега» краев Луны. Карта Солнца с локальными источниками повышенного радиоизлучения приведена на рис. 3.

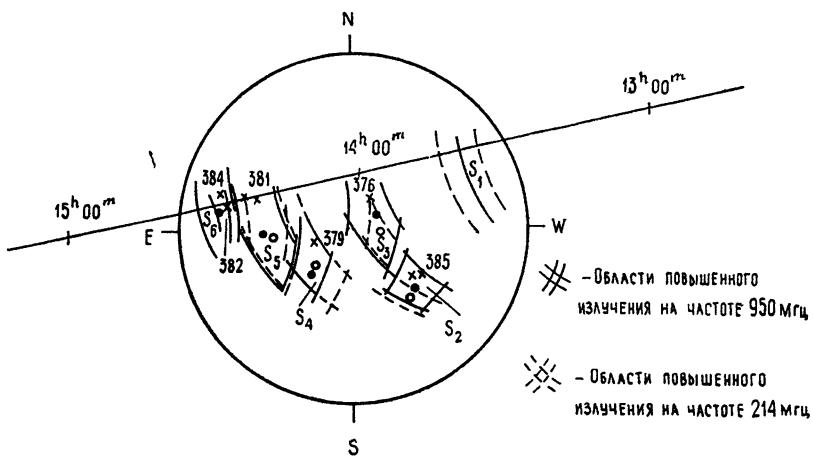


Рис. 3. Карта Солнца с нанесенными источниками повышенного излучения.

●●●—центр источников повышенного излучения на частоте 950 Мгц, ○○○—центр источников повышенного излучения на частоте 214 Мгц, ×××—наиболее крупные пятна в оптическом диапазоне.

По величине максимумов, а также по длительности во времени особых точек производных плотностей потоков радиоизлучения солнечного затмения были определены примерные размеры и яркостная температура локальных источников. Результаты этих оценок даны в табл. 3.

В табл. 3 приняты обозначения: D — средний диаметр локального источника повышенного радиоизлучения в угловых минутах; $S_i/S_{\text{пол}}$ — отношение плотности потока локального источника к плотности потока Солнца, умноженное на 10^{-2} ; T_i/T_{\odot} — отношение яркостной температуры локального источника к эффективной температуре незатменного Солнца; T_i — яркостная температура локального источника в 10^6 град .

По кривым затмения были подобраны распределения яркости радиоизлучения по диску Солнца. Распределения яркости приведены на рис. 4. Кривые затмения, вычисленные по этим распределениям, хорошо совпадают с экспериментальными (кривые g и δ).

Как видно из кривых распределения радиояркости (рис. 4), на частоте 950 Мгц отношение радиодиаметра Солнца к оптическому диаметру $\sim 1,1$, и имеет место уярчение на краю солнечного диска. На частоте 214 Мгц отношение диаметров $\sim 1,7 \div 1,8$, и уярчение имеет место на расстоянии 0,5—0,6 оптического радиуса от центра.

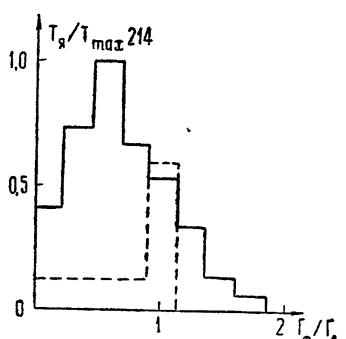


Рис. 4. Распределение радиояркости по диску Солнца (— — 214 Мгц, - - - 950 Мгц).

Авторы признательны В. А. Разину за критические замечания при обсуждении данного сообщения, а также Ю. С. Самохвалову за участие в наблюдениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Разин, В. В. Хрулев, В. Т. Федоров, С. А. Волохов, А. А. Мельников, А. М. Пасека, Л. В. Пупышева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 10, 1461 (1968).
2. А. А. Мельников, В. А. Разин, В. В. Хрулев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 12, 1760 (1967).
3. П. А. Капустин, А. А. Петровский, В. А. Разин, Н. Ф. Соколова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 5, 689 (1968).
4. В. А. Разин, В. Т. Федоров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 5, 1052 (1963).
5. Солнечные данные, Бюллетень № 9 (1968).
6. F. G. Drago, G. G. Noci, Solar Phys., 7, № 2, 276 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
9 февраля 1970 г.

OBSERVATION OF SOLAR ECLIPSE ON 22 SEPTEMBER 1968 AT THE FREQUENCIES OF 214 AND 950 Mc/s

*P. A. Kapustin, A. A. Petrovskii, V. V. Khrulev, I. P. Kuznetsova,
A. M. Paseka*

The curves of the solar radio emission eclipse on 22 September 1968 observed at the frequencies of 214 and 950 Mc/s are given. The main local sources of the enhanced radio emission and their parameters are determined. For the eclipse curves obtained, the corresponding radio brightness distributions over the solar disc are presented. The effective temperatures of the noneclipsed Sun and its radio diameters are also measured.

УДК 523.164

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ЭФФЕКТА «ПУТАНИЦЫ» НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ БОЛЬШИХ РАДИОТЕЛЕСКОПОВ ПРИ НАБЛЮДЕНИИ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Ю. П. Илясов

Рассмотрены флуктуации регистратора радиотелескопа при наблюдении дискретных источников с учетом реальной формы диаграммы направленности. Получено выражение для характеристической функции случайной величины отклонений регистратора радиотелескопа, вызванных эффектом «путаницы»*. Оценен вклад в эффект «путаницы» источников с потоком больше наблюдаемого, приходящихся на область боковых лепестков диаграммы радиотелескопа.

1. ЭФФЕКТ «ПУТАНИЦЫ»

При наблюдении находящегося в главном лепестке диаграммы дискретного источника радиоизлучения с потоком S_1 другие источники оказывают мешающее действие на точное определение его потока и координат. Источники с большим, чем S_1 , потоком влияют на наблюдения, находясь в области боковых лепестков диаграммы направленности радиотелескопа. Источники с меньшим, чем S_1 , потоком могут вызывать ошибки, находясь в главном лепестке диаграммы, даже тогда, когда каждый из них в силу малости его потока не регистрируется радиотелескопом. Большое число таких слабых неразрешенных источников может дать заметный суммарный поток. Случайные колебания этого потока вызовут случайные отклонения регистратора радиотелескопа и приведут к ошибкам в измерениях.

Эффект «путаницы» рассматривался в работах [1–4]. Впервые в работе [1] было показано, что с увеличением эффективной площади радиотелескопа с заполненной апертурой при увеличении его размеров чувствительность при наблюдении дискретных источников будет ограничиваться эффектом «путаницы». В работах [2, 3] проведен анализ эффекта «путаницы» с учетом случайного распределения источников по небу в предположении, что диаграмма радиотелескопа имеет столообразную форму без боковых лепестков. В этих работах были получены оценки требуемого числа диаграмм, приходящихся на один источник, наблюдаемый с определенным отношением сигнал/шум. Очевидно, что предположение о столообразной форме диаграммы радиотелескопа является первым приближением при исследовании эффекта «путаницы». Эффект «путаницы» от источников слабее наблюдаемого с учетом реальной формы диаграммы анализировался в [4]. В работах [2–4] получено выражение для дисперсии случайных отклонений регистратора радиотелескопа, вызванных источниками с потоками меньше наблюдаемого.

Задача может быть поставлена следующим образом. Зная статистические характеристики распределения источников по небу и зависимость числа источников от потока $N(S)$, а также зная реальные характеристи-

* Более распространено понятие «насыщение» радиотелескопов, что, на наш взгляд, менее точно отражает сущность явления, называемого в зарубежной литературе «confusion» эффект.

ки радиотелескопа, требуется найти статистические характеристики распределения отклонений регистратора радиотелескопа. Среднее число источников в одном стерадиане с потоком больше заданного определяется законом $N(S)$. В [6], а позднее в [7] экспериментально показано, что распределение источников по небу можно считать статистически равномерным. Разобьем область неба $\Omega = 1$ стерад на большое число n элементарных участков $\Delta\Omega$. Число источников с потоком в интервале от S_i до $S_i + \Delta S$

$$M(S_i) = N'(S) \Delta S|_{S=S_i}. \quad (1)$$

Очевидно, что для каждого источника с таким потоком вероятность находиться в одном определенном элементарном участке $\Delta\Omega$ одинакова для всех участков и равна

$$p = 1/n = \Delta\Omega/\Omega. \quad (2)$$

Вероятность того, что в заданном участке будет находиться точно k из $M(S_i)$ источников, определяется законом Пуассона

$$P_{M(S_i)}\{\xi_i = k\} = \frac{\lambda_i^k \exp(-\lambda_i)}{k!}. \quad (3)$$

Случайное число источников с различными потоками в участке $\Delta\Omega$ может быть получено как сумма случайных независимых величин ξ_i . Закон распределения суммы таких величин можно найти, пользуясь характеристиками функциями каждой случайной величины ξ_i . Характеристическая функция случайной величины ξ , имеющей закон распределения $w(x)$, определяется выражением

$$\varphi(v) = m_1\{e^{iv\xi}\} = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{ivx} dx. \quad (4)$$

Для суммы m случайных независимых величин ξ_i легко получить [8]

$$\varphi_{\Sigma}(v) = \prod_{i=1}^m \varphi_i(v). \quad (5)$$

В поставленной задаче представляет интерес не число источников, а величина их суммарного потока, т. е. сумма случайных величин:

$$\eta_i = S_i \xi_i. \quad (6)$$

Если $\varphi_i(v)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_i , то характеристическая функция случайной величины η_i будет [9]:

$$\varphi_{\eta_i}(v) = \varphi_{\xi_i}(S_i v). \quad (7)$$

Характеристическая функция величины ξ_i , распределенной по закону Пуассона (3),

$$\varphi_{\xi_i}(v) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{jkv} \frac{\lambda_i^k \exp(-\lambda_i)}{k!} = \exp[\lambda_i(e^{jv} - 1)]. \quad (8)$$

Для случайной величины потока от случайного числа источников, находящихся в участке $\Delta\Omega$ с потоком от S_i до $S_i + \Delta S$, характеристическая функция, согласно (7),

$$\varphi_{\eta_i}(v) = \exp[\lambda_i(\exp(jS_i v) - 1)]. \quad (9)$$

Характеристическая функция случайной величины H суммарного потока в участке $\Delta\Omega$ согласно (5) имеет вид

$$\varphi_H(v) = \exp \left[\sum_1^m \lambda_i (\exp(jS_i v) - 1) \right]. \quad (10)$$

Учитывая, что $\lambda_i = M(S_i)\Delta\Omega/\Omega$, получим для (10), переходя от сумм к интегралу при $\Omega = 1$ стерад,

$$\varphi_H(v) = \exp \left\{ \Delta\Omega \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} N'(S) (e^{jSv} - 1) dS \right\}. \quad (11)$$

Если участок $\Delta\Omega$ расположен в направлении θ_l, φ_l и эффективная площадь радиотелескопа в этом направлении

$$A_{\text{эфф}}(\theta_l, \varphi_l) = A_0 f(\theta_l, \varphi_l), \quad (12)$$

то сигнал, принятый радиотелескопом из этого направления, будет случайной величиной:

$$\beta_l = \frac{1}{2} A_0 H f(\theta_l, \varphi_l). \quad (13)$$

Используя (7), для β_l получим характеристическую функцию

$$\varphi_{\beta_l}(v) = \exp \left\{ \Delta\Omega \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} N'(S) \left[\exp \left(j \frac{1}{2} S A_0 f(\theta_l, \varphi_l) v \right) - 1 \right] dS \right\}. \quad (14)$$

Запишем характеристическую функцию суммы случайных величин $P = \sum_{l=1}^n \beta_l$:

$$\varphi_P(v) = \exp \left\{ \sum_{l=1}^n \Delta\Omega \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} N'(S) \left[\exp \left(j \frac{1}{2} A_0 S f(\theta_l, \varphi_l) v \right) - 1 \right] dS \right\}. \quad (15)$$

Переходя от сумм к интегралам, для случайной величины мощности, принимаемой радиотелескопом, получим окончательное значение характеристической функции:

$$\varphi_P(v) = \exp \left\{ \int_{S_{\min}}^{S_{\max}} \int_{\Omega} N'(S) \left[\exp \left(j \frac{1}{2} A_0 S f(\theta, \varphi) v \right) - 1 \right] dS d\Omega \right\}. \quad (16)$$

Для определения закона распределения источников $N(S)$ может быть использовано выражение (16), если известен из эксперимента статистический закон распределения случайных «не шумовых» отклонений регистратора и известна диаграмма радиотелескопа $f(\theta, \varphi)$. Действительно [8], обратное фурье-преобразование (16) дает закон распределения случайной величины отклонения регистра, куда войдут искомый закон распределения источников $N(S)$ и известная диаграмма $f(\theta, \varphi)$. Такая возможность, называемая обычно статистическим методом Шойера [10], была успешно использована для подсчета источников в [11].

Отметим основные требования к радиотелескопу, применяемому для решения задачи подсчета источников по методу Шойера.

Во-первых, очевидно, что для более точного определения $N(S)$ в области малых S необходимо возможно точнее определять закон распределения отклонений регистратора для малых отклонений. Точность отсчета этих отклонений ограничена флуктуациями регистратора, вызванными шумами антенты и аппаратурой. Поэтому необходимо стремиться обеспечить максимальную чувствительность инструмента.

Во-вторых, также очевидно, что участок неба для наблюдения должен быть выбран весьма большим по сравнению с телесным углом диаграммы телескопа, чтобы число независимых отсчетов с результатов эксперимента было достаточным для построения закона распределения случайных отклонений регистратора. При определении $N(S)$ по этому закону изменение $f(\theta, \varphi)$ при смене направления приема вызовет дополнительные трудности. Кроме того, как будет показано ниже, для уменьшения эффекта «путаницы» от сильных источников желательно, чтобы уровень боковых лепестков был по возможности минимальным. С этих точек зрения для определения $N(S)$ методом Шойера представляется удобным использовать полноповоротные рефлекторные радиотелескопы с достаточно большой эффективной площадью, поскольку они обладают как высокой чувствительностью, так и практически неизменной диаграммой с малым уровнем боковых лепестков.

2. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РАДИОТЕЛЕСКОПА, ОПРЕДЕЛЯЕМАЯ ЭФФЕКТОМ «ПУТАНИЦЫ»

Требования к разрешающей способности радиотелескопа, т. е. требования к форме его диаграммы направленности, могут быть сформулированы, если известен закон $N(S)$. Для определения отношения сигнал/шум, обусловленного мешающим действием побочных источников, вычислим дисперсию отклонения регистратора, воспользовавшись соотношением (16), а также тем обстоятельством, что начальный момент $\langle k \rangle$ -го порядка находится по известной характеристической функции:

$$m_k \{ \xi \} = \frac{1}{j^k} \left. \frac{d^k \phi_\xi(v)}{dv^k} \right|_{v=0}. \quad (17)$$

Для нашего случая средняя мощность, принимаемая радиотелескопом:

$$\bar{P} = m_1 \{ P \} = \frac{A_0}{2} \int \int_S S f(\theta, \varphi) N'(S) dS d\Omega. \quad (18)$$

Дисперсию отклонения регистратора легко получить:

$$D \{ P \} = \frac{A_0^2}{4} \int \int_S S^2 f^2(\theta, \varphi) N'(S) dS d\Omega. \quad (19)$$

Для источника с потоком S_1 , от которого радиотелескоп регистрирует мощность

$$P_1 = \frac{A_0}{2} S_1, \quad (20)$$

отношение сигнал/шум будет

$$K(S_1) = \frac{P_1}{\sqrt{D \{ P \}}} \quad (21)$$

или

$$K(S_1) = \left[\int\limits_{\Omega} \int\limits_S \frac{S^2}{S_1^2} f^2(\theta, \varphi) N'(S) dS d\Omega \right]^{-1/2}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{\Omega} \int\limits_S \frac{S^2}{S_1^2} f^2(\theta, \varphi) N'(S) dS d\Omega. \quad (22)$$

Для разрешенного источника с потоком S_1 , находящегося в главном лепестке диаграммы, можно записать (22) в виде

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{\text{гл}} \int\limits_{S_{\min}}^{S_1} \frac{S^2}{S_1^2} f^2(\theta, \varphi) N'(S) dS d\Omega + \\ &+ \int\limits_{\text{бок}} \int\limits_{S_{\min}}^{S_{\max}} \frac{S^2}{S_1^2} f^2(\theta, \varphi) N'(S) dS d\Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

Обозначим:

$$\Omega_0 = \int\limits_{\text{гл}} f(\theta, \varphi) d\Omega; \quad (24)$$

$$\gamma = \int\limits_{\text{гл}} f(\theta, \varphi) d\Omega / \int\limits_{\text{гл}} f^2(\theta, \varphi) d\Omega; \quad (25)$$

$$\beta = \int\limits_{\text{гл}} f(\theta, \varphi) d\Omega / \int\limits_{\text{бок}} f^2(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (26)$$

Если число источников с потоком $S \geq S_1$ равно $N(S_1)$, то, обозначив через μ число диаграмм, приходящихся на один источник с потоком $S \geq S_1$, т. е.

$$\mu \Omega_0 N(S_1) = 1, \quad (27)$$

легко получить для I , используя обозначения (24) — (27),

$$I = \frac{1}{\mu \gamma} \int\limits_{S_{\min}}^{S_1} \frac{S^2 N'(S)}{S_1^2 N(S_1)} dS + \frac{1}{\mu \beta} \int\limits_{S_{\min}}^{S_{\max}} \frac{S^2 N'(S)}{S_1^2 N(S_1)} dS. \quad (28)$$

Обозначив

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta} = \frac{\int\limits_{\Omega} f^2(\theta, \varphi) d\Omega}{\Omega_0}, \quad (29)$$

перепишем (28) в виде

$$I = \frac{1}{\mu \alpha} \int\limits_{S_{\min}}^{S_1} \frac{S^2 N'(S)}{S_1^2 N(S_1)} dS + \frac{1}{\mu \beta} \int\limits_{S_1}^{S_{\max}} \frac{S^2 N'(S)}{S_1^2 N(S_1)} dS. \quad (30)$$

Обозначив

$$Q_0(S_1) = \int\limits_{S_{\min}}^{S_1} \frac{S^2 N'(S)}{S_1^2 N(S_1)} dS; \quad (31)$$

$$Q_1(S_1) = \int_{S_1}^{S_{\max}} \frac{S^2 N'(S)}{S_1^2 (N' S)} dS, \quad (32)$$

для отношения сигнал/шум (21) получим

$$K(S_1) = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{Q_0(S_1)/\alpha + Q_1(S_1)/\beta}}. \quad (33)$$

Рассмотрим несколько случаев представления диаграммы направленности радиотелескопа.

1) Радиотелескоп обладает столообразной диаграммой с телесным углом Ω_0 без боковых лепестков. Именно такой случай рассматривался в [2, 3]. Для этого случая, очевидно,

$$\alpha = \gamma = 1, \quad \beta = \infty. \quad (34)$$

При этом выражение (33) примет вид

$$K_{ct}(S_1) = \sqrt{\mu/Q_0(S_1)}. \quad (35)$$

Следует отметить, что выражение (35) соответствует аналогичным соотношениям, полученным в [2, 3].

2) Радиотелескоп обладает диаграммой в виде одного главного лепестка реальной формы с эквивалентным телесным углом Ω_0 , все боковые лепестки равны нулю. Очевидно, для этого случая

$$\alpha = \gamma > 1, \quad \beta = \infty. \quad (36)$$

Тогда (33) примет вид

$$K_{il}(S_1) = \sqrt{\mu \gamma / Q_0(S_1)}. \quad (37)$$

Так как для этого случая $\gamma > 1$, то очевидно, что $K_{il}(S_1) > K_{ct}(S_1)$. Оценим возможные значения γ . Для большинства диаграмм направленности можно записать: $f(\theta, \varphi) \approx f(\theta) f(\varphi)$, тогда из (25) следует

$$\gamma = \gamma_\theta \gamma_\varphi. \quad (38)$$

Вычисления величин γ проводились для главных лепестков диаграммы 3-х видов.

а) Диаграмма вида $\sin x/x$, соответствующая крестообразному радиотелескопу с равномерным распределением амплитуды по обоим его плечам. Вычисления дали значения

$$\gamma_\theta = \gamma_\varphi = 1,30, \quad \gamma_a = 1,70. \quad (39)$$

б) Диаграмма вида $\sin^2 x/x^2$, соответствующая прямоугольному раскрыву с равномерным распределением амплитуды по обеим координатам. Вычисления дали значения

$$\gamma_\theta = \gamma_\varphi = 1,37, \quad \gamma_b = 1,87. \quad (40)$$

в) Диаграмма вида $\exp[-(x/x_0)^2]$, соответствующая прямоугольному раскрыву с гауссовым распределением амплитуды по обеим координатам. Вычисления дали значения

$$\gamma_\theta = \gamma_\varphi = 1,41, \quad \gamma_v = 2,0. \quad (41)$$

Очевидно, что для равных отношений сигнал/шум $K_{ct}(S_1) = K_{il}(S_1)$ число столообразных диаграмм μ_{ct} , приходящихся на один источник

с потоком $S \geq S_1$, в γ раз больше числа диаграмм с реальной формой главного лепестка.

Таким образом, из проведенных расчетов следует, что величины μ , полученные в [2, 3], следует уменьшить почти вдвое. Так, в [2] было принято $\mu = 75$, в [3] — $\mu = 100$ для $K = 5$. Уменьшенные, вдвое значения ближе к значениям, принимаемым практически радиоастрономами при составлении каталогов дискретных источников (см. [5]).

3) Наконец, для диаграммы направленности реальной формы с боковыми лепестками

$$\alpha \neq \gamma > 1, \quad \beta \neq \infty, \quad (42)$$

и $K(S_1)$ определяется выражением (33). Переходим к оценке возможных значений β . Если обозначить коэффициент рассеивания

$$\rho = \int_{\text{бок}} f(\theta, \varphi) d\Omega / \int_{\Omega} f(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (43)$$

то легко получить

$$\beta = \frac{1 - \rho}{\rho} \frac{\int_{\text{бок}} f(\theta, \varphi) d\Omega}{\int_{\text{бок}} f^2(\theta, \varphi) d\Omega}, \quad (44)$$

или, обозначив

$$\chi = \int_{\text{бок}} f(\theta, \varphi) d\Omega / \int_{\text{бок}} f^2(\theta, \varphi) d\Omega, \quad (45)$$

получим

$$\beta = \chi \frac{1 - \rho}{\rho}. \quad (46)$$

Интересно заметить, что χ отличается от γ только областью интегрирования. Оценочные расчеты, проведенные для диаграммы вида $\sin x/x$, дали значения $\beta \approx 50$, $\gamma = 1,7$, а для диаграммы вида $\sin^2 x/x^2$ — значения $\beta \approx 10^3$, $\gamma = 1,86$.

Переходим к анализу функций $Q_0(S_1)$ и $Q_1(S_1)$. Поскольку эти функции определяются зависимостью $N(S)$, то обсудим исходные данные, принятые для расчета. Проведенная в [11] экстраполяция зависимости $N(S)$ в области малых потоков вплоть до 0,003 ед. на частоте 178 Мгц (1 ед. = $10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$) дала принципиально важные сведения об изменении наклона кривой $N(S)$ с уменьшением S . Проведенные позже экспериментальные работы [5, 12, 13] показали существование такого изменения наклона.

На рис. 1 приведены несколько кривых $N(S)$, взятых из упомянутых работ. Кривая 2 из работы [5] получена на частоте 408 Мгц. Если принять средний спектральный индекс $\alpha = 0,6$, то эта кривая хорошо совпадает с верхней кривой 1 из [11]. На рис. 1 приведена кривая 3, взятая в качестве исходной для расчетов в [3].

Поскольку более поздние работы подтвердили результаты [11], эти данные взяты в качестве исходных для расчета $Q_0(S_1)$ и $Q_1(S_1)$ (кривые 1 на рис. 1). На рис. 2 приведены полученные графическим интегрированием функции $Q_0(S_1)$ и $Q_1(S_1)$. Для удобства дальнейших расчетов сделан переход по кривой 1 рис. 1 от S_1 к N_1 . Расчет проводился для двух возможных значений $N_{\min}(S)$ и $N_{\max}(S)$, приводимых в [11]. Более поздние работы [5, 12, 13] дали результаты, близкие к $N_{\max}(S)$.

Рассмотрим поведение функций $Q_0(N_1)$. Для малых N_1 (большой поток S_1) значения Q_0 близки к 10. С увеличением N_1 значения $Q_0(N_1)$ уменьшаются, стремясь к значениям много меньшим 1 для N_1 , стремящихся к $N(S_{lim})$. Таким образом, когда в основном лепестке диаграммы находятся источники с малым $S < S_1$, при уменьшении S_1 (увеличении N_1) эффект «путаницы» по главному лепестку уменьшается. Действительно, уменьшение наклона кривой $N(S)$ связано с уменьшением числа источников с потоком в интервале $S_1 - S_1 + dS$ при уменьшении S_1 . Если предположить существование S_{lim} , то с уменьшением телесного угла диаграммы и соответствующим увеличением чувствительности для регистрации источников с малым S_1 в основном лепестке диаграммы будет все меньше оставаться источников с потоком меньше на-

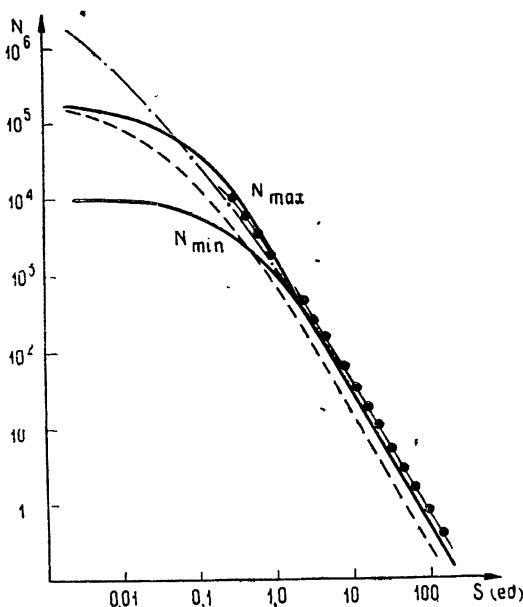


Рис. 1. Зависимость $N(S)$:
— 1 на частоте 178 Мгц [1]; — 2 на частоте 408 Мгц [5]; — · · — 3 на частоте 178 Мгц [3]; ●—●—●— 4 на частоте 178 Мгц [13].

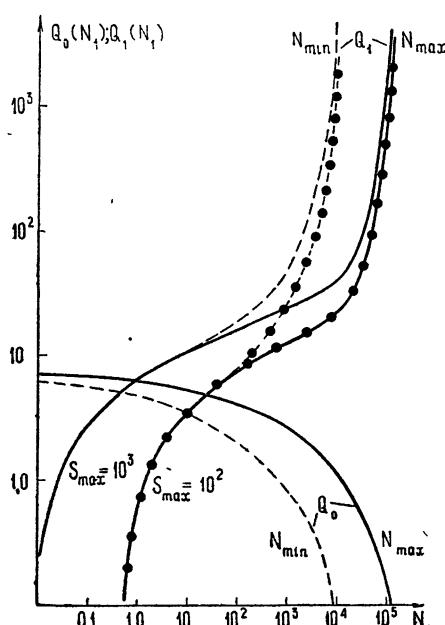


Рис. 2. Функции $Q_0(N_1)$ и $Q_1(N_1)$: — для N_{max} , — · · — для N_{min} .

4 мощных источника ЗС каталога: $S_{max} = 10^2$ (в дополнение к указанным исключены источники 348, 123,

блудаемого, а следовательно, все меньше будет эффект «путаницы» по главному лепестку диаграммы. В пределе для идеальной диаграммы без боковых лепестков эффект «путаницы» исчез бы при телесных углах главного лепестка $\Omega_{lim} = 10^{-4} \div 10^{-5}$ стерад $= 12 \cdot 10^2 \div 120$ кв. мин. Это означает, что радиотелескоп с диаграммой шириной по половинной мощности около 10 мин уже не был бы подвержен эффекту «путаницы», если бы этот эффект определялся только главным лепестком. Однако, как известно по работам реальных радиотелескопов с таким разрешением, этот вывод не подтверждается. С уменьшением эффекта «путаницы» по главному лепестку все большее значение приобретает эффект «путаницы» по боковым лепесткам.

На рис. 2 приведены зависимости $Q_1(N_1)$, рассчитанные для N_{min} и N_{max} . Кривые 1 приведены для $S_{max} = 10^3$ ед. (не учитываются

218 и 353). Из рис. 2 видно, что зависимость $Q_1(N_1)$ в области больших N_1 резко возрастает, стремясь при $S_1 \rightarrow S_{\lim}$ к значению

$$\lim_{N_1 \rightarrow N(S_{\lim})} Q_1(N_1) = [S_{\lim}^2 N(S_{\lim})]^{-1} \int_{S_{\lim}}^{S_{\max}} S^2 N'(S) dS. \quad (47)$$

Причем, как и следовало ожидать, при больших N_1 значения S_{\max} слабо влияют на поведение $Q_1(N_1)$. Из рис. 2 также видно, что с уменьшением эффекта «путаницы» по главному лепестку растет влияние боковых лепестков. Другими словами, для радиотелескопов, обладающих сверхзвуковыми диаграммами, существенную роль для отношения сигнал/шум, обусловленного эффектом «путаницы», играют боковые лепестки. Очевидно, что для уменьшения эффекта «путаницы» для таких инструментов следует уменьшать уровень боковых лепестков, стремясь к малым значениям коэффициента рассеивания.

С учетом значений $\alpha = 1,86$ и $\beta = 10^3$, принятых для радиотелескопов с заполненной апертурой, а $\alpha = 1,7$ и $\beta = 10^2$ для радиотелескопов с незаполненной апертурой, были проведены расчеты требуемого числа диаграмм $\mu(N_1)$ для отношения сигнал/шум $K(S_1) = 5$. Как утверждается в [2], в этом случае 5% отклонений регистратора радиотелескопа будет принято за ложные источники. При $K = 3$ таких отсчетов будет уже 25%.

На рис. 3 приведены значения $\mu(N_1)$ для N_{\min} и N_{\max} как для инструментов с заполненной, так и с незаполненной апертурой. Видно, что с ростом N_1 вначале $\mu(N_1)$ уменьшается, когда эффект «путаницы» определяется в основном главным лепестком, а затем при дальнейшем росте N_1 значения $\mu(N_1)$ резко возрастают. Если в этих случаях не удается существенно уменьшить влияние боковых лепестков (увеличить β), то приходится значительно сужать главный лепесток диаграммы радиотелескопа, увеличивая число диаграмм на один источник до 100 и более. Можно оценить необходимые значения β для регистрации источников с предельным потоком S_{\lim} при отношении сигнал/шум $K = 5$ в предположении, что такой предел существует. Из (33) легко получить

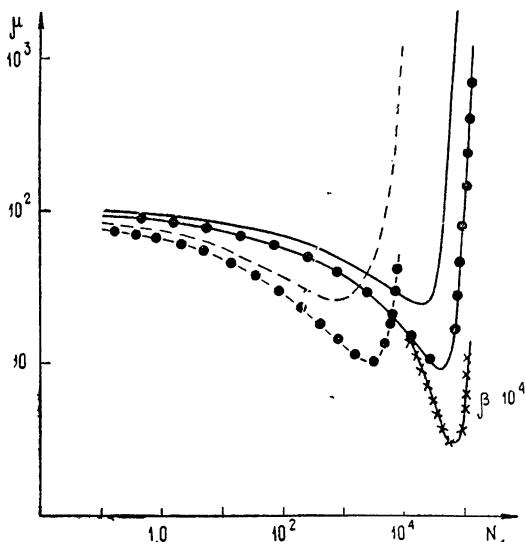


Рис. 3. Число диаграмм μ на один источник в зависимости от N_1 при отношении сигнал/шум 5:1:

для N_{\max} — незаполненная апертура, ●—●—●— заполненная апертура; для N_{\min} — незаполненная апертура, ●—●—●— заполненная апертура,

$$\beta = \frac{K^2 Q_1(N_1)}{\mu - K^2 Q_0(N_1)/\alpha}. \quad (48)$$

Очевидно, что $\lim_{N \rightarrow N_{\lim}} Q_0(N) = 0$. Принимая значения $S_{\lim} = 0,001$ (на частоте 178 Мгц) и $N_{\lim} = 1,65 \cdot 10^6$ ист.стера d^{-1} (см. рис. 1), лег-

ко получить в соответствии с (47) $Q_1(N_1) \approx 3,5 \cdot 10^6$. Примем значение $\mu = 2$ для $S_{1\text{m}}$. Тогда $\beta_{1\text{m}} \approx 4,5 \cdot 10^7$. Таким образом, если создается телескоп для уверенной регистрации источников с потоками порядка $S_{1\text{m}}$, то при сделанных предположениях телесный угол главного лепестка диаграммы должен быть порядка $\Omega_0 \approx 0,3 \cdot 10^{-5}$ стерад ≈ 36 кв. мин, а уровень боковых лепестков с учетом формы должен быть такой, чтобы обеспечить $\beta = 10^7 \div 10^8$. Отсюда видно, что для радиотелескопов, предназначенных для исследования сверхслабых дискретных источников, должны быть выполнены достаточно жесткие требования к уровню боковых лепестков. Можно ожидать, что основные ограничения на предельные возможности радиотелескопов будут накладывать точность их изготовления и жесткость конструкций для зеркальных телескопов, а для антенных решеток — точность и стабильность фазирования.

Если уровень боковых лепестков соответствует принятым ранее значениям $\beta = 10^2 \div 10^3$ для телескопов с незаполненной и заполненной апертурами, то легко найти значения требуемых телесных углов в зависимости от разрешенного числа источников в одном стерад. N_1 . На рис. 4 приведена такая зависимость. Заметим, что, пользуясь графиком рис. 4, можно легко найти предельные значения N_1 и соответственно S_1 , определяемые эффектом «путаницы» для различных инструментов.

В заключение автор выражает большую признательность М. В. Конюкову и Р. Д. Дагксаманскому за плодотворное участие в обсуждении результатов этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Виткевич. Астрон. ж., 34, вып. 3, 349 (1957).
2. S. von Hoegh. Public. NRAO, 1, № 3, 19 (1961).
3. С. Э. Хайкин, Ю. Н. Парийский. Изв. ГАО, 23, вып. 3, № 172, 87 (1964).
4. Р. Д. Дагксаманский. Диссертация, ФИАН, М., 1969.
5. G. C. Pooley, M. Ryle. Monthly Not. Roy. Astr. Soc., 139, № 4, 514 (1968).
6. P. R. R. Leslie. Monthly Not. Roy. Astr. Soc., 122, № 5, 371 (1961).
7. D. J. Holden. Monthly Not. Roy. Astr. Soc., 133, № 2, 225 (1966).
8. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Гостехиздат, М., 1949.
9. Б. Р. Левин. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1960.
10. P. A. G. Scheuer. Proc. Cambridge Philos. Soc., 53, 764 (1957).
11. A. Hewish. Monthly Not. Roy. Astr. Soc., 123, № 2, 167 (1961).
12. M. Ryle, A. C. Neville. Monthly Not. Roy. Astr. Soc., 125, № 1, 39 (1962).
13. J. F. R. Gower. Monthly Not. Roy. Astr. Soc., 133, № 2, 151 (1966).

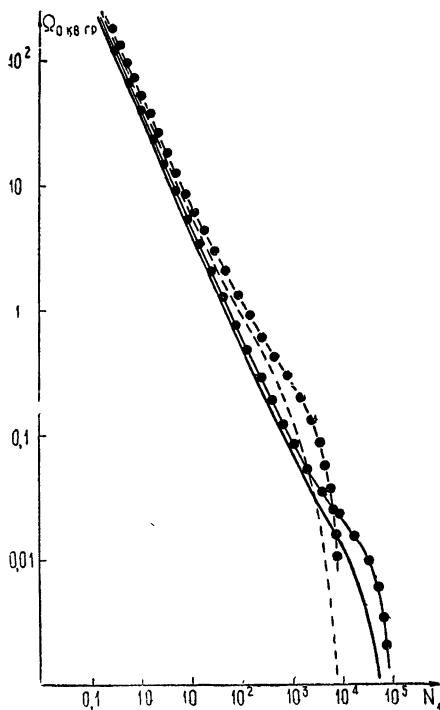


Рис. 4. Требуемый телесный угол диаграммы в зависимости от разрешенного числа источников N_1 .
для N_{\max} — незаполненная апертура;
● — заполненная апертура;
для N_{\min} — незаполненная апертура;
● — заполненная апертура.

**THE CONFUSION EFFECT INFLUENCE ON THE LARGE RADIO TELESCOPE
SENSITIVITY IN OBSERVING DISCRETE RADIO SOURCES***Yu. P. Ilyasov*

Output radio telescope fluctuations are considered when observing discrete sources with taking into account the real form of antenna pattern. The expression for a characteristic function of the output fluctuation random value due to the confusion effect is obtained. A contribution of the side lobe response to the sources with fluxes greater than observed ones is also estimated

УДК 533.951

МОДУЛЯЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ПЛАЗМЕ, ПОМЕЩЕННОЙ В ПЕРЕМЕННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Л. И. Кац, Г. П. Стародубцев

В работе количественно оцениваются модуляционные эффекты, обусловленные распространением электромагнитных волн в плазме, помещенной в переменное магнитное поле. Рассматривается случай распространения волны перпендикулярно магнитному полю (эффект Коттона—Мутона). Отмечается преимущества такого рода эффекта применительно к построению модуляционных устройств по сравнению со случаем, когда магнитное поле совпадает с направлением распространения волн (эффект Фарадея).

Создание мощных источников когерентного излучения оптического, инфракрасного и субмиллиметрового диапазонов требует разработки соответствующих модуляционных устройств. Определенные возможности в этом плане открывает использование плазменной среды в качестве активного вещества модулятора. Магнитооптические эффекты в плазме подробно изучены для постоянных магнитных полей.

Исследование эффектов, обусловленных прохождением электромагнитного излучения через плазму, помещенную в высокочастотное магнитное поле, с целью использования их в модуляторах СВЧ диапазона, по-видимому, впервые проводилось в работе [1] для случая, когда магнитное поле совпадает с направлением распространения модулируемой волны. Авторами этой работы сделан вывод, что максимальная величина модуляции достигается при равенстве частоты падающего излучения частоте циклотронного резонанса, соответствующей постоянной составляющей магнитного поля.

При поперечном распространении модулируемой волны, рассматриваемом в нашей работе, резонансные эффекты проявляются при меньших значениях магнитного поля [2], вследствие чего, как показано ниже, возможно получение максимума модуляции в случае, когда циклотронная частота по постоянному полю много меньше частоты падающего излучения. Последнее обстоятельство имеет важное значение для конструирования модуляторов субмиллиметрового и инфракрасного диапазонов, использующих магнитооптические эффекты в плазме.

Геометрия и принятые допущения рассматриваемой задачи следующие: плоская электромагнитная волна падает нормально на плоскость $x = 0$, ограничивающую полупространство, заполненное однокомпонентной однородной плазмой. Плазма помещена в магнитное поле вида

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 e^{i\Omega t},$$

при этом $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_0 \perp \mathbf{k}_0$, где \mathbf{k}_0 — волновой вектор падающего излучения. Оси координат $0x$ и $0z$ параллельны \mathbf{k}_0 и \mathbf{H}_0 соответственно.

Принятое условие однородности приводит к соотношению, выполняющемуся для холодной плазмы [3]:

$$v_T/c \ll 1, \omega_B, \nu, \quad (1)$$

где ω_B — циклотронная частота, обусловленная наличием H_0 , v — частота столкновений, не зависящая от скорости. Значения ω_B и v приведены к частоте падающего излучения ω , v_T — тепловая скорость движения носителей.

Заметим, что условие (1) исключает из рассмотрения обертоны циклотронной частоты ω_B [3].

Решение проводится в так называемом параметрическом приближении [4], т. е. $\Omega \ll \omega$ и $E'(\omega \pm \Omega) \ll E(\omega)$. Здесь $E'(\omega \pm \Omega)$ — амплитуда волн с частотой $\omega \pm \Omega$. Считается, что верхнее значение $E(\omega)$ обеспечивает применимость линеаризованных уравнений для самосогласованного поля. В принятом приближении в спектре частотных компонент волны, прошедшей через плазму, присутствуют лишь частоты ω , $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$. Параметры, характеризующие процесс модуляции, рассмотрены ниже.

1. ПОСТОЯННАЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

В рассматриваемой задаче расчет комплексной постоянной распространения волны проводится по следующей методике.

1) По известной функции распределения для продольного распространения электромагнитной волны в постоянном и переменном магнитных полях [1] с учетом соотношения (1) определяются функция распределения и токи для поперечного распространения волны в плазме, находящейся в постоянном и переменном магнитном полях.

