

**О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЕ СИНУСОИДАЛЬНО  
МОДУЛИРОВАННОГО ПУЧКА СВЕТА В СРЕДЕ С СИЛЬНО АНИЗОТРОПНЫМ  
РАССЕЯНИЕМ**

A. Г. Лучинин

В работе [1] была рассмотрена задача о распространении бесконечно широкого синусоидально модулированного пучка света в среде с вытянутой вперед индикатрисой рассеяния. Целью настоящего сообщения является расчет структуры ограниченных в по-перечном сечении пучков на основе результатов работы [1]. В этом случае интенсивность светового поля в среде может быть представлена в виде

$$I(r, n, t) = \operatorname{Re} [I_0(r, n) + I_\omega(r, n) e^{i\omega t}], \quad (1)$$

где  $r$  — координата точки наблюдения,  $n$  — направление луча,  $t$  — время,  $\omega$  — частота модуляции.

Полагая для определенности, что пучок распространяется вдоль оси  $z$ , для комплексной амплитуды светового поля выполним преобразование Фурье по переменной  $r_\perp = x + y$ :

$$I_\omega(z, r_\perp, n) = \int_{-\infty}^{\infty} \int F_\omega(z, k_\perp, n) \exp(ik_\perp r_\perp) dk_\perp. \quad (2)$$

Предположим далее, как и в [1], что диаграмма яркости светового поля является медленно меняющейся функцией углов (в масштабе угловой ширины индикатрисы) и в то же время ее характерная ширина мала по сравнению с  $\pi/2$ . Тогда для величины  $J_\omega$  уравнение переноса энергии можно преобразовать к виду

$$\left(1 - \frac{n_\perp^2}{2}\right) \frac{\partial F_\omega}{\partial z} + \left[\alpha + i(n_\perp k_\perp) + i \frac{\omega}{c}\right] F_\omega = D \Delta n_\perp F_\omega, \quad (3)$$

где  $n = n_\perp + \left(1 - \frac{n_\perp^2}{2}\right) z_0$ ,  $z_0$  — единичный вектор в направлении оси  $z$ ,  $n_\perp$  — проекция вектора  $n$  на плоскость  $z = 0$ ,  $D = \sigma(\gamma^2/4)$  — коэффициент диффузии,  $\sigma = \epsilon \Lambda$  — коэффициент рассеяния,  $\epsilon$  — коэффициент ослабления,  $\Lambda$  — вероятность «выживания» кванта,  $\gamma^2 = (1/4\pi) \int_{4\pi} \gamma^2 x(\gamma) d\Omega$  — средний квадрат угла отклонения лучей при единичном акте рассеяния,  $x(\gamma)$  — индикатриса рассеяния,  $\alpha = \epsilon - \sigma$  — коэффициент поглощения,  $c$  — скорость света в среде.

Уравнение (3) отличается от аналогичного уравнения работы [1] присутствием члена  $i(n_\perp k_\perp)$ , учитывающего попеченную неоднородность светового поля. Кроме того, в этом уравнении оператор  $\Delta_n$  заменен на  $\Delta_{n_\perp}$ . Можно показать, что ошибка, связанная с пренебрежением сферичностью лапласиана, мала для величин, расчет которых приводится ниже.

Решение уравнения (3) находится методом разделения переменных и имеет вид

$$F_\omega(z, n_x, n_y, k_x, k_y) = \sum_{m, j} A_{mj} \exp \left\{ -h_{mj} z - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h_{mj}}{2D}} \left[ \left( n_x - \frac{ik_x}{h_{mj}} \right)^2 + \left( n_y - \frac{ik_y}{h_{mj}} \right)^2 \right] \right\} H_m \left\{ \sqrt{\frac{h_{mj}}{2D}} \left( n_x - \frac{ik_x}{h_{mj}} \right) \right\} H_j \left\{ \sqrt{\frac{h_{mj}}{2D}} \left( n_y - \frac{ik_y}{h_{mj}} \right) \right\}, \quad (4)$$

