ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIV, № 12 РАДИОФИЗИКА 1971

УДК 621.385.6

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СИММЕТРИИ К ИЗУЧЕНИЮ РАСЩЕПЛЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ВИДОВ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАТОРНЫХ СИСТЕМАХ МАГНЕТРОНА

В. В. Гаплевский, В. М. Конторович

С помощью теории групп исследуется расщепление собственных частот вырожденных видов колебаний в магнетронных резонаторных системах в зависимости от свойств симметрии возмущений, снимающих вырождение Изучена структура электромагнитного поля при возмущениях, вносимых как локальными неоднородностями (нарушение пространственной симметрии), так и вращающимся электронным потоком (при этом нарушается симметрия относительно обращения времени). Показано, что в общем случае структура поля представляется суперпозицией стоячей и бегущей волн, относительные амплитуды которых определяются через матричные элементы оператора возмущения.

ВВЕДЕНИЕ

В электромагнитных резонаторах, обладающих определенными свойствами симметрии, как известно, некоторые собственные частоты могут быть вырожденными. Вырождение может быть связано как с пространственной симметрией, так и с симметрией относительно изменения знака времени*. Внесение в резонатор возмущений, нарушающих симметрию, приводит к снятию вырождения и расщеплению собственных частот**.

В настоящей работе исследуются расщепление вырожденных собственных частот и азимутальная структура высокочастотного поля резонаторной системы магнетрона, образованной замкнутой в кольцо цепочкой из N резонаторов, в зависимости от свойств симметрии возмущения, вносимого локальными неоднородностями и электронным потоком. Анализ проводится на основании теории групп [7, 8], что позволяет провести его в достаточно общем виде.

Одной из первых работ по изучению следствий симметрии волноводных устройств широкого класса является работа Кернса [8]. В работах [9–11] теоретико-групповая методика применяется к конкретным микроволновым устройствам. Методы теории симметрии используются при исследовании одно- и двумерно-периодических замедляющих систем в монографии [3].

Применительно к рассматриваемой нами задаче привлечение известных групповых соображений позволяет получить непосредственную информацию о появлении вырождения и его причинах для резонаторных систем, обладающих различными группами симметрии (разд. 1), и вы-

* Кроме того, возможно так называемое случайное вырождение, не связанное с симметрией системы, которое ниже не рассматривается.

** Снятие вырождения при внесении одной или двух симметрично расположенных неоднородностей изучалось для различных резонаторных систем в [1–3]. Расщепление частот при наличии в резонаторе гиротропной среды (феррита или плазмы в магнитном поле) рассмотрено в [4–6]. Вопрос об одновременном воздействии подобных возмущений и их влиянии на структуру поля собственных колебаний в литературе не рассматривался.

яснить, что происходит при понижении симметрии (разд. 2). В дальнейшем, исходя из общих свойств возмущения, устанавливаются строгие закономерности для матричных элементов (аналогичные правилам отбора в квантовой механике (разд. 3)), которые используются затем для исследования расщепления собственных частот и структуры высокочастотного поля методами теории возмущений (разд. 4). Формулы теории возмущений записываются в виде, используемом в квантовой механике для вырожденных энергетических уровней [7]. Анализ этих формул позволяет исследовать общий случай одновременного воздействия на систему нескольких различных возмущений: локальных неоднородностей, нарушающих пространственную периодичность, и вращающегося электронного потока, нарушающего симметрию относительно обращения времени. Полученные результаты распространяются также на системы, имеющие распределенные или сосредоточенные потери.

1. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ РЕЗОНАТОРНОЙ СИСТЕМЫ МАГНЕТРОНА

В разд. 1 и 2 приведем некоторые известные сведения из теории представлений групп [7, 12] в виде, в котором их удобно использовать применительно к резонаторной системе магнетрона.

Поле собственных колебаний в объеме V резонаторной системы описывается уравнениями Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} E_n = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_n}{\partial t} \\ \operatorname{rot} H_n = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E_n}{\partial t} \end{cases} \quad (V). \tag{1}$$

В отсутствие потерь в стенках резонатора оно удовлетворяет на поверхности стенок S граничным условиям

$$[\boldsymbol{n}\,E_n] = 0, \quad (\boldsymbol{n}\,H_n) = 0 \quad (S). \tag{2}$$

Считаем, что симметрия системы определяется симметрией граничных условий и рассматриваемая система допускает ряд преобразований координат, при которых она совмещается сама с собой.

Совокупность таких линейных преобразований образует группу G. Электромагнитные поля, являющиеся решениями уравнений (1) с граничными условиями (2), при преобразованиях координат, входящих в группу симметрии, преобразуются по представлениям этой группы. В качестве базиса представления может быть выбрана совокупность собственных векторов $\{E_n, H_n\}$ данной граничной задачи.