2) С учетом полученных выражений для токов записывается система уравнений Максвелла, определяющая поля в плазме, в виде

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi^2} + \epsilon E_x = \frac{4\pi}{\omega} i [\sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y], \quad (2a)$$

$$\epsilon E_y = \frac{4\pi}{\omega} i [\sigma_{yx} E_x + \sigma_{yy} E_y];$$

$$\frac{\partial^2 E'_x}{\partial \xi^2} + \epsilon E'_x = \frac{4\pi}{\omega} i [\sigma_{xx} E'_x + \sigma_{xy} E'_y + \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y], \quad (2b)$$

$$\epsilon E'_y = \frac{4\pi i}{\omega} [\sigma_{yx} E'_x + \sigma_{yy} E'_y + \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y].$$

Здесь приняты следующие обозначения: E_{1y} — амплитуда волн с частотой ω ; $E'_{x,y}$ — амплитуда волн с частотой $\omega + \Omega$ или $\omega - \Omega$; ξ — безразмерная величина, смысл которой определяет ее выражение: $\xi = (2\pi/\lambda) x \sqrt{\epsilon}$; ϵ — статическая диэлектрическая проницаемость (в твердом теле это проницаемость решетки); λ — длина волны падающего излучения частоты ω , причем

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\omega} \alpha_{xx} &= \frac{4\pi}{\omega} \alpha_{yy} = -\frac{1}{2} i \omega_B \omega_c \frac{(2 + \Omega) \omega_p^2}{(1 - \omega_B^2) [(1 + \Omega)^2 - \omega_B^2]}, \\ \frac{4\pi}{\omega} \alpha_{xy} &= -\frac{4\pi}{\omega} \alpha_{yx} = -\frac{1}{2} \omega_c \frac{[(1 + \Omega)^2 - \omega_B^2] \omega_p^2}{(1 - \omega_B^2) [(1 + \Omega)^2 + \omega_B^2]}, \\ \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xx} &= \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{yy} = -i \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_B^2} \left(1 + i \nu \frac{1 + \omega_B^2}{1 - \omega_B^2} \right), \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\frac{4\pi}{\omega} \sigma_{xy} = -\frac{4\pi}{\omega} \sigma_{yx} = \omega_B \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_B^2} \left(1 + 2i \frac{\nu}{1 - \omega_B^2} \right).$$

Приведенные значения компонент тензоров проводимости σ_{ij} и α_{ij} вычислены с учетом выполнения условий

$$\nu \ll 1, \quad \nu \ll 1 - \omega_B. \quad (36)$$

Величины ω_p , ω_c , Ω в (За) и ниже — суть приведенные к ω значения соответствующих частот (ω_p — плазменная частота, ω_c — циклотронная частота, определяемая амплитудой переменного магнитного поля).

Отметим некоторые особенности уравнений (2а) и (2б). В уравнении (2б) справа стоит сумма токов, наведенных полем E и индуцированных за счет поля E' . Такая запись справедлива в принятом приближении

$$E'_{x,y} \ll E_{x,y}. \quad (4)$$

Условие (4) приводит также к тому, что (2а) не содержат величин, определяемых переменным магнитным полем. Уравнения (2а) описывают, таким образом, распространение необыкновенной волны в постоянном магнитном поле [2].

Дисперсионное уравнение такой задачи известно. Квадрат постоянной распространения β (выраженной в единицах ω/c) с учетом выполнения условий (3б) записывается в виде

$$\beta^2 = \epsilon - \frac{\omega_p^2}{1 - \omega_B^2} \left(1 + i\nu \frac{1 + \omega_B^2}{1 - \omega_B^2} \right) - \frac{\omega_B^2 \omega_p^4 [1 + 4i\nu/(1 - \omega_B^2) - 4\nu^2/(1 - \omega_B^2)]}{(1 - \omega_B^2) \{ \epsilon (1 - \omega_B^2) - \omega_p^2 [1 + i\nu (1 + \omega_B^2)/(1 - \omega_B^2)] \}}. \quad (5)$$

Заметим, что при $\Omega \ll 1$ постоянные распространения волн с частотами ω , $\omega \pm \Omega$ оказываются равными друг другу и ввиду (4) не зависят от величин, определяющих переменное магнитное поле.

Функция β^2 обладает максимумом («резонанс») при $\omega_p^2 = \epsilon (1 - \omega_B^2)$ и равна нулю («отсечка») при $\omega_p^2 = \epsilon (1 \pm \omega_B)$ и $\nu = 0$. Вдали от этих характерных точек постоянная распространения с высокой степенью точности аппроксимируется выражением

$$\beta^2 = \epsilon - \omega_p^2 \frac{\epsilon - \omega_p^2}{\epsilon - \omega_p^2 - \epsilon \omega_B^2}. \quad (6)$$

Отмеченные особенности в поведении β^2 позволяют выделить области значений величин ω_p , ω_B , требующие подробного рассмотрения.

2. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ МОДУЛЯЦИИ

Запишем выражения для полей слева и справа относительно плоскости $\xi = 0$. Поле вне плазмы имеет вид

$$E_{\text{out}} = A_i \exp(i\omega t - i\xi) + A_r \exp(i\omega t + i\xi) + A'_r \exp[i(\omega + \Omega) + i\xi] + A''_r \exp[i(\omega - \Omega) + i\xi], \quad (7)$$

где A_i — амплитуда падающей волны, A_r , A'_r и A''_r — амплитуды отраженных волн на частотах ω , $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$ соответственно. Поле в объеме, занятом плазмой, представим в виде

$$E_{in} = B_1 \exp(i\omega t - i\beta_1 \xi) + \left[B_2 + \frac{\delta_2 B_1 \xi}{2i\beta_1} \right] \exp[i(\omega + \Omega)t - i\beta_1 \xi] + \\ + \left[B_3 + \frac{\delta_2 B_1 \xi}{2i\beta_1} \right] \exp[i(\omega - \Omega)t - i\beta_1 \xi]. \quad (8)$$

Справедливость выбора выражения для E_{in} подтверждается подстановкой (8) в уравнение (2б). Из условия непрерывности тангенциальных составляющих на границе плазмы получим граничные условия для волн с частотой ω и $\omega \pm \Omega$. В последнем случае они имеют вид

$$A'_{ry} = B_{2y}, \quad A'_{rx} = -\beta_1 B_{2y} - \delta_2 B_{1y}/2\beta_1. \quad (9)$$

Здесь

$$\delta_2 = i \left[\alpha_{xx} - 2i\alpha_{xy} \frac{\sigma_{xy}}{4\pi\varepsilon/\omega - i\sigma_{xx}} + \alpha_{xx} \frac{\sigma_{xy}^2}{(4\pi\varepsilon/\omega - i\sigma_{xx})^2} \right] \frac{4\pi}{\omega}. \quad (10)$$

Отметим, что из уравнения (9) можно найти коэффициенты отражения R и прохождения T (по полю) и затем определить коэффициенты глубины амплитудной модуляции:

$$\mu_{opt} = \frac{|A'_r|}{|A_r|} = - \left| \frac{-\delta_2}{\beta_1(1+\beta_1^2)} \right|; \quad (11)$$

$$\mu_{np} = \frac{|B_2 + \delta_2 B_1 \xi/2i\beta_1|}{T|E_i|} = \left| - \frac{\delta_2 [i\xi + 1/(1+\beta_1)]}{\beta_1(1+\beta_1)T} \right|. \quad (12)$$

Величины μ_{opt} и μ_{np} характеризуют процесс амплитудной модуляции для отраженной и прошедшей волн соответственно.

Рассмотрим поведение коэффициентов глубины модуляции для разных областей изменения β .

1. Из (5) следует, что при

$$\omega_p^2 = \varepsilon (\omega^2 - \omega_B^2) \quad (13)$$

и $\nu = 0$ функция β_1^2 обладает характеристической точкой, которую будем называть точкой гибридного резонанса [2]. При выполнении (13), а также условий $\nu \ll 1$, $\nu \ll (1/2)\omega_B(1 - \omega_B)$, $4\varepsilon\nu \ll \omega_p^2$ разложение (5) в ряд по малой величине ν/ω дает

$$\beta_1^2 = - \frac{i\omega_B^2 \omega_p^2}{\nu^2(1 + \omega_B^2)}. \quad (14)$$

При сделанных предположениях при условии $\omega_B^2 \gg \nu$ получим, подставляя (13) в (10),

$$\delta_2 = - \frac{\omega_B^4 \omega_p^2}{\nu^2(1 + \omega_B^2)^2}. \quad (15)$$

Подстановка (14) и (15) в (12) дает следующие результаты:

$$a) \quad \mu_{np} = - \frac{\omega_c}{\sqrt{2} \sqrt[4]{2}} \omega_B \left(\frac{\omega_B}{\omega_p} \right)^{1/2} \frac{1}{[\nu(1 + \omega_B^2)]^{3/4}} \quad \left(\xi \ll \frac{1}{\beta} \right); \quad (16)$$

$$b) \quad \mu_{np} = \frac{\omega_c}{\sqrt{2} \sqrt[4]{2}} \omega_B (\omega_B \omega_p)^{1/2} \frac{L}{[\nu(1 + \omega_B^2)]^{5/4}} \quad \left(\xi \gg \frac{1}{\beta} \right). \quad (17)$$

Здесь L — длина пути, приведенная к длине волны падающего излучения. Для магнитных полей, удовлетворяющих условию $\omega_B^2 \sim \nu$,

$$\mu_{\text{пр}} = \frac{1}{2\nu^2} \left| i\xi + \frac{1}{2} \right| \omega_c \omega_p^2 \omega_B^3. \quad (18)$$

В табл. 1 представлены результаты расчета коэффициента глубины модуляции (в процентах) для случая $\xi \ll 1/\beta$ в режиме гибридного резонанса ($\omega_B^2 = 1 - \omega_p^2$).

Таблица 1

ω_p^2	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	
$\nu = 0,1$	2,97	2,4	2,3	2,02	1,79	$\omega_c = 1$
$\nu = 0,01$	17,0	14,4	13,1	11,5	10,2	
ω_p^2	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	
$\nu = 10^{-3}$	9,54	8,1	7,38	6,48	5,76	$\omega_c = 10^{-2}$

Отметим, что при $\xi \gg 1/\beta$ величина модуляции $\mu \sim \omega_p^{1/2}$ ирастет при уменьшении ω_B . В случае выполнения (13) μ существенным образом возрастает, если $\nu/\omega \rightarrow 0$. Это обстоятельство делает особенно перспективным применение для рассматриваемых целей плазмы твердого тела [5], в которой может выполняться соотношение $\omega_p^2 \sim 1$ при значениях ω вплоть до ИК диапазона.

2. Другая характеристическая точка функции (5) определяется условием $\beta = 0$ (при $\nu = 0$). Это так называемая точка «отсечки», когда при $\nu = 0$ происходит полное отражение падающего излучения от границы плазмы.

Определим величину постоянной распространения β при $\nu \neq 0$ в нулях функции $\beta_1^2 = 0$ (при $\nu = 0$): Корни последнего уравнения оказываются равными $\omega_p^2 = \epsilon(1 + \omega_B)$. В этом случае для квадрата постоянной распространения справедливо

$$\beta_1^2 = -2i\epsilon\nu/\omega_p^2. \quad (19)$$

Значение δ_2 определяется выражением

$$\delta_2 = -2\omega_c \frac{\epsilon}{1 - \omega_B} \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega_B}{1 - \omega_B^2} \right). \quad (20)$$

Подстановка (19) и (20) в (11) позволяет определить $\mu_{\text{отр}}$. Однако полученное таким образом выражение для $\mu_{\text{отр}}$ в рамках принятых приближений оказывается справедливым лишь для $\omega_B \rightarrow 0$.

Оценим величину параметра модуляции в области, далекой от характеристических точек уравнения (5). Как известно [2], кривая зависимости β от величины постоянного магнитного поля состоит из трех ветвей, две из которых соответственно удовлетворяют условиям $\omega_p^2 < \epsilon$ и $\omega_p^2 > \epsilon$. Вдали от рассмотренных выше характеристических точек, т. е. при выполнении условий

$$\epsilon\omega_B^2 \gg \epsilon - \omega_p^2 \quad (\omega_p^2 < \epsilon); \quad (21)$$

$$\epsilon\omega_B^2 \gg \omega_p^2 - \epsilon \quad (\omega_p^2 > \epsilon). \quad (22)$$

постоянная распространения асимптотически приближается к величине

$$\beta = \sqrt{\epsilon}. \quad (23)$$

Определим μ при условии (21), которое может выполняться как для «больших» ($\omega_B > 1$), так и для «малых» магнитных полей ($\omega_B < 1$). Величина β в обоих случаях определяется выражением (23), а δ_2 — выражениями

$$\delta_2 = -\omega_c \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2} \frac{\epsilon + \omega_p^2}{\epsilon}, \quad (\omega_B > 1),$$

$$\delta_2 = -\epsilon \omega_c \omega_B \frac{\epsilon - \omega_p^2}{\epsilon \omega_B^2} \quad (\nu^{1/2} < \omega_B < 1),$$

следовательно,

$$\mu_{np} = \frac{1}{2} \epsilon^{-7/4} \omega_c \frac{\omega_p^2}{\omega_B} (\epsilon + \omega_p^2) \left| i\xi + \frac{1}{1+\sqrt{\epsilon}} \right| \quad (\omega_B > 1); \quad (24)$$

$$\mu_{np} = \frac{1}{2} \epsilon^{1/4} \omega_c \omega_B \frac{\epsilon - \omega_p^2}{\epsilon \omega_B^2} \left| i\xi + \frac{1}{1+\sqrt{\epsilon}} \right| \quad (\nu^{1/2} < \omega_B < 1, \omega_p^2 = \epsilon). \quad (25)$$

При выполнении (22) в области $\omega_B > 1$ величина μ определяется соотношением (24). В случае, если $\omega_p^2 < \epsilon$ и $\epsilon \omega_B^2 \ll \epsilon - \omega_p^2$, $\beta^2 = \epsilon - \omega_p^2$. Если наложить ограничения на толщину плазменного слоя в виде $\xi \gg 1/(1 + \beta_1)$, тогда

$$\mu_{np} = \frac{1}{2} \epsilon \xi \omega_c \omega_p^2 \frac{\epsilon \omega_B}{(\epsilon - \omega_p^2)^{5/2}}.$$

Некоторые оценки величины μ_{np} , определяемой последним выражением, приведены в табл. 2 ($\xi = 100$, $\epsilon = 1$, $\omega_p^2 = 0,5$).

Таблица 2

ω_B	ω_c	10^{-1}	10^{-2}
10^{-2}		14	1,4
10^{-3}		1,4	0,14

в постоянном и переменном магнитных полях, можно получить модуляцию заметной величины при невысоких значениях постоянного магнитного поля на частотах вплоть до ИК диапазона. При очень высоких частотах следует провести оценку вклада квантовых эффектов в рассмотренный расчет.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. S. Sodna, A. K. Agoga, J. Physic, 1A, № 2, 89 (1968).
2. B. E. Голант, Сверхвысокочастотные методы исследования плазмы, изд. Наука, М., 1968.
3. Д. А. Франк-Каменецкий, Лекции по физике плазмы, Атомиздат, М., 1968.
4. В. И. Жариков, Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 12, № 9, 1263 (1964).
5. M. F. Noyaux, Contemp. Phys., 9, № 2, 165 (1968).

**MODULATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES PROPAGATING IN PLASMA
PLACED IN A VARIABLE MAGNETIC FIELD***L. I. Kats, G. P. Starodubtsev*

Modulations effects due to electromagnetic waves propagating in the plasma placed in the variable magnetic field are quantitatively estimated. The case of wave propagation normally to the magnetic field (Cotton—Moton's effect) is considered. The advantages of such sort of effect in the design of modulation devices are compared with the case when the wave propagates (the Faraday effect) along the magnetic field.

УДК 551.510.535

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИОНИЗАЦИИ В СРЕДНЕШИРОТНОМ СПОРАДИЧЕСКОМ СЛОЕ E

Ю. А. Игнатьев

Получено численное решение уравнения, описывающего изменение электронной концентрации при появлении сдвигов скорости в ветре нейтральных частиц. Определены характерные времена формирования слоев E_s . Рассмотрена теория ветровых сдвигов применительно к ионосферной плазме, состоящей из ионов с различными характерными временами жизни. Получены условия, при которых слой E_s может формироваться либо из молекулярных ионов, либо из металлических.

Разработанная к настоящему времени теория ветровых сдвигов объясняет появление среднеширотного слоя E_s перераспределением ионизации в области E под действием горизонтальных ветров нейтральных частиц, обладающих вертикальными градиентами скорости [1-5]. В работах [1, 2, 5] исследовалось влияние процессов диффузии и рекомбинации в отдельности на профиль ионизации в слое E_s . В [6] наряду с анализом стационарных моделей спорадического слоя был описан переходный процесс от однородного распределения электронной концентрации к локальным повышенным плотностям ионизации.

Несомненно, представляет интерес учет вклада в формирование E_s -слоя как процесса диффузии, так и фотохимических процессов, протекающих одновременно. Распределения электронной концентрации для стационарной модели E_s -слоя при учете влияния всех этих процессов были получены численно при заданных значениях максимальной ионизации [3, 7]. В данной работе получено численное решение уравнения, описывающего изменение электронной концентрации для нестационарной модели слоя E_s при появлении сдвигов скорости в ветре. Рассмотрена теория ветровых сдвигов для ионосферы, состоящей из двух сортов положительных ионов с различными характерными временами исчезновения. Приводятся условия, при которых слой E_s формируется либо из ионов NO^+ и O_2^+ , либо из металлических ионов. Получены аналитические выражения для профилей положительных ионов и электронов для случая, когда определяющую роль в образовании слоя E_s играют атомные металлические ионы.

1. РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИОНИЗАЦИИ В СЛОЕ E_s ДЛЯ МОДЕЛИ С ОДНИМ СОРТОМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ИОНОВ

Делая ряд типичных пренебрежений и учитывая, что на уровне E -слоя можно полагать $\beta_e^2 \cos^2 \alpha_1 = (\omega_H/\gamma_e)^2 \cos^2 \alpha_1 \gg 1$ и $\beta_i^2 \cos^2 \alpha_1 = (\Omega_H/\gamma_i)^2 \cos^2 \alpha_1 \ll 1$ [7], из квазигидродинамических уравнений движения заряженных частиц можно получить уравнение для электронной концентрации при появлении ветровых сдвигов [3, 6]:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \beta_i \sin \alpha_1 \frac{\partial}{\partial z} (N U_y(z, t)) + J - \alpha N^2, \quad (1)$$

где D_a — коэффициент амбиполярной диффузии, Ω_H и ω_H — гирочастоты ионов и электронов, v_i и v_e — частоты столкновений ионов и электронов с молекулами соответственно, α_1 — угол между магнитным полем H_0 и вертикалью z , N — электронная концентрация, которая в силу квазинейтральности считается равной концентрации ионов, U_v — ветер восточно-западного направления, J — функция ионообразования и α — коэффициент рекомбинации.

Уравнение (1) было решено численно на ЭВМ с учетом того, что ветровые сдвиги возникли с момента $t = 0$:

$$N(z, 0) = N_0, \quad (2)$$

и при использовании граничных условий:

$$N(z_1, t) = N_0, \quad N(z_2, t) = N_0. \quad (3)$$

Последнее означает, что ветры с вертикальным градиентом скорости создаются в области $\Delta z = z_2 - z_1$. Вне Δz ветер равен нулю, и регулярное распределение ионизации N_0 остается невозмущенным. Исходя из условий (3), под Δz можно понимать область, где ветер $U_y(z, t)$ наиболее эффективно влияет на перераспределение электронной концентрации [4].

При решении уравнения (1) был выбран следующий профиль со сдвигом скорости по высоте:

$$U_y(z, t) = U_0[1 - \exp(-t/\tau_b)](z/a)\exp[-(z/a)^2]. \quad (4)$$

Здесь τ_b — характерное время нарастания ветра. Начало координат перенесено на уровень $z = 0$, где $U_y = 0$, поэтому полагали, что $z_2 = z_0$ и $z_1 = -z_0$.

Полученные отношения N_{\max}/N_0 , характерные времена τ_0 формирования E_s -слоя при заданных параметрах ветровой структуры U_0 , a , τ_b и среды D_a , α , N_0 приведены в табл. 1; N_{\max} — электронная концентрация в максимуме слоя на уровне $z = 0$ при $t \rightarrow \infty$ (при проведении счета на ЭВМ за N_{\max} выбирались значения ионизации на уровне $z = 0$ при выходе по t на стабилизацию). В таблице приводятся также времена τ_c , через которые электронная концентрация достигает значений стабилизации; τ_0 определялось как время, через которое достигалось значение $N(0, t)/N_0 = 2,7$. Если $N(0, t)/N_0$ при $t \rightarrow \tau_c$ не достигает данного значения, τ_0 не указано. Из полученных результатов видно, что диффузия существенно не влияет на время τ_0 формирования E_s -слоя, что находится в соответствии с полученным ранее результатом [6].

Таблица 1

N	D_a ($m^2 \cdot \text{сек}^{-1}$)	U_0 ($m \cdot \text{сек}^{-1}$)	a (m)	τ_b (сек)	α ($\text{см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$)	N_0 (см^{-3})	τ_0 (сек)	N_{\max} N_0	τ_c (сек)
1	50	50	$5 \cdot 10^3$	2	10^{-8}	10^5	640	3,2	5100
2	50	75	$5 \cdot 10^3$	0,2	10^{-8}	10^5	320	4,38	1200
3	50	100	$5 \cdot 10^3$	0,2	10^{-8}	10^5	200	5,46	1100
4	50	150	$5 \cdot 10^3$	0,2	10^{-8}	10^5	160	7,7	480
5	75	50	$5 \cdot 10^3$	0,2	10^{-8}	10^6	640	3,07	5520
6	100	50	$5 \cdot 10^3$	0,2	10^{-8}	10^6	640	3,03	2560
7	50	50	$3 \cdot 10^3$	0,1	10^{-8}	10^5	300	4,34	2720
8	50	50	10^3	0,2	10^{-8}	10^6	80	7,4	880
9	50	50	$5 \cdot 10^3$	0,2	10^{-9}	10^6	330	13,5	2560
10	50	50	$5 \cdot 10^3$	0,2	10^{-7}	10^6	—	1,161	3840
11	50	100	$5 \cdot 10^3$	0,2	10^{-7}	10^6	—	1,34	1440
12	50	150	$5 \cdot 10^3$	0,2	10^{-7}	10^6	—	1,54	1080
13	50	200	$5 \cdot 10^3$	0,2	10^{-7}	10^6	—	1,8	560
14	50	50	$5 \cdot 10^3$	0,2	$4 \cdot 10^{-7}$	10^5	—	1,03	4060

В области E преобладающими являются ионы NO^+ и O_2^+ [8], коэффициент диссоциативной рекомбинации которых, как было определено ранее, лежит в диапазоне $\alpha = 10^{-8} \div 10^{-9} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ [9, 10]. Поэтому расчеты были проведены как для $\alpha = 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$, так и для $\alpha = 10^{-9} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$. На рис. 1 приведены профили электронной концентрации для $U_0 = 50 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$, $\alpha = 10^{-9} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ для моментов времени $t_1 = 320 \text{ сек}$, $t_2 = 800 \text{ сек}$ и $t_3 \geq 2560 \text{ сек}$. На рис. 2 изображены профили ионизации для $U_0 = 75 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$, $\alpha = 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ для моментов времени $t_1 = 160 \text{ сек}$, $t_2 = 400 \text{ сек}$, $t_3 = 1200 \text{ сек}$. В обоих случаях $D_a = 50 \text{ м}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$, $a = 5 \cdot 10^3 \text{ м}$, $\tau_b = 0,2 \text{ сек}$, $N_0 = 10^5 \text{ см}^{-3}$ и $z_0 = 5a$. В табл. 1 приведены результаты счета с учетом процесса турбулентной диффузии ($D_a = 100 \text{ м}^2 \cdot \text{сек}^{-1}$), что приводит к некоторому уменьшению N_{\max}/N_0 .

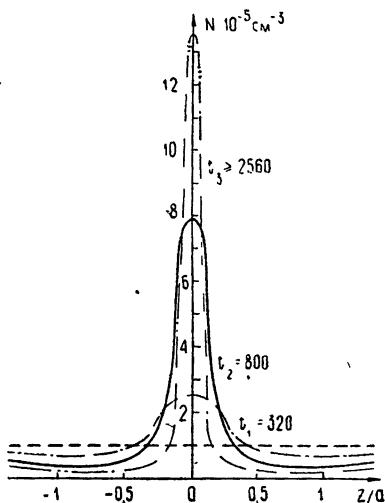


Рис. 1.

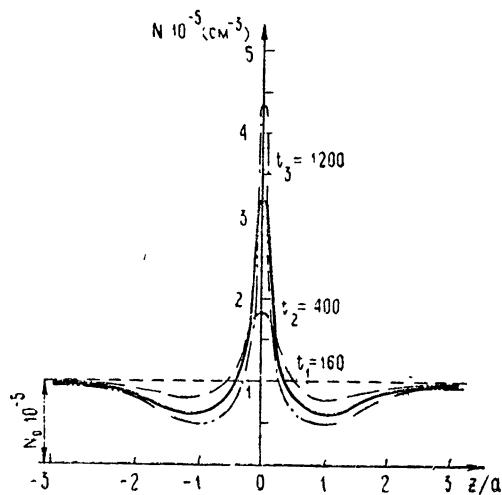


Рис. 2.

Из уравнения непрерывности можно получить, что при перераспределении ионизации и формировании E_s -слоя с учетом как процесса диффузии, так и процессов фотохимии должно выполняться следующее условие:

$$\int_{-z_0}^{z_0} N^2(z, t) dz = \int_{-z_0}^{z_0} N_0^2 dz, \quad (5)$$

где $z = \pm z_0$ —уровни, через которые поток ионизации равен нулю. При численном решении уравнения (1) проверялось и выполнение условия (5). Было получено, что в любой момент времени условие (5) сохраняется. Малые τ_b выбирались для того, чтобы яснее выявить зависимость τ_b и N_{\max}/N_0 от скоростей диффузии, рекомбинации и от ветровой структуры.

2. ВЛИЯНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ИОНОВ НА ФОРМИРОВАНИЕ СПОРАДИЧЕСКОГО СЛОЯ E

В последнее время в литературе [11, 12] отмечается, что коэффициенты рекомбинации в диапазоне $10^{-9} \div 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ являются заниженными, и приводятся коэффициенты диссоциативной рекомбинации, равные $\alpha_{\text{O}_2^+} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ и $\alpha_{\text{NO}^+} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$. В свя-

зи с этим были проведены расчеты и для таких скоростей реакций исчезновения ионов. Результаты, приведенные в табл. 1 (10—14 стро-ки), показали, что для $\alpha \geq 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ заметного перераспределения молекулярных ионов не происходит даже при сильных ветрах (при $U_0 = 200 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1} N_{\max}/N_0 < 2$). Таким образом, объяснить образование E_s -слоя перераспределением преобладающих ионов NO^+ и O_2^+ не представляется возможным. Этот факт вполне понятен, так как в данном случае характерное время жизни молекулярных ионов τ_{i1} меньше времени формирования слоя E_s . Например, для $\alpha = 4 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ и $U_0 = 50 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$, $a = 5 \cdot 10^3 \text{ м}$ характерное время сорбции ионов на уровне $z = 0$ $\tau_s \approx 2a/\pi V_{\text{эфф}} \approx 220 \text{ сек}$ [6], тогда как $\tau_{i1} \sim 1/\alpha N = 25 \text{ сек}$.

Исследования ионного состава нижней ионосферы показали наличие в E -области металлических ионов с концентрацией порядка 10^4 см^{-3} [8, 13, 14]. Масс-спектрометрические измерения ионного состава слоя E_s показали, что спорадические слои также состоят из этих ионов [15]. Все эти эксперименты наводят на мысль о важной роли ионов метеорного происхождения в образовании слоя E_s .

В работах [16, 17] рассматривалось влияние ветровых сдвигов на перераспределение ионизации для модели, состоящей из двух ионов с различными временами жизни, но только на уровнях, где $U_y(z) = 0$ (предполагалось, что на этих уровнях ионизация принимает экстремальные значения), и без учета процесса диффузии. Представляет интерес рассмотрение теории ветровых сдвигов применительно к двухкомпонентной плазме с учетом процесса диффузии, который будет оказывать существенное влияние на перераспределение ионов с большим временем жизни.

Исходными являются уравнения движения для заряженных частиц:

$$mN_e \frac{\partial \mathbf{U}_e}{\partial t} + mN_e (\mathbf{U}_e \nabla) \mathbf{U}_e + mN_e \mathbf{v}_e (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}) = -\kappa T \nabla N_e - e N_e \mathbf{E} - m \omega_H N_e [\mathbf{U}_e \mathbf{h}], \quad (6)$$

$$M_1 N_{i1} \frac{\partial \mathbf{U}_{i1}}{\partial t} + M_1 N_{i1} (\mathbf{U}_{i1} \nabla) \mathbf{U}_{i1} + M_1 N_{i1} \mathbf{v}_{i1} (\mathbf{U}_{i1} - \mathbf{U}) = -\kappa T \nabla N_{i1} + e N_{i1} \mathbf{E} + M_1 \Omega_{H1} N_{i1} [\mathbf{U}_{i1} \mathbf{h}], \quad (7)$$

$$M_2 N_{i2} \frac{\partial \mathbf{U}_{i2}}{\partial t} + M_2 N_{i2} (\mathbf{U}_{i2} \nabla) \mathbf{U}_{i2} + M_2 N_{i2} \mathbf{v}_{i2} (\mathbf{U}_{i2} - \mathbf{U}) = -\kappa T \nabla N_{i2} + e N_{i2} \mathbf{E} + M_2 \Omega_{H2} N_{i2} [\mathbf{U}_{i2} \mathbf{h}] \quad (8)$$

и уравнения непрерывности для стационарного случая:

$$\operatorname{div}(N_e \mathbf{U}_e) = J_e - (\alpha_{i1} N_{i1} + \alpha_{i2} N_{i2}) N_e; \quad (9)$$

$$\operatorname{div}(N_{i1} \mathbf{U}_{i1}) = J_{i1} - \alpha_{i1} N_{i1} N_e; \quad (10)$$

$$\operatorname{div}(N_{i2} \mathbf{U}_{i2}) = J_{i2} - \alpha_{i2} N_{i2} N_e. \quad (11)$$

Здесь индексы «1» и «2» относятся к разным сортам положительных ионов, κ — постоянная Больцмана, T — температура электронов (ионов), \mathbf{h} — единичный вектор в направлении магнитного поля Земли \mathbf{H}_0 , \mathbf{E} — внутреннее электрическое поле.

Используя ряд типичных предположений [4—6] для E -области на средних широтах, из уравнений (6) — (8) можно выразить скорости

U_e , U_{i1} , U_{i2} и, подставляя их в (9)–(11), получить следующие выражения для концентраций электронов и ионов:

$$\frac{1}{\beta_e} \sin \alpha_1 \frac{d(N_e U_y)}{dz} - \frac{\gamma T}{m \omega_H} \beta_e \cos^2 \alpha_1 \frac{d^2 N_e}{dz^2} - J_e + \\ + (\alpha_{i1} N_{i1} + \alpha_{i2} N_{i2}) N_e = \frac{e}{m \omega_H} \beta_e \cos^2 \alpha_1 \frac{d(N_e E_z)}{dz}; \quad (12)$$

$$-\beta_i \sin \alpha_1 \frac{d(N_{i1} U_y)}{dz} - \frac{\gamma T}{M \Omega_H} \beta_i \frac{d^2 N_{i1}}{dz^2} - J_{i1} + \alpha_{i1} N_{i1} N_e = \\ = -\frac{e}{M \Omega_H} \beta_i \frac{d(N_{i1} E_z)}{dz}; \\ -\beta_i \sin \alpha_1 \frac{d(N_{i2} U_y)}{dz} - \frac{\gamma T}{M \Omega_H} \beta_i \frac{d^2 N_{i2}}{dz^2} - J_{i2} + \alpha_{i2} N_{i2} N_e = \\ = -\frac{e}{M \Omega_H} \beta_i \frac{d(N_{i2} E_z)}{dz}. \quad (14)$$

При выводе (12)–(14) использовалось также, что скорость вертикального дрейфа, вызываемого нейтральным горизонтальным ветром $U_y(z)$, не зависит от состава ионосферы [17], т. е. $\beta_{i1} = \Omega_{H1}/v_{i1} \approx \beta_{i2} = \Omega_{H2}/v_{i2} = \beta_i$. Из (9)–(11) следует, что $\operatorname{div} \mathbf{j} = e \operatorname{div} \{N_e \mathbf{U}_e - N_{i1} \mathbf{U}_{i1} - N_{i2} \mathbf{U}_{i2}\} = 0$. Из этого условия для одномерного случая можно определить внутреннее электрическое поле и, подставляя его в (12)–(14), получить выражения для концентрации обоих типов ионов:

$$\frac{D_a}{2} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{dN_{i1}}{dz} + \frac{N_{i1}}{(N_{i1} + N_{i2})} \frac{d}{dz} (N_{i1} + N_{i2}) \right\} + \\ + \beta_i \sin \alpha_1 \frac{d(N_{i1} U_y)}{dz} + J_{i1} - \alpha_{i1} (N_{i1} + N_{i2}) N_{i1} = 0; \\ \frac{D_a}{2} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{dN_{i2}}{dz} + \frac{N_{i2}}{(N_{i1} + N_{i2})} \frac{d}{dz} (N_{i1} + N_{i2}) \right\} + \\ + \beta_i \sin \alpha_1 \frac{d(N_{i2} U_y)}{dz} + J_{i2} - \alpha_{i2} (N_{i1} + N_{i2}) N_{i2} = 0. \quad (16)$$

При выводе (15), (16) использовалось, кроме того, условие квазинейтральности плазмы $N_e = N_{i1} + N_{i2}$. Полагаем, что при отсутствии ветровых сдвигов ($U_y = 0$) распределение концентрации электронов и ионов однородно. В этом случае $J_{i1} = \alpha_{i1} N_{i1}^0 N_e^0$ и $J_{i2} = \alpha_{i2} N_{i2}^0 N_e^0$ (N_e^0 , N_{i1}^0 и N_{i2}^0 — однородные невозмущенные значения концентраций электронов и ионов). Будем относить индекс «1» к молекулярным ионам NO^+ и O_2^+ , а индекс «2» — к металлическим ионам, имеющим малый коэффициент рекомбинации $\alpha_{i2} = 10^{-12} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ [18]. Таким образом, $\alpha_{i1} \gg \alpha_{i2}$.

Оценка слагаемых в (16) показывает, что $\left| \beta_i \sin \alpha_1 \frac{d(N_{i2} U_y)}{dz} \right| \gg \alpha_{i2} N_{i2} N_e$, если время жизни металлических ионов $\tau_{i2} \sim (\alpha_{i2} N_e)^{-1}$

много больше времени перераспределения ионов $\tau_s \approx \left(\beta_i \sin \alpha_1 \left| \frac{dU_y}{dz} \right| \right)^{-1}$.

Последнее хорошо выполняется для атомных ионов, так как из экспериментальных данных следует, что всегда в слое E_s , $N_e \text{ max} \ll 10^9 \text{ см}^{-3}$. Таким образом, процесс перераспределения металлических ионов значительно более эффективен, чем процесс рекомбинации этого сорта ионов. Проведенные оценки дают основание не учитывать рекомбинацию и ионизацию в выражении для концентрации ионов метеорного происхождения. Как отмечалось выше, для молекулярных ионов при $\alpha_{ii} \geq 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$ процесс рекомбинации идет быстрее процесса перераспределения под действием ветровых сдвигов, что дает основание не учитывать в (15) слагаемые, ответственные за диффузию и перераспределение из-за ветра нейтральных частиц.

Тогда из (15), (16) с учетом условия квазинейтральности можно определить профили концентраций электронов и ионов для синусоидальной модели ветра $U_y(z) = U_0 \sin(2\pi z/\lambda)$ (U_0 и λ — амплитуда и длина волны ветровой структуры):

$$\begin{aligned} N_{ii} &= \sqrt{N_{ii}^0 N_e^0} \left\{ 1 + R \exp \left[\frac{\beta_i \sin \alpha_1 U_0 \lambda}{\pi D_a} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right] \right\}^{-1/2}, \\ N_{i2} &= \sqrt{N_{ii}^0 N_e^0} R \exp \left[\frac{\beta_i \sin \alpha_1 U_0 \lambda}{\pi D_a} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right] \times \\ &\quad \times \left\{ 1 + R \exp \left[\frac{\beta_i \sin \alpha_1 U_0 \lambda}{\pi D_a} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right] \right\}^{-1/2}, \\ N_e &= \sqrt{N_{ii}^0 N_e^0} \left\{ 1 + R \exp \left[\frac{\beta_i \sin \alpha_1 U_0 \lambda}{\pi D_a} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} z \right) \right] \right\}^{-1/2}, \end{aligned}$$

где R — постоянная интегрирования. Поскольку в процессе перераспределения металлических ионов рекомбинация и ионизация не играют определяющей роли, постоянную R можно находить из условия сохранения атомных метеорных ионов в столбе $\Delta z = \lambda$:

$$\int_0^\lambda N_{i2}(z) dz = \int_0^\lambda N_{i2}^0 dz. \quad (17)$$

В этом случае $R \approx (N_{i2}^0)^2 / N_{ii}^0 N_e^0 I_0(\delta) \approx [(N_{i2}^0)^2 / N_{ii}^0 N_e^0] 2\pi \delta e^{-2\delta}$, так как $\delta = \beta_i \sin \alpha_1 U_0 \lambda / 2\pi D_a$ в условиях области E ионосферы многое больше единицы*. Тогда:

$$N_{ii} = N_{ii}^0 N_e^0 \left\{ N_{ii}^0 N_e^0 + (N_{i2}^0)^2 2\pi \delta \exp \left[2\delta \left(\cos \frac{2\pi}{\lambda} z - 1 \right) \right] \right\}^{-1/2}; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} N_{i2} &= (N_{i2}^0)^2 2\pi \delta \exp \left[2\delta \left(\cos \frac{2\pi}{\lambda} z - 1 \right) \right] \left\{ N_{ii}^0 N_e^0 + (N_{i2}^0)^2 2\pi \delta \times \right. \\ &\quad \times \left. \exp \left[2\delta \left(\cos \frac{2\pi}{\lambda} z - 1 \right) \right] \right\}^{-1/2}; \end{aligned} \quad (19)$$

* Значение эффективного числа соударений ν_i для тяжелых ионов (Fe^+ , Ca^+ , Mg^+) с молекулами O_2 и N_2 точно не известно. Экспериментально было получено значение эффективного диаметра $d_i \approx 9 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ для соударений ионов K^+ и Na^+ с молекулами кислорода [21]. Это значение отличается от $d_i = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ для соударений ионов и атомов воздуха в ионосфере. Следовательно, для данных атомных ионов D_a будет несколько меньше коэффициента амбиполярной диффузии молекулярных ионов NO^+ и O_2^+ .

$$N_e = \left\{ N_{i1}^0 N_e^0 + (N_{i2}^0)^2 2\pi\delta \exp \left[2\delta \left(\cos \frac{2\pi}{\lambda} z - 1 \right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (20)$$

Когда $N_{i2}^0 = 0$, то однородное распределение ионизации остается невозмущенным, т. е. $N_e = N_{i1} = N_0$. Если же $N_{i1}^0 = 0$, то выражения (19), (20) переходят в известное распределение ионизации под действием ветровых сдвигов для теории с одним сортом ионов [2-4].

Из (18) — (20) следует, что максимумы концентрации металлических ионов и электронов $N_{i2 \max} \approx N_{e \max} \approx N_{i2}^0 \sqrt{2\pi\delta}$ достигаются на уровнях $z = n\lambda$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). На этих уровнях наблюдается минимум концентрации молекулярных ионов $N_{i1}(n\lambda) \approx (N_{i1}^0 N_e^0 / N_{i2}^0) (2\pi\delta)^{-1/2} \ll \gg N_{i1}^0$. Данный результат соответствует полученным ранее [16, 17]. На уровнях $z = (\lambda/2)(2n + 1)$ достигается минимум концентрации металлических ионов $N_{i2 \min} \approx (N_{i2}^0)^2 (N_{i1}^0 N_e^0)^{-1/2} 2\pi\delta \exp(-4\delta) \ll N_{i2}^0$. Электронная же концентрация на этих уровнях остается невозмущенной, т. е. $N_e(\lambda/2)(2n + 1) \approx N_e^0$. Это связано с тем, что под действием ветра перераспределяются и формируют слои повышенной концентрации металлические ионы, уменьшение концентрации которых на уровнях $z = (\lambda/2)(2n + 1)$ заметно не изменяет электронную концентрацию на этих уровнях, так как равновесное значение N_e^0 на порядок больше равновесного значения концентрации металлических ионов. Таким образом, в данном случае формируются слои только с повышенными значениями электронной концентрации, а слои с пониженными значениями N_e , что могло иметь место в теории с одним сортом ионов, не формируются.

Расчеты показывают, что в максимуме электронной концентрации значение величины $N_{e \max}/N_e^0$ находится в диапазоне от 2 до 5*, что соответствует ракетным измерениям [19, 20]. Наблюдаемые же иногда большие значения критических частот $f_0 E_s$ могут быть объяснены рассеянием радиоволн на неоднородностях в слое E_s [19]. Далее, так как нет особых причин для сильного изменения концентрации ионов метеорного происхождения в области E со временем суток, то такая теория с двумя сортами положительных ионов дает возможность объяснить появление слоя E_s ночью без привлечения дополнительных источников ионизации.