где  $n_x, n_y, k_x, k_y$  — проекции векторов  $n_\perp$  и  $k_\perp$  на оси  $x$  и  $y$ ,  $A_{mj}$  — коэффициенты возбуждения,  $H_{m, j}$  — полином Эрмита,  $h_{mj}$  — корень дисперсионного уравнения

$$(m + j + 1) \sqrt{2D h_{mj}} + \frac{k_\perp^2}{2h_{mj}} + \alpha + i \frac{\omega}{c} - h_{mj} = 0 \quad (m, j = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Предположим, что при  $z = 0$

$$F_\omega = \frac{1}{4\pi^2} \delta(n_x) \delta(n_y) \quad (6)$$

(точечный мононаправленный источник)\*. Тогда, стандартным способом вычисляя коэффициенты  $A_{mj}$  и интегрируя (4) по переменным  $n_x$ ,  $n_y$  в бесконечных пределах с весом  $(1 - (n_x^2 + n_y^2)/2)$ , получаем выражение для спектра потока излучения по координатам  $x$ ,  $y$ :

$$\begin{aligned} K_\omega(z, k_\perp) = & 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sqrt{h_m/2D} (1 + k_\perp^2/2h_m^2) - (2m+1)}{\sqrt{h_m/2D} (1 + k_\perp^2/2h_m^2) - [(2m+1)/2]} \times \\ & \times \exp\left(-h_m z + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h_m}{2D}} \frac{k_\perp^2}{h_m^2}\right) L_m\left(-\sqrt{\frac{h_m}{2D}} \frac{k_\perp^2}{h_m^2}\right) + 2k_\perp^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \times \\ & \times \frac{\sqrt{h_n/2D}}{\sqrt{h_n/2D} (1 + k_\perp^2/2h_n^2) - (n+1)} \exp\left(-h_n z + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h_n}{2D}} \frac{k_\perp^2}{h_n^2}\right) \times \\ & \times L_n^1\left(-\sqrt{\frac{h_n}{2D}} \frac{k_\perp^2}{h_n^2}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $h_m$  и  $h_n$  — корни уравнения (5) для четной и нечетной суммы индексов соответственно,  $L_{m,n}^a$  — полиномы Лагерра. В силу сделанных приближений и граничного условия (6) выражение (7) справедливо лишь для больших оптических глубин, при которых нерассеянная компонента излучения становится малой по сравнению с рассеянной.

На рис. 1а и 1б показан вид функции  $|K_\omega(z, k_\perp)|$  для двух значений параметра  $\nu = \omega/\epsilon c$  ( $\nu = 0$  и  $\nu = 8$ ) при  $\Lambda = 0,6$  и  $\gamma^2 = 0,03$ . Нетрудно видеть, что ширина спектра при  $\nu = 8$  существенно больше, чем при  $\nu = 0$ . Это различие проявляется особенно резко при больших значениях  $\epsilon z$ . Из этого следует, что глубина модуляции светового пучка убывает по мере увеличения оптической глубины  $\epsilon z$  и при удалении от оси пучка. Другими словами, переменная составляющая светового пучка убывает быстрее постоянной составляющей и локализована около его оси.

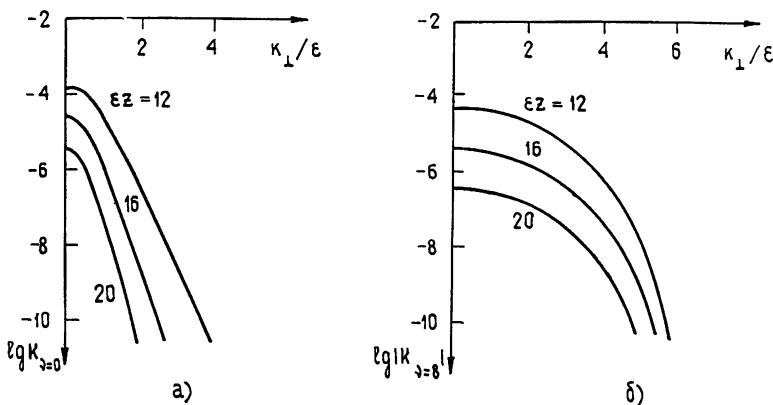


Рис. 1.