Если собственный вектор $\{E_n, H_n\}$ соответствует собственной частоте ω_n, то в силу инвариантности уравнений поля относительно преобразований симметрии преобразованный собственный вектор $\{G E_n, G H_n\}$ также является решением уравнений поля при той же собственной частоте [8]. Такая совокупность распределений поля, переходящих друг в друга при операциях симметрии, преобразуется по неприводимому представлению группы G. Размерность этого неприводимого представления определяет кратность вырождения собственных частот. Кроме того, зная свойства представлений группы G, мы можем выяснить возможные типы симметрии высокочастотных полей видов колебаний резонаторной системы без детального исследования уравнений поля [7, 12].

Рассмотрим подробнее только две точечные группы симметрии C_N и C_{Nv}. Группу C_N имеет система анодного блока магнетрона, например, при «скошенных» резонаторах (рис. 1 *а*). Эта группа содержит, как известно, одну ось симметрии N-го порядка, и все ее неприводимые представления одномерны. Каждому представлению соответствует свой вид колебаний резонаторной системы, для которого можно указать распределение высокочастотного поля. Например, при N четном имеются два

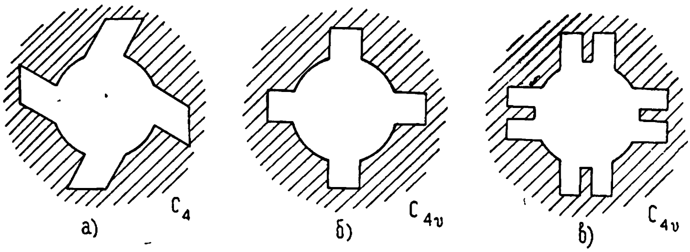

Рис. 1. Примеры резонаторных систем, обладающих группами симметрии C_N и C_{Nv}.

действительных представления, которым в магнетронах соответствуют нулевой и противофазный виды колебаний. Распределения полей других видов колебаний описываются бегущими волнами, так как они преобразуются по комплексным неприводимым представлениям. Однако комплексно-сопряженным представлениям соответствуют двукратно вырожденные собственные частоты, в силу того, что уравнения поля (1), (2) симметричны по отношению к изменению знака времени. Действительно, если ввести оператор обращения времени [12–14]

$$\hat{T} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, -t), \quad \hat{T} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = -\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, -t) \tag{3}$$

и учесть, что уравнения Максвелла коммутируют с таким оператором, получим, что бегущим в противоположные стороны волнам отвечают одинаковые собственные частоты. Аналогичное вырождение уровней энергии хорошо известно в квантовой механике [7, 12].

Резонаторные системы (рис. 1*б*, *в*), имеющие дополнительно N плоскостей отражения, проходящих через ось симметрии, обладают группой симметрии C_{Nv}. Эта группа имеет кроме одномерных еще и двумерные неприводимые представления. Виды колебаний, распределения полей которых описываются собственными функциями, преобразующимися по этим двумерным представлениям, имеют одинаковые частоты. Причиной вырождения является пространственная симметрия относительно плоскостей отражения (при наличии оси симметрии). В этом случае инвариантность относительно обращения времени не приводит к дополнительному вырождению [12]. Таким образом, в рассматриваемой системе может быть максимум двукратное вырождение, если, конечно, отсутствует случайное вырождение, связанное с совпадением собственных частот, относящихся к различным группам резонансов, что возможно при некоторых значениях параметров системы.

2. О СНЯТИИ ВЫРОЖДЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЯМИ ОПРЕДЕЛЕННОЙ СИММЕТРИИ

При определенном расположении локальных неоднородностей возмущение само может обладать некоторой симметрией, в результате чего произойдет лишь частичное снятие вырождения. Решить конкретно вопрос о расщеплении той или иной частоты можно при этом следующим образом [7, 11]. Представление невозмущенной системы надо рассматривать как приводимое представление группы симметрии возмущенной системы и, пользуясь известными правилами, произвести его разложение на неприводимые части.

Например, система обладала симметрией C_{8v}, а возмущение понизило симметрию до группы C_{4v}. Рассматривая поочередно все двумерные представления группы C_{8v} как приводимые, получим, что два из них распадутся на одномерные представления группы C_{4v}, т. е. произойдет расщепление двух собственных частот, а остальные частоты по-прежнему останутся вырожденными. Такое частичное расщепление частот известно для разнорезонаторных анодных блоков магнетронов (если считать невозмущенной систему с одинаковыми резонаторами). В общем случае, используя многоступенчатые системы, можно получить заданное чередование вырожденных и невырожденных частот.