Таким образом, для случая, когда характерное время τ_s формирования спорадического слоя E меньше времени жизни τ_{i1} молекулярных ионов, повышенные слои ионизации могут формироваться из молекулярных ионов NO^+ и O_2^+ , преобладающих в E -области. Если же $\tau_s \gg \tau_{i1}$, то слой E_s образуется из металлических ионов метеорного происхождения, равновесная концентрация которых меньше равновесной невозмущенной концентрации молекулярных ионов $N_{i1}^0 \approx N_e^0 \gg N_{i2}^0$. В первом случае максимум ионизации в слое E_s контролируется процессом диффузии и рекомбинации, во втором же, в основном, — только процессом диффузии.

Отметим, что если использовать для нахождения R условие $\int_0^\lambda N_{i2} N_e dz = \int_0^\lambda N_{i2}^0 N_e^0 dz$, которое отражает, хотя и слабо, влияние рекомбинации металлических ионов [17], то получим выражение

* Концентрация металлических ионов в E_s может быть несколько выше, чем $N_{i2}^0 \sqrt{2\pi\delta}$, а концентрация молекулярных ионов ниже, чем получаемая из (18), из-за ионно-обменных реакций типа $\text{Na} + \text{NO}^+ \rightarrow \text{Na}^+ + \text{NO}$, $\text{Na} + \text{O}_2^+ \rightarrow \text{Na}^+ + \text{O}_2$ и т. д., идущих со скоростью $\gamma = 10^{-10} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}$.

$$N_e = \sqrt{N_e^0} \left\{ N_{i1}^0 + N_{i2}^0 \sqrt{4\pi\delta} \exp \left[2\delta \left(\cos \frac{2\pi}{\lambda} z - 1 \right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (21)$$

Значения $N_{e,\max}$, определенные из (21), сильно не отличаются от полученных из (20).

Автор выражает благодарность Б. Н. Гершману за ценные обсуждения и просмотр рукописи, а также З. Н. Кротовой за проведение счета на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. D. Whitehead, Ionospheric Sporadic E, Pergamon Press, 1962, p. 276.
2. W. I. Axford, J. Geophys. Res., 68, № 3, 769 (1963).
3. W. I. Axford, D. M. Cunnold, Radio Science, 1, № 2, 191 (1966).
4. Б. Н. Гершман, Ю. А. Игнатьев, Геомагнетизм и аэрономия, 9, № 4, 630 (1969).
5. Ю. А. Игнатьев, Геомагнетизм и аэрономия, 9, № 6, 1096 (1969).
6. Ю. А. Игнатьев, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 11, № 9, 1332 (1968).
7. W. I. Axford, D. M. Cunnold, L. J. Gleeson, Planet. Space Science, 14, № 9, 909 (1966).
8. R. S. Narcisi, A. D. Bailey, L. D. Lucca, Space Res., 7/1, 123 (1967).
9. S. A. Bowhill, J. Atmosph. Terr. Phys., 20, 19 (1960).
10. D. R. Bates, M. J. Nicolle, J. Atmosph. Terr. Phys., 18, 65 (1960).
11. N. A. Biondi, Symposium on laboratory measurement of aeronomical interest, Toronto, Canada, 1968, p. 2.
12. Г. С. Иванов-Холодный, Г. М. Никольский, Солнце и ионосфера, изд. Наука, М., 1969.
13. В. Г. Истомин, ДАН СССР, 137, № 5, 1102 (1961).
14. C. R. Smith, H. C. Brinton, M. W. Pharo, H. A. Taylor, J. Geophys. Res., 72, № 9, 2357 (1967).
15. J. M. Yong, C. J. Johnson, J. C. Holmes, J. Geophys. Res., 72, № 5, 1473 (1967).
16. J. D. Whitehead, Radio Science, 1, № 2, 198 (1966).
17. L. Cucuet, Radio Science, 1, № 9, 1101 (1966).
18. H. R. Lehman, C. U. Wagner, J. Atmosph. Terr. Phys., 28, 617 (1966).
19. C. A. Reddy, J. Geophys. Res., 73, № 17, 5627 (1968).
20. L. G. Smith, Radio Science, 1, № 2, 178 (1966).
21. C. Ramsauer, O. Beeck, Ann. Phys., 87, 1 (1928).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
25 февраля 1970 г.

CALCULATION OF IONIZATION DISTRIBUTION IN THE MIDDLE LATITUDE SPORADIC E-REGION

Yu. A. Ignat'ev

A numerical solution is derived for the equation of the electron density variation when the velocity shifts occur in the neutral particle wind. The characteristic times of the E_s -region formation are determined. The theory of wind shifts has been considered in application to the ionospheric plasma consisting of ions with different characteristic life times. The conditions have been obtained under which the E_s -region may be formed by molecular or metal ions.

УДК 538.56

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ПЕСЧАНОГО И ГЛИНИСТОГО ГРУНТОВ В ДИАПАЗОНЕ САНТИМЕТРОВЫХ, ДЕЦИМЕТРОВЫХ И МЕТРОВЫХ ВОЛН

Ю. И. Лещанский, Г. Н. Лебедева, В. Д. Шумилин

Методом короткого замыкания с помощью измерительных волноводов измерены электрические параметры песчаного и глинистого грунтов в диапазоне 0,8—226 см. Получены зависимости электрической проницаемости и затухания радиоволн от влажности грунта и частоты радиоколебаний. Показано, что во влажном песчаном грунте на всех, исследованных длинах волн коэффициент затухания определяется в основном поглощением радиоволн молекулами воды. Во влажном глинистом грунте коэффициент затухания на сантиметровых волнах в основном определяется поглощением радиоволн молекулами воды, а на дециметровых и метровых волнах поглощением радиоволн ионами глинистого грунта. Приведено сравнение с данными, имеющимися в литературе.

Электрические параметры грунтов в диапазоне СВЧ изучены недостаточно. Имеющиеся в литературе данные [1—3], полученные различными методами для грунтов различного состава, не позволяют иметь детальное представление о зависимости электрических свойств грунтов от влажности и частоты ([1], стр. 54).

В связи с этим было проведено единым методом исследование электрических параметров песка и глины на радиоволнах длиной 3,3; 10; 60 и 80 см [4]. Однако результаты, приведенные в работе [4], носят скорее качественный, чем количественный характер в связи с тем, что исходное трансцендентное уравнение ([5], [6], стр. 239) решалось методом последовательных приближений, и для упрощения вычислений расчет ограничивался лишь первым приближением. Было замечено, что при больших значениях влажности такой метод приводил к весьма значительным ошибкам. Поэтому в работе [4] приведены данные, относящиеся к влажности грунта, не превышающей 10%. Кроме того, недостатком работы [4] являлся также слишком ограниченный диапазон волн.

В данной работе расчет электрических параметров проводился путем графического решения исходного трансцендентного уравнения, благодаря чему удалось достаточно точно определить эти параметры в значительно большем диапазоне влажностей, чем в работе [4].

Как следует из работы [7], дисперсия радиоволн в грунте проявляется наиболее сильно в диапазоне метровых—миллиметровых радиоволн. В связи с этим в данной работе приведены значения электрических параметров влажного песчаного и глинистого грунтов в диапазоне радиоволн от 0,8 до 226 см. Измерения на волнах короче 0,8 см не проводились, так как на этих волнах частицы грунта становятся соизмеримыми с длиной волн в грунте, и поэтому его электрические параметры начинают существенно зависеть от рассеяния радиоволн на частицах.

Практически разница в измерениях параметров песчаного и глинистого грунтов связана с тем, что пластичность влажного песчаного

грунта весьма мала, а у глинистого грунта имеет место значительная пластичность, которая к тому же очень сильно зависит от влажности. Если в измерительном волноводе, заполненном песчаным грунтом, в большинстве случаев удается получить плотную и однородную набивку, то достаточно плотную набивку для глинистого грунта сравнительно легко получить только при влажности выше 15%, а при влажности ниже 10% получение такой набивки становится весьма затруднительным. Поэтому для глинистого грунта на каждой длине волны наиболее точными следует считать результаты, относящиеся к влажности порядка 15—20%.

1. МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Измерения электрических параметров проводились методом короткого замыкания [5, 6], в соответствии с которым в измерительный волновод, замкнутый на конце, помещался образец исследуемого грунта. В этом волноводе с помощью измерительной линии измерялись коэффициент бегущей волны и положение минимума напряженности электрического поля по отношению к поверхности образца.

На волнах $\lambda_0 = 0,816; 1,9; 3,17; 9,975 \text{ см}$, где λ_0 — длина волны в свободном пространстве, в качестве измерительных волноводов были использованы короткозамкнутые отрезки стандартных прямоугольных волноводов, а измерения проводились с помощью волноводных измерительных линий соответствующих диапазонов волн. На волнах $\lambda_0 = 30, 90, 226 \text{ см}$ в качестве измерительного волновода использовался короткозамкнутый отрезок коаксиальной линии с волновым сопротивлением 75 ом , а измерения проводились с помощью коаксиальных измерительных линий с тем же волновым сопротивлением.

Для устранения неоднозначности при решении трансцендентного уравнения [5, 6] измерения на каждой длине волны проводились для образцов грунта трех толщин

$$d = 0,1\lambda_b, \quad d = 0,15\lambda_b \quad \text{и} \quad d = 0,2\lambda_b,$$

где λ_b — длина волны в незаполненном измерительном волноводе.

По результатам измерений вычислялись относительная электрическая проницаемость ϵ' и проводимость σ исследуемого грунта. Далее определялся в неперах на метр коэффициент погонного затухания плоской однородной волны в неограниченном пространстве, заполненном исследуемой средой, по формуле [1], стр. 51)

$$q = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{(\epsilon')^2 + (60\lambda_0\sigma)^2} - \epsilon']}.$$

Так как практически коэффициент затухания удобнее выражать в децибелах на метр, то

$$Q (\text{дБ} \cdot \text{м}^{-1}) \approx 8,7 q.$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПЕСЧАННОГО И ГЛИНИСТОГО ГРУНТОВ

Исследование подвергались песчаный грунт с содержанием физической глины [8], стр. 32) менее нескольких процентов с объемной плотностью $1,85 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ и суммой поглощенных (обменных) оснований кальция и магния равной 1,0—1,5 миллиграмм-эквивалентов на 100 г абсолютно сухого грунта, а также глинистый грунт с содержанием песка менее 20% с объемной плотностью $1,67 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ и суммой поглощенных оснований кальция и магния равной 24,8—25,8 миллиграмм-

эквивалентов на 100 г абсолютно сухого грунта. Измерения проводились при температурах 18—20°С.

Полученные результаты представлены на рис. 1, 2 отдельно для каждого диапазона волн в виде зависимостей от влажности относительной электрической проницаемости грунта ϵ' и коэффициента затухания радиоволны в грунте Q в децибелах на метр. На этих рисунках нанесены значения влажности p в процентах, определяемые через вес влажного P_b и сухого P_c грунта по формуле

$$p(\%) = \frac{P_b - P_c}{P_c} 100\%.$$

На рис. 3 приведены частотные зависимости коэффициента затухания радиоволны в песчаном и глинистом грунтах для значений влажности, составляющих 3, 6, 9 и 15%

На всех рисунках экспериментальные точки и построенные по ним кривые показаны, соответственно, для песчаного грунта крестиками и сплошными линиями, а для глинистого грунта точками и пунктирными линиями.

Из рис. 1, 2 видно, что при малой влажности значения относительной электрической проницаемости песчаного и глинистого грунтов на всех длинах волн приближаются к 3—4.

С ростом влажности электрическая проницаемость грунтов увеличивается.

При одной и той же влажности значение относительной электрической проницаемости грунтов сохраняется практически постоянным с уменьшением длины волны от 226 до 30 см включительно, и при влажности 15% оно равняется 14 для песчаного грунта и 15 для глинистого. При дальнейшем укорочении длины волны относительная электрическая проницаемость начинает заметно уменьшаться и в диапазоне 0,8 см при 15% влажности имеет значение 9 как для песчаного, так и для глинистого грунта. Если сравнивать электрическую проницаемость глинистого и песчаного грунтов при одинаковой влажности, то окажется, что во всем исследованном диапазоне радиоволн электрическая проницаемость глинистого грунта приблизительно равна или несколько выше электрической проницаемости песчаного грунта.

Определение коэффициента затухания радиоволны методом короткого замыкания становится затруднительным при влажности грунта менее 3—4%. Поэтому при таких малых влажностях было проведено сравнительно небольшое число измерений.

При влажности менее 15% затухание радиоволн как в песчаном, так и в глинистом грунте приблизительно пропорционально влажности на всех длинах волн.

Большой разброс экспериментальных значений ϵ' и $Q \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$ для песчаного грунта и отклонение экспериментальных значений $Q \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$ от штрих-пунктирной наклонной прямой для глинистого грунта на волне 0,816 см при влажности менее 10% связаны с неизбежным подсыханием весьма малых по объему исследуемых в этом диапазоне волн образцов грунта. Подсыхание имело место непосредственно при набивке грунта в измерительный волновод, а также во время проведения самих измерений.

Из кривых, приведенных на рис. 3 сплошными линиями, видно, что коэффициент затухания во влажном песчаном грунте при изменении длины волны в пределах исследованного диапазона волн меняется приблизительно на три порядка и при 15% влажности составляет $6 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$ на длине волны 226 см и $5600 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$ на длине волны 0,816 см. При этом в зависимости от длины волны ход кривых, приве-

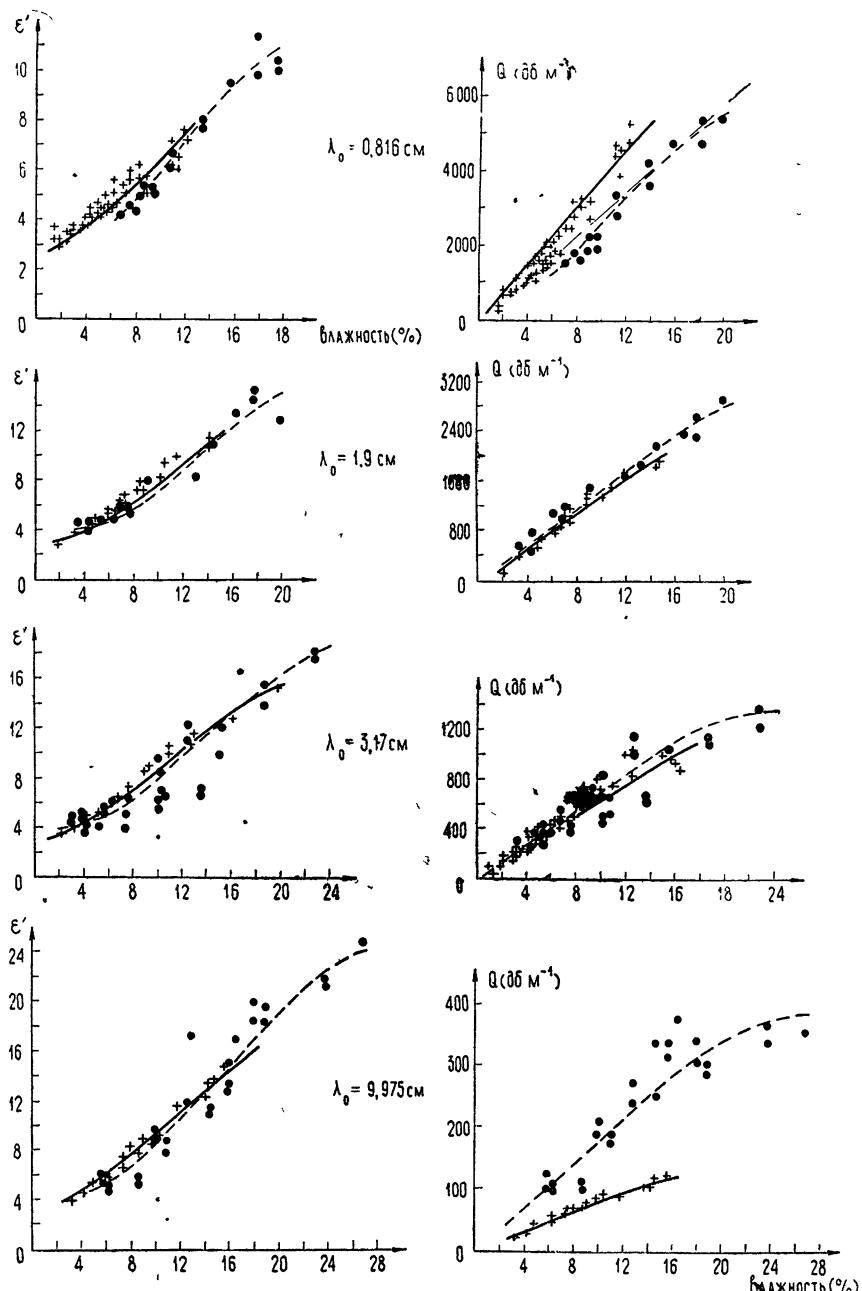


Рис. 1. Электрические параметры песчаного и глинистого грунтов на санти-метровых волнах.

денных для песчаного грунта, в целом соответствует ходу аналогичной кривой, приведенной в работе [7] и относящейся к легкосуглинистому ([8], стр. 32) грунту. Основное различие заключается в том, что при одинаковых значениях влажности на одних и тех же длинах волн затухание в песчаном грунте несколько меньше, чем в легкосуглинистом.

Как было показано в работе [7], такой ход кривых затухания в зависимости от длины волны находится в полном соответствии с ха-

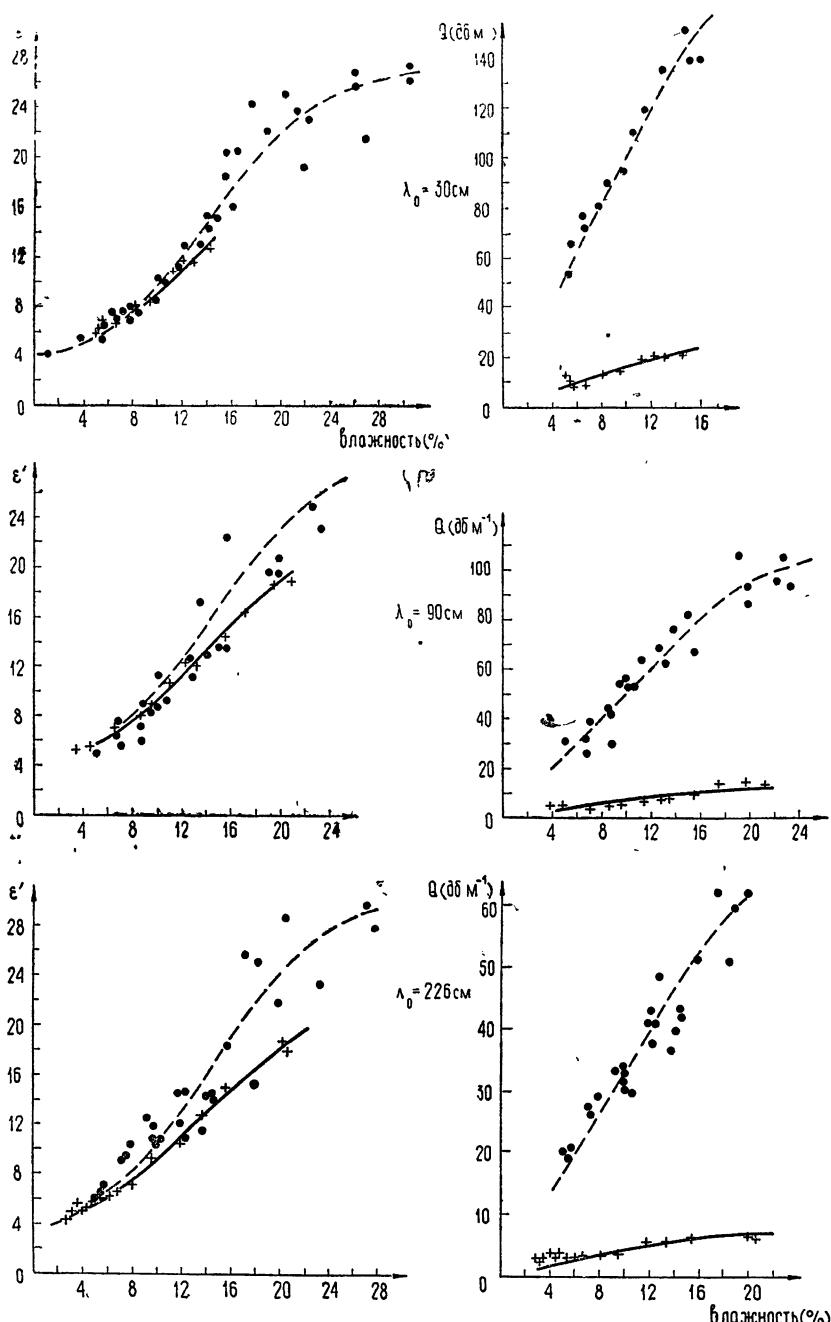


Рис. 2. Электрические параметры песчаного и глинистого грунтов на дециметровых и метровых волнах.

рактером зависимости от длины волны поглощения радиоволн молекулами воды. Наряду с наличием пропорциональности между затуханием радиоволн и влажностью грунта это показывает, что во всем исследованном диапазоне волн коэффициент затухания во влажном песчаном грунте в основном определяется поглощением радиоволн молекулами воды.

Из кривых, приведенных на рис. 3 пунктирными линиями, видно, что коэффициент затухания во влажном глинистом грунте при изменении длины волны в пределах исследованного диапазона волн меняется приблизительно на два порядка и при влажности 15% составляет $48 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$ на волне 226 см и $4500 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$ на волне 0,816 см.

В диапазоне метровых — сантиметровых радиоволн коэффициент затухания в глинистом грунте в целом несколько выше, чем в песчаном при той же влажности, и это различие становится заметнее на более длинных волнах. Так, если на волне равной 3,17 см при влажности 15% коэффициент затухания для песчаного грунта согласно рис. 3 составляет $940 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$, то для глинистого грунта на той же длине волны и при той же влажности коэффициент затухания составляет $1050 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$. Таким образом, для волны 3,17 см относительное различие между значениями коэффициента затухания для песчаного и глинистого грунтов невелико. В то же время при влажности 15% на волне 30 см коэффициент затухания для песчаного грунта составляет $22 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$, а для глинистого $150 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$, т. е. в 7 раз больше. Аналогично, сравнивая между собой приведенные выше значения коэффициента затухания для песчаного и глинистого грунтов, измеренные на волне 226 см при влажности 15%, видим, что на этой длине волны коэффициент затухания для глинистого грунта в 8 раз выше, чем для песчаного.

Незначительное различие между кривыми для песчаного и глинистого грунтов в сантиметровом диапазоне радиоволн (рис. 3) и соответствие этих кривых в этом диапазоне кривой, приведенной в работе [7], показывает, что не только для влажного песчаного, но и для влажного глинистого грунта зависимость коэффициента затухания от длины волны в сантиметровом диапазоне радиоволн находится в полном соответствии с зависимостью от длины волны поглощения радиоволн молекулами воды.

Однако во всяком влажном грунте радиоволны поглощаются не только молекулами воды, но и различными ионами поглощающего (обменного) комплекса ([8], стр. 50) микрочастиц минералов, составляющих основу данного грунта, а также ионами грунтового раствора ([8], стр. 48). Обменный комплекс песчаных грунтов значительно беднее, чем глинистых. В частности, сумма поглощенных оснований кальция и магния у песчаного грунта, исследованного в данной работе, в несколько раз меньше, чем у легкосуглинистого грунта [7], и приблизительно на порядок меньше, чем у исследованного в данной работе глинистого грунта.

В связи с этим затухание радиоволн во влажном глинистом грунте должно быть значительно выше, чем в песчаном при той же влажности

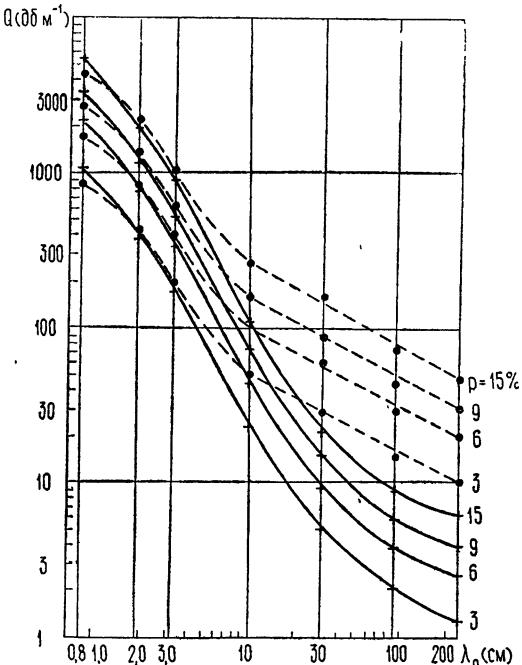


Рис. 3. Зависимость затухания радиоволн в песчаном и глинистом грунтах от длины волны.

во всем диапазоне радиочастот. Но на сантиметровых волнах преобладает поглощение радиоволн молекулами воды [7], вследствие чего на этих волнах значения коэффициента затухания в песчаном и глинистом грунтах имеют одинаковый порядок величин [4]. А на дециметровых и метровых волнах, где поглощение радиоволн молекулами воды уменьшается, различие между коэффициентами поглощения песчаного и глинистого грунтов становится весьма значительным.

Сравнивая результаты данного исследования с аналогичными результатами, приведенными в [4] и относящимися к тем же самым песчаному и глинистому грунтам, следует отметить, что наблюдается полное сходство в ходе всех кривых. Существенное различие в количественных результатах объясняется, как это было отмечено выше, приближенным характером вычислений, выполненных в [4].

В работе [2] приводятся результаты измерений для сухого и влажного «песчаного суглинка» ([1], стр. 52), или легкосуглинистого ([3], стр. 32) грунта на волне 9 см. Исходя из этих результатов, имеем для сухого легкосуглинистого грунта относительную электрическую проницаемость равную 2 и затухание $36 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$, а для очень влажного легкосуглинистого грунта относительную электрическую проницаемость равную 24 и затухание $220 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$.

Так как легкосуглинистый грунт более чем на две трети состоит из песка ([8], стр. 32), то правильнее эти данные сравнивать с нашими данными, полученными для песчаного грунта. Если считать, что сухой грунт в полевых условиях, имевших место в работе [2], содержит до 2% влаги, то для этой влажности согласно кривым рис. 1 на длине волны равной 9,975 см относительная электрическая проницаемость песчаного грунта составляет приблизительно 3 и затухание около $18 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$. Для песчаного грунта при влажности порядка 22% по нашим данным относительная электрическая проницаемость составляет приблизительно 19 и затухание $140 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$.

Таким образом, в связи с соответственно меньшим содержанием глинистых частиц песчаный грунт, исследованный нами, имеет заниженные значения коэффициента затухания по сравнению с грунтом, исследованным в работе [2], как при очень малой, так и при очень большой влажности.

В работе [3] приведены результаты измерения электрических параметров песка на волне 3,2 см. По данным этой работы для сухого песка относительная электрическая проницаемость равна 3,2 и затухание $87 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$, а при 6% влажности относительная электрическая проницаемость равна 8,1 и затухание $760 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$.

Из кривых рис. 1 для волны 3,17 см имеем при влажности порядка 1% относительную электрическую проницаемость равную приблизительно 3 и затухание около $70 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$. Для влажного грунта по тем же графикам величине относительной электрической проницаемости равной 8,1 соответствует затухание $680 \text{ дБ} \cdot \text{м}^{-1}$.

Учитывая, что плотность и поглотительная способность ([8], стр. 49) грунтов, исследованных в [2, 3], никак не охарактеризованы, соответствие наших результатов результатам, полученным в этих работах, можно считать удовлетворительным.

1) В диапазоне радиоволн от 0,8 до 226 см относительная электрическая проницаемость сухого песчаного и глинистого грунтов составляет 3—4.

2) Электрическая проницаемость как песчаного, так и глинистого грунтов растет по мере увеличения влажности.

3) Электрическая проницаемость влажного песчаного и влажного

глинистого грунтов практически постоянна в диапазоне от 226 до 30 см и заметно снижается в диапазоне от 30 до 0,8 см.

4) Во всем исследованном диапазоне радиоволн при одинаковой влажности электрическая проницаемость глинистого грунта приблизительно равна или несколько выше электрической проницаемости песчаного грунта.

5) При влажности менее 15% затухание радиоволн как в песчаном, так и в глинистом грунте примерно пропорционально влажности.

6) При увеличении длины волн от 0,8 до 226 см затухание радиоволн во влажном глинистом грунте уменьшается приблизительно на два порядка, а во влажном песчаном грунте приблизительно на три порядка.

7) При одинаковой влажности в диапазоне метровых—сантиметровых радиоволн затухание в глинистом грунте в целом выше, чем в песчаном, и это различие особенно существенно в диапазоне метровых радиоволн.

Таким образом, во всем исследованном диапазоне радиоволн электрическая проницаемость и коэффициент затухания радиоволн как для песчаного, так и для глинистого грунтов возрастают по мере увеличения влажности. При этом во влажном песчаном грунте на всех исследованных длинах волн, а во влажном глинистом грунте на сантиметровых волнах коэффициент затухания в основном определяется поглощением радиоволн молекулами воды. В то же время затухание дециметровых и метровых волн во влажном глинистом грунте намного выше тех значений, которые можно отнести за счет поглощения радиоволн молекулами воды, и объясняется поглощением радиоволн ионами обменного комплекса глинистого грунта.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Аренберг, Распространение дециметровых и сантиметровых волн, изд. Сов. радио, М., 1957.
2. L. H. Ford, R. Oliver, Proc. Phys. Soc., 58, part 3, № 327, 265 (1946).
3. A. W. Stratton, C. W. Tolbert, J. Franklin Institute, 246, № 1, 13 (1948).
4. Ю. И. Лещанский, В. М. Ананских, Г. Н. Лебедева, Тр. Московского физико-технического ин-та, Оборонгиз, вып. 10, 49 (1962).
5. S. Roberts, H. von Hippel, J. Appl. Phys., 17, № 7, 610 (1946).
6. Измерения на сверхвысоких частотах, под ред В. Б. Штейншлейгера, изд. Сов. радио, М., 1952.
7. Ю. И. Лещанский, Г. Н. Лебедева, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 2, 205 (1968).
8. Справочник агронома по удобрениям, под ред А. С. Чернавина и С. С. Ярусова, Сельхозгиз, М., 1948.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
3 июля 1969 г.,
после доработки и объединения
8 июня 1970 г.

ELECTRICAL PARAMETERS OF SANDY AND LOAMY GROUNDS IN THE OF CENTIMETER, DECI METER AND METER WAVE RANGES

Yu. I. Leschansky, G. N. Lebedeva, V. D. Shumilin

Electrical parameters of sandy and loamy grounds in the range of 0,8—226 cm were measured by the short circuit method by means of measuring waveguides. The dependences of electrical permittivity and the radio wave absorption upon the ground humidity and frequency of radio oscillations are obtained. It is shown that in wet sandy ground the absorption coefficient is generally determined by absorption of the radio waves by water molecules at all wavelengths investigated. In wet loamy ground at centimeter waves the absorption coefficient is mainly determined by absorbing the radio waves by water molecules, at decimeter and meter waves the radio wave absorption is determined by absorbing the radio waves by loamy ground ions. A comparison with the data available in literature is given.

УДК 621.378.32

О ВЛИЯНИИ ПРОСВЕТЛЯЮЩЕГОСЯ ФИЛЬТРА НА ПОПЕРЕЧНУЮ СТРУКТУРУ ИЗЛУЧЕНИЯ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ОКГ

C. Н. Власов, В. И. Таланов, А. И. Хижняк

Излагаются результаты исследования влияния просветляющегося фильтра на поперечную структуру излучения твердотельных импульсных ОКГ. Анализ проводится на основе интегральных уравнений, описывающих распространение волнового пучка от одного элемента резонатора (зеркала, активного вещества, фильтра) к другому. Преобразование пучка нелинейными элементами учитывается в пределах геометрической оптики.

Следуя [1], принято считать, что пространственная картина поля твердотельных импульсных ОКГ с просветляющимся фильтром в значительной мере определяется селекцией типов колебаний на линейном этапе генерации, предшествующем просветлению фильтра. Вместе с тем очевидно, что в процессе просветления фильтра и высовечивания активного вещества должны возникать динамические искажения пространственной структуры поля излучения, обусловленные зависимостью локальной прозрачности этих элементов от интенсивности проходящего излучения. Это подтверждается экспериментами [2]. Оценке искажений, связанных с неравномерным просветлением фильтра, посвящена данная работа.

Рассмотрим генератор бегущей волны (рис. 1), образованный двумя сферическими (вообще говоря разными) зеркалами 2 и 4, нелинейными элементами (активное вещество и пассивный фильтр) 1, 3 и неограниченными плоскими зеркалами 5, 6. Преобразование пучка в пространстве между отдельными элементами генератора будем описывать в приближении квазиоптики [3], преобразование же пучка самими элементами (в том числе и нелинейными) рассмотрим только в пределах геометрической оптики. Как правило, эти предположения в реальных схемах генераторов хорошо выполняются. Для простоты элементы 1, 3 считаем расположенными в непосредственной близости к зеркалам 2, 4. В отличие от использованных ранее моделей [4, 5], принятая нами схема генератора позволяет наряду с характеристиками нелинейных элементов достаточно полно учесть дифракционные эффекты, играющие определяющую роль в формировании пространственной структуры луча ОКГ.

Считая процесс квазимонохроматическим с частотой ω_0 и достаточно узким спектром $\Delta\omega \ll \omega_0$, уравнения, описывающие поле в генераторе, можно записать в виде

$$\mathcal{E}_1(r_\perp, t) = \hat{S}_1 \mathcal{E}^1(r_\perp, t - \tau_{11}),$$

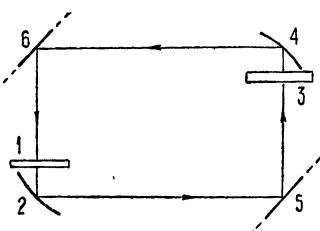


Рис. 1. Модель генератора:
1, 3 — нелинейные элементы, 2, 4 —
зеркала, образующие резонатор,
5, 6 — бесконечные зеркала,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^3(\mathbf{r}_\perp, t) &= r_1 \hat{S}_{13}^{(\omega_0)} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_\perp, t - \tau_{13}), \\ \mathbf{E}_3(\mathbf{r}_\perp, t) &= \hat{S}_3 \mathbf{E}^3(\mathbf{r}_\perp, t - \tau_{33}), \\ \mathbf{E}^1(\mathbf{r}_\perp, t) &= r_2 \hat{S}_{31}^{(\omega_0)} \mathbf{E}_3(\mathbf{r}_\perp, t - \tau_{31}),\end{aligned}\quad (1)$$

где $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}_\perp, t)$ и $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}_\perp, t)$ — соответственно электрические поля на входе и выходе i -го элемента в точке с поперечной координатой \mathbf{r}_\perp в момент времени t ; $\hat{S}_{13}^{(\omega_0)}$ и $\hat{S}_{31}^{(\omega_0)}$ — линейные интегральные операторы по пространственной координате \mathbf{r}_\perp , описывающие трансформацию пучка на участках 1—3 и 3—1, взятые на частоте ω_0 ; \hat{S}_1 и \hat{S}_3 — нелинейные операторы по времени t , описывающие элементы 1, 3; τ_{ik} — групповое запаздывание на соответствующем участке генератора; r_1 и r_2 — коэффициенты отражения сферических зеркал 2, 4. Конкретный вид операторов \hat{S}_1 , \hat{S}_3 зависит от выбора модели нелинейного вещества.

Рассмотрим генерацию гигантских импульсов длительностью $\tau_i \gg \tau = \Sigma \tau_{ik}$. Пренебрегая дисперсией элементов и предполагая, что поле в каждой точке рассматриваемых сечений генератора мало меняется за время одного пробега τ , перейдем от разностных уравнений (1) к уравнениям для поля в дискретные моменты времени $t_n = n\tau$ ($n = 1, 2, \dots$). Эти уравнения, в свою очередь, могут быть решены итерационным методом, аналогичным использованному в [6] при расчете пустых резонаторов и в [7] при расчете стационарных колебаний ОКГ.

Рассмотрим на двумерной модели этап генерации, на котором происходит просветление фильтра, пренебрегая изменением коэффициента усиления активного элемента G_a . Считая, что частота генерации совпадает с центром линии насыщающегося фильтра, а поле \mathbf{E} линейно поляризовано, уравнения поля (1) на одной итерации запишем в виде

$$|\Psi_n^{(2)}(\xi)|^2 \exp |\Psi_n^{(2)}(\xi)|^2 = G_\Phi |\Psi_{n-1}^{(1)}(\xi)|^2 \exp |\Psi_{n-1}^{(1)}(\xi)|^2,$$

$$\arg \Psi_n^{(2)}(\xi) = \arg \Psi_{n-1}^{(1)}(\xi),$$

$$\Psi_n^{(3)}(\xi) = r_1 \sqrt{\frac{iC_1}{2\pi}} \int_{-1}^1 \Psi_n^{(2)}(\xi') \exp \left[i \frac{C_1}{2} \left(2 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \xi \xi' - g_1 \xi'^2 - g_2 \frac{C_2}{C_1} \xi^2 \right) \right] d\xi', \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\Psi_n^{(1)}(\xi) &= r_2 \sqrt{G_a} \sqrt{\frac{iC_2}{2\pi}} \int_{-1}^1 \Psi_n^{(3)}(\xi') \exp \left[i \frac{C_2}{2} \left(2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \xi \xi' - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - g_1 \frac{C_1}{C_2} \xi^2 - g_2 \xi'^2 \right) \right] d\xi',\end{aligned}$$

где $\Psi_n^{(i)}(\xi) = \gamma E_n^{(i)}(\xi)$, γ — параметр насыщения, а $E_n^{(i)}$ — медленная амплитуда электрического поля на выходе i -го элемента на n -й итерации, C_1 и C_2 — френелевские параметры зеркал 2 и 4, $g_{1,2} = 1 - L/R_{1,2}$, L — длина плеча резонатора на участках 1—3 и 3—1 соответственно, а $R_{1,2}$ — радиусы кривизны зеркал, G_Φ — начальный коэффициент пропускания фильтра.

В результате расчетов были получены распределения полей на зеркалах 2 и 4 на каждой итерации, а также коэффициент присутствия

нижней моды резонатора $\varphi_0(\xi)$ в распределении поля на каждом зеркале (2 и 4) после просветления фильтра:

$$K_i = \frac{\int_{-1}^1 \Psi^{(i)}(\xi) \varphi_0(\xi) d\xi}{\left(\int_{-1}^1 \Psi^{(i)}(\xi) \Psi^{(i)*}(\xi) d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 \varphi_0(\xi) \varphi_0^*(\xi) d\xi \right)^{1/2}} \quad (i = 2, 4). \quad (3)$$

Для оценки роли фильтра в селекции поперечных мод конкретные расчеты проводились для случая конфокального и плоского резонаторов. Изучалась зависимость поперечного распределения поля в резонаторе после просветления фильтра от характеристик фильтра и типа начального распределения поля $F(\xi)^*$. В процессе просветления

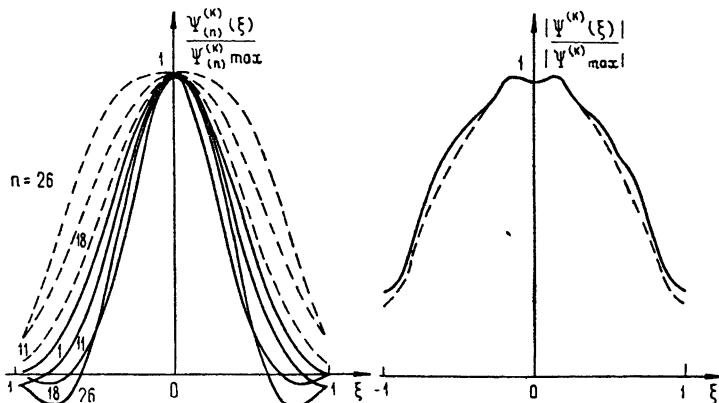


Рис. 2. Структура поля на зеркалах в конфокальном резонаторе в различные моменты просветления при начальной прозрачности $G_\Phi = 0,15$ (n —номер итерации);
— поле на зеркале 2, — поле на зеркале 4.

Рис. 3. Структура поля на 2-м и 4-м зеркалах плоского резонатора после просветления фильтра при его начальной прозрачности $G_\Phi = 0,15$.

фильтра структура поля в генераторе претерпевает изменение. Для иллюстрации на рис. 2 представлены распределения полей на зеркалах в случае конфокального резонатора на разных итерациях $n = 1, 11, 18, 26$ ($C_1 = C_2 = 7$, $G_\Phi = 0,15$); $F(\xi) = S_{00}(\xi)$ — сфероидальная функция, являющаяся собственной функцией пустого конфокального резонатора [3]. На приведенном рисунке видно, как в первоначальном гладком распределении поля появляются нули, положение которых зависит от номера итерации. Искажение первоначального распределения демонстрируется и результатами, приведенными в табл. 1, 2, 3.

Из табл. 1, где указаны значения K_2 и K_4 для различных начальных распределений, видно, что уменьшение вклада (K_0) основной моды в начальное распределение ухудшает и распределение поля после просветления фильтра**. Однако если в начальном распределении величи-

* Данная постановка задачи соответствует, вообще говоря, подаче в резонатор «затравочного» импульса, имеющего фиксированную пространственную структуру $F(\xi)$ и амплитуду, намного превышающую уровень спонтанного излучения, но недостаточную для просветления фильтра.