Представляет интерес вычислить также величину потока излучения, переносимого пучком через круглую апертуру, расположенную на его оси. Она связана с функцией  $K_\omega(z, k_\perp)$  соотношением

$$P_\omega(z, R) = 4\pi^2 R \int_0^\infty K_\omega(z, k_\perp) J_1(k_\perp R) dk_\perp, \quad (8)$$

где  $R$  — радиус апертуры,  $J_1$  — функция Бесселя.

\* Поле, возбуждаемое этим источником, является функцией Грина для уравнения переноса излучения.

На рис. 2а и 2б представлена величина  $|P_\omega(z, R)|/|P_\omega(z, \infty)|$ . Особенностью кривых рис. 2б является их осциллирующий характер. Из рисунка видно, что если на оси пучка поместить фотоприемник, регистрирующий переменную составляющую светового поля, с некоторой конечной апертурой, то амплитуда принимаемого сигнала может превышать соответствующую величину при неограниченном увеличении апертуры.

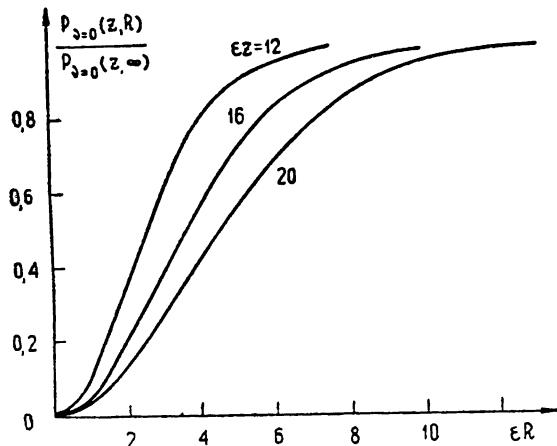


Рис. 2а.

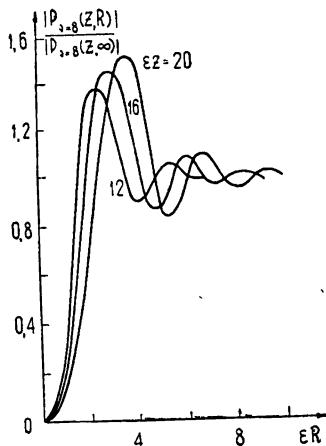


Рис. 2б.

Рис. 3 иллюстрирует зависимость величины  $|P_\omega(z, \infty)|$  от оптической глубины. Необходимо подчеркнуть, что ослабление даже постоянной составляющей полного потока  $|P_{\omega=0}(z, \infty)|$  заметно больше, нежели получающееся при ее расчете в приближении малых углов ( $n_z \approx 1$ ).

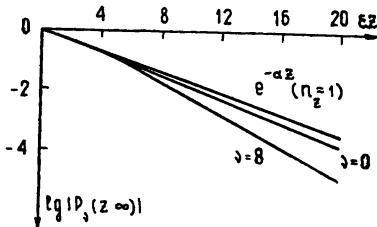


Рис. 3.

Численный расчет величин, приведенных на рисунках, был выполнен на ЭВМ Э. Г. Пахановой, которой автор выражает глубокую благодарность.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Лучинин, В. А. Савельев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 2, 256 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
25 марта 1971 г.

УДК 538.56

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В СЛУЧАЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ ГАУССОВОЙ СРЕДЕ

Ю. Н. Барабаненков

В работе Татарского [1] выводятся уравнения для статистических моментов волнового поля в случайно неоднородной среде, исходя из параболического уравнения. При этом делается предположение, что проницаемость среды есть гауссово случайное поле