В случае одной или нескольких локальных неоднородностей, расположенных так, что сохраняется отражение в плоскости, симметрия системы понижается до группы C_S. В системе при этом, как хорошо известно, наблюдается полное снятие вырождения, а структура полей описывается стоячими волнами.

Если возмущение (например, электронный поток) приводит к нарушению симметрии относительно обращения времени, комплексно-сопряженным представлениям группы C_N соответствуют различные собственные частоты, т. е. вырождение в такой системе полностью снимается. Структура поля на каждой из расщепленных частот описывается в этом случае бегущей волной.

В системах с группой C_{Nv} для полного устранения вырождения необходимо, чтобы под действием возмущения одновременно нарушалась и временная, и пространственная симметрия. Распределение поля в таких системах так же, как и для группы C_N, зависит от свойств возмущения.

3. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВОЗМУЩЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СИММЕТРИИ

Если в резонаторной системе одновременно присутствуют несколько различных возмущений, то для оценки расщепления собственных частот и определения структуры высокочастотного поля можно воспользоваться известными выражениями теории возмущений [7].

Предполагая среду однородной и исключив магнитное поле, вместо уравнений (1) получим волновое уравнение, описывающее поля в невозмущенной системе:

$$\Delta E_n(r) = -\frac{\omega_n^2}{c^2} E_n(r) \tag{4}$$

(зависимость от времени принята в виде $\exp(-i\omega t)$).

Для определенности выберем невозмущенную систему, у которой предполагается наличие группы симметрии C_N и симметрии относительно обращения времени (отсутствие потерь). Хорошо известно [3], что для такой резонаторной системы решения уравнения (4) записываются в виде

$$E_n(r) = e^{in\varphi}\,\mathcal{E}_n(r) \qquad \left(-\frac{N}{2} < n \leqslant \frac{N}{2}\right), \tag{5}$$

где $\mathcal{E}_n(r)$ — некоторая периодическая функция координат, симметричная по отношению к операциям группы C_N. Все виды колебаний, кроме видов с $n = 0$ и $n = N/2$, являются двукратно вырожденными.

Считаем, что при наличии возмущений волновое уравнение (для вихревой части поля) можно записать в следующем виде (аналогичном уравнению Шредингера):

$$(\Delta + \hat{V})\, E = -\frac{\omega^2}{c^2} E, \tag{6}$$

что позволяет использовать имеющиеся формулы для случая двукратного вырождения (см. [7], § 39). Здесь введен линейный оператор возмущения $\hat{V}$. Конкретный вид этого оператора и возможность записи уравнения (6) будут обсуждены ниже.

Распределение поля в нулевом приближении определяется линейной комбинацией

$$\boldsymbol{E} = b_1 \boldsymbol{E}_1 + b_2 \boldsymbol{E}_2, \tag{7}$$

где обозначено: $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{-n}$ и $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_n$, причем коэффициенты в нормированных правильных собственных функциях равны соответственно [7]

$$b_1 = \left\{\frac{V_{12}}{2\sqrt{V_{12} V_{21}}}\left[1 \pm \frac{V_{11} - V_{22}}{\sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4V_{12}V_{21}}}\right]\right\}^{1/2}; \tag{8}$$

$$b_2 = \pm \left\{\frac{V_{21}}{2\sqrt{V_{12} V_{21}}}\left[1 \mp \frac{V_{11} - V_{22}}{\sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4V_{12}V_{21}}}\right]\right\}^{1/2}. \tag{9}$$

Изменение резонансной частоты находится из выражения

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_n^2}{c^2} - \alpha, \tag{10}$$

в котором поправка α в первом приближении определяется как

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\left[V_{11} + V_{22} \pm \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4V_{12}V_{21}}\right]. \tag{11}$$

Из приведенных формул видно, что поставленная задача сводится, по существу, к определению матричных элементов V_{jk} оператора возмущения $\hat{V}$, равных

$$V_{jk} = \int \boldsymbol{E}_j^* \hat{V} \boldsymbol{E}_k \, d^3r \qquad (j,\ k = 1,2), \tag{12}$$

где интегрирование ведется по всему объему невозмущенного резонатора.

На основании общих свойств симметрии возмущения для матричных элементов могут быть установлены следующие строгие соотношения:

$$V_{12} = 0, \quad \text{если} \quad \hat{G}\hat{V} = \hat{V}\hat{G}; \tag{13}$$

$$V_{11} = V_{22}, \ \text{если} \ \hat{K}\hat{V} = \hat{V}\hat{K} \ \text{или} \ \hat{P}\hat{V} = \hat{V}\hat{P}, \tag{14}$$

где $\hat{G}$, $\hat{K}$ и $\hat{P}$ соответственно операторы поворота, комплексного сопряжения и отражения в плоскости, проходящей через ось резонатора.