** Хотя структуры полей на зеркалах 1 и 2 различны, вклад основной моды, характеризуемой коэффициентами K_2 и K_4 , оказался в пределах точности вычислений одинаковым ($K_2 = K_4$).

на K_0 невелика, то селекция колебаний в резонаторе приводит к значительному увеличению отношения K_2/K_0 , несмотря на искажения распределения поля под действием насыщающегося фильтра. Самы эти искажения, как видно из первых столбцов табл. 1, относительно невелики ($\sim 1\%$ при $G_\Phi = 0,8$). Они зависят, хотя и слабо, от начальной про-

Таблица 1

Коэффициент присутствия $K_{2,4}$ низшей моды в структуре поля на зеркалах конфокального резонатора после просветления фильтра при различных начальных распределениях поля $F(\xi)$ (K_0 — коэффициент присутствия основной моды в начальном распределении)

$G_\Phi = 0,8$,		$r_1 = 1$,	$r_2^2 G_a = 2$	
$F(\xi)$	$S_{00}(\xi)$	$\left(\cos \frac{\pi}{2} \xi \right) \times$ $\times [1(\xi+1)-1(\xi-1)]$	$1(\xi+1)-1(\xi-1)$	$\xi [1(\xi+1)-$ $-1(\xi-1)]$
K_0	1	0,97	0,33	0,11
$K_2 = K_4$	0,99	0,96	0,88	0,55
K_2/K_0	0,99	0,99	2,67	5,0

Таблица 2

Коэффициент присутствия $K_{2,4}$ низшей моды в распределении поля на зеркалах конфокального резонатора при различной прозрачности фильтра и постоянной накачке

$F(\xi) = \left(\cos \frac{\pi}{2} \xi \right) [1(\xi+1)-1(\xi-1)], r_1 = 1, r_2^2 G_a = 2, K_0 = 0,97$					
G_Φ	0,51	0,52	0,6	0,7	0,8
$K_2 = K_4$	0,935	0,935	0,945	0,95	0,96

зрачности фильтра (табл. 2). Об этом же говорит и табл. 3, в которой, в отличие от табл. 2, величина K_1 приведена для разных значений G_Φ при одном и том же начальном превышении порога генерации: $r_1^2 r_2^2 G_a G_\Phi = 1,02$.

Таким образом, для резонатора, содержащего нелинейные элементы, можно говорить о конкурирующем действии селекции и нелинейной трансформации мод. Для конфокального резонатора с небольшими зеркалами ($C = 7$) и слабым фильтром ($G_\Phi = 0,8$) нелинейная трансформация дает вклад в K_2 порядка 1%, поэтому при начальных распределениях поля с низким коэффициентом основной моды K_0 в процессе просветления фильтра преобладает селекция. Для более «глухих» фильтров нелинейные искажения выше, но даже для $G_\Phi = 0,15$ они не превышают 10% (табл. 3). Интересно, что при столь невысокой степени нелинейных искажений распределение поля в резонаторе может заметно отличаться от распределения основного колебания. Это наглядно иллюстрирует рис. 2, на котором представлены распределения поля на зеркалах 2 и 4 после просветления фильтра с $G_\Phi = 0,15$ ($n = 26$).

Таблица 3

Зависимость коэффициента присутствия $K_{2,4}$ низшей моды в распределении поля на зеркалах конфокального резонатора от начальной прозрачности фильтра при постоянном превышении порога

	$F(\xi) = S_{00}(\xi)$,	$r = 1$,	$r_2^2 G_a G_\phi = 1,02$,	$K_0 = 1$	
G_ϕ	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15
G_a	2,04	2,55	3,4	5,1	6,8
$K_2 = K_4$	0,93	0,92	0,92	0,91	0,90

Поскольку для увеличения импульсной мощности генератора приходится брать более «глухие» фильтры, то сохранение при этом в резонаторе структуры основного колебания требует применения систем с более высокой степенью селекции мод. В этом плане более подходящим, как показывают расчеты, является плоский резонатор: при изменении G_ϕ от 0,15 до 0,8, превышении порога на 5% и $C_1 = C_2 = 20$ для различных входных структур после просветления фильтра нулевая мода в резонаторе сохраняется с точностью до долей процента (рис. 3).

Последующие искажения поля в генераторе связаны с неравномерным «выгоранием» активного вещества. Этот процесс итерационным методом на основе общих уравнений (1) анализировался для конфокального, полуконцентрического, плоского и близких к нему резонаторов. Результаты анализа будут опубликованы отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. R. Sooy, Appl. Phys. Lett., 7, № 2, 36 (1965).
2. А. М. Леонович, М. Н. Попова, М. Я. Щелев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 945 (1968).
3. Н. Г. Бондаренко, В. И. Таланов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 2, 313 (1964).
4. В. И. Беспалов, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 5, 909 (1965).
5. А. Ф. Сучков, ЖЭТФ, 49, № 5, 1495 (1965).
6. A. G. Fox, Tingye Li, Bell. Syst. Tech. J., 40, № 2, 453 (1961).
7. A. G. Fox, Tingye Li, IEEE Trans., QE-2, № 12, 774 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
28 апреля 1970 г.

INFLUENCE OF A SATURABLE ABSORBER ON THE TRANSVERSE RADIATION STRUCTURE OF A SOLID PULSE LASER

S. N. Vlasov, V. I. Talanov, A. I. Khizhnyak

The results are presented of investigating the influence of the saturable absorber on the transverse radiation structure of a solid pulse laser. Analysis is made on the basis of integral equations describing the propagation of the wave beam from one resonator element (mirror, active matter, filter) to another. The beam conversion by nonlinear elements is taken into account in the geometrical optics approximation.

УДК 621.378.33

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ АТОМОВ ВОДОРОДА В ИСТОЧНИКЕ ПУЧКА ВОДОРОДНОГО КВАНТОВОГО ГЕНЕРАТОРА

Д. А. Богдан, Н. А. Демидов

Рассмотрены физические причины, отвечающие за разогрев газа в источнике пучка атомарного водорода. Экспериментально определена температура атомов водорода в источнике по допплеровской ширине линий H_{β} и H_{γ} из серии Бальмера атома водорода. Получена зависимость температуры атомов Н от давления в источнике.

В настоящее время уделяется большое внимание оптимизации параметров водородного квантового генератора в связи с разработкой промышленных вариантов водородных стандартов частоты. Значительную часть веса и объема прибора составляют вакуумные насосы, и одним из путей уменьшения их веса и размеров является более полное использование пучка атомов водорода. Для уменьшения общего натекания водорода в вакуумную систему пучок атомов формируется набором капиллярных каналов. В существующих водородных генераторах [1, 2] размеры капиллярных каналов таковы, что рабочий пучок атомов образуется прямопролетными атомами, скорость которых полностью определяется их температурой в источнике. Средняя скорость атомов водорода в пучке определяет работу сортирующей и фокусирующей магнитной системы, а именно: качество сортировки, фокусное расстояние и угол захвата. Источником атомов водорода служит высокочастотный (ВЧ) разряд в молекулярном водороде, возбуждаемый при давлениях 0,03—0,5 мм рт. ст. [1, 3]. Обычно при расчете сортирующей системы [4, 5] температура атомов водорода в разряде принималась равной 300—400°К. Однако из рассмотрения физических процессов при диссоциации молекулы водорода в ВЧ разряде следует, что температура атомов водорода может быть выше.

В настоящей работе сообщается об измерении температуры атомов водорода в ВЧ разряде для типичных режимов работы источника пучка водородного квантового генератора по допплеровскому уширению спектральных линий H_{β} и H_{γ} серии Бальмера. Приводится зависимость температуры атомов Н от давления в источнике.

1. МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ «ГОРЯЧИХ» АТОМОВ ВОДОРОДА В ВЫСОКОЧАСТОТНОМ РАЗРЯДЕ

Для анализа процесса диссоциации молекулярного водорода электронным ударом воспользуемся кривыми потенциальной энергии электронных состояний молекулы водорода, приведенными на рис. 1 [6].

Для расщепления на два атома молекулы водорода из основного состояния без электронного возбуждения необходимо затратить около 4,4 эВ. Возможным механизмом такого расщепления является термическая диссоциация [6]. Однако диссоциация электронным ударом не мо-

жет происходить только за счет изменения колебательных состояний без одновременного электронного возбуждения, что следует из принципа Франка—Кондона. Согласно принципу Франка—Кондона расстояние между ядрами не успевает заметным образом измениться за малое время электронного возбуждения молекулы, и любой возможный электронный переход изображается на диаграмме потенциальной энергии сдвигом с одной кривой потенциальной энергии на другую (заштрихованная вертикальная полоса, рис. 1). Для возбуждения молекулы H_2 из основного колебательного и электронного состояния в первое возбужденное состояние $1^3\Sigma_u$ требуется минимальная энергия 8,9 эв. Это состояние неустойчиво, и молекула, перешедшая в него в результате возбуждения, распадается на два атома водорода с кинетической энергией 2,25 эв каждый, что соответствует температуре атомов $\sim 2,6 \cdot 10^4$ К.

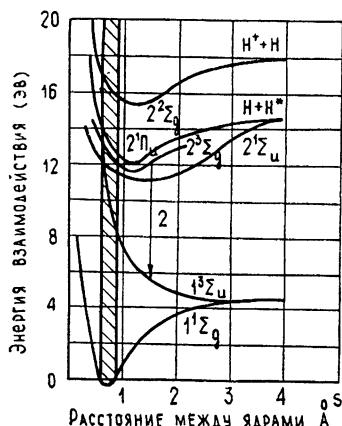


Рис. 1. Потенциальная энергия молекулы водорода как функция междуядерного расстояния,

В силу правил отбора в дипольном приближении взаимные переходы между синглетными и триплетными уровнями в молекуле водорода не наблюдаются. Поэтому возбуждение триплетных уровней, лежащих выше $1^3\Sigma_u$, также приводит к диссоциации. Например, молекула с возбужденного триплетного уровня $2^3\Sigma_g$ переходит с излучением фотонов с длиной волны от 2000 до 4000 Å в состояние $1^3\Sigma_u$ и распадается на 2 атома. Кинетическая энергия атомов в этом случае меньше, так как за время жизни молекулы на уровне $2^3\Sigma_g$ расстояние между ядрами успевает измениться, и переход $2^3\Sigma_g \rightarrow 1^3\Sigma_u$ происходит вне заштрихованной полосы (переход 2, рис. 1). Молекула H_2 , возбужденная в синглетные состояния, например, $2^1\Sigma_u$, $2^1\Pi_u$, не диссоциирует, а переходит в основное состояние с излучением полос Лаймана и Вернера.

Следует отметить, что диссоциация молекулы происходит в основном в результате прямого возбуждения уровня $1^3\Sigma_u$. Так, в работе [7] показано, что более 90 % всей диссоциации связано с возбуждением уровня $1^3\Sigma_u$. При давлении в источнике 0,03—0,5 мм рт. ст. длина свободного пробега атомов водорода составляет 0,3—0,02 см, и «горячие» атомы быстро теряют свою энергию на нагрев «холодного» газа и стенок разрядной трубки. В стационарном режиме все компоненты высокочастотного разряда: электроны, ионы, атомы и молекулы, водорода характеризуются своей средней энергией.

Температуру атомов водорода можно измерить по допплеровскому уширению спектральных линий атомарного водорода, если вклад этого механизма в уширение является преобладающим.

Для измерения использовались линии серии Бальмера H_β и H_γ , которые находятся в видимой области спектра.

2. ВКЛАД В ШИРИНУ ЛИНИЙ СЕРИИ БАЛЬМЕРА РАЗЛИЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ УШИРЕНИЯ

Были рассмотрены возможные механизмы уширения линий. В указанном диапазоне давлений в источнике резонансное уширение и уши-

рение из-за столкновений внутри газа многое меньше допплеровского [8]. Серия Бальмера не резонансная, поэтому эффект самообращения линии не существует [8]. При расчете уширения из-за линейного эффекта Штарка в полях ионов и электронов использовались результаты, полученные в работах [9, 10]. Для первых трех линий серии Бальмера получены результаты:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda^{\alpha} &= 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ \AA} + 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}, \\ \Delta\lambda^{\beta} &= 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ \AA} + 5,6 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}, \\ \Delta\lambda^{\gamma} &= 7 \cdot 10^{-4} \text{ \AA} + 9,4 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}.\end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое — уширение полями ионов, второе — полями электронов. Вычисления проводились при следующих параметрах: плотность электронов $N_e = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, температура электронов $T_e = 4 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ [11].

Оценки, проведенные для допплеровского уширения при температуре атомов $T = 400 \text{ }^\circ\text{K}$, дали следующие результаты:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda^{\alpha} &= 9,35 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}, \\ \Delta\lambda^{\beta} &= 6,9 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}, \\ \Delta\lambda^{\gamma} &= 6,15 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}.\end{aligned}$$

Таким образом, уже при температуре атомов $T = 400 \text{ }^\circ\text{K}$ допплеровское уширение линий серии Бальмера является преобладающим. Предполагая распределение атомов водорода по скоростям максвелловским, запишем выражение для допплеровского контура линии:

$$I(\nu) = I(\nu_0) \exp \left[-\frac{Mc^2}{2kT} \frac{1}{\nu_0^2} (\nu - \nu_0)^2 \right]. \quad (1)$$

Отсюда зависимость ширины линии от температуры определяется выражением

$$\Delta\lambda = 0,71 \cdot 10^{-6} \lambda \sqrt{T} (\text{\AA}). \quad (2)$$

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Высокочастотный разряд E -типа возбуждался в пирексовой трубке диаметра 3 см и длины 3,5—4 см, использовавшейся в водородном квантовом генераторе. Частота приложенного поля 75—80 Мгц, мощность 5—7 вт. Давление водорода в разрядной трубке регулировалось никелевым натекателем [3] и измерялось лампой ЛТ-2. Излучение ВЧ разряда направлялось на интерферометр Фабри—Поро ИТ-28-30, работающий совместно со спектрографом ДФС-12. Запись интенсивности излучения фотоэлектрическая. Расстояние между зеркалами интерферометра $t = 0,2 \text{ см}$, отсюда постоянная интерферометра

$$\Delta\nu = 1/2t = 2,5 \text{ см}^{-1}. \quad (3)$$

Измерения проводились на линиях H_{β} (4861 Å) и H_{γ} (4341 Å), так как имевшиеся зеркальные пластины интерферометра рассчитаны на область 3000—6000 Å. В тонкой структуре обеих линий интенсивности компонент I_a и I_b близки и много больше интенсивностей остальных компонент [12]. Расстояние между максимумами этих компонент 0,3493 см⁻¹ для H_{β} и 0,3567 см⁻¹ для H_{γ} . В эксперименте компо-

менты не разрешились, контур их суммы показан на рис. 2. Выделение контуров каждой из компонент производилось геометрическим построением. Полученное расстояние между максимумами близко к теоретическому.

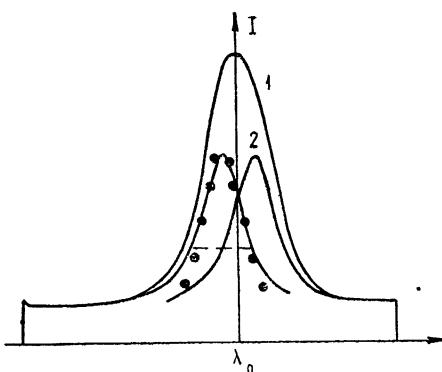


Рис. 2. 1—Контур линии H_{β} при $p = 0,06$ мм рт. ст., 2—контур спектральной линии одной из компонент тонкой структуры, точки показывают допплеровский контур линии, рассчитанный по формуле (1);
 $\Delta\lambda = 0,108 \text{ \AA}$.

Измерение аппаратурной ошибки проводилось на узкой линии криптона 4323 Å путем сравнения ширин линии при расстояниях между зеркалами интерферометра $t = 2 \text{ см}$ и $t = 0,2 \text{ см}$. Величина аппаратурной ошибки вычислялась по графику Брюка и Минковского [8] и оказалась равной $\Delta\lambda = 0,057 \text{ \AA}$. Допплеровская ширина компонент линий H_{β} и H_{γ} также вычислялась по графику Брюка и Минковского. Полученные результаты при различных давлениях приведены в табл. 1. Погрешность измерения температуры составляет $\pm 50^{\circ}\text{K}$.

Таблица 1

	H_{β}			H_{γ}
$P(\text{тор})$	0,39	0,19	0,06	0,25
$\Delta\lambda (\text{\AA})$	0,0925	0,101	0,108	0,086
$T^{\circ}\text{K}$	720	860	980	780

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Экспериментальные контуры компонент были сравнены с контуром, построенным согласно зависимости (1). Полученное хорошее совпадение (см. рис. 2) говорит о том, что распределение по скоростям атомов водорода близко к максвелловскому, и формула (2) применима для определения температуры. Совпадение температур, измеренных по H_{β} - и H_{γ} -линиям, подтверждает приведенные выше соображения о преобладающем допплеровском вкладе в ширину линии. Увеличение температуры атомов с уменьшением давления связано, вероятно, с уменьшением теплообмена «горячих» атомов с окружающим газом. Измеренная температура атомов водорода в 2—2,5 раза больше температуры, обычно применяемой при расчетах сортирующей системы. Расчет и построение сортирующей системы для измеренных значений температуры атомов позволит улучшить сортировку и фокусировку пучка и тем самым уменьшить по крайней мере в 2—3 раза общую интенсивность пучка атомов, необходимую для работы водородного генератора.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Н. М. Ереминой за большую помощь в проведении эксперимента, В. А. Логачеву и А. И. Лаврову за внимание к работе и помощь в обсуждении результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Kieppner, H. C. Berg, S. B. Chapman, N. F. Ramsey, R. F. C. Vessot, N. E. Peters, J. Vanier, Phys. Rev., **138A**, 972 (1965).
2. Н. А. Демидов, Л. М. Зак, А. И. Лавров, В. А. Логачев, А. А. Ульянов, Б. П. Фатеев, Г. М. Чернов, Вопросы радиоэлектроники, сер. РТ, вып. 3, 79 (1970).
3. Н. А. Демидов, Л. М. Зак, В. Ф. Тимонин, Вопросы радиоэлектроники, сер. VI, РТ, вып. 6, 124 (1966).
4. А. И. Лившиц, ЖТФ, **37**, вып. 5, 906 (1967).
5. Н. Г. Басов, Г. М. Страховский, А. И. Никитин, Т. Ф. Никитина, В. М. Татаренков, А. В. Успенский, Тр. ФИАН, **31**, 139 (1965).
6. И. Мак-Даниель, Процессы столкновений в ионизованных газах, изд. Мир, М., 1967.
7. S. J. Corigan, von A. Engel, Proc. Soc., **A245**, 335 (1958).
8. С. Толанский, Спектроскопия высокоразрешающей силы, ИЛ, М., 1955.
9. И. И. Собельман, Введение в теорию атомных спектров, Госиздат, М., 1963.
10. Л. М. Курочки, Вісник Київського університету, сер. астрон., № 8, 15 (1967)
11. S. Vacquie, A. Bordenave-Montesquieu, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, **B42**, № 1, 264 (1967).
12. С. Э. Фриш, Оптические спектры атомов, Физматгиз, М—Л., 1963

Поступила в редакцию
11 июня 1970 г.

MEASUREMENT OF HYDROGEN ATOM TEMPERATURE IN THE SOURCE OF H-MASER BEAM

D. A. Bogdan, N. A. Demidov

Physical phenomena responsible for gas heating in a source of atomic hydrogen beam are considered. The temperature of hydrogen atoms in the source is determined by the Doppler line width of H_{β} and H_{γ} Balmer's series. The temperature of H atoms on the pressure in the source is obtained.

УДК 538.56 : 539.1

О ПРОЦЕССАХ ПОЛУЧЕНИЯ СВОБОДНОЙ ЯДЕРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ВЫКЛЮЧЕНИИ ПОЛЯРИЗУЩЕГО ПОЛЯ

Б. Ф. Алексеев, А. М. Белоногов, А. Г. Граммаков, А. А. Дитев

Численными методами решено уравнение Блоха, описывающее переходный процесс при получении прецессирующей ядерной намагниченности по методу Паккарда и Вариана для случая экспоненциального выключения поляризующего поля. Выявлены некоторые особенности поведения вектора ядерной намагниченности в процессе снятия поляризующего поля. Показано, что зависимость начальной амплитуды сигнала свободной ядерной прецессии от постоянной времени выключения поля в практически важном диапазоне изменения последней (20—400 мксек) может быть описана двумя «сшивавшимися» экспоненциальными функциями с соответствующими характеристическими константами.

Возбуждение свободной ядерной прецессии (СЯП) по методу Паккарда и Вариана [1] предполагает последовательное осуществление трех процессов:

а) поляризации, т. е. намагничивания образца сильным магнитным полем H_0 , отличающимся по направлению от слабого рабочего магнитного поля H_z ;

б) выключения поляризующего поля, при котором получают неравновесную ядерную намагниченность в поле H_z ;

в) регистрации, в течение которого наблюдают и обрабатывают сигнал СЯП.

Амплитуда регистрируемого сигнала СЯП пропорциональна при неизменных прочих условиях проекции вектора неравновесной ядерной намагниченности в конце процесса б) на направление, перпендикулярное рабочему полю. Эта проекция сильно зависит от скорости протекания процесса б) и достигает максимального значения при его идеальной неадиабатичности [2].

Осуществляемые на практике процессы выключения поляризующего поля вследствие немгновенного рассеивания запасенной поляризующим полем магнитостатической энергии являются лишь некоторым приближением к идеально неадиабатическим, поэтому оценка амплитуды сигнала СЯП становится возможной только путем исследования поведения вектора ядерной намагниченности в ходе таких процессов.

Решение подобных задач связано с необходимостью решения уравнений Блоха, что даже для простых (часто идеализированных) законов выключения представляет определенные математические трудности [3—6] (см. также обзоры [7, 8]).

В настоящей работе исследован вопрос о поведении вектора ядерной намагниченности при экспоненциальном выключении поляризующего поля

$$H_n = H_0 e^{-t/\tau} \quad (1)$$

(τ — постоянная времени поляризующего контура в режиме выключе-

ния). Процесс вида (1) достаточно строго реализуется при апериодическом режиме контура во время выключения [6].

Рассмотрение проведено в системе координат x' , y' , z' , вращающейся вокруг оси y неподвижной системы координат так, что ось z' всегда совпадает с направлением результирующего поля

$$H = (H_n^2 + H_3^2)^{1/2}. \quad (2)$$

Слабое поле H_3 , в котором наблюдают СЯП, направлено по оси x , поле H_n и ось приемной катушки совпадают с направлением оси z .

Уравнение движения ядерного магнитного момента M , в пренебрежении релаксационными членами, во вращающейся системе координат имеет вид

$$\frac{dM}{dt} = \gamma \left[M \times \left(k' H + j' \frac{d\theta}{\gamma dt} \right) \right], \quad (3)$$

где θ — угол между направлениями осей z и z' , k' и j' — единичные орты по осям z' и y' соответственно, γ — гиромагнитное отношение ядер.

Для выявления подробностей поведения вектора M и нахождения зависимости амплитуды сигнала СЯП от условий эксперимента уравнение (3) в проекциях на оси вращающейся системы координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{x'}}{\partial t} &= M_{y'} \omega - M_{z'} \frac{d\theta}{dt}, \\ \frac{\partial M_{y'}}{\partial t} &= -M_{x'} \omega, \\ \frac{\partial M_{z'}}{\partial t} &= M_{x'} \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (4)$$

решено нами на ЭВМ для значений полей $H_3 = 0,5$ э (применительно к экспериментам в поле Земли), $H_0 = 3,3; 33; 100$ и 330 э и значений $\tau = 5 \div 400$ мксек. Начальные условия выбраны в виде $M_{x'}(0) = M_{y'}(0) = M_y(0) = 0$; $M_{z'}(0) = \chi_0 (H_n^2 + H_3^2)^{1/2}$; $M_z(0) = \chi_0 H_0$; $M_x(0) = \chi_0 H_3$ (χ_0 — статическая ядерная парамагнитная восприимчивость).

Характерные кривые, изображающие поведение компонент вектора ядерной намагниченности в процессе экспоненциального выключения поля H_n , приведены на рис. 1 для $\tau = 75$ мксек, $H_0 = 33$ э. Значения проекций отнесены к $M_{z'}(0)$, так что $M_{x'}^2 + M_{y'}^2 + M_{z'}^2 = 1$ во все моменты времени.

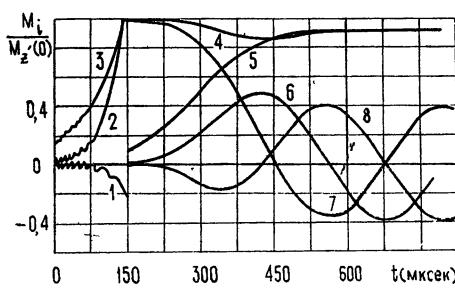


Рис. 1.

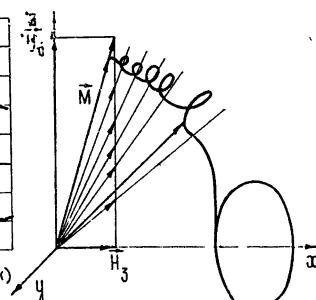


Рис. 2.

Рис. 1. Зависимость компонент вектора ядерного магнитного момента от времени при экспоненциальном выключении поляризующего поля при $\tau = 75$ мксек, $H_0 = 33$ э, $H_3 = 0,5$ э. Начало отсчета времени соответствует началу выключения поляризующего поля (1 — $M_{x'} \cdot 10^2$, 2 — $M_{y'} \cdot 10^3$, 3 — $M_{x'} \cdot 10^1$, 4 — $M_{z'}$, 5 — $M_{x'}$, 6 — $M_{y'}$, 7 — M_z , 8 — $M_{x'}$).

Рис. 2. Годограф вектора M в стационарной системе координат.

По окончании переходного процесса проекции M_z , $M_{x'}$ и M_y' изменяются по гармоническому закону, что связано с прецессией вектора намагниченности вокруг поля H_3 . В конце переходного процесса оси x и x' антипараллельны, поэтому $M_z = -M_{x'}$. В процессе выключения поля проекции M_y' и M_y (M_y на рис. 1 не показана) не совпадают, что обусловлено существованием во вращающейся системе координат эквивалентного вращению [9] магнитного поля $\frac{1}{\gamma} \frac{d\theta}{dt}$. Проекция M_x после окончания переходного процесса не изменяется и совпадает с $M_{z'}$.

Отрыв магнитного момента от вращающегося поля связан с уменьшением проекции $M_{z'}$. Из рис. 1 видно, что наибольшая скорость уменьшения этой проекции существует в момент времени $t_b = \tau (\ln a_0 + 1 \ln \sqrt{2})$ ($a_0 = H_0/H_3$), который, как показано в [6, 10], соответствует максимальному значению отношения мгновенных частот поворота результирующего поля и ларморовой прецессии ядер.

В начале переходного процесса проекция $M_{x'}$ изменяется симметрично относительно нуля. Это связано с прецессионным движением магнитного момента вокруг поля во вращающейся системе координат и петлеобразным движением в неподвижной системе. С началом отрыва проекция $M_{x'}$ смещается в область отрицательных значений и может даже пульсировать с ларморовой частотой, не переходя в область положительных значений (на рис. 1 в интервале 75—150 мксек). Последнее означает, что в процессе выключения поляризующего поля возможны прецессионные петли магнитного момента, не охватывающие вектор H . Годограф вектора M в стационарной системе координат, качественно соответствующий рис. 1, изображен на рис. 2.

На рис. 3 приведена зависимость $M_z/M_{z'}(0)$ от времени для трех значений $a_0 = 6,6; 66$ и 660 и $\tau = 25$ мксек. Значения M_z линейно зависят от величины поляризующего поля. С увеличением поляризующего поля начало СЯП приходится на более поздние моменты времени.

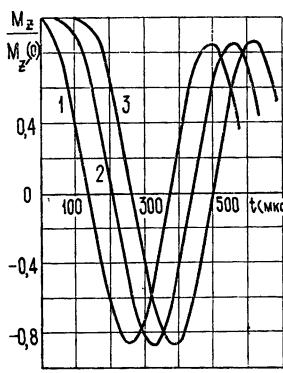


Рис. 3.

Рис. 3 Зависимость проекций M_z от времени при $\tau = 25$ мксек и различных значениях поляризующего поля:
1— $H_0 = 3,3$ э, 2—33 э, 3—330 э

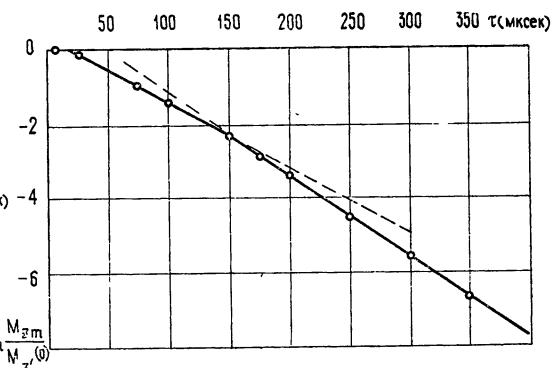


Рис. 4.

Рис. 4. Зависимость максимального значения проекции $M_{z \text{ max}}$ по окончании переходного процесса (начальной амплитуды сигнала СЯП) от постоянной времени τ поляризующего контура.

Зависимость максимального значения проекции $M_{z \text{ max}}$ по окончании переходного процесса (начальной амплитуды U_0 сигнала СЯП, $U_0 = k \gamma H_3 M_{z \text{ max}}$, k —аппаратурный коэффициент) от τ для $a_0 = 66$, $H_3 = 0,5$ э изображена на рис. 4.

На кривой рис. 4 условно можно выделить три области изменения τ :

1) $\tau < 20 \text{ мксек}$. При таких значениях τ амплитуда сигнала СЯП почти совпадает с предельно возможным значением, определяемым максимально возможной проекцией $M_{z\max} \approx \chi_0 H_0$, т. е. выключение поля является практически неадиабатическим. Укажем, например, что при $\tau = 20$ и 5 мксек величина $M_{z\max}/M_{z'}(0)$ составляет соответственно 0,92 и 0,99.

2) $20 \text{ мксек} \leq \tau \leq 150 \text{ мксек}$. В указанной области изменения τ функция $\ln(M_{z\max}/M_{z'}(0))$, как видно из рис. 4, представляет прямую. Следовательно, зависимость начальной амплитуды сигнала СЯП от τ с учетом конечного времени t_n ядерной поляризации можно описать выражением

$$U_0 \sim M_{z\max} = k_1 \chi_0 H_0 (1 - e^{-t_n/T_1}) e^{-k_2 \omega_0 \tau}, \quad (5)$$

где k_1 и k_2 — безразмерные коэффициенты, T_1 — время продольной релаксации, ω_0 — частота свободной ядерной прецессии. Для экспериментов в поле Земли ($H_0 = 0,5 \text{ э}$, $\omega_0 = 1,335 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$), $k_1 = 1,35$, $k_2 = 1,30$.

3) $150 \text{ мксек} \leq \tau \leq 400 \text{ мксек}$. При таких значениях τ зависимость U_0 от τ может быть также описана функцией вида (5), где, однако, коэффициенты k_1 и k_2 соответственно равны 2,82 и 1,67.

Область $\tau \geq 400 \text{ мксек}$ не представляет интереса, так как отношение $M_{z\max}/M_{z'}(0)$ в этом случае составляет $\sim 10^{-4}$ и менее.

Реализуемые на практике значения τ чаще всего принадлежат области $20 \text{ мксек} \leq \tau \leq 100 \text{ мксек}$. Так, шунтированием поляризующего контура во время выключения в нем тока сопротивлением $R_w = V L_k / C_k$ (L_k и C_k — индуктивность и емкость контура соответственно) получают значения $\tau \approx \tau_{\min} \sim 1/\omega_k$ (ω_k — собственная частота поляризующего контура при выключении тока). Если $\omega_k \approx \omega_0$, то для экспериментов в поле Земли имеем $\tau_{\min} = 80 \text{ мксек}$. Выражение (5), справедливое для таких значений τ , показывает, что амплитуда сигнала СЯП при этом составляет $\sim 35\%$ ее максимально возможного значения (см. также рис. 1). Для получения большей амплитуды целесообразно повышать [11] собственную частоту ω_k поляризующего контура с целью уменьшения τ_{\min} . Для $\tau_{\min} \approx 20 \text{ мксек}$, соответствующей, как указано выше, практически неадиабатическому снятию поляризующего поля, необходимо иметь $\omega_k \approx 4\omega_0$, что может быть достигнуто уменьшением емкости контура при выключении в нем поляризующего тока в 16 раз. Дальнейшее уменьшение τ к существенному возрастанию амплитуды сигнала СЯП не приводит.

Таким образом, расчет показывает, что при экспоненциальном выключении поляризующего поля и реально достижимых значениях постоянной времени спада поля амплитуда сигнала СЯП достаточна для регистрации этого явления, так что рассматриваемый вид снятия поля, легко осуществляемый на практике, вполне пригоден для целей ядерной магнитометрии или ядерного магнитного каротажа.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Packard, R. Varian, Phys. Rev., **93**, 941 (1954).
2. А. Абрагам, Ядерный магнетизм, ИЛ, М., 1963.
3. В. М. Рыжков, Г. В. Скроцкий, Ю. Н. Алимов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 6, 884 (1959).
4. В. М. Рыжков, Г. В. Скроцкий, Тр. УПИ, 111, 45 (1961).
5. E. C. Bullard, C. S. Mason, J. D. Mudie, Proc. Camb. Phil. Soc., **60**, 287 (1964).
6. Э. Х. Мадиевская, А. В. Мельников, В. В. Москалев, сб. Ядерный магнитный резонанс, изд. ЛГУ, вып. 1, 64 (1965).
7. Н. М. Померанцев, В. М. Рыжков, Г. В. Скроцкий, Геофиз. аппаратура, вып. 33, 13 (1967).

8. П. М. Бородин, А. В. Мельников, А. А. Морозов, Ю. С. Чернышев,
Ядерный магнитный резонанс в Земном поле, изд. ЛГУ, Л., 1967.
9. S. M. Foggman, J. Appl. Phys., 34, 3037 (1963).
10. Б. Ф. Алексеев, А. М. Белоногов, А. Г. Граммаков, В. С. Гренков,
А. А. Дитеев, Л. А. Ловкова, Геофиз. аппаратура, вып. 43, 52 (1970).
11. В. М. Рыжков, О. О. Бронзов, А. П. Степанов, ПТЭ, № 5, 41 (1960).

Ленинградский электротехнический институт
имени В. И. Ульянова (Ленина)

Поступила в редакцию
17 июня 1970г.

PROCESSES OF OBTAINING A FREE NUCLEUS PRECESSION AT EXPONENTIAL ELIMINATION OF POLARIZED FIELD

B. F. Alekseev, A. M. Belonogov, A. G. Grammakov, A. A. Ditev

There has numerically been solved the Bloch equation describing the transient process in obtaining the precessing nucleus intensity of magnetization according to Packard and Varian's method for the case of exponential elimination of the polarizing field. Some peculiarities of the behavior of the nucleus magnetization vector in eliminating the polarizing field are clarified. It is shown that the dependence of the initial amplitude of the signal of the free nucleus precession on the time constant of the field elimination in practically important region of variation (20–400 μ sec) may be described by two matching exponential functions with the corresponding characteristic constants.

УДК 538.56

К ТЕОРИИ МНОГОФОТОННОГО УМНОЖЕНИЯ ЧАСТОТЫ В ГАЗАХ

T. A. Семенова

Дан расчет мощности гармоники для многофотонного умножения частоты при электродипольном взаимодействии в газах. Расчет проводится с учетом пространственной конфигурации полей, а также ширины и формы линии поглощения газа для стационарного режима генерации.

Исследование многофотонного умножения частоты при электродипольных взаимодействиях в газах проводилось в работах [1-7]. В большинстве теоретических работ при расчете мощности гармоники предполагалось, что электрические поля накачки и гармоники постоянны по всему объему резонатора. Сравнение экспериментальных и расчетных закономерностей трехфотонного умножения частоты показывает [7], что для правильного описания процессов необходимо учитывать пространственную конфигурацию полей накачки и гармоники в резонаторе.

В настоящей статье дан расчет мощности гармоники с учетом пространственной конфигурации полей, а также ширины и формы линии поглощения газа; приводится ряд закономерностей, описывающих зависимость мощности гармоники от давления газа, амплитуды поля накачки в резонаторе и от настройки резонатора относительно частоты перехода.

Рассмотрим систему, резонирующую одновременно на двух частотах ω_1 и ω_3 . Тогда в резонаторе в отсутствие нелинейного активного вещества имеется два нормальных независимых колебания. Обозначим их следующим образом:

$E_a^{(1)}(x, y, z)$ — мода, соответствующая частоте накачки,

$E_a^{(3)}(x, y, z)$ — мода третьей гармоники накачки.

В присутствии нелинейного вещества такая система описывается двумя уравнениями [8]:

$$\frac{d^2E_1}{dt^2} + \frac{\omega_1}{Q_{L1}} \frac{dE_1}{dt} + \omega_1^2 E_1 = Fe^{j\omega t} E_a^{(1)} - \frac{4\pi\eta E_a^{(1)} \int_V \frac{d^2M}{dt^2} E_a^{(1)} dv}{\int_V [E_a^{(1)}]^2 dv}; \quad (1)$$

$$\frac{d^2E_3}{dt^2} + \frac{\omega_3}{Q_{L3}} \frac{dE_3}{dt} + \omega_3^2 E_3 = - \frac{4\pi\eta E_a^{(3)} \int_V \frac{d^2M}{dt^2} E_a^{(3)} dv}{\int_V [E_a^{(3)}]^2 dv}. \quad (2)$$

В уравнении (1) величина F есть внешнее воздействие на молекулярную систему на частоте накачки ω (F/ω^2 — напряженность электрического поля на входе резонатора), Q_{Ln} — нагруженная добротность резонатора на частоте ω_n ($n = 1, 3$), η — число частиц в единице объ-

ема. Поляризация M вещества является сложной функцией полей E_1 и E_3 и определяется из системы уравнений [1]

$$\frac{d^2M}{dt^2} + \frac{2}{T} \frac{dM}{dt} + \Omega_0^2 M = -K^2 W E; \quad (3)$$

$$\frac{dW}{dt} + \frac{1}{T} (W - W_e) = -E \frac{dM}{dt}, \quad (4)$$

где W — внутренняя энергия ансамбля молекул, W_e — значение W в состоянии термодинамического равновесия, T — время релаксации, обусловленное столкновениями молекул друг с другом и со стенками резонатора, $K = 2|\mu|/\hbar$, где μ — дипольный момент молекулы, Ω_0 — невозмущенная частота перехода.

Используя для E и M фурье-разложения и решая совместно уравнения (1) — (4), можно вычислить амплитуды фурье-компонент полей A_1 , A_3 и поляризации M_1 и M_3 . Уравнения (1) — (4) решаются с помощью теории возмущений в предположении, что

$$\frac{K^2 [(1/2) E_1]^2}{\Omega_0^2} \ll 1.$$

Положим, что расстройка между частотой накачки ω и собственной частотой резонатора ω_1 (а также между 3ω и ω_3) равна нулю. Введем обозначение: $\zeta = (K/\sqrt{8}\omega) (FQ_{L1}/2\omega^2)$, FQ_{L1}/ω^2 — напряженность электрического поля внутри резонатора.

Выходная мощность гармоники существенно зависит от ширины и формы линии поглощения газа, т. е. от величины g — форм-фактора линии поглощения. Форм-фактор в записи Ван-Флека—Вайскопфа имеет вид [9]:

$$g(\nu) = \frac{\nu}{\pi\nu_0} \left[\frac{\Delta\nu}{(\nu_u - 3\nu)^2 + \Delta\nu^2} + \frac{\Delta\nu}{(\nu_u + 3\nu)^2 + \Delta\nu^2} \right], \quad (5)$$

где $\Delta\nu = 1/2\pi T$ — полуширина линии поглощения. Центральная частота линии поглощения $\Omega_u = 2\pi\nu_u$ молекул зависит от напряженности электрического поля в той точке резонатора, в которой находятся излучающие молекулы, и определяется выражением [4, 5]

$$\Omega = \frac{\Omega_0}{1 - |\delta(A)| E_a^{(1)2}}, \quad (6)$$

где $\delta(A)$ — относительный штарковский сдвиг частоты перехода в максимальном электрическом поле резонатора.

Полуширина линии $\Delta\nu$ зависит от давления ($\Delta\nu \sim p$), частота Ω зависит от амплитуды электрического поля и от координаты молекулы в резонаторе (так как $E_a^{(1)} = f(x, y, z)$). Следовательно, форм-фактор g , а также и выходная мощность оказываются сложными функциями амплитуды поля и давления.

При этих предположениях мощность третьей гармоники, выделяющаяся в согласованной нагрузке, определяется выражением

$$P_{\text{вых}} = \frac{\eta |W_0| \zeta^6 \omega^2}{2} \frac{\left\{ \int_V E_a^{(3)} [E_a^{(1)}]^3 g dv \right\}^2}{\int_V [E_a^{(3)}]^2 g dv}, \quad (7)$$

где $W_0 = W_e/(1 + 2^{-1}T^2\omega^2\zeta^6)$.

Ввиду сложности формулы для выходной мощности проводилось приближенное численное интегрирование на ЭВМ функций, входящих в (7). Для численного интегрирования использовался метод Симпсона с разбиением интервала интегрирования на 26 участков; при этом точность результата равна примерно $1 \cdot 10^{-4}$, такой точности вполне достаточно для построения графиков.

В качестве функций $E_a^{(1)}$ и $E_a^{(3)}$ было взято распределение электрического поля мод H_{011} и H_{033} прямоугольного резонатора:

$$E_a^{(1)}(x, y, z) = h \sin(\pi y/b) \sin(\pi z/c) — \text{мода } H_{011},$$

$$E_a^{(3)}(x, y, z) = h \sin(3\pi y/b) \sin(3\pi z/c) — \text{мода } H_{033},$$

где h — единичный вектор, направленный вдоль оси X , b, c — размеры резонатора в плоскости YZ .

Расчет проводился для перехода $J = K = 3$ аммиака NH_3 , имеющего невозмущенную частоту перехода $\Omega_0 \approx 2\pi \cdot 24 \text{ Гц}$. Так как полуширина линии поглощения аммиака пропорциональна давлению в интервале $p = 1 — 300 \text{ тор}$ [9], интегрирование велось только в указанном интервале давлений, причем $\Delta p = Cp$, где $C = 30 \text{ Мгц} \cdot \text{мм}^{-1}$ для аммиака.

1. ЗАВИСИМОСТЬ МОЩНОСТИ ТРЕТЬЕЙ ГАРМОНИКИ ОТ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА

На рис. 1 представлены в полулогарифмическом масштабе графики, рассчитанные по формуле (7) при соотношении между частотой резонатора на гармонике и невозмущенной частотой перехода $3\omega/\Omega_0 = 1,168$. Для такой настройки резонатора равенство между 3ω и максимально смещенной частотой перехода Ω_{\max} достигается при напряженности поля $E = 14 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$ (будем называть эту амплитуду поля резонансной). За уровень P_0 принята мощность $P_0 = 1 \text{ мквт}$.

При $A_1 = 6 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$ мощность гармоники плавно нарастает с ростом давления и при $p > 200 \text{ тор}$ практически не меняется. Все остальные кривые имеют ярко выраженные максимумы. Для $A_1 = 10 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$ максимум мощности достигается при давлении $p_{\text{opt}} = 50 \text{ тор}$, для $A_1 = 14 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$ — примерно там же, для $A_1 = 18 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$ — при давлении $p_{\text{opt}} = 75 \text{ тор}$.

Снижение мощности после максимума идет на всех кривых более полого, чем рост мощности в области малых давлений. При больших давлениях $p \gg p_{\text{opt}}$ мощность гармоники практически не зависит от давления.

На рис. 2 приведены аналогичные кривые, рассчитанные для соотношения частот $3\omega/\Omega_0 = 1,0$, т. е. соответствующие крайнему случаю, когда резонатор настроен на невозмущенную частоту перехода. В этом случае при любой достаточно большой напряженности электрического поля частота Ω_{\max} значительно больше частоты резонатора, т. е. $\Omega_{\max} \gg 3\omega$. Кривые рис. 2 отличаются от кривых рис. 1 наличием двух экстремумов — максимума излучаемой мощности и следующего за ним минимума излучения, в котором мощность излучения обращается в нуль. Так как графики построены в полулогарифмическом масштабе, точкам, в которых $P_{\text{вых}}$ обращается в нуль, соответствуют точки разрыва. При последующем увеличении давления гармоника снова появляется и растет с ростом давления. Увеличение напряженности электрического поля в резонаторе приводит к смещению максимума излучения в сторону более высоких давлений. При амплитуде поля $A_1 = 18 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$ заданный интервал изменения давлений попадает лишь максимум мощности гармоники, а минимум выходит за пределы интервала.

Из анализа кривых видно, что по своему характеру закономерности $P_{\text{вых}} = f(p)$ могут быть разбиты на три типа в зависимости от значений параметров $3\omega/\Omega_0$ и A_1 .

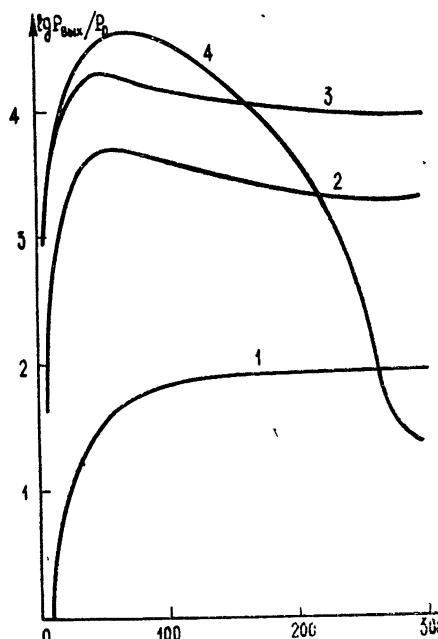


Рис. 1. 1 — $A_1 = 6 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$, 2 — $A_1 = 10 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$, 3 — $A_1 = 14 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$, 4 — $A_1 = 18 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$.

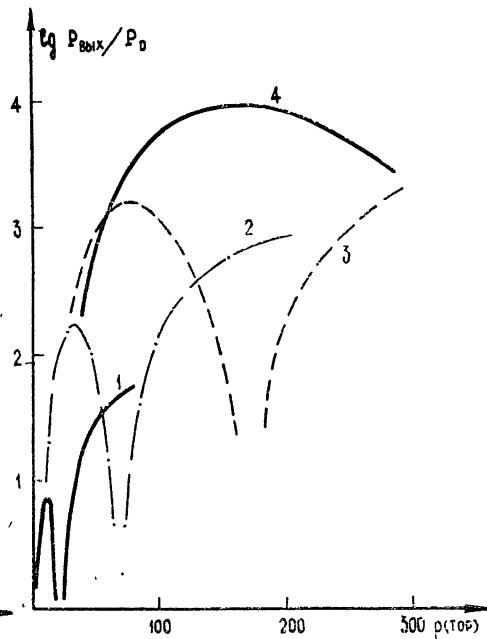


Рис. 2 1 — $6 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$, 2 — $10 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$, 3 — $14 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$, 4 — $18 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$.

1) Режим умножения резонансный, или близкий к резонансному, т. е. $\Omega_{\max}(A) \approx 3\omega$. В этом случае кривые имеют один максимум излучения, положение которого по оси давлений зависит от A_1 .

2) Режим умножения нерезонансный, причем $\Omega_{\max}(A) < 3\omega$. В этом случае наблюдается плавный (без экстремумов) рост мощности с давлением.

3) Режим умножения также нерезонансный, но $\Omega_{\max}(A) > 3\omega$. В этом случае кривые имеют два экстремума: при некотором давлении мощность гармоники проходит через максимум, и существует область давлений, где выходная мощность обращается в нуль.

Рассмотрим качественно простой механизм, который дает возможность объяснить характер закономерностей $P_{\text{вых}} = f(p)$. В резонаторе возбуждаются две моды: H_{011} и H_{033} . При этом вдоль одной из сторон резонатора укладывается одна полуволна накачки (H_{011}) и три полуволны гармоники (H_{033}). Поле гармоники возбуждается активными молекулами вещества, заполняющего резонатор, которые в свою очередь возбуждаются полем накачки H_{011} . Очевидно, что излучение молекул вещества, находящихся в разных точках резонатора, должно быть синхронизировано полем накачки. Это означает, что фаза излучения гармоники должна быть жестко связана с фазой поля накачки и, следовательно, все молекулы независимо от их положения в резонаторе должны излучать в одинаковой фазе (излучение когерентно). При этом возможно одновременное возбуждение колебания H_{033} двух противоположных друг другу ориентаций. Обозначим их следующим образом: $H_r^+ = H_{033}^+$ — мода, направление вектора напряженности E_r электриче-

ского поля которой совпадает в центре резонатора с направлением вектора E поля накачки, $H_r^\dagger = H_{033}^\dagger$ — мода с противоположным направлением вектора E_r в центре резонатора.

Допустим, например, что центральные молекулы резонатора возбуждают моду H_{033} с ориентацией H_r^\dagger , тогда, очевидно, периферийные молекулы, излучающие в той же фазе, что и центральные, должны возбудить моду H_{033} с противоположной ориентацией H_r^\dagger . Выходная мощность на гармонике есть результат интерференции мод H_r^\dagger и H_r^\dagger и зависит от соотношения амплитуд этих мод.

Рассмотрим нерезонансный случай, когда $\Omega_{\max} < 3\omega$. В этом случае (см. рис. 3a) вклад в выходную мощность дают лишь высокочастотные концы линий поглощения, причем основной вклад обеспечивают

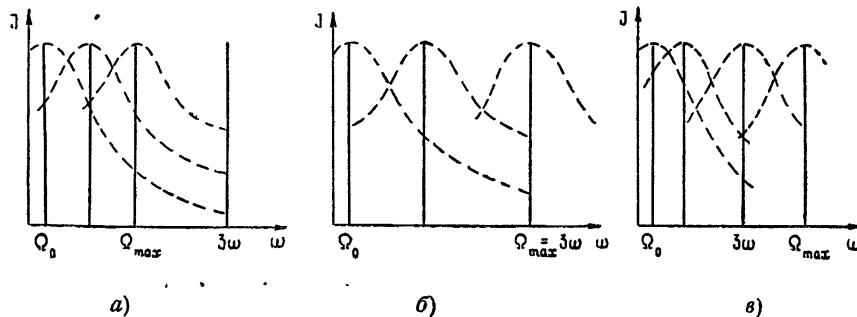


Рис. 3.

молекулы, находящиеся в центральной части резонатора, т. е. в области сильных полей. Очевидно, что при этом амплитуда моды H_{033}^\dagger превышает амплитуду моды H_{r33}^\dagger , создаваемой периферийными молекулами. С увеличением давления линии поглощения уширяются, причем уширение линий центральных молекул ($\Omega_c \approx \Omega_{\max}$) оказывается на амплитуде моды H_{033}^\dagger сильнее, чем уширение линий периферийных молекул на амплитуде моды H_{r33}^\dagger . Поэтому выходная мощность гармоники плавно нарастает с ростом давления. И лишь при очень высоких давлениях ($p \approx 300$ torr) линии становятся настолько широкими, что интенсивность их высокочастотных концов на частоте резонатора 3ω становится близкой к единице; при этом скорость нарастания амплитуды H_{033}^\dagger снижается, тогда как амплитуда моды H_r^\dagger продолжает расти. Результатирующая мощность гармоники практически перестает зависеть от давления, если амплитуды мод H_r^\dagger и H_r^\dagger изменяются примерно одинаково (кривая для $A_1 = 6 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$, рис. 1).

В резонансном случае (рис. 3б) амплитуда моды H_r^\dagger гораздо больше амплитуды моды H_r^\dagger и растет с увеличением давления быстрее за счет близлежащих к $\Omega_{\max} = 3\omega$ линий. Но по мере расширения линий рост амплитуды моды H_r^\dagger замедляется, так как интенсивность линий, близких к $\Omega_{\max} = 3\omega$, на частоте 3ω становится близкой к единице, а рост амплитуды моды H_r^\dagger продолжает идти теми же темпами, что и раньше. В результате выходная мощность гармоники проходит через максимум и начинает убывать (кривые для $A_1 = 10 - 18 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$).

В нерезонансном случае, когда $\Omega_{\max} \gg 3\omega$, при малых давлениях амплитуда моды H_r^\dagger превалирует над амплитудой моды H_r^\dagger (см. рис. 3в), так как основной вклад в мощность дают периферийные молекулы, находящиеся в слабом электрическом поле. Рост давления приводит к уширению линий, причем при некотором давлении рост интен-

сивности линий на частоте 3ω за счет низкочастотных концов $\Omega_u = \Omega_{max} \gg 3\omega$ начинает идти быстрее, чем рост интенсивности близких к 3ω линий, интенсивность которых близка к единице. Поэтому мощность гармоники проходит сначала через максимум, затем падает до нуля, когда амплитуды мод H_g^+ и H_g^- выравниваются, и далее начинает расти снова за счет моды H_g^+ . Это соответствует кривым рис. 2.

Приведенное объяснение не претендует на полноту и точность, так как сравнение скоростей нарастания амплитуд мод H_g^+ и H_g^- достаточно сложно.

2. ЗАВИСИМОСТЬ МОЩНОСТИ ГАРМОНИКИ ОТ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Для исследования зависимости мощности гармоники от амплитуды электрического поля в резонаторе также проводилось численное интегрирование (7) при фиксированных значениях давления. Графики зависимости $P_{вых} = f(A_1)$ в полулогарифмическом масштабе приведены на рис. 4. По оси абсцисс отложена амплитуда поля в $\text{kV} \cdot \text{cm}^{-1}$, по оси ор-

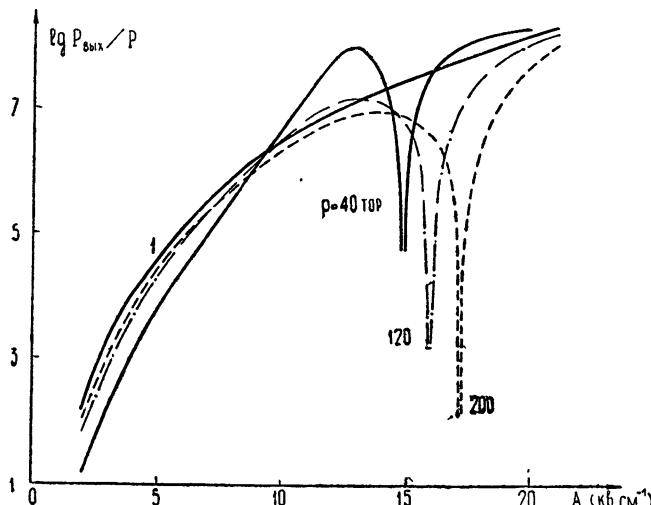


Рис. 4.

динат — логарифм отношения $P_{вых}/P$, где за уровень мощности P принята мощность $1 \cdot 10^{-9} \text{ вт}$. Все графики построены для отношения частот $3\omega/\Omega_0 = 1,168$. Из рис. 4 видно, что мощность излучения быстро нарастает при увеличении амплитуды электрического поля и в области резонансных амплитуд ($A_1 = 12 - 14 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$) проходит через максимум. В области амплитуд $A_1 = 15 - 18 \text{ кв} \cdot \text{см}^{-1}$ все кривые имеют минимум, в котором мощность излучения падает до нуля. При дальнейшем увеличении амплитуды электрического поля мощность излучения снова быстро нарастает.

Появление экстремумов на графиках $P_{вых} = f(A)$ также является следствием взаимодействия мод противоположной ориентации. Пока амплитуда поля такова, что $\Omega_{max} < 3\omega$, излучение происходит на частоте резонатора 3ω за счет высокочастотных концов линий поглощения (рис. 3 а). При этом наибольший вклад в выходную мощность дают молекулы, находящиеся в центральной части резонатора, так как центральные частоты их линий поглощения близки к Ω_{max} и, следовательно, ближе к 3ω , чем у периферийных молекул. Очевидно, что и амплитуда моды, возбуждаемой центральными молекулами (пусть это будет

мода H_r^\dagger), будет больше, чем амплитуда противоположной моды H_r^+ . По мере увеличения амплитуды поля в резонаторе частота Ω_{\max} приближается к частоте резонатора 3ω , центральные молекулы находятся во все более выгодных условиях по сравнению с периферийными, и амплитуда поля H_r^\dagger быстро нарастает. Разница в амплитудах мод H_r^\dagger и H_r^+ максимальна при резонансе, когда $\Omega_{\max} \approx 3\omega$, следовательно, и выходная мощность на гармонике при этом максимальна. Когда амплитуда электрического поля накачки превысит резонансную, центральные молекулы, находящиеся в максимуме поля, окажутся в невыгодных условиях, так как $\Omega_{\max} > 3\omega$, и излучение центральных молекул на частоте резонатора 3ω будет происходить уже за счет низкочастотных концов их линий поглощения. В наиболее выгодных условиях теперь находятся те молекулы, для которых $\Omega_n = 3\omega$ (центральные частоты Ω_n линий поглощения совпадают с частотой резонатора 3ω), но эти молекулы находятся не в центре резонатора, а в местах с меньшей напряженностью поля. По мере увеличения амплитуды поля накачки в наиболее выгодных условиях находятся молекулы, все более удаленные от центра. Наконец, при некоторой амплитуде поля A_1 наибольший вклад в мощность излучения вносят близкие к периферии молекулы, возбуждающие моду H_r^+ , тогда как амплитуда моды H_r^\dagger , возбуждаемая центральными молекулами, убывает. Когда амплитуды мод H_r^\dagger и H_r^+ сравняются, мощность излучения пройдет через нуль; дальнейший рост мощности гармоники обеспечивается модой H_r^+ .

Расчеты, в которых поля предполагаются постоянными по объему резонатора [1, 2, 4], дают монотонную зависимость $P_{\text{вых}}$ от амплитуды поля, пропорциональную шестой степени поля накачки. На рис. 4 приведена эта зависимость (кривая 1). Видно, что в области малых полей накачки наши кривые ведут себя подобно кривой 1, особенно при высоких давлениях. При малых давлениях ($p = 40$ torr) зависимость $P_{\text{вых}} = f(A_1)$ идет круче закона $P_{\text{вых}} = kA_1^6$.

Эксперименты, проводившиеся в двух режимах умножения (нерезонансном при $\Omega_{\max} < 3\omega$ и близком к резонансному) и частично описанные в работах [6, 7], подтверждают приведенные здесь расчеты.

ЛИТЕРАТУРА

- Д. Ж. Фонтана, Р. Пантелл, Р. Смит, сб. Лазеры, ИЛ, М., 1962, стр. 315.
- J. R. Fontana, R. H. Pantell, R. G. Smith, Proc. IEEE, 50, 469 (1962).
- D. P. Akitt, R. D. Coleman, J. Appl. Phys., 36, № 6, 2004 (1965).
- И. И. Минакова, Т. А. Семенова, Вестник МГУ, сер. физич., № 5, 125 (1966).
- Ф. В. Россельс, Т. А. Семенова, Вестник МГУ, сер. физич., № 6, 36 (1968).
- К. Е. Давидис, И. И. Минакова, Т. А. Семенова, Радиотехника и электроника, 14, № 9, 1661 (1969).
- И. Г. Левков, И. И. Минакова, Т. А. Семенова, Радиотехника и электроника, 15, № 8, 1682 (1970).
- Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1965.
- Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959

Московский государственный университет

Поступила в редакцию
1 апреля 1970 г

TO THE THEORY OF MULTI-PHOTON FREQUENCY MULTIPLICATION IN GASES

T. A. Semenova

The harmonic power is calculated for the multi-photon frequency multiplication at electro-dipole interaction in gases. Calculation is made taking into account the field spatial configuration as well as the gas absorption line width and form in the case of the stationary generation regime.

УДК 538.56

НАСЫЩЕНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ ФОКУСИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

К. С. Гочелашивили

Исследуются относительные флуктуации интенсивности на оси фокусированного пучка с гауссовым распределением поля в плоскости излучения при распространении в турбулентной среде.

На основе приближенного решения уравнения Шишова для четвертого момента поля в условиях, когда флуктуации интенсивности излучения точечного источника в среде малы, показано, что с увеличением числа Френеля излучающей апертуры для относительных флуктуаций интенсивности фокусированного излучения имеет место насыщение, причем величина относительных флуктуаций стремится к единице.

1. В лазерных линиях связи и локации энергетически выгодно использовать сходящиеся пучки. Это определяет важность расчета статистических характеристик флуктуаций интенсивности фокусированного излучения при распространении в турбулентной атмосфере.

Данному вопросу посвящены работы [1, 2], где на основе непосредственного применения метода плавных возмущений (МПВ) для решения волнового уравнения были рассчитаны относительные флуктуации интенсивности

$$\sigma_m^2 = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} - 1$$

фокусированного пучка с гауссовым распределением поля в плоскости излучения. При этом, однако, не было проведено исследование условий применимости полученных результатов; сопоставление же расчетов с экспериментальными данными [3, 4] показало, что даже в условиях несильной турбулентности значения параметра σ_m^2 отличаются от рассчитанных в [1, 2]. Это обстоятельство, а также ряд других соображений вызвали утверждения о полной неприменимости МПВ к расчету флуктуаций интенсивности фокусированного излучения [5].

В [6] при исследовании вопроса о размытии сходящихся пучков в турбулентной среде было установлено путем численных расчетов, что область применимости результатов [1, 2], полученных в первом приближении МПВ, определяется не только условиями на трассе, но и числом Френеля Ω излучающей апертуры; для достаточно слабой турбулентности всегда существует некоторая область значений Ω ($1 < \Omega < \Omega^*$), в которой применимы результаты работ [1, 2]. Практически интересные случаи при этом, однако, не описываются.

В связи с этим в настоящее время имеется насущная необходимость построения теории, справедливой в более широкой области значений параметров, чем результаты работ [1, 2], что позволило бы, в частности, интерпретировать экспериментальные данные [3, 4].

Такой расчет проводится в настоящей работе на основе приближенного решения уравнения для четвертого момента поля в условиях, когда флуктуации интенсивности сферической волны σ_m^2 в среде

малы; в качестве частного случая при этом получен результат работы [1].

2. Статистические характеристики флюктуаций интенсивности излучения, распространяющегося в слабонеоднородной среде со случайными флюктуациями показателя преломления, описываются уравнением Шишова для четвертого момента поля $v(r_t, x)$.

Для граничного условия

$$v(r_t, 0) = (1/2ki) \int dq \exp(iqr_t) P(q)$$

это уравнение может быть записано в виде [7-9]

$$\begin{aligned} & \langle v(r_{t1}, x) v(r_{t2}, x) v^*(r_{t3}, x) v^*(r_{t4}, x) \rangle = (1/16 k^4) \int d\mathbf{q}_{a,b,c,d} P(\mathbf{q}_a) P(\mathbf{q}_b) \times \\ & \times P^*(\mathbf{q}_c) P^*(\mathbf{q}_d) \exp[-2x \gamma(0, 0, 0) - (ix/2k)(q_a^2 + q_b^2 - q_c^2 - q_d^2) + \\ & + iq_a r_{t1} + iq_b r_{t2} - iq_c r_{t3} - iq_d r_{t4}] E[r_{t1} - (x/k) \mathbf{q}_a, r_{t2} - \\ & - (x/k) \mathbf{q}_b, r_{t3} - (x/k) \mathbf{q}_c, r_{t4} - (x/k) \mathbf{q}_d, \mathbf{q}_{a,b,c,d}, x], \quad (1) \\ & \left\{ \frac{\partial}{\partial x} - (i/2k)[\Delta_{t1} + \Delta_{t2} - \Delta_{t3} - \Delta_{t4}] + \gamma(\mathbf{q}_{a,b}, s_{t1,2}, x) + \right. \\ & + \gamma(\mathbf{q}_{c,d}, s_{t3,4}, x) - \gamma(\mathbf{q}_{a,c}, s_{t1,3}, x) - \gamma(\mathbf{q}_{b,d}, s_{t2,4}, x) - \\ & \left. - \gamma(\mathbf{q}_{a,d}, s_{t1,4}, x) - \gamma(\mathbf{q}_{b,c}, s_{t2,3}, x) \right\} E(s_{t1,2,3,4}, \mathbf{q}_{a,b,c,d}, x) = 0, \end{aligned}$$

$$E(s_{t1,2,3,4}, \mathbf{q}_{a,b,c,d}, 0) = 1.$$

Здесь $\Delta_{ti} \equiv \frac{\partial^2}{\partial s_{tiy}^2} + \frac{\partial^2}{\partial s_{tiz}^2}$ — поперечный лапласиан,

$$\begin{aligned} & \gamma(\mathbf{q}_{a,b}, s_{t1,2}, x) \equiv 2\pi k^2 \int dq \Phi(0, q) \times \\ & \times \exp[(ix/k)(q_a - q_b)q + i(s_{ti} - s_{tk})q], \end{aligned}$$

$\Phi(q)$ — пространственный спектр флюктуаций показателя преломления.

Применение стандартной процедуры метода плавных возмущений [10] позволяет в первом приближении записать решение этого уравнения в виде

$$\begin{aligned} E(s_{t1,2,3,4}, \mathbf{q}_{a,b,c,d}, x) \approx & \exp \left[- \int_0^x d\eta \left\{ \hat{\gamma}(\mathbf{q}_{a,b}, s_{t1,2}, \eta) \exp[-(i/k)(x-\eta)q^2] + \right. \right. \\ & + \hat{\gamma}(\mathbf{q}_{c,d}, s_{t3,4}, \eta) \exp[(i/k)(x-\eta)q^2] - \gamma(\mathbf{q}_{a,c}, s_{t1,3}, \eta) - \quad (2) \\ & \left. \left. - \gamma(\mathbf{q}_{b,d}, s_{t2,4}, \eta) - \gamma(\mathbf{q}_{a,d}, s_{t1,4}, \eta) - \gamma(\mathbf{q}_{b,c}, s_{t2,3}, \eta) \right\} \right]. \end{aligned}$$

Значок $\hat{\gamma}$ над γ указывает на операторный характер воздействия γ на стоящий справа от него множитель.

Для фокусированного пучка с гауссовым распределением поля в плоскости излучения имеем:

$$v(r_t, 0) = \exp(-r_t^2/2\alpha^2), \quad \alpha^2 = (x/k)\Omega(1 - i\Omega)/(1 + \Omega^2),$$

где $\Omega = k\alpha^2/x$ — число Френеля излучающей апертуры.

Проведя расчет для турбулентного спектра флюктуаций показателя преломления [11], во фраунгоферовой зоне внутреннего масштаба

турбулентности получим для среднего квадрата интенсивности на оси пучка:

$$\langle I^2(0, x) \rangle = \langle v(0, x) v(0, x) v^*(0, x) v^*(0, x) \rangle = \\ = \frac{|\alpha^2|^4}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{q}_{a,b,c,d} \exp [- \tilde{\beta}(q_a^2 + q_b^2) - \tilde{\beta}^*(q_c^2 + q_d^2) + \delta(\mathbf{q}_{a,b,c,d}, x)],$$

где

$$\begin{aligned} & \delta(\mathbf{q}_{a,b,c,d}, x) = \\ & = (210/11) \sigma_{\chi(\text{сф})}^2 \{ i^{5/6} {}_2F_2[(ix/4k)(q_a - q_b)^2] + (-i)^{5/6} {}_2F_2[(-ix/4k)(q_c - q_d)^2] \} - \\ & - 13,95 \sigma_{\chi(\text{сф})}^2 \{ [(x/4k)(q_a - q_c)^2]^{5/6} + [(x/4k)(q_b - q_d)^2]^{5/6} + \\ & + [(x/4k)(q_a - q_d)^2]^{5/6} + [(x/4k)(q_b - q_c)^2]^{5/6} \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\tilde{\beta} = (x/2k)(i + k\alpha^2/x)$; ${}_2F_2(z) \equiv {}_2F_2 \left\{ \begin{array}{l} -5/6, 11/6, z \\ 1, 17/6, \end{array} \right.$ — гипергеометрическая функция; $\sigma_{\chi(\text{сф})}^2 = 0,124 C_n^2 k^{7/6} x^{11/6}$ — параметр, характеризующий (в МПВ) относительные флюктуации интенсивности точечного источника; $\sigma_{M(\text{сф})}^2 = 4 \sigma_{\chi(\text{сф})}^2$; C_n^2 — структурная постоянная флюктуаций показателя преломления.

Область применимости полученного выражения ограничена, очевидно, условием

$$\sigma_{\chi(\text{сф})}^2 \ll 1.$$

Среднее значение интенсивности на оси фокусированного пучка вычислено в [5, 6, 12]:

$$\langle I(0, x) \rangle = \frac{\Omega^2}{\pi} K(\delta), \quad (4)$$

где

$$K(\delta) = \int dq \exp [-q^2 - \delta(q^2)^{5/6}], \quad \delta = 13,95 \sigma_{\chi(\text{сф})}^2 \Omega^{5/6}.$$

Ограничивааясь в разложении подынтегральной функции в (3) и (4) в ряд по степеням $\sigma_{\chi(\text{сф})}^2$ членами, линейными по $\sigma_{\chi(\text{сф})}^2$, для относительных флюктуаций интенсивности

$$\sigma_M^2 = \frac{\langle I^2(0, x) \rangle}{\langle I(0, x) \rangle^2} - 1$$

легко получить результат работы [1].

В области $\delta \geq 1$ для вычисления параметра σ_M^2 необходимо проведение численных расчетов. При этом нас будет интересовать френелева зона излучающей апертуры $\Omega \gg 1$, где только и имеет смысл фокусировка. В этой области, после несложных преобразований, можно записать (3) в виде

$$\langle I^2(0, x) \rangle \approx \frac{2}{\pi^3} \Omega^4 J(\delta), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} J(\delta) = \int d\eta_{1,2,3} \exp \left\{ -\frac{3}{2} (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) + \eta_1(\eta_2 + \eta_3) + \right. \\ \left. + \eta_2\eta_3 + \delta(\eta_1^2)^{5/6} + \delta[(\eta_3 - \eta_2)^2]^{5/6} - \delta[(\eta_1 - \eta_2)^2]^{5/6} - \right. \\ \left. - \delta(\eta_3^2)^{5/6} - \delta[(\eta_1 - \eta_3)^2]^{5/6} - \delta(\eta_2^2)^{5/6} \right\}. \end{aligned}$$

В (5) учтено, что при $\Omega \gg 1$ в большей части области интегрирования

$$(210/11) i^{5/6} {}_2F_2(i z \Omega) \approx 13,95 z^{5/6} \Omega^{5/6}.$$

Отметим, что (5) можно было бы получить, используя обобщенный на случай плавнонеоднородных сред метод Гюйгенса—Кирхгофа [13].

Формулы (5) и (4) позволяют рассчитать величину относительных флуктуаций интенсивности в фокусированном пучке

$$\sigma_{\text{AI}}^2(\delta) = \frac{2}{\pi} \frac{J(\delta)}{K^2(\delta)} - 1$$

как функцию параметра δ .

Провести численные расчеты для трехмерного пучка затруднительно. Поэтому естественно обратиться к случаю двумерного пучка, что, по-видимому, не должно сильно изменить характер зависимости $\sigma_M^2(\delta)$.

Результат такого расчета приведен на рис. 1; видно, что с увеличением параметра Ω (при фиксированном значении $\sigma_{\chi(\text{сф})}^2$) относительные флуктуации интенсивности фокусированного излучения насыщаются к единице. Этот же эффект должен наблюдаться с увеличением параметра $\sigma_{\chi(\text{сф})}^2$ при фиксированном значении Ω . Зависимость такого типа и наблюдается на эксперименте [3, 4].

Легко дать интерпретацию этого результата. В фокальной области складываются колебания со случайными фазами, приходящие из различных областей излучающей апертуры. С увеличением размеров апертуры (или с увеличением параметра $\sigma_{\chi(\text{сф})}^2$) увеличивается число областей, на которых фазы некоррелированы. При этом относительные флуктуации интенсивности насыщаются к единице [14].

В заключение выражаю глубокую благодарность Ф. В. Бункину за поддержку и внимание к работе и Е. А. Зубовой за проведение вычислений на ЭВМ.

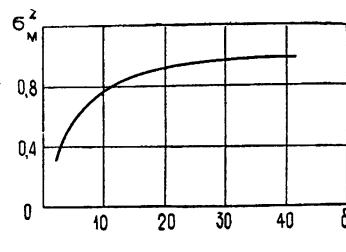


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

- D. L. Fried, J. B. Seidmann, JOSA, 57, 181 (1967).
- T. L. Ho, JOSA, 59, 385 (1969).
- A. L. Buck, Appl. Optics, 6, 703 (1967).
- С. С. Хмелевцов, Р. Ш. Цвых, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 147 (1970).
- А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 1, 61 (1970).
- Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашивили, Препринт ФИАН № 164 (1969); Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 7, 1039 (1970).
- В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 6, 866 (1968).
- W. R. Vaughan, IEEE Trans., Apr-15, 81 (1967).
- В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, 2107 (1969).
- С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
- В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
- Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, Радиотехника и электроника, 9, № 11, 1944 (1964).
- З. И. Фейзуллин, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 1, 68 (1967).
- Дж. В. Стрэтт (lord Рэлей), Теория звука, т. I, Гостехиздат, М., 1955.

SATURATION OF FOCUSED RADIATION FLUCTUATIONS IN A TURBULENT MEDIUM*K. S. Gochelashvili*

Relative intensity fluctuations on the axis of the focused beam with the Gaussian field distribution in the plane of radiation propagating in a turbulent medium are investigated.

Based on the approximate solution of the equation for the fourth moment of the field when the intensity fluctuations of radiation from a point source in the medium are small, it is shown that as the Fresnel number of the radiating aperture increases the saturation takes place, at the relative intensity fluctuations of focused radiation, the value of relative fluctuations tending to unity.

УДК 538.56 : 519.25

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫБРОСА НЕСТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

B. A. Геранин

Получено выражение для одномерной плотности вероятности длительности выброса нестационарного случайного процесса за случайный уровень, представленный в виде аддитивной смеси детерминированного и случайного процессов. Задача решена в райсовом приближении. Результаты известных исследований плотности вероятности длительности выбросов случайных процессов, полученные в этом приближении, следуют из результатов работы как частные случаи.

Среди прикладных задач современной теории выбросов случайных процессов значительный интерес представляет задача о пересечении нестационарных случайных процессов

$$\xi(t) = a(t) \varepsilon(t) \quad (1)$$

и

$$y(t) = g(t) + \zeta(t), \quad (2)$$

где $a(t)$ и $g(t)$ — детерминированные, $\varepsilon(t)$ и $\zeta(t)$ — независимые стационарные центрированные гауссовые процессы.

Пересечение случайных процессов типа (1) и (2), в частности, имеет место в каналах связи, расположенных вблизи неровной поверхности океана или земли, в системах с флюктуирующими порогом, подверженных нестационарным случайным воздействиям. Подробнее физическая природа подобной ситуации рассмотрена в [1].

В [1] найдено математическое ожидание, в [2] — дисперсия числа положительных выбросов процесса (1) за уровень (2). Ниже получено приближенное выражение плотности вероятности длительности τ выброса процесса $\xi(t)$ за уровень $y(t)$.

Плотность вероятности интервала τ между соседними положительным ($\xi(t) > y(t)$) и отрицательным ($\xi(t) < y(t)$) пересечениями $\xi(t)$ и $y(t)$ при условии, что положительное пересечение произошло в интервале $[t_1, t_1+dt]$, в райсовом приближении [3] может быть представлена в виде

$$p(\tau/t_1) = J_1^{-1} J_2, \quad (3)$$

где

$$J_1 = \int_{\dot{g}(t_1)}^{\infty} [\dot{\eta}(t_1) - \dot{g}(t_1)] w_2[g(t_1), \dot{\eta}(t_1)] d\dot{\eta}(t_1); \quad (4)$$

$$J_2 = \int_{\dot{g}(t_1)}^{\infty} \int_{-\infty}^{\dot{g}(t_2)} [\dot{\eta}(t_1) - \dot{g}(t_1)] [\dot{g}(t_2) - \dot{\eta}(t_2)] w_4[g(t_1), g(t_2), \dot{\eta}(t_1), \dot{\eta}(t_2)] d\dot{\eta}(t_1) d\dot{\eta}(t_2); \quad (5)$$

$$\eta(t) = a(t) \varepsilon(t) - \zeta(t); \quad (6)$$

$w_4[\eta(t_1), \eta(t_2), \dot{\eta}(t_1), \dot{\eta}(t_2)]$ — совместная плотность вероятности пары мгновенных значений случайного процесса $\eta(t)$ и соответствующей пары мгновенных значений производной $\dot{\eta}(t)$;

$$w_2[\eta(t_1), \dot{\eta}(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_4[\eta(t_1), \eta(t_2), \dot{\eta}(t_1), \dot{\eta}(t_2)] d\eta(t_2) d\dot{\eta}(t_2). \quad (7)$$

Интеграл J_1 вычислен в [1] как промежуточный результат на пути к получению математического ожидания числа выбросов. Как нетрудно заметить, J_2 отличается от интеграла $S(t_1, t_2)$ из работы [2] лишь знаками введенных в [2] величин D_{34} и K .

Задействуем из [2] выражение (17), изменив знаки перед D_{34} и K . Значение J_1 возьмем из [1]. В результате найдем

$$\begin{aligned} p(\tau/t_1) = & \frac{A(2\pi D)^{3/2} \sigma_\eta(t_1) n^2}{p^2 D_{33} \sigma_\eta(t_1) \sqrt{1 - R_{13}^2}} \exp \left[\frac{h_1^2 - 2R_{13}h_1\lambda_1 + \lambda_1^2}{2(1 - R_{13}^2)} \right] \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{\lambda_1 - R_{13}h_1}{\sqrt{1 - R_{13}^2}} \exp \left[\frac{(\lambda_1 - R_{13}h_1)^2}{2(1 - R_{13}^2)} \right] \right\}^{-1} \times \\ & \times \left\{ -n \sqrt{D_{44}} \Phi(\gamma) \exp \left[-\frac{\beta^2}{2D(1 + \alpha^2)} \right] + m \sqrt{D_{33}} \left[1 - \Phi \left(\frac{\lambda_1 - R_{13}h_1}{\sqrt{1 - R_{13}^2}} \right) \right] \right\} \times \\ & \times \exp \left(-\frac{p^2}{2D} \right) + \sqrt{\frac{D}{2\pi}} \exp \left(-\frac{p^2 + l^2}{2D} \right) - \\ & - \sqrt{\frac{2\pi}{(1 - \rho^2) DD_{33} D_{44}}} \left(\frac{m}{n} p^2 D_{33} - DD_{34} \right) J \left(-\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{33}}; \right. \\ & \left. \frac{n}{\beta_1} \sqrt{D_{44}}; \rho \right) \Bigg\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Значения всех величин, фигурирующих в правой части выражения (8), приведены в [2].

При вычислениях можно воспользоваться соотношением

$$\begin{aligned} J \left(-\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{33}}; \frac{n}{\beta_1} \sqrt{D_{44}}; \rho \right) = & 0,5 \left[1 - \Phi \left(-\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{33}} \right) - \right. \\ & \left. - \Phi \left(\frac{n}{\beta_1} \sqrt{D_{44}} \right) \right] - T \left(-\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{33}}; a_1 \right) - T \left(\frac{n}{\beta_1} \sqrt{D_{44}}; a_2 \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= (-n \sqrt{D_{44}} + \rho m \sqrt{D_{33}})/m \sqrt{D_{33}(1 - \rho^2)}, \\ a_2 &= (-m \sqrt{D_{33}} + \rho n \sqrt{D_{44}})/n \sqrt{D_{44}(1 - \rho^2)}. \end{aligned}$$

Соотношение (9) справедливо, если $\beta_1^{-1} m \sqrt{D_{33}} < 0$, $\beta_1^{-1} n \sqrt{D_{44}} > 0$ или $\beta_1^{-1} m \sqrt{D_{33}} \geq 0$, $\beta_1^{-1} n \sqrt{D_{44}} < 0$. Если же $\beta_1^{-1} m \sqrt{D_{33}} \geq 0$, $\beta_1^{-1} n \sqrt{D_{44}} \geq 0$ или $\beta_1^{-1} m \sqrt{D_{33}} < 0$, $\beta_1^{-1} n \sqrt{D_{44}} < 0$, то вместо (9) следует использовать соотношение

$$J = \left(-\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{3,3}}; \frac{n}{\beta_1} \sqrt{D_{4,4}}; \rho \right) = 1 - 0,5 \left[\Phi \left(-\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{3,3}} \right) - \right. \\ \left. - \Phi \left(\frac{n}{\beta_1} \sqrt{D_{4,4}} \right) \right] - T \left(-\frac{m}{\beta_1} \sqrt{D_{3,3}}; -a_1 \right) - T \left(\frac{n}{\beta_1} \sqrt{D_{4,4}}; -a_2 \right). \quad (10)$$

Функция $T(h, a)$ табулирована в [4].

Из (8) следуют все результаты анализа (в райсовом приближении) плотности вероятности длительности выброса, полученные до настоящего времени.

Так, при $a(t) = c_0 + c_1 \psi_1(t)$, $\zeta(t) = 0$, $g(t) = \psi(t) - c_2 \psi_2(t)$ выражение (8) сводится к выражению для плотности вероятности длительности выброса нестационарного случайного процесса

$$Y(t) = [c_0 + c_1 \psi_1(t)] \varepsilon(t) + c_2 \psi_2(t)$$

(c_0, c_1, c_2 — константы, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — детерминированные процессы за детерминированный уровень $\psi(t)$ [5]).

При $a(t) = 1$, $\zeta(t) = 0$ и $g(t) = H - S(t)$ выражение (8) совпадает с результатами работ [6] и [7], где рассмотрены выбросы суммы детерминированного немодулированного [6] или модулированного [7] сигнала $S(t)$ и стационарного гауссова шума $\varepsilon(t)$ за фиксированный уровень H .

Если же $a(t) = 1$, $\zeta(t) = 0$ и $g(t) = 0$, выражение (8) соответствует результату работы [3].