В самом деле, действие унитарного оператора поворота $\hat{G}$ эквивалентно замене переменной φ на $\varphi + 2\pi/N$, в силу чего справедливы следующие преобразования:

$$\begin{aligned} V_{12} &= \int \boldsymbol{E}_1^* \hat{V} \boldsymbol{E}_2 \, d^3r = \int \hat{G} \boldsymbol{E}_1^* (\hat{G}\hat{V}\hat{G}^{-1}) \hat{G} \boldsymbol{E}_2 \, d^3r = \\ &= \exp\left(i\,\frac{4\pi n}{N}\right) \int \boldsymbol{E}_1^* (\hat{G}\hat{V}\hat{G}^{-1}) \ \boldsymbol{E}_2 \, d^3r \end{aligned} \tag{15}$$

(мы не следим за преобразованием векторных индексов, поскольку матричные элементы представляют собой скалярные произведения векторов). Если при внесении возмущения сохраняется пространственная симметрия системы, т. е. $\hat{G}\hat{V}\hat{G}^{-1} = \hat{V}$, получаем, что

$$V_{12} = \exp\left(i\,\frac{4\pi n}{N}\right) V_{12}$$

и, следовательно, при $n \neq 0$ и $n \neq N/2$ матричный элемент $V_{12} = 0$ (см. (13)). Наоборот, V_{12} может быть отличен от нуля для тех же значений номера вида колебаний только в том случае, когда вомущение нарушает симметрию системы и оператор поворота не коммутирует с оператором возмущения, т. е. когда имеет место неравенство $\hat{G}\hat{V} \neq \hat{V}\hat{G}$.

Операция комплексного сопряжения $\hat{K}$, которая при переходе к уравнениям для монохроматического поля эквивалентна операции обращения времени $\hat{T}$ (с дополнительным условием изменения знака у магнитного поля), переводит, согласно (5), решение $\boldsymbol{E}_1$ в решение $\boldsymbol{E}_2$. На основании этого для эрмитова оператора возмущения, для которого $V_{jk} = V_{kj}^*$, можно записать

$$\begin{aligned} V_{11} = \int \boldsymbol{E}_1^* \hat{V} \boldsymbol{E}_1\, d^3r = \int \hat{K} \boldsymbol{E}_1^* (\hat{K}\hat{V}\hat{K}^{-1})\, \hat{K} \boldsymbol{E}_1 d^3r = \\ = \int \boldsymbol{E}_2^* (\hat{K}\hat{V}\hat{K}^{-1})\, \boldsymbol{E}_2\, d^3 r. \end{aligned} \tag{16}$$

Если возмущение не нарушает временной симметрии, то операторы $\hat{K}$ и $\hat{V}$ обладают свойством коммутативности и, как следует из (16), матричные элементы V_{11} и V_{22} равны друг другу. В том же случае, когда симметрия относительно обращения времени нарушается, возможно неравенство $V_{11} \neq V_{22}$.

Важно отметить, что свойства симметрии возмущения относительно обращения времени не накладывают никаких ограничений на недиагональные матричные элементы, а свойства пространственной симметрии возмущения, в то же время, не влияют на соотношение диагональных матричных элементов.

Использование для систем, обладающих группой симметрии C_{Nv}, вместо операции комплексного сопряжения оператора отражения в плоскости $\hat{P}$ приводит к соотношению, аналогичному (16), но справедливому и для неэрмитовых операторов возмущения.

4. РАСЩЕПЛЕНИЕ ЧАСТОТ И СТРУКТУРА ПОЛЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ СИСТЕМЫ

Полученные соотношения позволяют, не прибегая к детальным вычислениям матричных элементов, рассматривать расщепление собственных частот и структуру высокочастотного поля на основе знания общих свойств симметрии возмущений. Вначале проиллюстрируем применение изложенной методики на примерах неоднородности или электронного потока в резонаторной системе с осью C_N; структура поля для этих простейших случаев качественно рассмотрена во втором разделе.

а) Одна неоднородность. В хорошо известном случае одной неоднородности возмущение приводит к нарушению пространственной периодичности, следовательно, $V_{12} \neq 0$.