Благодарю Н. Г. Гаткина и М. И. Карновского за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- Г. А. Андреев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 8, 1123 (1967).
- В. А. Геранин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 12, 1823 (1969).
- В. И. Тихонов, Радиотехника и электроника, 1, 23 (1956).
- Н. В. Смирнов, Л. Н. Большев, Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения, изд. АН СССР, М., 1962.
- Н. Г. Гаткин, В. А. Геранин, М. И. Карновский, И. И. Козлов, Л. Г. Красный, Изв. высш. уч. зав. — Радиоэлектроника, 12, 550 (1969).
- Н. Г. Гаткин, В. А. Геранин, М. И. Карновский, Л. Г. Красный, Доклад на VI Всесоюзной акустической конференции, М., 1968.
- В. А. Геранин, Радиотехника и электроника, 14, 2085 (1969).

Киевский политехнический институт

Поступила в редакцию
19 января 1970 г.

THE PROBABILITY DENSITY OF PIP DURATION OF THE NONSTATIONARY RANDOM PROCESS

V. A. Geranin

An expression is derived for the one-dimensional probability density of pip duration of the nonstationary random processes outside the random level represented as an additive mixture of determined and random processes. The problem is solved in the Rice approximation. The known results of the pip duration probability density obtained in this approximation are the particular cases followed from the work presented.

УДК 538.56

ИЗЛУЧЕНИЕ ЩЕЛИ В ЭКРАНЕ ИЗ-ПОД ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ С ПРОДОЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

B. K. Полищук

В предположении слабой продольной неоднородности слоя методом последовательных приближений найдена поправка к диаграмме направленности щели в экране, находящейся под слоем однородного диэлектрика.

Рассмотрим систему (рис. 1), состоящую из плоского металлического экрана, диэлектрического слоя, занимающего область V_1 , и сво-

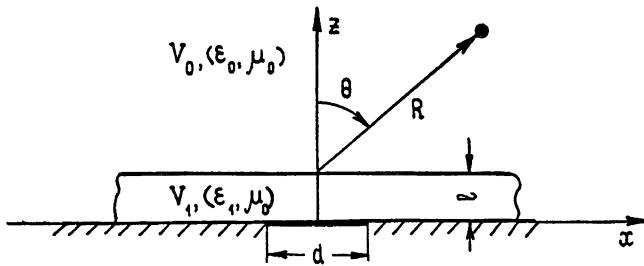


Рис. 1.

бодного однородного полупространства (область V_0) с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 . В экране имеется бесконечная (вдоль оси y) син-фазно возбужденная щель ширины d . Диэлектрическая проницаемость слоя ϵ_1 считается медленно меняющейся вдоль оси x и постоянной по нормали к границам.

Если $\epsilon_1(x)$ изменяется достаточно медленно и не обращается в нуль вблизи щели, то эта функция может быть аппроксимирована некоторой аналитической функцией с малым параметром, не имеющей нулей и особенностей вблизи точки $x = 0$. В качестве аппроксимирующей мы возьмем функцию $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon \exp(\alpha k_0 x)$, где ϵ — значение относительной диэлектрической проницаемости слоя в точке $x = 0$, α — безразмерный малый параметр, k_0 — волновое число свободного пространства.

В рассматриваемой системе возбуждается единственная составляющая магнитного поля H_v . Для ее нахождения определим вначале функцию Грина для волнового уравнения и безграничного пространства с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 .

Функция Грина $G(x, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha k_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0' \epsilon \exp(\alpha k_0 x) \right) G = \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \quad (1)$$

и условиям излучения. Применим к (1) преобразование Фурье, для че-

го умножим обе части на $\exp[ik_0(\lambda x + \mu z)]$ и проинтегрируем по всему пространству. Для спектральной плотности

$$G(\lambda, \mu) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(x, z) \exp[ik_0(\lambda x + \mu z)] dx dz$$

получим разностное уравнение

$$\begin{aligned} (\epsilon - \lambda^2 + i\alpha\lambda - \mu^2) G(\lambda, \mu) - \frac{\exp[ik_0(\lambda x_0 + \mu z_0)]}{k_0^2} &= \\ &= \epsilon [G(\lambda, \mu) - G(\lambda - i\alpha, \mu)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем решать уравнение (2) методом последовательных приближений, считая разность $G(\lambda, \mu) - G(\lambda - i\alpha, \mu)$ малой при малых α . В качестве начального приближения возьмем функцию

$$G^0 = \frac{\exp[ik_0(\lambda x_0 + \mu z_0)]}{k_0^2(\epsilon - \lambda^2 + i\alpha\lambda - \mu^2)},$$

которая получается из (2) при нулевом значении Γ .

Будем обозначать далее всякую функцию $f(\zeta)$ в точке $\zeta = \lambda \pm im\alpha$ ($m = 0, 1, \dots$) через $f_{\pm m}$. Пользуясь разложением в ряд Тейлора, легко показать, что для аналитической функции $f(\zeta)$ с точностью до малых второго порядка по α верно равенство

$$f - f_{-1} = f_{-1} - f_{-2}. \quad (3)$$

Подставляя G^0 в правую часть (2) и пользуясь равенством (3), получим в качестве первого приближения функцию

$$G = \frac{\exp(i k_0 \mu z_0)}{k_0^2(\gamma^2 - \mu^2)} \left\{ 1 + \epsilon \left[\frac{\exp(i k_0 \lambda_{-1} x_0)}{\gamma_{-1}^2 - \mu^2} - \frac{\exp(i k_0 \lambda_{-2} x_0)}{\gamma_{-2}^2 - \mu^2} \right] \right\}, \quad (4)$$

где $\gamma = \sqrt{\epsilon - \lambda \lambda_{-1}}$, причем, $\operatorname{Im} \gamma \leq 0$.

Правая часть (4) является мероморфной функцией μ с простыми полюсами в точках $\mu = \pm \gamma, \pm \gamma_{-1}, \pm \gamma_{-2}$. Применяя к (4) обратное преобразование Фурье по μ и вычисляя интеграл с помощью вычетов, получим

$$\begin{aligned} G(\lambda, z) &= \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda, \mu) \exp(-ik_0 \mu z) d\mu = \\ &= \frac{i}{2k_0} \left\{ \frac{\exp[ik_0(\lambda x_0 - \gamma |z - z_0|)]}{\gamma} + \frac{\epsilon \exp(i k_0 \lambda_{-1} x_0)}{\lambda_{-1}(\lambda - \lambda_{-2})} \times \right. \\ &\times \left[\frac{\exp(-ik_0 \gamma |z - z_0|)}{\gamma} - \frac{\exp(-ik_0 \gamma_{-1} |z - z_0|)}{\gamma_{-1}} \right] - \\ &- \left. \frac{\epsilon \exp(i k_0 \lambda_{-2} x_0)}{\lambda \lambda_{-1} - \lambda_{-2} \lambda_{-3}} \left[\frac{\exp(-ik_0 \gamma |z - z_0|)}{\gamma} - \frac{\exp(-ik_0 \gamma_{-2} |z - z_0|)}{\gamma_{-2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть теперь распределение стороннего тока отлично от точечного. Тогда решение $u(x, z)$ уравнения (1) с правой частью в виде некоторой функции $v(x, z)$ можно получить с помощью свертки $v(x, z)$ с функцией Грина. В том числе для спектральной плотности $u(\lambda, z)$ получим выражение

$$u(\lambda, z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda, x_0; z, z_0) v(x_0, z_0) dx_0 dz_0.$$

Поскольку наличие границ слоя с координатами $z=0, l$ можно интерпретировать как наличие тока,

$$v(x, z) = g(x) \delta(z - 0) + h(x) \delta(z - l), \quad (6)$$

с неизвестными плотностями распределения g и h , то спектральную плотность поля $H_y(\lambda, z)$ в слое можно получить сверткой (6) с (5). В результате мы получим следующее выражение для $H_y(\lambda, z)$ через спектральные плотности $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$:

$$\begin{aligned} H_y(\lambda, z) = & \frac{i}{2k_0} \left\{ g\varphi(z) + h\varphi(l-z) + \frac{\varepsilon}{\lambda_{-1}(\lambda - \lambda_{-2})} \times \right. \\ & \times [g_{-1}(\varphi(z) - \varphi_{-1}(z)) + h_{-1}(\varphi(l-z) - \varphi_{-1}(l-z))] - \\ & - \left. \frac{\varepsilon}{\lambda\lambda_{-1} - \lambda_{-2}\lambda_{-3}} [g_{-2}(\varphi(z) - \varphi_{-2}(z)) + h_{-2}(\varphi(l-z) - \varphi_{-2}(l-z))] \right\}, \\ \varphi(z) = & \gamma^{-1} \exp(-ik_0\gamma z). \end{aligned} \quad (7)$$

Составляющая электрического поля $E_x(x, z)$ в слое связана с $H_y(x, z)$ уравнением Максвелла

$$E_x(x, z) = -\frac{1}{i\omega\varepsilon_1} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z} = \frac{i\omega_0}{k_0\varepsilon} \exp(-\alpha k_0 x) \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z}, \quad (8)$$

где ω_0 — волновое сопротивление свободного пространства.

Применяя к (8) преобразование Фурье по x и пользуясь формулой (7), получим для функции $E_x(\lambda, z)$ выражение

$$\begin{aligned} E_x(\lambda, z) = & \frac{i\omega_0}{2k_0\varepsilon} \left\{ g_1\psi(z) - h_1\psi_1(l-z) + \frac{\varepsilon}{\lambda(\lambda_1 - \lambda_{-1})} \times \right. \\ & \times [g(\psi_1(z) - \psi(z)) - h(\psi_1(l-z) - \psi(l-z))] - \\ & - \left. \frac{\varepsilon}{\lambda_1\lambda - \lambda_{-1}\lambda_{-2}} [g_{-1}(\psi_1(z) - \psi_{-1}(z)) - h_{-1}(\psi_1(l-z) - \psi_{-1}(l-z))] \right\}, \\ \psi(z) = & \exp(-ik_0\gamma z). \end{aligned} \quad (9)$$

В области $z > l$ (в свободном пространстве) с помощью волнового уравнения, условия излучения при $z \rightarrow +\infty$ и преобразования Фурье по x можно для функций $H_y(\lambda, z)$ и $E_x(\lambda, z)$ получить выражение

$$H_y(\lambda, z) = (\omega_0\gamma_0)^{-1} E_x(\lambda, z) = f(\lambda) \exp[-ik_0\gamma_0(z-l)], \quad (10)$$

где $\gamma_0 = \sqrt{1 - \lambda^2}$.

Для определения неизвестных функций $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ нужно на E_x и H_y наложить граничные условия. Для этого на границе $z=0$ (на экране) положим напряженность электрического поля $E_x(x, 0)$ равной $I(x)$ в щели ($|x| < d/2$) и равной нулю вне щели, или, после преобразования Фурье, $E_x(\lambda, 0) = I(\lambda)$. Приравнивая выражение (9) при значении $z=0$ к $I(\lambda)$ и делая по переменной λ линейный сдвиг на величину $-i\alpha$, получим уравнение

$$g - he^{-i\alpha} = \frac{2k_0\varepsilon}{i\omega_0} I_{-1} + \varphi^1, \quad (11)$$

где

$$\varphi^1 = \frac{\varepsilon h_{-1} (e^{-i\Delta} - e^{-i\Delta-1})}{\lambda_{-1} (\lambda - \lambda_{-2})} - \frac{\varepsilon h_{-2} (e^{-i\Delta} - e^{-i\Delta-2})}{\lambda \lambda_{-1} - \lambda_{-2} \lambda_{-3}},$$

$$\Delta = k_0 l \gamma.$$

Далее, на границе $z = l$ должны выполняться условия

$$H_y(\lambda, l - 0) = H_y(\lambda, l + 0), \quad E_x(\lambda, l - 0) = E_x(\lambda, l + 0).$$

Подставляя в эти равенства выражения (7), (9) и (10), получим еще два уравнения:

$$\begin{aligned} ge^{-i\Delta} + h + i2k_0 \gamma f &= \varphi^2, \\ ge^{-i\Delta} - h + i2k_0 \varepsilon \gamma_0 f &= \varphi^3, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= -\varepsilon \left[\frac{g_{-1} (e^{-i\Delta} - \gamma/\gamma_{-1} e^{-i\Delta-1}) + h_{-1} (1 - \gamma/\gamma_{-1})}{\lambda_{-1} (\lambda - \lambda_{-2})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g_{-2} (e^{-i\Delta} - \gamma/\gamma_{-2} e^{-i\Delta-2}) + h_{-2} (1 - \gamma/\gamma_{-2})}{\lambda \lambda_{-1} - \lambda_{-2} \lambda_{-3}} \right], \\ \varphi^3 &= -\varepsilon \left[\frac{g_{-1} (e^{-i\Delta} - e^{-i\Delta-1})}{\lambda_{-1} (\lambda - \lambda_{-2})} - \frac{g_{-2} (e^{-i\Delta} - e^{-i\Delta-2})}{\lambda \lambda_{-1} - \lambda_{-2} \lambda_{-3}} - \right. \\ &\quad \left. - 2ik_0 (\gamma_0 f - (\gamma_0 f)_{-1}) \right]. \end{aligned}$$

Уравнения (11), (12) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных f , g и h и составлены таким образом, что в правых частях члены φ^k ($k = 1, 2, 3$) малы по параметру α . Система (11), (12) является в то же время системой разностных уравнений, так как в выражения для φ^k входят неизвестные функции f_{-1} , g_{-1} и т. д. Поскольку при этом члены φ^k малы, то можно снова применить метод последовательных приближений.

В качестве нулевого приближения возьмем решение системы (11), (12) при всех $\varphi^k = 0$. Подставляя выбранные нулевые приближения для f , g и h в правую часть этой системы, можно получить первое приближение для функции $f(\lambda)$,

$$\begin{aligned} f &= (\omega_0 T)^{-1} \left\{ I_{-1} + \frac{(e^{-i\Delta} - e^{-i\Delta-1})(\gamma - \varepsilon \gamma_0)_{-1} I_{-2}}{2(\lambda \lambda_{-1} - \lambda_{-1} \lambda_{-2}) T_{-1}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(e^{-i\Delta} - e^{-i\Delta-2})(\gamma - \varepsilon \gamma_0)_{-2} I_{-3}}{2(\lambda \lambda_{-1} - \lambda_{-2} \lambda_{-3}) T_{-2}} + \right. \\ &+ i \sin \Delta \left[I_{-2} \frac{(\gamma_{-1} \exp [i(\Delta_{-1} - \Delta)] - \gamma)(\gamma + \varepsilon \gamma_0)_{-1} + (\gamma_{-1} - \gamma)(\gamma - \varepsilon \gamma_0)_{-1}}{2 \gamma_{-1} (\lambda \lambda_{-1} - \lambda_{-1} \lambda_{-2}) T_{-1}} - \right. \\ &- I_{-3} \frac{(\gamma_{-2} \exp [i(\Delta_{-2} - \Delta)] - \gamma)(\gamma + \varepsilon \gamma_0)_{-2} + (\gamma_{-2} - \gamma)(\gamma - \varepsilon \gamma_0)_{-2}}{2 \gamma_{-2} (\lambda \lambda_{-1} - \lambda_{-2} \lambda_{-3}) T_{-2}} \left. \right] + \\ &+ \cos \Delta \left[\frac{(\exp [i(\Delta_{-1} - \Delta)] - 1)(\gamma + \varepsilon \gamma_0)_{-1} I_{-2}}{2(\lambda \lambda_{-1} - \lambda_{-1} \lambda_{-2}) T_{-1}} - \right. \\ &- \frac{(\exp [i(\Delta_{-2} - \Delta)] - 1)(\gamma + \varepsilon \gamma_0)_{-2} I_{-3}}{2(\lambda \lambda_{-1} - \lambda_{-2} \lambda_{-3}) T_{-2}} + \frac{\gamma_0 I_{-1}}{T} - \left(\frac{\gamma_0 I_{-1}}{T} \right)_{-1} \left. \right], \end{aligned} \quad (13)$$

$$T = \gamma_0 \cos \Delta + i(\gamma/\varepsilon) \sin \Delta.$$

Выражения для g и h мы выписывать не будем, так как в дальнейшем будем интересоваться лишь полем в области $z > l$.

Для упрощения (13) воспользуемся следующими соображениями.

1. Рассматриваемый неоднородный слой возбуждается относительно слабее при распределенном источнике, чем при точечном, так как последний формирует наиболее широкую диаграмму направленности. Поэтому неоднородность слоя должна сказываться наиболее сильно при точечном источнике. Устремляя ширину щели к нулю, получим в качестве $I(\lambda)$ константу $I(\lambda) = I_0$. Тогда функция $f(\lambda)$, согласно (13), представится в виде $f(\lambda) = f_0(\lambda)[1 + \delta(\lambda)]$, где $f_0(\lambda) = I_0/w_0 T$ — значение функции $f(\lambda)$ для однородного слоя, а $\delta(\lambda)$ — поправка, вызванная неоднородностью, причем, $\delta(\lambda) = o(1)$.

2. Будем считать, что диэлектрический слой обладает потерями ($\operatorname{Im} \varepsilon \neq 0$). В этом случае возбуждаемые в нем поверхностные волны полностью поглощаются, и поле излучения, представленное интегралом Фурье, можно вычислить методом перевала. Применяя к формуле (10) обратное преобразование Фурье и вычисляя его методом перевала, получим (в полярной системе координат)

$$\begin{aligned} H_y(R, \theta) &= \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \exp[-ik_0 R(\lambda \sin \theta + \gamma_0 \cos \theta)] d\lambda \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{ik_0}{2\pi R}} \exp(-ik_0 R) F(\theta) \quad (R \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (14)$$

где положено $F(\theta) = f(\sin \theta) \cos \theta$.

3. При больших потерях и большой толщине слоя можно пренебречь многократным отражением от границ. Это означает, что при $\lambda = \sin \theta$ в формуле (13) можно пренебречь членами, содержащими множитель $e^{-i\Delta}$, по сравнению с членами, содержащими множитель $e^{i\Delta}$.

4. При $\lambda = \sin \theta$ и при больших по модулю значениях ε ($|\varepsilon| \geq 3$) функция γ практически постоянна во всем диапазоне углов $|\theta| \leq \pi/2$, причем, $\gamma \approx \sqrt{\varepsilon}$.

Записывая далее для функций γ_m и $\exp[i(\Delta - \Delta_m)]$ ($m = 1, 2$), входящих в (13), разложения по степеням α с точностью до малых третьего порядка и используя пп. 1—4, получим следующие расчетные формулы:

для поправки

$$\begin{aligned} \delta(\sin \theta) &= \alpha \sin \theta \left[\frac{2k_0 l \sqrt{\varepsilon} + i}{4\varepsilon(1 + \sqrt{\varepsilon} \gamma_0)} - \frac{5k_0 l + i(k_0 l)^2 \sqrt{\varepsilon}}{4\sqrt{\varepsilon}} \right] - \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + \sqrt{\varepsilon} \gamma_0} - \frac{1}{(1 + \sqrt{\varepsilon} \gamma_0)^{-1}} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$(\gamma_0)^{-1} = \sqrt{\cos^2 \theta + 2i\alpha \sin \theta};$$

для диаграммы направленности

$$F(\theta) = F_0(\theta)[1 + \delta(\sin \theta)], \quad F_0(\theta) = \frac{(1 + \sqrt{\varepsilon}) \cos \theta}{1 + \sqrt{\varepsilon} \cos \theta} F_0(0). \quad (16)$$

Из формулы (15) следует, что продольная неоднородность не сказывается на величине поля в основном направлении, так как $\delta(0) = 0$.

Полученное представление поправки через конечные разности ограничено при всех θ и является поэтому более удобным, чем ряд теории возмущений, члены которого не ограничены при $\theta = \pi/2$. В самом деле, при $\theta = \pi/2$ функция $\gamma_0(\sin \theta) = \cos \theta$ обращается в нуль и главным членом в (15) оказывается выражение

$$-\frac{1}{2} [1 - (1 + \sqrt{2i\alpha\varepsilon})^{-1}], \quad (17)$$

содержащее параметр α в степени $1/2$. Таким образом, поле излучения не может быть представлено в виде ряда по целым степеням малого параметра во всем диапазоне углов $|\theta| \leq \pi/2$.

На рис. 2 приведены графики для поправки и нормированных ди-

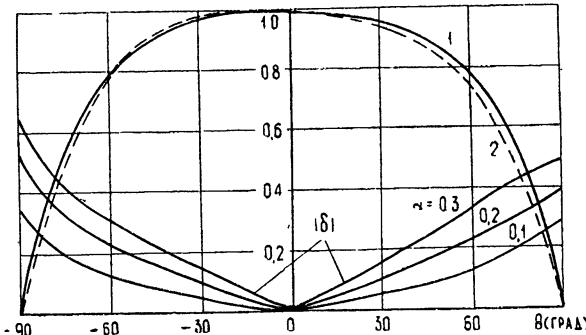


Рис. 2. 1 — $|F(\theta)/F_0(0)|$, 2 — $|F(\theta)/F(0)|$.

грамм направленности, рассчитанные по формулам (15) и (16) при следующих значениях параметров: $k_0 l = 1$; $\varepsilon = -(3+4i)$; $\alpha = 0,1; 0,2; 0,3$; причем функция $F(\theta)$ дана лишь для случая $\alpha = 0,3$. Из рисунка видно, что для скользящих углов с ростом α модуль поправки δ довольно быстро возрастает за счет члена (17), приближаясь к единице. Однако на диаграмме направленности это оказывается незначительно, так как, согласно (14), излучение вдоль поглощающего слоя вообще отсутствует.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
2 апреля 1970 г.

RADIATION FROM A SLOT IN THE SCREEN BEING UNDER THE DIELECTRIC LAYER WITH LONGITUDINAL INHOMOGENEITY

V. K. Polishchuk

The correction on the radiation pattern of a slot in the screen being under the uniform dielectric layer has been found by the iteration method in the assumption of a weak longitudinal inhomogeneity of the layer.

УДК 621.372 826

ОТКРЫТЫЕ РЕЗОНАТОРЫ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ

А. Б. Маненков

В миллиметровом диапазоне волн с помощью подвижного зеркала экспериментально исследовано распределение полей в открытых резонаторах с диэлектрическими стенками. Измерена добротность таких резонаторов как функция длины волны. Рассмотрено влияние отверстия связи резонатора с волноводом на собственные частоты колебаний и их добротности. Результаты измерений сопоставлены с теоретическими соотношениями.

1. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

В работах [1-3] изложены результаты предварительных исследований открытых резонаторов с диэлектрическими стенками. Такие резонаторы представляют собой отрезки цилиндров со стенкой из концентрических диэлектрических труб, замкнутых накоротко металлическими зеркалами. Вследствие селективного отражения волн диэлектрической стенкой в такой системе могут существовать несколько добротных колебаний. Цель настоящей работы — экспериментальная проверка теоретических соотношений, изложенных в статьях [1, 2].

В данной работе был исследован резонатор, изображенный на рис. 1. Резонатор возбуждался от клистронного генератора волноводом

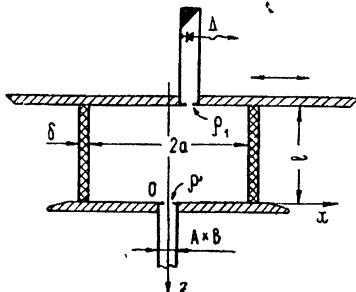


Рис. 1. Открытый резонатор с диэлектрической стенкой, возбуждаемый волноводом.

параллельно нижнему, и амплитуда сигнала на детекторе D (рис. 1) измерялась пиковым вольтметром. При таком способе измерения возбуждающее отверстие в нижнем зеркале может быть достаточно большим. Связь резонатора с волноводом на подвижном зеркале должна быть малой, чтобы не исказить картину поля; радиус отверстия связи ρ_1 должен удовлетворять условиям

$$Q \frac{k^3 \rho_1^6}{la^2} \ll 1, \quad \rho_1 \ll \lambda, \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны, Q — добротность и l , a — размеры резонатора (рис. 1). Такой способ измерения является более точным, чем

через круглое отверстие связи в нижнем зеркале (диафрагмы в месте стыка волноводов и зеркал имели толщину $0,15 \div 0,25$ мм). Клистрон модулировался пилообразным напряжением с периодом 20 мсек. Резонансная кривая наблюдалась в осциллографе. Добротность колебаний измерялась динамическим методом с помощью меток на экране осциллографа [3]; погрешность измерения составляла около 10%.

Распределение поля, возбуждаемого в резонаторе, снималось с помощью подвижного зеркала [4]; верхнее зеркало могло перемещаться

измерения с помощью пробного тела [5], так как в последнем случае приходится проводить измерения малых изменений сигнала, а это при обычных нестабильностях и шумах генераторов и усилителей влечет за собой большую ошибку.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ И ДОБРОТНОСТИ КОЛЕБАНИЙ

На рис. 2 и 3 кружками представлено измеренное распределение поля $H^2(x)$ у зеркала для трех колебаний типа mnp (m — азимутальный, n — радиальный и p — продольный индексы) в резонаторе; направление оси x показано на рис. 1. Длина резонатора $l = 79$ мм, внутрен-

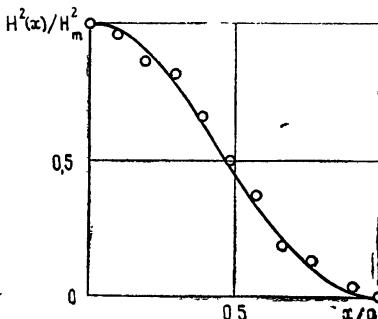


Рис. 2.

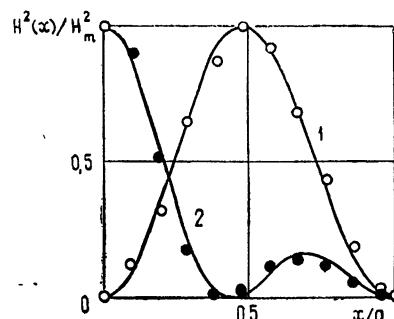


Рис. 3.

Рис. 2. Относительное распределение квадрата магнитного поля основного колебания $00q$ на зеркале открытого резонатора (H_m — максимальное значение магнитного поля). Частота колебания $f_{00q} = 32,32$ Гц.

Рис. 3. Относительное распределение квадрата поля высших типов колебаний (H_m — максимальное значение поля), 1 — колебание $10q$, 2 — колебание $01q$. Частоты колебаний: $f_{10q} = 32,44$ Гц, $f_{01q} = 32,64$ Гц.

ний радиус трубы $a = 52,5$ мм, толщина стенки, выточенной из оргстекла, $\delta = 5,6$ мм. Отверстие связи с волноводом в подвижном зеркале имело радиус 0,6 мм, а в неподвижном зеркале — 1,36 мм. На рис. 2, 3 изображены также теоретические кривые, построенные на основании формул работы [2].

Проведенные измерения показали, что радиационные потери колебаний быстро увеличиваются с ростом индексов m и n в соответствии с формулами работы [2]. В описанном резонаторе получены следующие экспериментальные значения добротностей (с учетом потерь на отверстиях связи и омических потерь в зеркалах): $Q_{00q} = 1,5 \cdot 10^4$, $Q_{10q} = 10^4$, $Q_{01q} = 0,2 \cdot 10^4$. Таким образом, резонаторы с диэлектрическими стенками имеют редкий спектр волновых чисел.

Отметим, что частота, соответствующая колебанию $10q$, вырождена (ср. [6], стр. 42) и соответствует двум колебаниям (не считая поляризационного вырождения). При небольших перекосах зеркал добротности и частоты этих колебаний изменяются из-за связи. Особенно отчетливо это перерождение наблюдалось в резонаторе с двухслойной стенкой, где добротности связанных колебаний при перекосах зеркал лежат в пределах $(3,2 \div 8,3) \cdot 10^4$.

3. ДОБРОТНОСТЬ ОСНОВНОГО КОЛЕБАНИЯ

Проводилось также исследование зависимости потерь основного колебания от длины волны. Добротность колебания $00q$ в резонаторе с однослойной стенкой, обусловленная потерями на излучение, определяется соотношением [2]:

$$Q_r = k/2h'', \quad h'' = (2 - |R_1|^2 - |R_2|^2) \delta/8a, \quad (2)$$

где $\delta \approx g_1/k \ll 1$ — угол скольжения лучей ($g_1a = 2,405$), $R_{1,2}$ — коэффициенты отражения плоских волн от диэлектрического слоя толщины δ для двух поляризаций. Формула (2) выведена с помощью приближенных граничных условий [1] в предположении, что коэффициенты отражения близки к -1 . Коэффициент затухания равен

$$h'' = \frac{(1 + \epsilon^2) \delta^3}{2a(\epsilon - 1) \sin^2(k\delta V_\epsilon - 1)}, \quad (3)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость стенки. При выводе соотношения (3) мы пренебрегли потерями в диэлектрике; в случае необходимости их можно учесть так же, как и в работе [2]. Коэффициент затухания может быть определен также из характеристического уравнения для волновых чисел, которое получается при сшивании полей на границах раздела сред [7]. Формулы (2), (3) неверны, если длина волны близка к значениям

$$\lambda_m = \frac{2\delta}{m} \sqrt{\epsilon - 1} \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

В этом случае коэффициенты отражения $R_{1,2}$ близки к нулю, поэтому радиационное затухание основного колебания в резонаторе велико.

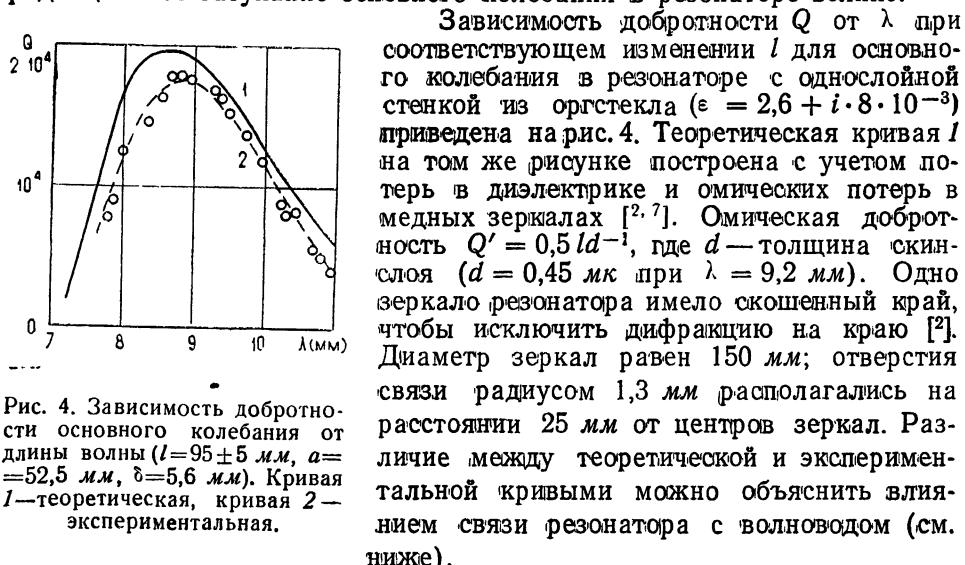


Рис. 4. Зависимость добротности основного колебания от длины волн ($l = 95 \pm 5$ мм, $a = 52,5$ мм, $\delta = 5,6$ мм). Кривая 1 — теоретическая, кривая 2 — экспериментальная.

Зависимость добротности Q от λ при соответствующем изменении l для основного колебания в резонаторе с однослойной стенкой из оргстекла ($\epsilon = 2,6 + i \cdot 8 \cdot 10^{-3}$) приведена на рис. 4. Теоретическая кривая 1 на том же рисунке построена с учетом потерь в диэлектрике и омических потерь в медных зеркалах [2, 7]. Омическая добротность $Q' = 0,5 l d^{-1}$, где d — толщина скин-слоя ($d = 0,45$ мк при $\lambda = 9,2$ мм). Одно зеркало резонатора имело склоненный край, чтобы исключить дифракцию на краю [2]. Диаметр зеркал равен 150 мм; отверстия связи радиусом 1,3 мм располагались на расстоянии 25 мм от центров зеркал. Различие между теоретической и экспериментальной кривыми можно объяснить влиянием связи резонатора с волноводом (см. ниже).

На рис. 5 представлена зависимость добротности Q от радиуса трубы a при $\lambda = 9,25$ мм. Труба была изготовлена из фторопластика-4 ($\epsilon = 2,08 + i \cdot 4 \cdot 10^{-4}$). Теоретическая кривая 1 построена с учетом омических потерь. Различие между теоретической и экспериментальной кривыми здесь также объясняется потерями на элементах связи (отверстия связи радиусом 1,3 мм располагались на расстоянии 15 мм от центра зеркала). На этом же рисунке пунктирной кривой 3 изображена теоретическая зависимость добротности $Q_r(a)$ при наличии только радиационных потерь.

Отметим, что при работе на основном колебании 00 q стенку резонатора желательно делать из вещества с небольшой диэлектрической проницаемостью. Например, при фиксированных размерах резонатора с однослойной стенкой радиационная добротность Q_r максимальна при $\epsilon = 2,414$. Однако, как видно из формулы (3), зависимость Q_r от

е довольно слабая (например, при $\epsilon \approx 8$ величина Q_r уменьшается вдвое по сравнению с максимальным значением).

4. ВЛИЯНИЕ ОТВЕРСТИЯ СВЯЗИ НА КОЛЕБАНИЯ В ОТКРЫТОМ РЕЗОНАТОРЕ

При измерениях добротностей колебаний в резонаторах с диэлектрическими стенками оказалось, что существенное значение имеют потери, обусловленные рассеянием полей на элементах связи. Влияние связи с волноводом на добротность колебаний в открытом резонаторе рассмотрено в работах [5, 6]. В этих работах, однако, нет оценки влияния второго зеркала на поле, рассеянное отверстием связи, и не учтена конечная толщина диафрагмы. Ниже изложен расчет связи резонатора с прямоугольным волноводом с учетом этих эффектов и приведены результаты измерений.

Будем рассматривать резонатор и волновод как одну систему, состоящую из двух связанных объемов, и исследуем собственные колебания такой системы. Малое круглое отверстие радиуса r ($r \ll \lambda$) в диафрагме толщины Δ эквивалентно двум магнитным диполям с моментами [9]

$$\mathbf{m}_{1,2} = \mathbf{x}_{1,2} H_s^0 \quad (5)$$

(H_s^0 — невозмущенное поле s -го колебания в резонаторе без отверстия), расположенным по обе стороны от идеально проводящих поверхностей. Поляризаемость диполя в резонаторе $\mathbf{x}_1 = r^3/3\pi^*$, а в волноводе — $\mathbf{x}_2 = -(r^3/3\pi) \exp(-1,84\Delta/r)$. Поле «квазисобственного» колебания в волноводной части составного резонатора имеет вид волны типа H_{10} , бегущей от отверстия связи (ср. [6], стр. 386). «Квазисобственное» колебание между зеркалами имеет вид суммы двух бегущих квазиплоских волн. При падении каждой такой волны на зеркало с отверстием наряду с правильным отражением, формирующим собственное колебание, происходит возбуждение сферической волны и волны в волноводе. Нетрудно показать, что мощность излучения из резонатора равна

$$P = \omega x_1^2 |H_s^0|^2 \left[\frac{2k^3}{3} - \frac{kl}{4N_s} |H_s^0|^2 + \frac{4\pi\hbar}{AB} e^{-3,68\Delta/r} \right], \quad (6)$$

где N_s — норма s -го колебания и $\hbar = \sqrt{k^2 - (\pi/A)^2}$ — продольное волновое число волны H_{10} в прямоугольном волноводе сечения $A \times B$ [10]. В формуле (6) первые два члена в квадратной скобке определяют мощность излучения диполя \mathbf{m}_1 в свободное пространство (при расчете учитывалось, что часть энергии сферической волны возвращается колебанию из-за наличия второго зеркала); третий член определяет мощность излучения диполя \mathbf{m}_2 в волновод. Диполь \mathbf{m}_1 кроме сферической волны возбуждает также квазиплоскую волну, поэтому в выражении (6) из полной мощности излучения диполя вычитается мощность, передаваемая этой волне, которая пропорциональна $|\mathbf{m}_1 H_s^0|^2 (l/N_s)$, где величина N_s/l определяет поток энергии квазиплоской волны. Вто-

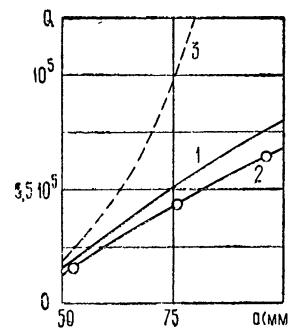


Рис. 5. Зависимость добротности основного колебания от радиуса трубы ($l = 92,8 \text{ мм}$, $\delta = 11,2 \text{ мм}$): 1 — теоретическая кривая, 2 — экспериментальная кривая, 3 — зависимость $Q_r (a)$.

активная излучающая поверхность

* В работе Вайнштейна [9], как указал автор, вместо коэффициента $(3\pi)^{-1}$ ошибочно приведен коэффициент $2 \cdot (3\pi)^{-1}$.

рой член в формуле (6) имеет порядок ka^{-2} , где a — средний размер поля у зеркала, и в рассматриваемом случае (при $ka \gg 1$) этот член мал по сравнению с остальными. Это объясняется тем, что диполь слабо возбуждает колебания в системе с широким пучком лучей, и большая часть энергии уходит в сферическую волну. Если же средний размер поля $a \sim \lambda$, то второй член в формуле (6) надо учитывать. Такой случай имеет место, например, в резонаторе, образованном плоским и сферическим зеркалами, при геометрии, близкой к концентрической [1]. Следует также отметить, что мощность, возвращаемая колебанию, становится существенной при возбуждении резонатора более распределенным источником, например, щелью.

Нагруженную добротность, т. е. добротность составного резонатора, определяем соотношением

$$Q_n = \frac{Q_0}{1 + \beta}, \quad \beta = \frac{2Q_0 P}{\omega N_s}, \quad (7)$$

где Q_0 — добротность резонатора без отверстия и β — коэффициент связи. Нетрудно показать, что наличие отверстия связи приводит к сдвигу частоты колебаний [6]:

$$\frac{\omega_s^1 - \omega_s^0}{\omega_s^0} = - \frac{x_1 |H_s^0|^2}{2N_s}. \quad (8)$$

Расчет вынужденных колебаний поля проводится методом, изложенным в книге [6] (стр. 385—391). При возбуждении резонатора сторонним током, находящимся в волноводе, поле равно сумме полей «квазисобственного» колебания и фона. Поле фона приближенно соответствует стоячей волне в короткозамкнутом волноводе. При резонансе коэффициент отражения R волны, возбуждаемой током в волноводе, связан с коэффициентом связи β соотношением

$$\beta = (1 - R)(R - 1 + 2\eta)^{-1}, \quad (9)$$

где

$$\eta = \frac{4\pi h}{AB} e^{-3.68 \Delta/p} \left[\frac{2k^3}{3} - \frac{kl}{4N_s} |H_s^0|^2 + \frac{4\pi h}{AB} e^{-3.68 \Delta/p} \right]. \quad (10)$$

Применим эти общие соотношения к резонатору с диэлектрической стенкой. Для основного колебания $00q$ имеем [2]

$$H_{sx}^0 = J_0(g_1 r) \cos kz, \quad N_s = (la^2/8) J_1^2(g_1 a). \quad (11)$$

В случае, когда отверстие связи расположено в центре зеркала, коэффициент связи равен

$$\beta = \frac{2Q_0 x_1^2}{N_s} \left[\frac{2k^3}{3} \left(1 - 0.28 \frac{\lambda^2}{a^2} \right) + \frac{4\pi h}{AB} e^{-3.68 \Delta/p} \right]. \quad (12)$$

На рис. 6 представлены теоретическая кривая и результаты измерения нагруженной добротности основного колебания в резонаторе с диэлектрической стенкой при изменении радиуса p отверстия связи с возбуждающим волноводом (сечение волновода $7.2 \times 3.4 \text{ мм}^2$). Зеркала для увеличения добротности Q_0 имели «острые» края [2] (диаметр зеркал равен 140 мм). Добротность резонатора при отсутствии отверстия в нижнем зеркале (при $p = 0$) определялась при возбуждении резонатора через отверстие в верхнем зеркале (радиус этого отверстия $p_1 = 0.85 \text{ мм}$). На рис. 6 представлена также экспериментальная зависимость $Q_n(p)$, рассчитанная по результатам измерения коэффи-

циента отражения волны в волноводе при резонансе. Коэффициент отражения измерялся с помощью направленного ответвителя.

Проводились измерения амплитуды поля и нагруженной добротности колебания в резонаторе при двух ориентациях волновода с приемным детектором (рис. 1) относительно возбуждающего волновода. Из этих измерений нетрудно вычислить параметр η , который опреде-

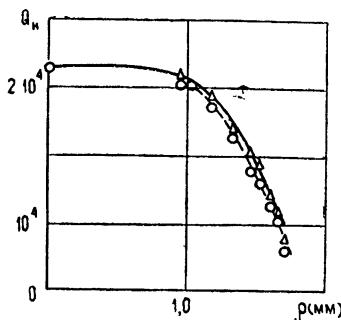


Рис. 6.

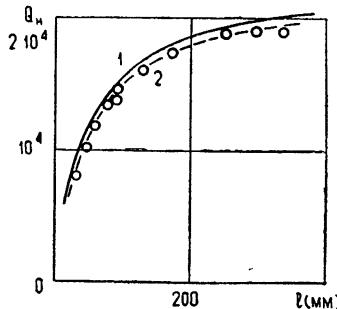


Рис. 7.

Рис. 6. Зависимость нагруженной добротности резонатора от радиуса отверстия связи с волноводом ($l=46,4$ мм, $a=52,5$ мм, $b=11,2$ мм, $\lambda=9,2$ мм); 1—теоретическая кривая, 2—экспериментальная кривая, 3—экспериментальные значения, рассчитанные по результатам измерения коэффициента отражения в волноводе (— 1, ○○○ 2, △△△ 3)

Рис. 7. Зависимость нагруженной добротности резонатора от длины l ($a=52,5$ мм, $b=11,2$ мм, $\lambda=9,25$ мм).

ляет отношение мощности излучения в волновод к полной мощности, рассеиваемой на отверстии связи. Результаты опыта находятся в хорошем согласии с расчетом, учитывающим толщину диафрагмы.

Измерялась также зависимость нагруженной добротности резонатора от расстояния между зеркалами l . В этом опыте медные зеркала диаметром 150 мм имели склоненные края; отверстия связи радиуса 1,35 мм находились в центре обоих зеркал. Результаты эксперимента и теоретическая кривая изображены на рис. 7.

В работе экспериментально исследованы основные типы колебаний открытых резонаторов с диэлектрическими стенками. Полученные на опыте распределения полей, значения добротности и частоты колебаний хорошо согласуются с расчетными. Показано, что в таких резонаторах действительно достигается разрежение спектра волновых чисел. Расчет, проведенный в работе [2], показал, что добротность основного колебания в резонаторе с однослоиной стенкой сравнительно слабо зависит от потерь в диэлектрике и сохраняется высокой в широком диапазоне длин волн, за исключением узких зон прозрачности стенок. Результаты эксперимента подтверждают эти выводы.

Резонаторы с диэлектрическими стенками могут найти применение в миллиметровой технике [3].

Автор благодарит П. Л. Капицу за интерес к работе, Л. А. Вайнштейна, В. Н. Мелехина и Е. Л. Косярева за обсуждение ее. Автор выражает признательность Ю. Н. Казанцеву за внимание и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Мелехин, А. Б. Маненков, ЖТФ, 38, 12, 2113 (1968).
2. В. Н. Мелехин, А. Б. Маненков, Электроника больших мощностей, сб. 6, изд. Наука, М., 1969, стр. 161.
3. А. Б. Маненков, Электроника больших мощностей, сб. 6, изд. Наука, М., 1969, стр. 179.
4. Д. Аустон, Р. Примич, Р. Хаями, Квазиоптика, сборник докладов, изд. Мир, М., 1966, стр. 387.
5. Е. Л. Косяров, Ю. М. Чипенюк, Электроника больших мощностей, сб. 5, изд. Наука, М., 1968, стр. 105.
6. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
7. Ю. Н. Казанцев, Радиотехника и электроника, 14, № 7, 1165 (1969).
8. Ю. Н. Казанцев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 4, 518 (1967).
9. Л. А. Вайнштейн, Электроника больших мощностей, сб. 3, изд. Наука, М., 1964, стр. 221.
10. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
11. А. Б. Маненков, Электроника больших мощностей, сб. 5, изд. Наука, М., 1968, стр. 64.

Институт физических проблем
АН СССР

Поступила в редакцию
21 апреля 1970 г.

OPEN RESONATORS WITH DIELECTRIC WALLS

A. B. Manenkov

The field distribution in open resonators with dielectric walls has been experimentally investigated in millimeter range using a movable mirror. The quality of these resonators as a function of wavelength is measured. The influence of the coupling hole between the resonator and the waveguide on inherent oscillation frequencies and their qualities is considered. The measurement results are compared with theoretical calculations.

УДК 538.56

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТЕНЗОРА ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ И ЕМКОСТИ ТЕЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

A. Г. Рамм

Даны формулы для вычисления с заданной точностью тензора поляризуемости и емкости тела произвольной формы. Приведены примеры.

В работах [1, 2] построены итерационные процессы решения задач электростатики. С точки зрения вычислителя эти методы сводят решение задач электростатики к квадратурам. В данной статье показано, что упомянутые методы позволяют получить приближенные аналитические формулы для функционалов, представляющих практический интерес, например, для емкости, тензора поляризуемости. Численные примеры показывают, что полученные формулы пригодны для практического использования.

1. Постановка задачи и формулировка результатов. Пусть D — однородное тело произвольной формы, Γ — его кусочно-гладкая, не имеющая заострений, поверхность (ребра и конические точки допускаются), V — объем тела, S — площадь его поверхности, ϵ_i — диэлектрическая постоянная тела, ϵ_e — диэлектрическая постоянная среды, $\gamma = (\epsilon_i - \epsilon_e)/(\epsilon_i + \epsilon_e)$. Пусть тело находится в однородном электростатическом поле E и приобретает дипольный момент $P_i = \alpha_{ij}(\gamma) V \epsilon_e E_j$. Здесь и ниже по повторяющимся индексам надо суммировать. Тензор поляризуемости $\alpha_{ij}(\gamma)$ вычислен лишь для эллипсоидов и их предельных форм (шар, диск, игла) [3]. В [2] показано, что задача рассеяния на теле, малом по сравнению с длиной волны первичного поля, сводится к расчету тензора поляризуемости этого тела. При $\epsilon_i = \infty$, $\gamma = 1$ (случай идеально проводящего тела) тензор $\alpha_{ij}(\gamma)$ будем обозначать α_{ij} . При $\epsilon_i = 0$, $\gamma = -1$ (случай идеального изолятора) тензор $\alpha_{ij}(\gamma)$ будем обозначать β_{ij} . При внесении идеально проводящего тела, магнитная проницаемость которого мало отличается от магнитной проницаемости среды, в квазистационарное электромагнитное поле, это тело приобретает магнитный момент $M_i = \beta_{ij} V \mu_e H_j$, где H — вектор магнитного поля в точке нахождения малого тела [3]. Сверхпроводник в постоянном магнитном поле ведет себя как изолятор в равном по величине электрическом поле, поскольку в сверхпроводнике $B = 0$ [3]. Поэтому для многих приложений важно уметь вычислять тензор поляризуемости [10]. Электрическая емкость C проводника представляет интерес для многих приложений [4]. Для формулировки результатов введем величины

$$b_{ij}^{(0)} = V \delta_{ij}, \quad b_{ij}^{(1)} = \iint_{\Gamma \Gamma} \frac{N_i(t) N_j(s)}{r_{ts}} ds dt, \quad r_{ts} = |t - s|, \quad (1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $N_i(t)$ — проекции орта внешней к поверхности Γ нормали на декартовы оси, ds, dt — элементы площади поверхности,

$$b_{ij}^{(m)} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} ds dt N_i(t) N_j(s) \underbrace{\int_{\Gamma} \dots \int_{\Gamma}}_{m-1} \frac{1}{r_{st_{m-1}}} \Psi(t_1, t) \Psi(t_2, t_1) \dots \Psi(t_{m-1}, t_{m-2}) \times \\ \times dt_1 \dots dt_{m-1}, \quad (2)$$

где $\Psi(t, s) = \frac{\partial}{\partial N_t} \frac{1}{r_{ts}}$. Положим

$$\alpha_{ij}^{(n)}(\gamma) = \frac{2}{V} \sum_{m=0}^n b_{ij}^{(m)} \frac{(-1)^m}{(2\pi)^m} \frac{\gamma^{n+2} - \gamma^{m+1}}{\gamma - 1}; \quad (3)$$

$$C^{(n)} = 4\pi\epsilon_e S^2 (-2\pi)^n \left[\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{dt ds}{r_{ts}} \underbrace{\int_{\Gamma} \dots \int_{\Gamma}}_n \Psi(t, t_1) \Psi(t_1, t_2) \dots \Psi(t_{n-1}, t_n) \times \right. \\ \left. \times dt_1 \dots dt_n \right]^{-1}. \quad (4)$$

Теорема 1. Имеют место оценки

$$|\alpha_{ij}(\gamma) - \alpha_{ij}^{(n)}(\gamma)| \leq A_1 q^{n+1}, \quad |C - C^{(n)}| \leq A_2 q^{n+1}, \quad C^{(0)} \leq C, \quad (5)$$

где $0 < q < 1$, A_1, A_2 — постоянные, зависящие только от формы поверхности и параметра γ .

Замечание 1. При $\gamma = 1$, $n = 1$ формула (3) выведена в работе [2]. При $n = 0$ формула (4) является аналитической записью эмпирического метода Хоу для вычисления емкости [4], а при $n > 0$ дает уточнение этого метода. При $\gamma = \pm 1$ из формулы (3) легко получить формулы для величин $\alpha_{ij}^{(n)}, \beta_{ij}^{(n)}$, аппроксимирующих тензоры α_{ij}, β_{ij} :

$$\alpha_{ij}^{(n)} = \frac{2}{V} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(2\pi)^m} (n-m+1) b_{ij}^{(m)}, \quad (6)$$

$$\beta_{ij}^{(n)} = \frac{1}{V} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m+1} - 1}{(2\pi)^m} b_{ij}^{(m)}.$$

В частности, при $n = 1$ получаем формулы

$$\alpha_{ij}^{(1)}(\gamma) = 2\delta_{ij}(\gamma + \gamma^2) - \frac{\gamma^2}{\pi V} b_{ij}^{(1)}, \quad \alpha_{ij}^{(1)} = 4\delta_{ij} - \frac{b_{ij}^{(1)}}{\pi V}, \quad \beta_{ij}^{(1)} = -\frac{b_{ij}^{(1)}}{\pi V}. \quad (7)$$

2. Доказательство теоремы. При доказательстве существенно используются результаты работ [1, 2]. Выполним формулу (3). Формула (4) выводится аналогично, но проще. Интегральное уравнение для плотности поверхностных зарядов, которые наводятся на тело внешним полем, имеет вид (см.: [1, 2, 5])

$$\sigma = -\gamma A \sigma + 2\gamma \epsilon_e (E, N), \quad A\sigma \equiv \int_{\Gamma} \frac{\Psi(s, t)}{2\pi} \sigma(t) dt. \quad (8)$$

Из результатов работы [1] следует, что уравнение (8) разрешимо методом итераций:

$$\sigma_{n+1} = -\gamma A \sigma_n + 2\gamma (E, N) \varepsilon_e, \quad \sigma_0 = 2\gamma (E, N) \varepsilon_e. \quad (9)$$

Итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой $0 < q < 1$ зависит от формы поверхности и параметра γ . Из формулы (9) получаем равенство

$$\sigma_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \gamma^m A^m (2\gamma (E, N)) \varepsilon_e. \quad (10)$$

Приближенное выражение для дипольного момента имеет вид

$$P_i^{(n)} = \int_{\Gamma} t_i \sigma_n(t) dt = \frac{2}{V} \sum_{m=0}^n (-1)^m \gamma^{m+1} \int_{\Gamma} t_i A^m (N_j) dt V E_j \varepsilon_e. \quad (11)$$

Поэтому

$$\alpha_{ij}^{(n)}(\gamma) = \frac{2}{V} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m \gamma^{m+1}}{(2\pi)^m} J_{ij}^{(m)}, \quad J_{ij}^{(m)} \equiv \int_{\Gamma} t_i B^m (N_j) dt, \\ B \equiv 2\pi A. \quad (12)$$

Покажем, что $J_{ij}^{(m)} = b_{ij}^{(m)} - 2\pi J_{ij}^{(m-1)}$. Имеем

$$J_{ij}^{(0)} = \int_{\Gamma} t_i N_j(t) dt = \int_D \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dx = \delta_{ij} V = b_{ij}^{(0)}, \\ J_{ij}^{(1)} = \int_{\Gamma} ds s_i B N_j = \int_{\Gamma} dt N_j(t) \int_{\Gamma} s_i \frac{\partial}{\partial N_s} \frac{1}{r_{st}} ds = \\ = \int_{\Gamma} dt N_j(t) \left(\int_{\Gamma} \frac{\partial s_i}{\partial N_s} \frac{ds}{r_{st}} - 2\pi t_i \right) = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{N_i(s) N_j(t) ds dt}{r_{st}} - \\ - 2\pi V \delta_{ij} = b_{ij}^{(1)} - 2\pi J_{ij}^{(0)}. \quad (13)$$

Далее, используя аналогичное преобразование, получаем

$$J_{ij}^{(m)} = \int_{\Gamma} ds s_i B^m N_j = \int_{\Gamma} dt N_j(t) \int_{\Gamma} dt_1 \Psi(t_1, t) \dots \int_{\Gamma} dt_{m-1} \times \\ \times \Psi(t_{m-1}, t_{m-2}) \left[\int_{\Gamma} ds \frac{N_i(s)}{r_{st_{m-1}}} - 2\pi (t_{m-1})_i \right] = b_{ij}^{(m)} - 2\pi J_{ij}^{(m-1)}. \quad (14)$$

Пользуясь формулой (14), напишем равенство

$$J_{ij}^{(m)} = \sum_{k=0}^m b_{ij}^{(k)} (2\pi)^{m-k} (-1)^{m-k}. \quad (15)$$

Подставляя выражение (15) в формулу (12), получаем

$$\alpha_{ij}^{(n)}(\gamma) = \frac{2}{V} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(2\pi)^m} \gamma^{m+1} \sum_{k=0}^m b_{ij}^{(k)} (2\pi)^{m-k} (-1)^{m-k} =$$

$$= \frac{2}{V} \sum_{k=0}^m b_{ij}^{(k)} \frac{(-1)^k}{(2\pi)^k} \frac{\gamma^{n+2} - \gamma^{k+1}}{\gamma - 1}. \quad (16)$$

Формула (3) доказана. Первая оценка (5) вытекает из сходимости процесса (9) со скоростью геометрической прогрессии. Формула (4) является следствием равенства

$$C^{(n)} = \frac{Q}{U^{(n)}} = \frac{Q}{(1/S) \int_{\Gamma} ds \int_{\Gamma} dt \chi_n(t) / 4\pi r_{st} \epsilon_e} = \frac{4\pi S^2 \epsilon_e}{\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} ds dt \omega_n(t) / r_{st}}. \quad (17)$$

Здесь Q — суммарный заряд проводника, $U^{(n)}$ — средний потенциал его поверхности, созданный поверхностными зарядами, распределенными с плотностью $\chi_n(t) \equiv (Q/S) \omega_n(t)$. Последовательность $\omega_n(t)$ строится с помощью итерационного процесса

$$\omega_{n+1} = -A\omega_n, \quad \omega_0 = 1. \quad (18)$$

Здесь оператор A определен формулой (8). Процесс (18) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$ к функции $\omega(t)$, имеющей физический смысл плотности свободного распределения заряда, численно равного S , на поверхности проводника. Заметим, что нетрудно проверить равенство $\int_{\Gamma} \omega_n(t) dt = S$, $n \geq 0$, показы-

вающее, что итерационный процесс (18) описывает перераспределение постоянного суммарного заряда на поверхности проводника. Если в формулу (17) подставить выражение $\omega_n = (-1)^n A^n 1$, то придет к формуле (4). Вторая оценка (5) вытекает из сходимости процесса (18) со скоростью геометрической прогрессии. Эта сходимость доказана в работе [1], и другим способом — в книге [6]. В данной работе сходимость получена новым способом как следствие общей теоремы, применимой и к другим задачам. Кроме того, построено выражение для знаменателя прогрессии (см. Приложение).

Чтобы доказать третье неравенство (5), выведем утверждение, представляющее самостоятельный интерес. Пусть некоторая величина представима в виде $X = (f, g)$, где скобки обозначают скалярное произведение, элементы f, g гильбертова пространства связаны уравнением $Af = g$, в котором A — линейный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве. Швингер предложил следующий вариационный принцип для нахождения величины $X : X = st |(g, \varphi)|^2 / (A\varphi, \varphi)$, где знак st обозначает стационарное значение функционала [9]. Примеры показывают, что при $\varphi = f$ написанный функционал может принимать, вообще говоря, именно стационарное, а не экстремальное значение. Поэтому представляет интерес следующая простая теорема.

Теорема 2. Для того, чтобы имела место формула

$$X = \max_{\varphi} \frac{|(g, \varphi)|^2}{(A\varphi, \varphi)}, \quad (19)$$

необходимо и достаточно, чтобы $(A\varphi, \varphi) > 0$, если $\|\varphi\| > 0$.

Достаточно доказать, что неравенство $(f, g) = (Af, f) \geq |(g, \varphi)|^2 / (A\varphi, \varphi)$ имеет место тогда и только тогда, когда $(A\varphi, \varphi) > 0$ для любого элемента $\varphi \neq 0$. Введем обозначение $[\varphi, \varphi] \equiv (A\varphi, \varphi)$. Доказываемое неравенство является неравенством Коши — Буняковского для скалярного произведения $[\varphi, \varphi]$. Выражение $[\varphi, \varphi]$ является скалярным произведением тогда и только тогда, когда $(A\varphi, \varphi) > 0$ для любого $\varphi \neq 0$. Если

$[f, f] > 0 (< 0)$ и найдется хотя бы один элемент h , такой, что $[h, h] < 0 (> 0)$, то неравенство $[f, f][\varphi, \varphi] \geq |[f, \varphi]|^2$ не может быть верно для любых φ , так как квадратный трехчлен относительно ε , имеющий вид $[h + \varepsilon f, h + \varepsilon f]$, не является знакопредetermined. В приведенных рассуждениях предполагалось, что существуют элементы, для которых $(A\varphi, \varphi) > 0$. Если $(A\varphi, \varphi) < 0$ для любого $\varphi \neq 0$, то надо перейти от уравнения $A\dot{f} = g$ к уравнению $-A\dot{f} = -g$ и воспользоваться теоремой 2 для вычисления величины $-X = -(f, g)$. Именно, $-X = \max |(g, \varphi)|^2 / (-A\varphi, \varphi)$.

Применим теорему 2 для получения вариационного принципа для емкости. Будем исходить из уравнения для поверхностной плотности свободного распределения заряда на проводнике, заряженном до потенциала 1:

$$\int_{\Gamma} \frac{\sigma(t) dt}{4\pi r_{st}\varepsilon_e} = 1. \quad (20)$$

Емкость вычисляется по формуле

$$C = \int_{\Gamma} \sigma(t) dt. \quad (21)$$

Известно, что ядро оператора (20) положительно определено. По теореме 2 получаем вариационный принцип:

$$C := \max_{\varphi} \frac{\left(\int_{\Gamma} \varphi(t) dt \right)^2}{\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \varphi(t) \varphi(s) ds dt / 4\pi r_{st}\varepsilon_e}. \quad (22)$$

Полагая $\varphi = 1$, приходим к третьему неравенству (5). Из формулы (22) легко следует принцип Гаусса, известный в электростатике [7]. Обобщение теоремы 2 приводит к следующей формуле:

$$a_{ij} = st \frac{1}{V} \frac{\left(\int_{\Gamma} t_i \varphi_j(t) dt \right)^2}{\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \varphi_i(s) \varphi_j(t) ds dt / 4\pi r_{st}}, \quad (23)$$

причем допустимые функции должны удовлетворять условиям

$$\int_{\Gamma} t_i \varphi_j(t) dt = \int_{\Gamma} t_j \varphi_i(t) dt, \quad \int_{\Gamma} \varphi_j(t) dt = 0. \quad (24)$$

При $i = j$ можно заменить в формуле (23) знак st знаком \max .

3. Численные примеры. 1) По формуле (4) при $n = 0$ вычислялась на ЭВМ емкость куба с аддитивным ребром. Внутренние интегралы вычислялись по формуле Гаусса с пятью узлами, внешние — по формуле Симпсона. Было получено значение $C^{(0)} / 4\pi\varepsilon_e = 0,64$, тогда как в литературе приводится значение $C / 4\pi\varepsilon_e \approx 0,65$ [4].

2) Вычислялась погонная емкость $C_1 = C / 2L$ сплошного металлического цилиндра высотой $2L$ радиуса a . Параметр $l = L/a$ менялся в диапазоне $0,1 \leq l \leq 10^4$. Результаты сравнивались с опубликованными в работе [8], где вычислялась другим методом погонная емкость полого цилиндра. Оказалось, что при $l \geq 5$ значения C_1 , вычисленные по формуле (4) при $n=0$, совпадали с результатами работы [8] с точностью 1% , а при $l \geq 10$ совпадали со значениями, получаемыми по асимптотической формуле $C_1 = 4\pi\varepsilon_e (\Omega^{-1} + 0,710 \Omega^{-3})$, $\Omega \equiv 2|\ln 4l - 1|$, ве-

ной при $l \gg 1$ [8]. При $1 \leq l \leq 5$ формула (4) при $n = 0$ дала значения C_1 , совпадающие с приведенными в [8] с точностью 3%. При $n = 1$ совпадение с точностью 3% было получено при $0,1 \leq l \leq 1$. При $l \leq 0,1$ с точностью 3% верна асимптотическая формула $C_1 = 4\varepsilon_e l^{-1}$, вытекающая из формулы для емкости диска $C = 8a\varepsilon_e$ и определения погонной емкости ($8a\varepsilon_e = 2LC_1$). Точность этой асимптотической формулы растет при $l \rightarrow 0$. Численные результаты дали несколько неожиданный вывод: погонные емкости полого и сплошного цилиндров при $l \geq 0,1$ совпадают с точностью 3%. Разумеется, при $l \ll 1$ различие станет большим, так как при $l \ll 1$ верна (см. [8]) асимптотическая формула $C_1 = -2\pi^2\varepsilon_e^2 l^{-1} [\ln(16/l)]^{-1}$, из которой следует, что отношение погонных емкостей полого и сплошного цилиндров при $l \ll 1$ имеет вид

$$\frac{C_{1\text{ пол}}}{C_{1\text{ спл}}} = \frac{4,93}{\ln(16/l)}.$$

Численные расчеты на ЭВМ были проведены А. А. Акаевым и А. С. Берсоном, которым автор выражает признательность.

Приложение 1. Пусть A — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H , λ_n, Φ_n — его характеристические числа и собственные элементы, $\lambda_n A \Phi_n = \Phi_n$, $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots$. Пусть корневое подпространство оператора A , отвечающее числу λ_1 , одномерно. Обозначим через f произвольный элемент, имеющий ненулевую проекцию на подпространство C_1 нулей оператора $I - \bar{\lambda}_1 A^*$ [1].

Теорема 3. При сделанных предположениях итерационный процесс

$$f_{n+1} = \lambda_1 A f_n, \quad f_0 = f \quad (25)$$

сходится со скоростью геометрической прогрессии к собственному элементу, отвечающему числу λ_1 .

Замечание 2. Теорема 3 непосредственно применима к оператору A , определенному в $H = L_2(\Gamma)$ формулой (8). Для этого оператора $\lambda_1 = -1$, $\Phi_1(t) \geq 0$, $\int \Phi_1(t) dt > 0$, отвечающее числу $\lambda_1 = -1$, корневое

подпространство одномерно, $\Phi_1(t)$ — решение задачи Робена о свободном распределении электричества на поверхности проводника D . Для доказательства теоремы 3 потребуется следующая лемма.

Лемма. Пусть $F(\lambda)$ — аналитическая в круге $|\lambda| < r$ и мероморфная в круге $|\lambda| < r + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — положительное число, функция. Пусть точка λ_1 , $|\lambda_1| = r$, является простым полюсом функции $F(\lambda)$, причем $\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_1} F(\lambda) = C$, и других полюсов в круге $|\lambda| < r + \varepsilon$ функция $F(\lambda)$

не имеет. Если разложение Маклорена функции $F(\lambda)$ имеет вид

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n, \quad |\lambda| < r, \quad (26)$$

то

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{n+1} a_n = C. \quad (27)$$

Доказательство леммы. Функция $g(\lambda) = F(\lambda) - C/(\lambda - \lambda_1)$ разлагается в ряд $g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n$, который сходится в круге $|\lambda| < r + \varepsilon$.

В этом круге имеет место тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + \frac{C}{\lambda_1^{n+1}} \right) \lambda^n. \quad (28)$$

Полагая $\lambda = \lambda_1$ и пользуясь необходимым признаком сходимости ряда, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + C/\lambda_1^{n+1}) \lambda_1^n = 0$, что эквивалентно утверждению леммы.

Доказательство теоремы 2. При $|\lambda| < r$ ряд

$$R_\lambda f = (I - \lambda A)^{-1} f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n f$$

сходится и является аналитической функцией λ , которая при $\lambda = \lambda_1$ имеет по условию простой полюс, в котором вычет равен $b\Phi_1$, где b — постоянная, зависящая от f , причем $b \neq 0$, если отлична от нуля проекция элемента f на подпространство G_1 . По лемме существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^{n+1} A^n f = b\Phi_1. \quad (29)$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Из приведенного доказательства вытекает, что

$$|b\Phi_1 + \lambda_1^{n+1} A^n f| \leq K \left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^n, \quad (30)$$

где $K > 0$ — постоянная, а λ_2 — полюс резольвенты, следующий за λ_1 в порядке возрастания модуля. Например, если Γ — сфера, A — оператор, определенный формулой (8), то $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ [2]. Таким образом, предел (29) достигается со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $|q| = |\lambda_1/\lambda_2|$.

Приложение 2. Если в формулу (22) подставить $\varphi = \omega_n$ (см. (18)), то получим следующую приближенную формулу для ёмкости:

$$C_n = \frac{4\pi e S^2}{\int \int \omega_n(t) \omega_n(s) ds dt / r_{st}}, \quad C_n \ll C. \quad (31)$$

Формула (31) хороша тем, что она дает приближение к ёмкости снизу. Отметим, что неизвестно больше или меньше C величина (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Рамм, ДАН СССР, 186, № 1, 62 (1969); 195, № 6, 1303 (1970).
2. А. Г. Рамм, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 8, 1185 (1969).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
4. Ю. Я. Иоссель, Э. С. Кочанов, М. Г. Струнский, Расчет электрической ёмкости, изд. Энергия, Л., 1969.
5. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории и магнитных явлений, изд. АН СССР, М., 1948.
6. Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, Гостехиздат, М., 1953.
7. Г. Поля, Г. Сеге, Изопериметрические неравенства в математической физике, Физматгиз, М., 1962.
8. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 32, № 10, 1165 (1962); 37, № 7, 1181 (1967).
9. Х. Хенл, А. Мауз, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
10. А. Г. Рамм, Радиотехника и электроника, 16, № 4, 554 (1971).

Ленинградский институт точной механики и оптики

Поступила в редакцию
23 апреля 1970 г.

APPROXIMATIVE FORMULAS FOR THE POLARIZABILITY TENSOR AND CAPACITY OF THE BODY OF ARBITRARY FORM

A. G. Ramm

Formulas are given to calculate with a given accuracy the polarizability tensor and capacity of the body of arbitrary-form. The examples are presented.

Примечание при корректуре. Если определить дипольный момент равенством $\varphi \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(P^{(0)}, x)}{4\pi |x|^3}$ (*), где φ — потенциал вторичного поля, то $P = \epsilon_e P^{(0)}$. Величина P отвечает такому определению дипольного момента, согласно которому $\varphi \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(P, x)}{4\pi\epsilon_e |x|^3}$. В [1, 2] использовалось определение (*), но тензор поляризуемости определялся формулой $P_i^{(0)} = \alpha_{ij} V E_j$, т. е. совпадал с тензором α_{ij} , используемым в данной статье.

УДК 538.56

ВКЛАД ВЫТЕКАЮЩИХ ВОЛН В ИЗЛУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА, НАПРАВЛЯЕМОЕ ПЛОСКИМ НЕПОГЛОЩАЮЩИМ СЛОЕМ

B. A. Романовский

Рассматривается излучение линейного источника в присутствии плоского непоглощающего изотропного и однородного слоя. Показывается, что вытекающие волны для дискретного ряда направлений, определяемых волновыми векторами этих волн, дают узкие всплески поля излучения, доминирующие над сплошным спектром при достаточно больших расстояниях от источника. Для случая типа «дизэлектрическая пластина в воздухе» проводится более подробная оценка.

ВВЕДЕНИЕ

При использовании некоторых представлений поля излучения вытекающие волны выделяются в виде дополнительных слагаемых к сплошному спектру. Отдельная вытекающая волна выделяется лишь в ограниченной области пространства.

Упомянутые представления поля излучения используются давно, например, в работе [1]. Представление о пространственной ограниченности вклада вытекающих волн появилось позже в работах [2, 3]. В этих и более поздних работах [4–6] области пространства, в которых выделены вытекающие волны, определяются выбором в качестве пути интегрирования пути склоненного спуска. В настоящей работе изучено представление с выделением вытекающих волн в максимально возможной (для пространственно удаленных точек) области пространства. Оказалось, что к области выделения в [4–6] добавляется участок, непосредственно примыкающий к направлению распространения вытекающей волны. Именно на этом участке поле вытекающей волны является наибольшим. Так как вдоль направления распространения вытекающей волны ее поле не затухает, для достаточно больших расстояний от источника всегда существует примыкающая к этому направлению область, где вытекающая волна доминирует над цилиндрической волной, представляющей сплошной спектр.

В разд. 2, 4 и начале разд. 3 рассмотрение ведется в общей постановке. В остальной части работы на параметры наложены ограничения. Числовые индексы указывают принадлежность к области, штрихами выделяются действительная и мнимая части.

Рассматривается поле в присутствии бесконечного непоглощающего изотропного однородного слоя (рис. 1) полутолщиной d с абсолютными проницаемостями ϵ_2 , μ_2 , обладающего плоскостью симметрии xz и окруженного столь же идеальной средой с проницаемостями ϵ_1 , μ_1 . Поле возбуждается неограниченным линейным источником (И) электрического тока (ЭТ) или магнитного тока (МТ), расположенным как указано на рис. 1. Ток не зависит от x и имеет временную зависимость $\exp(-i\omega t)$.

Используем уравнение для векторного потенциала при дополнении

тельном условии $\nabla A = 0$. Из ориентации тока $A \equiv A_x$, учитя остальные условия, имеем уравнение

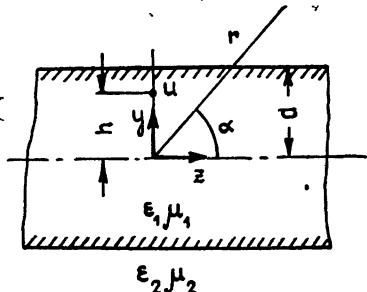


Рис. 1.

$$\Delta_{y,z} A + l^2 A = x\delta(z) \delta(y - h), \quad (1)$$

где

$$l^2 = \mu\omega^2, \quad x = \begin{cases} -\mu, & \text{ЭТ} \\ \epsilon, & \text{МТ} \end{cases}$$

Применим к уравнению (1) преобразование Лапласа. Введя обозначение $G(y, v) = \int_{-\infty}^{\infty} A(y, z) \exp(-ivz) dz$, получим уравнение

$$\Delta_y G + u_2 G = x\delta(y - h), \quad (2)$$

где

$$u^2 = l^2 - v^2. \quad (3)$$

Рассматриваемое поле с несимметричным возбуждением можно представить в виде суперпозиции двух полей: одного с симметричным (С) относительно плоскости xz возбуждением и другого — с антисимметричным (А). Благодаря симметрии изучение каждого из новых полей сводится к его рассмотрению полупространства $y \geq 0$. Будем считать далее уравнения и символы относящимися к симметризованным полям. Решения (2), удовлетворяющие соответствующим условиям при $y=0, d, \infty$, можно получить, следуя работе [7]. Полные результаты приведены в работе [4]. Здесь запишем лишь поле вне слоя ($y > d$), создаваемое источником, расположенным внутри слоя ($h < d$),

$$G_2(h, y, v) = N(h, v) \exp(iu_2 y)/D(v), \quad (4)$$

где

$$N(h, v) = -i\kappa_2 \exp(-iu_2 d) s(u_1 h); \quad (5)$$

$$D(v) = u_2 s(u_1 d) + iQu_1 c(-u_1 d), \quad (6)$$

$$Q = \begin{cases} \mu_2/\mu_1, & \text{ЭТ} \\ \epsilon_2/\epsilon_1, & \text{МТ} \end{cases}, \quad s(\alpha) (c(\alpha)) = \begin{cases} \sin \alpha (\cos \alpha) & (\text{С& МТ V A & ЭТ}) \\ \cos \alpha (\sin \alpha) & (\text{С& ЭТ V A & МТ}) \end{cases}.$$

Переход к A производится по формуле обращения

$$A_2(y, h, z) = (1/2\pi) \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} G_2(y, h, v) \exp(ivz) dv, \quad (7)$$

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

Переходя к оценке интеграла (7), введем новую переменную интегрирования ϑ соотношением $v = l_2 \cos \vartheta$. Пусть

$$\int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} G_2(y, h, v) \exp(ivz) dv = \int_C \Psi(y, h, \vartheta) d\vartheta. \quad (8)$$

Рассмотрим поведение $\Psi(y, h, \vartheta)$ в комплексной плоскости ϑ . Выберем в качестве фундаментальной области $\Psi(\vartheta)$ полосу $-\pi < \vartheta' \leq \pi$ (функция $\Psi(\vartheta)$ двузначна относительно $\cos \vartheta$). Разобьем эту полосу на полуполосы $\vartheta'' > (<) 0$ с одинаковыми ширинами, равными $\pi/2$, и условимся

выбирать значение функции $\Psi(\vartheta)$ в каждой полуполосе по знаку u''_2 так, как указано на рис. 2 (число на полуполосе—номер отображаемой четверти плоскости v). При таком выборе $\Psi(\vartheta)$ мероморфна во всей полосе.

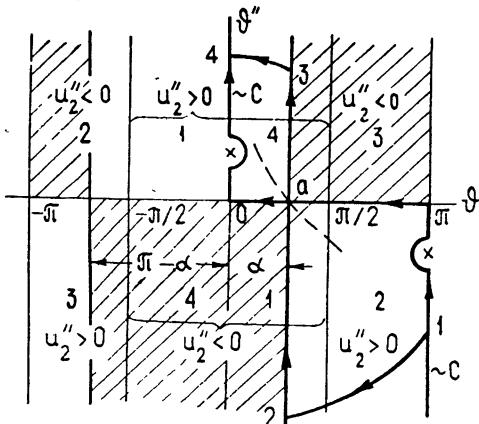


Рис. 2.

Пусть $r \rightarrow \infty$ (рис. 1), тогда рассматриваемая область плоскости v разделяется на части: в одних $|\Psi(\vartheta)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$, в других $|\Psi(\vartheta)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Области, где $|\Psi(\vartheta)|$ велик, определяются условием

$$-u''_2(\vartheta', \vartheta'') \sin \alpha - v''(\vartheta', \vartheta'') \cos \alpha > 0. \quad (9)$$

Опишем области, удовлетворяющие неравенству (9). Наряду с осью ϑ' участками границ этих областей являются вертикальные прямые $\vartheta' = \alpha$ и $\vartheta' = \alpha - \pi$. Обозначим область плоскости ϑ , заключенную между этими прямыми, через X , а оставшуюся часть через Y . Тогда области, где $|\Psi(\vartheta)|$ велик, определяются формой $(\vartheta'' > 0 \& Y) \cup (\vartheta'' < 0 \& X)$. На рис. 2 для $\alpha < \pi/2$ области, где $|\Psi(\vartheta)|$ велик, заштрихованы.

Положение пути интегрирования в (7) нетрудно уточнить путем анализа подынтегральной функции в плоскости v (результат см., например, в [4]). Соответствующий путь интегрирования C в плоскости ϑ показан на рис. 2. Начальный путь интегрирования C проходит через седловую точку a . Любой деформированный путь интегрирования также должен проходить через эту точку. В окрестности точки a ось ϑ' и прямая $\vartheta' = \alpha$ представляют линии уровня $\operatorname{Re}[f(\vartheta)] = 0$ функции $\operatorname{Re}[f(\vartheta)]$, где $f(\vartheta) = [u_2(\vartheta)y + v(\vartheta)z]$. Путь скорейшего спуска описывается уравнением $\operatorname{Im}[f(\vartheta)] = \text{const}$. Этот путь на рис. 2 изображен штрихами.

В работе [3] и в последующих работах [4–6] начальный путь интегрирования деформировался в путь скорейшего спуска. При этом начальный интеграл сводился к интегралу по пути скорейшего спуска и к сумме вычетов в полюсах, находящихся между начальным путем и путем скорейшего спуска.

Деформируем начальный путь интегрирования так, чтобы выделить из-под интеграла вычеты в наибольшем числе полюсов. Интеграл по деформированному пути 1 2 a 3 4 (рис. 2) сходится, причем части его—интегралы по расширяющимся дугам 1 2 и 3 4—обращаются в нуль. Оставшаяся часть—интеграл по вертикальной прямой 2 3—описывает сплошной спектр. Вычет в комплексном полюсе, представляющий вытекающую волну, выделяется в ограниченной области пространства. Для

направления, задаваемого углом α , выделены вычеты в полюсах, расположенных в плоскости ϑ между начальным путем C и прямой $\vartheta' = \alpha$.

Вытекающая волна от полюса, расположенного в точке ϑ_m , есть

$$(1/2\pi) \operatorname{res} \Psi(\vartheta_m) = a_m \exp \{i [u_2(\vartheta_m) y + v(\vartheta_m) z]\}.$$

Собственное значение угла, задающего направление распространения, определяется выражением $\operatorname{tg} \alpha_m = u'_2(\vartheta_m)/v'(\vartheta_m)$ и равно α для прямой $\vartheta' = \alpha$, проходящей через полюс. Плоскость $\alpha = \alpha_m$ является границей пространственной области выделения вычета. На рис. 3 а, б области пространства, где выделяются полюсы с $\alpha_m < \pi/2$, заштрихованы. Помет-

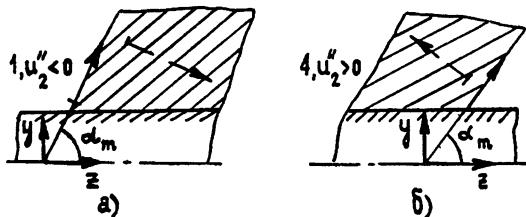


Рис. 3.

ки 4, $u''_2 > 0$ и 1, $u''_2 < 0$ указывают полуполосу, в которой находится соответствующий полюс. Сплошной стрелкой указаны направления волновых векторов, штрихованными — направления скорейшего затухания. Области пространства, где выделяются полюсы с $\alpha_m > \pi/2$, расположенные в полуполосах 3, $u''_2 < 0$ и 2, $u''_2 > 0$, легко представить, пользуясь симметрией относительно плоскости xy .

2. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПОЛЯ СПЛОШНОГО СПЕКТРА

Потенциал поля сплошного спектра A_c представлен интегралом вдоль прямой $\vartheta' = \alpha$ в плоскости ϑ . Сведем интегрирование в плоскости ϑ к интегрированию по действительной переменной ϑ'' . Имеем

$$A_c = -il_2 \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\alpha, \vartheta'') \exp(irl_2 \operatorname{ch} \vartheta'') d\vartheta'', \quad (10)$$

где

$$\theta(\alpha, \vartheta'') = N[h, v(\alpha, \vartheta'')] \sin \vartheta(\alpha, \vartheta'') / D[v(\alpha, \vartheta'')].$$

Для прямых $\vartheta' = \alpha$, не пересекающих полюсов, функции $\theta(\alpha, -i\vartheta)$ и $\operatorname{ch}(-i\vartheta)$, получаемые аналитическим продолжением $\theta(\alpha, \vartheta'')$ и $\operatorname{ch}(\vartheta'')$ в плоскость $-i\vartheta$, — аналитические регулярные в односвязной открытой области, включающей действительную ось. Проведя асимптотическую оценку интеграла (10) для $rl_2 \rightarrow \infty$ методом стационарной фазы, получим

$$A_c = a(\alpha) (rl_2)^{-1/2} \exp \{i[r l_2 + \eta(\alpha)]\}. \quad (11)$$

Комплексная функция A_c записана в показательной форме и

$$a(\alpha) = 2^{-3/2} \pi^{-1/2} x_2 |\chi(\alpha)|, \quad \eta(\alpha) = \arg [\chi(\alpha)] - l_2 d \sin \alpha + \pi/4,$$

где

$$\chi(\alpha) = s(u_{10} h) / [s(u_{10} d) + i Q u_{10} c(-u_{10} d) / l_2 \sin \alpha],$$

$$u_{10} \equiv u_1 [v(\alpha, \vartheta'' = 0)] = l_2 (n_{12}^2 - \cos^2 \alpha)^{1/2}, \quad n_{12} = (\epsilon_1 \mu_1 / \epsilon_2 \mu_2)^{1/2}.$$

Угловая зависимость амплитуды в (11) для случая $n_{12} > 1$ определяется выражением

$$|\chi(\alpha)| = |s(u_{10}h)| / \{[(Q/L_2 \sin \alpha)^2 (n_{12}^2 - \cos^2 \alpha) - 1] c^2 (u_{10}d) + 1\}^{1/2}, \quad (12)$$

которое имеет нули, определяемые уравнением

$$2(h/\lambda_2)(n_{12}^2 - \cos^2 \alpha)^{1/2} = p + n, \text{ где } p = \begin{cases} 0 & (\text{C& MTVA \& ЭТ}) \\ 1/2 & (\text{C& ЭТVA \& MT}) \end{cases}$$

($n = 0, 1, 2, \dots$), λ_2 — длина волны в среде 2. Число нулей с точностью до единицы дается выражением

$$\Delta n = 4(h/\lambda_2) [n_{12} - (n_{12}^2 - 1)^{1/2}].$$

При определенных соотношениях между параметрами весь интервал углов $0 < \alpha < \pi/2$ оказывается окрестностью нуля функции $|\chi(\alpha)|$. Эти соотношения таковы. Существует нуль при α , удовлетворяющем уравнению

$$2(h/\lambda_2)(n_{12}^2 - \cos^2 \alpha)^{1/2} = p, \text{ и } 2(h/\lambda_2) [n_{12} - (n_{12}^2 - 1)^{1/2}] \ll 1.$$

Оценим угловую зависимость верхней границы $|\chi(\alpha)|_b$ величины $|\chi(\alpha)|$. Полагая $s(u_{10}h) = 1$, из (12) имеем

$$|\chi(\alpha)|_b = \begin{cases} 1, & \cos^2 \alpha \leq E \\ Q^{-1}(n_{12} - \cos^2 \alpha)^{-1/2} \sin \alpha, & \cos^2 \alpha > E \end{cases} \quad E = \frac{(Qn_{12})^2 - 1}{Q^2 - 1}. \quad (13)$$

В интервале углов, где $|\chi(\alpha)|_b \neq 1$, верхняя граница с ростом α монотонно изменяется от $(Qn_{12})^{-1}$ до 1.

3. СОПОСТАВЛЕНИЕ ПОЛЕЙ СПЛОШНОГО СПЕКТРА И ВЫТЕКАЮЩИХ ВОЛН

Вытекающую волну, порожденную вычетом в полюсе, запишем в виде

$$A_m = a_m \{ \exp[-\beta_m r \sin |\alpha_m - \alpha| + i k_m(\alpha_m, k_m) r(\alpha, r)] \} Y[\pm(\alpha_m - \alpha)]. \quad (14)$$

Здесь k_m — волновой вектор, $\beta_m = |(u''_m + v''_m)^{1/2}|$ — коэффициент затухания, $Y[\pm(\alpha_m - \alpha)]$ — единичная ступенчатая функция, определяющая область пространства, где выделен вычет.

Вытекающая волна номера m дает скачок поля излучения при переходе через $\alpha = \alpha_m$. Асимптотическое выражение сплошного спектра представляет непрерывную функцию α , т. е. в предельном случае больших расстояний полное поле излучения имеет скачки при $\alpha = \alpha_m$. Естественно, что при любых конечных расстояниях полное поле непрерывно, а асимптотическое выражение для сплошного спектра дает тем худшее приближение, чем ближе путь интегрирования подходит к полюсу (или α подходит к α_m). Согласовать асимптотическую картину с непрерывностью поля излучения на конечных расстояниях можно, лишь представив, что на достаточно больших расстояниях от источника вблизи $\alpha = \alpha_m$ имеются всплески поля излучения, обусловленные вкладом вытекающей волны номера m .

Сопоставим асимптотическое выражение для сплошного спектра с отдельной вытекающей волной. Сплошной спектр представлен цилиндрической волной (11) с верхней границей амплитудного множителя (a_b), согласно (13) сравнительно слабо изменяющегося с углом α . Амплитуда вытекающей волны (14) сильно зависит от α , особенно вблизи $\alpha = \alpha_m$. Условие равенства обеих амплитуд

$$a_m \exp(-\beta_m r \sin |\alpha_m - \alpha_r|) = a_b (l_2 r)^{-1/2} \quad (15)$$

определяет угол α_r , делящий угловую область, где выделен вычет, на две части. В одной из них, примыкающей к α_m , в силу отмеченной разницы в угловых зависимостях амплитуд, амплитуда вытекающей волны больше верхней границы амплитуды сплошного спектра, в другой — наоборот. Угол $|\alpha_m - \alpha_r|$ обычно достаточно мал, и для соответствующей ему дуги $\Delta s(m, r)$ (рис. 4) из (15) можно записать приближенное выражение

$$\Delta s(m, r) = (2\beta_m)^{-1} \ln [(a_m/a_b)^2 l_2 r]. \quad (16)$$

Равенство (16) для достаточно больших r , удовлетворяющих неравенству $(a_m/a_b)^2 l_2 r > 1$, определяет участок цилиндрической поверхности, где вытекающая волна доминирует над сплошным спектром.

В действительности для асимптотической оценки всплеска следует сравнить отдельную вытекающую волну номера m с суммарным вкладом сплошного спектра и всех прочих вытекающих волн. Можно показать, что вклад бесконечного ряда вытекающих волн, начиная с волны номера $m+1$, меньше вклада некоторой посторонней вытекающей волны с конечной амплитудой и экспоненциальным множителем вытекающей волны номера $m+1$. Фон прочих вытекающих волн несуществен при условии, что угол $|\alpha_m - \alpha_r|$, отвечающий Δs из (16), удовлетворяет неравенству $|\alpha_m - \alpha_r| \ll |\alpha_{m+1} - \alpha_m|$.

4. ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР

Положение полюсов определяется нулями выражения (6). Удобно собственные значения определять в плоскости $U \equiv u_1 d$ из уравнения

$$(UQ)^{-1} (R^2 - U^2)^{1/2} = t(U), \quad (17)$$

где

$$R^2 = (l_1^2 - l_2^2)d^2, \quad t(U) = \begin{cases} -\operatorname{ctg} U & (\text{C \& MT V A \& ЭТ}) \\ \operatorname{tg} U & (\text{C \& ЭТ V A \& MT}) \end{cases}.$$

Ограничимся случаем $0 < Q < 1$ и $R > 0$, разбиравшемся в работе [8]. Другие случаи разбирались в работах [4, 5, 9]. Полюсы вдоль начально-го пути интегрирования отвечают прямым поверхностным волнам. На рис. 2, где эти полюсы обозначены крестиками, показано направление их обхода (см., например, работу [4]). Из рис. 2 ясно, что после рассмотренной деформации начального пути поверхностные волны не дают вклада в полное поле излучения.

Все комплексные полюсы, находящиеся на нижнем листе, условно разделим на три вида: близкие, промежуточные и асимптотические. Близкие полюсы расположены вблизи действительной оси (U') по соседству с действительными полюсами. При достаточно больших Q эти полюсы располагаются в окрестности точек $U_{0m} = (\pi/2)m$. Записав положение полюса $U_m = U_{0m} + \Delta U_m$, рассмотрим решения приближения уравнения (17) с учетом членов с ΔU_m^2 . Эти решения комплексны при $R < R_r \equiv [U_0^2 Q^2 / (1 + U_0^2 Q^2)]^{1/2}$, их удобно записать, введя положительный параметр $q(R, Q, m)$, определяемый выражением $R = R_r(1 - q^2)^{1/2}$,

$$U_m = U_0 (U_0^2 Q^2 - iq U_0 Q) / (1 + U_0^2 Q^2). \quad (18)$$

Будем считать использованное приближение хорошим при условии $\Delta U < 0,5$ (условие близости). Величина q^2 изменяется в пределах $0 < q^2 < q_m^2$. Значение $q^2 = 0$ определяет границу между комплексными и действительными полюсами; $q^2 = q_m^2$ — предельные значения ΔU и U , удовлетворяющие условию близости

$$q_m^2 = [0,5 (Q + 1/U_0^2 Q)]^2 - 1/U_0^2 Q^2. \quad (19)$$

Уравнение (19) определяет интервал Q , для которого существуют рассматриваемые решения. Для малых Q , не удовлетворяющих (19), близкие решения можно приблизительно оценить рассмотрением окрестностей других рядов точек, практически почти всегда достаточно ограничиться еще одним рядом.

Асимптотические полюсы удовлетворяют неравенству $|U_m| \gg R$; пренебрегая R в уравнении (17), имеем

$$U_m = (\pi/2)(m-1) + i \operatorname{arth} Q. \quad (20)$$

Здесь $\operatorname{arth} Q$ — главное значение многозначной функции. Промежуточные полюсы по оси U' расположены в промежутке между близкими и асимптотическими полюсами, m -й полюс располагается в полосе $(\pi/2)(m-1) < U' < (\pi/2)m$. Утверждение о промежуточном положении промежуточных полюсов с некоторыми исключениями справедливо и для оси U' .

Используя выражение для вычета, можно получить формулы для модуля постоянного амплитудного множителя a_m . Не выписывая громоздкое выражение для близких полюсов, приведем далее несколько полученных из (18) чисел. Для асимптотических полюсов на основе (20) имеем

$$a_m = \frac{\chi_2 |[s^2(\Lambda h/d) + sh^2(\Omega h/d)]^{1/2}|}{2\pi(1+Q)|\Lambda^2 + s^2|^{1/2}}, \quad (21)$$

где

$$\Lambda = (\pi/2)(m-1), \quad \Omega = \operatorname{arth} Q.$$

В табл. 1 приведено несколько численных значений собственных углов α_m , коэффициентов затухания β_m и квадрата отношения амплитудных множителей вытекающей волны и сплошного спектра $(a_m/a_b)^2$. Последние две величины, согласно (16), определяют существование и размеры участка цилиндрической поверхности, где вытекающая волна доминирует над сплошным спектром. Для каждой величины приводятся два столбца. Слева стоят значения, относящиеся к границе между близкими и промежуточными полюсами (для $\alpha_m = 0$ это одновременно граница между поверхностными и комплексными волнами, так как область близких полюсов исчезает). Справа — значения, относящиеся к асимптотическим полюсам, подсчитанные из (21) с $s^2(\Lambda h/d) = 1$ и $sh^2(\Omega h/d) = Q^2/(1-Q^2)$. Значения a_b соответствуют $|\chi(\alpha)| = 1$.

Таблица 1

Q	m	α_m^0	$\beta_m d$	$(a_m/a_b)^2$
0,73	2	0	59	2,9
	20	$2 \cdot 10^{-2}$	88	29
0,25	20	0	89	30
	200	$1 \cdot 10^{-3}$	90	310

Таблица создает впечатление, что роль вытекающих волн сравнительно велика при малых значениях параметра R , когда решения с малыми m являются комплексными; для фиксированного параметра R , если существуют все три вида полюсов, похоже, что сравнительная роль вытекающих волн сильно уменьшается с переходом от близких полюсов к асимптотическим.

В заключение выражаю глубокую благодарность М. А. Евграфову за ценные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Каценеленбаум, ЖТФ, 19, 1168 (1949).
2. F. J. Zucker, Symposium on modern advances in microwave techniques, Polytechnic Inst. of Brooklyn, N. Y., 1954, p. 403.
3. N. Marcuvitz, IRE Trans., AP4, 192 (1956).
4. T Tamir, A. A. Oliner, Proc. IEEE, 51, № 2, 347 (1963).
5. T. Tamir, L. B. Felsen, IEEE Trans., AP13, № 3, 410 (1965).
6. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 110 (1966).
7. Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. 1, ИЛ, М., 1960.
8. В. А. Романовский, Радиотехника, 22, № 6, 101 (1967).
9. T. Tamir, A. A. Oliner, Proc. IEE, 110, № 2, 310 (1963).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
30 декабря 1969 г.

CONTRIBUTION OF LEAKAGE WAVES TO THE RADIATION FROM A LINEAR SOURCE GUIDED BY A PLANE NONABSORBING LAYER

V. A. Romanovskii

The radiation from a linear source in the presence of a plane nonabsorbing isotropic and uniform layer is considered. It is shown that leakage waves for some discrete directions determined by wave vectors of these waves yield narrow bursts of the radiation field prevailing over the continuous spectrum at sufficiently large distances from the source. For the case of "dielectric plate in the air", a more detailed estimation is given.

УДК 533.951

О НЕЛИНЕЙНОМ РЕЗОНАНСНОМ ПОГЛОЩЕНИИ В ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Б. Гильденбург, Г. А. Марков, А. Я. Шишко

Исследовано нелинейное резонансное поглощение волны H_{01} прямоугольного волновода продольно намагниченным положительным столбом газового разряда, пересекающим волновод перпендикулярно его узкой стенке. Снята гистерезисная зависимость поглощаемой мощности (W) от падающей (W_0) при различных токах разряда, определяющих начальные (невозмущенные ВЧ полем) концентрации электронов. Гистерезис связан с переходом концентрации (возрастающей при наложении ВЧ мощности) через резонансные значения, соответствующие так называемому основному дипольному резонансу плазменного цилиндра, расщепленному в статическом магнитном поле. Высокие значения относительного поглощения, достигавшиеся при резонансе в линейном режиме ($W/W_0 \sim -80-90\%$), устанавливались также при выходе на определенную ветвь неоднозначной зависимости $W(W_0)$ (начиная с $W_0 \sim 5 \text{ вт}$) и сохранялись на ней вплоть до верхней границы исследованного диапазона мощностей ($W_0 \sim 30 \text{ вт}$). Это позволяет говорить о реализации в нелинейном режиме «самоподдерживающегося» резонансного состояния с эффективной передачей энергии ВЧ поля плазме.

Дана качественная теоретическая интерпретация наблюдаемых гистерезисных явлений, основанная на рассмотрении эффекта «замещения» джоулевых потерь на постоянном токе ВЧ потерями.

В связи с проблемами эффективной передачи энергии СВЧ излучения плазме (см., например, работы [1-3]) представляет интерес рассмотреть возможности, связанные с использованием резонансных явлений в плазменных цилиндрах малого радиуса (так называемые резонансы Тонкса — Датнера).

Уже при сравнительно невысоких уровнях мощности поглощение на этих резонансах становится нелинейным: типичная для нелинейного осциллятора «гистерезисная» деформация резонансных кривых наблюдалась в целом ряде экспериментов [4-8]. В настоящей работе приводятся результаты экспериментального и теоретического исследования зависимости мощности, поглощаемой положительным столбом газового разряда, от мощности падающей на него волны при различных значениях тока разряда I . В отличие от результатов, представленных в [8], где аналогичная зависимость (снимавшаяся в режиме СВЧ разряда при $I=0$) была выражена недостаточно отчетливо из-за малой ($\sim 5\%$) величины относительного поглощения, в наших экспериментах поглощаемая мощность менялась в широких пределах, достигая в максимуме 85—90% падающей.

1. УСЛОВИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Разрядная трубка вводилась внутрь прямоугольного волновода перпендикулярно электрическому полю и направлению распространения возбуждаемой в нем волны H_{01} . На расстоянии четверти длины волны от трубы волновод закорачивался металлическим поршнем. Размеры поперечного сечения волновода $3,4 \times 7,2 \text{ см}^2$; внутренний диаметр разрядной трубы $d=6,4 \text{ мм}$; давление наполняющего ее газа (воз-

духа) $p = 3,5 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст.; круговая частота поля $\omega = 1,58 \cdot 10^{10}$ сек $^{-1}$ мощность падающей волны W_0 можно было менять от нуля до 30 вт как в непрерывном режиме, так и в режиме периодических пульсаций на частоте 50 гц. Разряд зажигался в продольном магнитном поле, напряженность которого на облучаемом участке составляла 250 ± 10 эрст.; что соответствовало величине $\omega/\omega_H = 3,5 \pm 0,15$ (ω_H — гирочастота электронов). Со стороны, обращенной к закороченному концу волновода, в трубку были вложены два пристеночных зонда, расположенных перпендикулярно электрическому полю волны; с их помощью производились измерения температуры электронов T и продольного электростатического поля в плазме E . Температура электронов, согласно данным зондовых измерений, слабо зависела от подводимой ВЧ мощности и составляла $\sim 5 \cdot 10^4$ К.

Основные экспериментальные результаты представлены на рис. 1—4. Осциллограммы рис. 1 показывают зависимость мощности

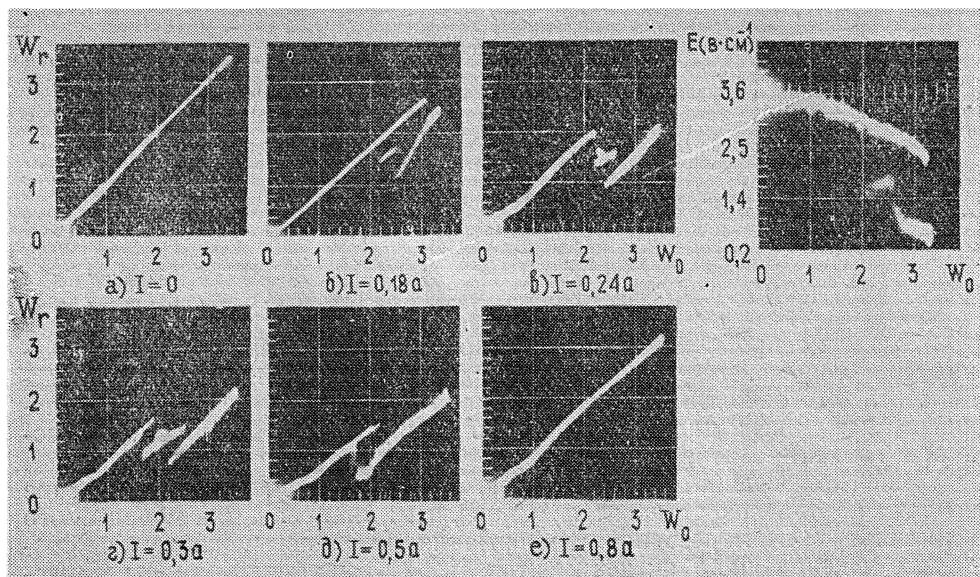


Рис. 1.

Рис. 2.

отраженной волны W_r от W_0 при различных значениях тока разряда I (не менявшихся под действием ВЧ поля). Величина поглощаемой мощности W может быть найдена по этим осциллограммам как разность $W_0 - W_r$; необходимо только иметь в виду, что шкала мощности здесь, как и на рис. 2, 5, не является линейной — соответствующая градирвоочная кривая, переводящая деления шкалы мощности в ватты (с максимальной погрешностью $\pm 10\%$), изображена на рис. 3.

На рис. 2 приведена осциллограмма зависимости постоянного электрического поля в плазме E ($\text{в} \cdot \text{см}^{-1}$) от мощности W_0 при $I = 0,2$ а. В невозмущенном состоянии (при $W_0 = 0$) $E = 3,5 \pm 0,1$ $\text{в} \cdot \text{см}^{-1}$ на всем рабочем интервале значений тока.

Как видим, полученные амплитудные зависимости обладают отчетливо выраженным петлевыми гистерезиса, число и расположение кото-

рьых зависят от разрядного тока. Сопоставление осциллограмм рис. 1 с приведенной на рис. 4 резонансной кривой относительного поглощения $W/W_0(I)$, снятой на низком уровне мощности, в линейном режиме ($W_0 = 0,6 \text{ вт}$), показывает, во-первых, что значения относительного поглощения, соответствующие в нелинейном режиме нижней ветви функци-

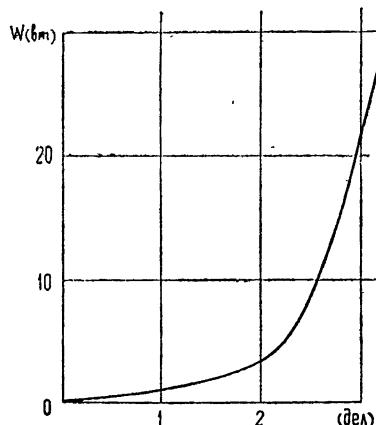


Рис. 3.

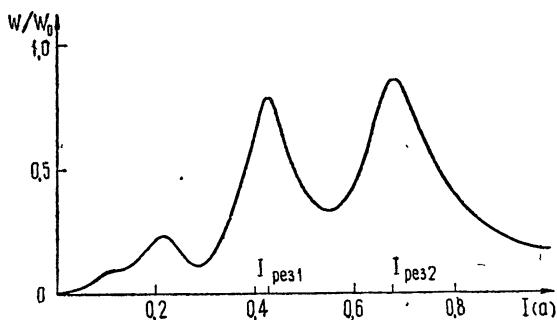


Рис. 4.

ции $W_r(W_0)$ ($W/W_0 = 85 - 90\%$), достигают и даже несколько пре-
восходят свое пиковое значение (85%) в «линейном» резонансе. Во-вто-
рых, из этого сопоставления можно обнаружить, что вид функции
 $W_r(W_0)$ существенно меняется при переходах тока I через «резонансные»
значения $I_{рез1} = 0,42 \text{ а}, I_{рез2} = 0,68 \text{ а}$: при приближении к $I_{рез1}$
снизу верхняя петля гистерезиса спускается к началу развёртки и исче-
зает; то же происходит с оставшейся нижней петлей при переходе че-
рез $I_{рез2}$, так что при $I > I_{рез2}$ зависимость $W_r(W_0)$ становится одно-
значной.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пики поглощения при $I = I_{рез1,2}$ на рис. 4 соответствуют «основному» (электростатическому) дипольному резонансу, расщепленному в статическом магнитном поле. Третий невысокий максимум в области меньших токов соответствует одному из «вторичных» (плазменно-вол-
човых) резонансов, которые могли бы быть представлены большим числом более высоких пиков, если бы концентрация электронов испы-
тывала достаточно большой скачок на стенке трубы [9–11] (при вы-
бранных нами параметрах разряда имел место режим поперечной диф-
фузии, и концентрация на стенке была невелика).

Сравнительно большая ширина «основных» пиков может быть объ-
яснена только при учете потерь энергии в окрестности поверхности плазменного резонанса. Величина этих потерь не зависит от конкретно-
го механизма поглощения (трансформация в убегающие продольные волны или соударения электронов с другими частицами) и пропорцио-
нальна характерному размеру l неоднородности концентрации в обла-
сти плазменного резонанса [9, 12]. В наших экспериментах реализовался первый из названных механизмов — на это указывает сравнительная оценка параметров $(v_T/\omega l)^{2/3} \approx 10^{-1}$ и $\nu/\omega \approx 10^{-2}$ (см. [13]); v_T и ν — средняя тепловая скорость и частота соударений электронов. Необходи-
мо отметить, что мощность потерь в стеклах «резонатора», образо-
ванного закороченным четвертьвольновым отрезком волновода позади

разрядной трубки, как показывают оценки, на несколько порядков ниже мощности потерь в плазме (даже той, меньшей ее части, которая обусловлена столкновениями электронов в «нерезонансной» области). Поэтому разность мощностей падающей и отраженной волн $W = W_0 - \bar{W}$, действительно есть мощность, поглощаемая плазмой.

Воздействие ВЧ поля на облучаемую часть разряда и нелинейное изменение характеристик поглощения в грубых чертах могут быть описаны на основании весьма простой модели плазменного столба с фиксированной поперечной структурой и неизменными вдоль эффективной длины облучаемого участка $L_{\text{эфф}}$ погонными параметрами, соответствующими значениям падающей погонной мощности w_0 в центре волновода (учитывая, что $W_0 = (1/2)w_0L$, где $L = 7,2 \text{ см}$ — ширина волновода, находим $L_{\text{эфф}} = W_0/w_0 = L/2 = 3,6 \text{ см}$). К этой модели, в которой фактически игнорируются как продольная, так и радиальная неоднородности ВЧ поля в плазме, можно применить методы расчета, подобные изложенным в [8, 14] (с использованием уравнения баланса мощности в плазме и «линейной» резонансной характеристики $W(I)$). Заметим, что, игнорируя радиальную неоднородность ВЧ поля и обусловливающую ею деформацию поперечного распределения плазмы, мы отвлекаемся тем самым от некоторых специфических нелинейных эффектов, связанных с изменением структуры области плазменного резонанса [15–17] и рассматриваем лишь более грубый эффект «замещения» статических джоулевых потерь в разряде ВЧ потерями [14].

Уравнение баланса мощности для единицы длины столба имеет вид

$$w + q = \frac{3}{2} kT \delta v N, \quad (1)$$

где $w = W/l_{\text{эфф}}$ и $q = IE$ — соответственно погонные мощности высокочастотных и статических потерь в плазме, N — погонная концентрация электронов, k — постоянная Больцмана, δ — средняя относительная доля энергии, теряемая электроном при соударении с молекулой. Температура электронов T определяется в рамках принятой модели тем же условием баланса частиц, что и в элементарной теории тлеющего разряда без ВЧ поля, и, следовательно, вместе с зависящими от нее параметрами v и δ может считаться неизменной [8, 14] (в наших экспериментах, согласно справочным данным по разряду в воздухе, $v \sim 10^8 \text{ см сек}^{-1}$, $\delta \sim 0,1$). Учитывая, кроме того, что сила тока I , как показали измерения, также не меняется под действием ВЧ поля*, получим из (1):

$$\frac{w}{q_0} + \frac{E}{E_0} = \frac{N}{N_0}, \quad (2)$$

где q_0 , E_0 и N_0 — значения q , E и N при $w = 0$. Записывая ток в виде $I = \mu eNE$, где $\mu = \mu(T)$ — подвижность, e — заряд электрона, заметим, что из условий $T = \text{const}$, $I = \text{const}$ следует равенство

$$\frac{E}{E_0} = \frac{N_0}{N}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем для N/N_0 квадратное уравнение, единственное положительное решение которого имеет вид

$$\frac{N}{N_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{w}{2q_0}\right)^2} + \frac{w}{2q_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{W}{2Q_0}\right)^2} + \frac{W}{2Q_0} \quad (4)$$

* Причиной этого является, очевидно, малая величина сопротивления облучаемого участка разряда по сравнению с полным сопротивлением разрядной цепи.

$(Q_0 = q_0 L_{\text{эфф}} = IE_0 L_{\text{эфф}}$ — мощность, выделяющаяся на отрезке длины $L_{\text{эфф}}$ в отсутствие ВЧ поля). Таким образом, возрастание электронной концентрации на облучаемом участке разряда (и сопутствующее ему уменьшение статического поля E) обусловливается величиной отношения мощности ВЧ потерь W к мощности потерь на постоянном токе Q_0 при $W = 0$.

Очевидно, что в предположении неизменности поперечного распределения плотности в трубке относительное поглощение W/W_0 при любых W_0 зависит лишь от погонной концентрации N . Поэтому снятая нами в линейном режиме зависимость $W/W_0(I)$ (рис. 4) может рассматриваться как зависимость W/W_0 от концентрации ($I = \text{const} \cdot N$) не только в линейном, но и в нелинейном режиме. Пользуясь графиком рис. 4 и определяя относительные концентрации по формуле (4), можно построить графики функций $W(W_0)$, $W_r(W_0)$, $E(W_0)$. На рис. 5 а, б, в при-

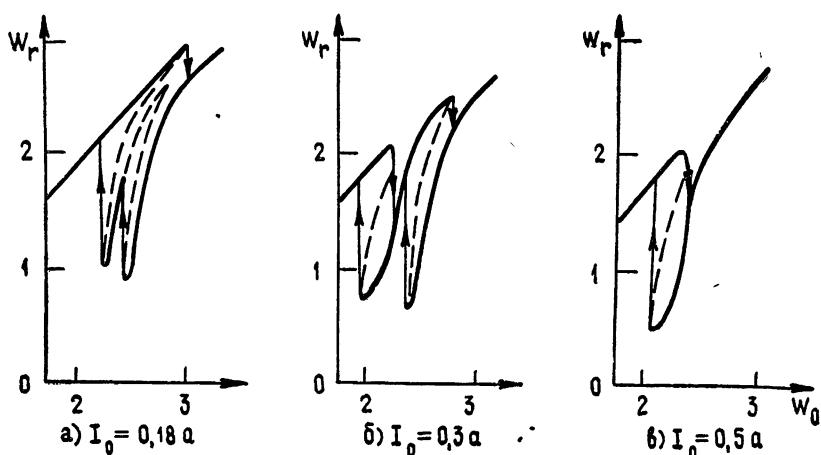


Рис. 5.

веденены графики зависимости отраженной мощности W от падающей, построенные указанным образом для тех же значений тока, при которых снимались осцилограммы $W_r(W_0)$ рис. 1 б, г, д. Масштаб на обеих осях приведенных графиков тот же, что и на осцилограммах; пунктиром изображены нереализуемые ветви решения.

Сравнение теоретических и экспериментальных кривых обнаруживает удовлетворительное согласие между ними в отношении расположения и тенденций поведения гистерезисных петель, так же как и в отношении максимальных величин относительного поглощения.

Имеются, однако, заметные различия в характере изменения поглощения вдоль нижних ветвей сравниваемых кривых. В частности, на последней (в направлении увеличения W_0) ветви теоретических графиков относительное поглощение W/W_0 с ростом мощности уменьшается от резонансного значения 85% на нижнем краю до 40—50% на верхнем, тогда как, согласно осцилограммам рис. 1, на всей наблюдаемой части этой ветви реализуется «самоподдерживающееся» резонансное состояние (с величиной относительного поглощения 85—90%). Указанное расхождение связано, по-видимому, с тем, что при больших мощностях рост электронной концентрации после прохождения резонансного значения замедляется (или вообще прекращается) из-за компенсации ионизирующего воздействия ВЧ поля не учитывавшимися нами процессами «стрикционного» или «теплового» вытеснения плазмы из облучаемого участка. Эти процессы (приводящие к наблюдавшейся в [7] специ-

физической деформации резонансных кривых) могут выражаться как в появлении продольных потоков плазмы из облучаемой области [8], так и в увеличении скорости радиальной диффузии и деформации попечерных распределений плотности и температуры.

Таким образом, эффективное резонансное поглощение на собственных частотах плазменного цилиндра оказывается возможным и при наличии сильной нелинейности. Это может служить стимулирующим фактором для продолжения исследований при более высоких мощностях.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Анисимов, Н. И. Виноградов, В. Е. Голант, С. И. Нанобашвили, Л. П. Пахомов, ЖТФ, 38, 1902, 1908 (1968).
2. М. В. Кривошеев, ЖТФ, 39, 816 (1969).
3. Microwave and Cyclotron Resonance Heating, in Bull. Amer. Phys. Soc., 14, 1019 (1969).
4. A. M. Messiaen, R. E. Vandenberg, Phys. Lett., 25A, 339 (1967).
5. B. C. Gregory, G. Mourier, Can. J. Phys., 45, 3649 (1967).
6. H. C. Hsu and R. C. Ajmera, K. E. Longren, Appl. Phys. Lett., 9, 277 (1967).
7. Н. В. Арефьев, В. Б. Гильденбург, Г. А. Марков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 2, 305 (1970).
8. A. M. Messiaen, R. E. Vandenberg, Phys. Fluids, 12, 2406 (1969).
9. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ, 45, 1978 (1963).
10. В. Б. Гильденбург, ЖТФ, 34, 372 (1964).
11. В. Б. Гильденбург, Г. А. Марков, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 5, 780 (1968).
12. А. Д. Пилия, В. И. Федоров, ЖЭТФ, 57, 1198 (1969).
13. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
14. В. Е. Голант, А. П. Жилинский, М. В. Кривошеев, Л. И. Чернова, ЖТФ, 31, 63 (1961).
15. W. P. Allis, S. C. Brown, E. Everhart, Phys. Rev., 84, 519 (1951).
16. В. И. Перель, Я. М. Пинский, ЖТФ, 33, 268 (1963).
17. В. Б. Гильденбург, ЖЭТФ, 46, 2156 (1964)

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию
23 июня 1970 г.

NONLINEAR RESONANCE ABSORPTION IN GAS-DISCHARGED PLASMA

V. B. Gil'denburg, G. A. Markov, A. Ya. Shishko

The authors investigate the nonlinear resonance absorption of H_{01} wave in the rectangular waveguide by the axially magnetized positive column of gaseous discharge crossing the waveguide perpendicular to its narrow wall. The hysteresis dependence of the absorbed power (\bar{W}) on the incident one (W_0) at different discharge currents determining the initial (undisturbed by HF field) electron density is registered. The hysteresis is associated with transition of the density (increasing when HF power is applied) through the resonance values corresponding to the so-called plasma-cylinder main dipole resonance splitted in the static magnetic field. The large values of the relative absorption reached at the resonance in the linear regime ($W/W_0 \sim 80-90\%$) are set also in a specific branch of the ambiguous dependence $\bar{W}(W_0)$ beginning from $W_0 \sim 5$ w and up to the upper limit of the investigated power range ($W_0 \sim 30$ w). This is a realization of the self-holding resonance state in the nonlinear regime with the effective transmission of HF field energy to plasma.

A qualitative theoretical interpretation is given of the observed hysteresis phenomena based on the effect of „replacing“ the d-c Joule losses by HF losses.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.385 69

СТАЦИОНАРНЫЙ ГОФРИРОВАННЫЙ ПОТОК ЭЛЕКТРОНОВ

B. A. Жураховский

На рис. 1 показана модель, подлежащая расчету, — плоский заряженный гофр, разделяющий все свободное пространство на две части. Гофр образован континуумом синфазных и конгруэнтных ламинарных винтовых электронных траекторий, направляемых однородным магнитостатическим полем и равномерно распределенных вдоль всей оси x . Задача о потоке типа, изображенного на рис. 1, является, таким образом, двумерной в том смысле, что зависимость любых величин от координаты x отсутствует, хотя x -компоненты скорости электронов при этом и не обозначены равняться нулю.

Условимся считать поверхностную плотность зарядов в электронном гофрированном слое малой величиной. Оговоренное обстоятельство означает, что все поля, создаваемые электронами исследуемого гофрированного потока, являются также малыми величинами. Их роль может быть учтена в рамках метода малых возмущений. Следуя общей идее метода малых возмущений, положим

$$\begin{aligned} X &= X_0 + X_1, \quad Y = Y_0 + Y_1, \\ v_t &= v_{0t} + v_{1t}, \quad v_z = v_{0z} + v_{1z}, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где X, Y — поперечные координаты оси винтовой траектории рассматриваемого электрона, v_t и v_z — соответственно вращательная и поступательная компоненты скорости частицы, ϑ — азимутальная координата.

В стационарном приближении можно пренебречь собственным магнитным полем потока электронов. Кроме того, вследствие двумерности задачи, имеем $E_x = 0$. Поэтому уравнения движения могут быть записаны в виде (штрихи означают дифференцирование по продольной координате z)

$$\begin{aligned} X'_1 &= (\eta_0/v_{0z}\Omega) E_y, \quad Y'_1 = 0, \\ v'_{1t} &= -(\eta_0/v_{0z}) E_y \cos \vartheta_0, \quad v'_{1z} = -(\eta_0/v_{0z}) E_z, \\ \vartheta'_1 &= (\eta_0/v_{0z} v_{0t}) E_y \sin \vartheta_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где η_0 — абсолютная величина удельного заряда электрона, Ω — гирочастота, $\vartheta_0 = \Omega z/v_{0z}$, электрические поля E_y, E_z приведены к невозмущенной траектории частицы. Здесь опущены слаборелятивистские слагаемые, поскольку, как будет показано ниже, кулоновское возмущение практически не затрагивает величин скоростей электронов.

Как и форма траектории невозмущенного движения, поля E_y и E_z оказываются периодическими функциями аргумента ϑ_0 , а это дает возможность аппроксимировать точные решения уравнений (2) соответствующими решениями усредненных (сглаженных) уравнений

$$\begin{aligned} X'_1 &= (\eta_0/v_{0z}\Omega) \bar{E}_y, \quad v'_{1t} = -(\eta_0/v_{0z}v_{0t})(\bar{E}_y \cos \vartheta_0), \\ v'_{1z} &= -(\eta_0/v_{0z}) \bar{E}_z, \quad \vartheta'_1 = (\eta_0/v_{0z}) (\bar{E}_y \sin \vartheta_0), \end{aligned} \quad (3)$$

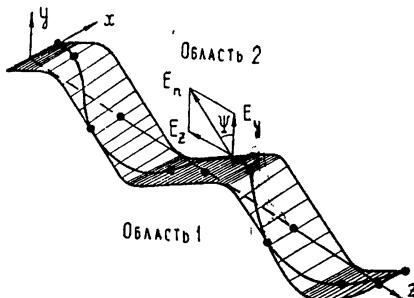


Рис. 1.

где черта сверху означает усреднение по ϑ_0 в произвольном промежутке длительностью 2π .

Для нахождения электрических полей обратимся к рис. 2 и подсчитаем суммарное воздействие всех электронов невозмущенного гофра на данный. Из общих условий периодичности и симметрии формы гофра относительно начала координат выте-

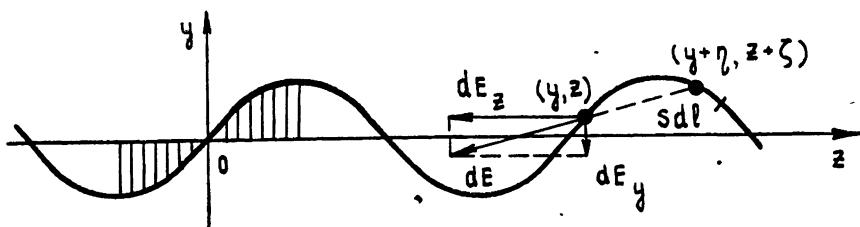


Рис. 2.

кает, что поля E_y и E_z есть нечетные функции от z , и средние их значения по шагу гофра (по ϑ_0) — нулевые. Как следствие этого, уравнения системы (3) дают:

$$\begin{aligned} X_1 &= v_{1t} = v_{1z} = 0, \\ \dot{\vartheta}_1' &= (\eta_0/v_{0z} v_{0t}) (E_y \sin \vartheta_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Вычислим E_y , вновь обратившись к рис. 2. Пусть координаты данного электрона (y, z) . Тогда элементарное поле dE_y , создаваемое бесконечной по x заряженной нитью с координатами $(y + \eta, z + \zeta)$, будет

$$dE_y = -\frac{\eta}{s} dE = -\frac{\eta}{s} \frac{\sigma dl}{2\pi\epsilon_0 s}, \quad (5)$$

где σdl — погонный (по x) невозмущенный заряд нити, s — расстояние от точки (y, z) до точки $(y + \eta, z + \zeta)$, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Выразим в (5) все переменные величины через ζ . Из закона сохранения заряда

$$\sigma dl = (I_0'/v_{0z}) d\zeta, \quad (6)$$

где I_0' — погонная (по x) плотность тока, проносимого электронным потоком через произвольное сечение $z = \text{const}$. Далее,

$$\begin{aligned} s^2 &= \eta^2 + \zeta^2, \\ \eta &= y|_{z+\zeta} - y|_z = \frac{v_{0t}}{\Omega} \left[\sin \left(\vartheta_0 + \frac{\Omega\zeta}{v_{0z}} \right) - \sin \vartheta_0 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (6), (7) в (5), имеем

$$dE_y = \frac{|I_0'|}{2\pi\epsilon_0 v_{0z}} \frac{(v_{0t}/\Omega) [\sin(\vartheta_0 + \Omega\zeta/v_{0z}) - \sin \vartheta_0] d\zeta}{(v_{0t}/\Omega)^2 [\sin(\vartheta_0 + \Omega\zeta/v_{0z}) - \sin \vartheta_0]^2 + \zeta^2}. \quad (8)$$

Расписывая в выражении (8) разность синусов, обозначая $\Omega\zeta/2v_{0z} = x$ и интегрируя по всему потоку, получаем ($q \equiv v_{0t}/v_{0z}$):

$$E_y = \frac{q |I_0'|}{2\pi\epsilon_0 v_{0z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\vartheta_0 + x) \sin x dx}{q^2 \cos^2(\vartheta_0 + x) \sin^2 x + x^2}. \quad (9)$$

Если подставить (9) в $\dot{\vartheta}_1'$ из (4), то после перемены порядка интегрирования и вычисления квадратуры по ϑ_0 получается,

$$\dot{\vartheta}_1' = -\frac{\eta_0 |I_0'|}{\pi\epsilon_0 v_{0z}^3} \frac{1}{q^2} \int_0^\infty \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (qx^{-1} \sin x)^2}} \right] dx, \quad (10)$$

откуда следует, что величина $\dot{\vartheta}_1'$ отрицательна при любых q .

Результат (10) удобно представить в виде

$$\delta_1' = -g \eta_0 |I_0'| / 4 \epsilon_0 v_{0z}^3, \quad (11)$$

где коэффициент $g = g(q)$ даётся выражением

$$g = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{(x^{-1} \sin x)^2 dx}{[0,5 + \sqrt{1 + (q x^{-1} \sin x)^2}]^2 - 0,25} \quad (12)$$

и, как видно из (12), является монотонно убывающей функцией аргумента q с максимальным предельным значением $g = 1$ при $q = 0$.

На основании (11) и (!) заключаем, что

$$\delta' = (\Omega/v_{0z}) (1 - g \eta_0 |I_0'| / 4 \epsilon_0 \Omega v_{0z}^2). \quad (13)$$

Опираясь на результаты (4) и (13), сделаем выводы относительно характера влияния, которое оказывает кулоновское взаимодействие электронов на параметры их стационарного движения в рассмотренной здесь монослоиной модели. Во-первых, и это главное, сохраняется сам тип движения — винтовой. Во-вторых, положения осей винтовых электронных траекторий, а также величины вращательной и поступательной скоростей электронов остаются практически неизменными. В-третьих, несколько изменяется (уменьшается) скорость нарастания азимутальной координаты врачающегося электрона, что соответственно выражается в несколько измененном по величине (увеличенном), но по-прежнему постоянном шаге электронного гофра.

Что же касается поведения реальных поливинтовых электронных потоков, имеющих пусть малую, но конечную толщину, а также хоть и большую, но конечную длину и ширину, то можно надеяться, что на не слишком больших длинах расслоение пучка не успеет существенно проявиться, и, по-видимому, хотя бы качественно сохранится картина монослоиной модели.

Киевский технологический институт
пищевой промышленности

Поступила в редакцию
19 июня 1970 г.