В системе без потерь для матричных элементов эрмитова оператора выполняется соотношение $V_{12} = V_{21}^{*}$. Так как временная симметрия сохраняется, то $V_{11} = V_{22}$. Учитывая все это, получим, что частотные поправки равны

$$\alpha_{1,2} = V_{11} \pm |V_{12}|. \tag{17}$$

Из (8) и (9) следует, что коэффициенты $b_{1,2}$ равны по модулю $1/\sqrt{2}$, т. е. поля, согласно (7), описываются стоячими волнами. Ориентация стоячих волн, как следует из (8) и (9), определяется величиной аргумента недиагональных матричных элементов.

б) Электронный пучок в магнитном поле. Когда возмущение вносится симметричным вращающимся электронным потоком, нарушается только временная симметрия, поэтому $V_{11} \neq V_{22}$ и $V_{12} = 0$. Частотные поправки равны соответственно

$$\alpha_1 = V_{11} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = V_{22}. \tag{18}$$

Собственные функции получаются в виде бегущих в противоположные стороны волн, так как в (8) и (9) либо $b_1 = 0$, либо $b_2 = 0$.

Отметим, что соотношения (17) и (18) могут быть использованы для нахождения матричных элементов по результатам экспериментальных измерений смещения резонансных частот системы при внесении различного рода возмущений.

в) Совместное воздействие неоднородности и электронного потока. При одновременном воздействии неоднородности и электронного потока матричные элементы линейного оператора возмущения можно представить в виде суммы матричных элементов, вычисленных отдельно для каждого из возмущений. Разность $V_{11} - V_{22}$ определяется влиянием электронного потока, а величина матричного элемента V_{12} зависит только от величины неоднородности. Отношение $(V_{11} - V_{22})/V_{12}$ характеризует влияние электронного потока по сравнению с воздействием неоднородности. Зависимости коэффициентов $b_{1,2}$ для одной из расщепленных частот от величины отношения $(V_{11} - V_{22})/2|V_{12}|$ приведены на рис. 2.

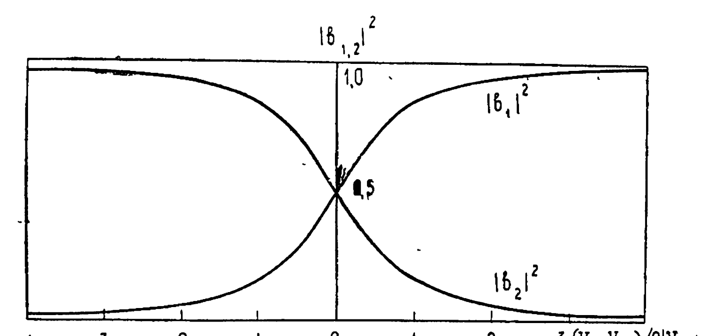

Рис. 2. Зависимости амплитудных коэффициентов b_1 и b_2, определяющих распределение поля в нулевом приближении, от соотношения матричных элементов, характеризующих влияние неоднородности и электронного потока.

Эти зависимости позволяют проследить, как изменяется структура поля при различных соотношениях возмущений. При преобладающем влиянии одного из возмущений в системе установится либо бегущая, либо стоячая волна. В общем случае распределение высокочастотного поля представляется суперпозицией стоячей и бегущей волн. Полученное другим путем аналогичное заключение о сложной структуре поля в резонаторной системе с электронным пучком содержится в работах [15, 16].

При расчете частотных поправок параметры сосредоточенной неоднородности рассматривались в квазистатическом приближении и пренебрегалось взаимодействием электронного потока со встречной бегущей волной. Результаты этих расчетов приведены на рис. 3. Отметим, что полученные зависимости подобны графикам смещения частот связанных контуров с несимметричной связью, а величина $(V_{11}-V_{22})/2\,|V_{12}|$ определяет связанность эквивалентных контуров.

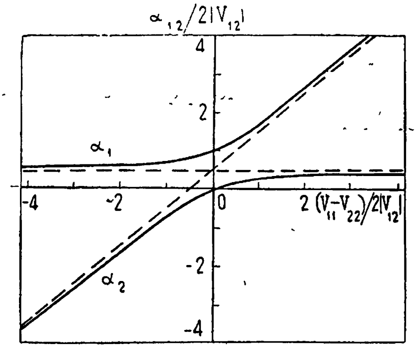

Рис. 3. Изменение частотных поправок первого приближения в зависимости от соотношения матричных элементов.

г) Несколько локальных возмущений. Рассмотрим случай q произвольно расположенных и, вообще говоря, различных неоднородностей. Учитывая, что диагональные матричные элементы не зависят от номера резонатора, в котором расположена неоднородность, для матричного элемента, характеризующего суммарное возмущение, можно записать

$$V_{11}=\sum_{k=1}^{q} V_{11}^{(k)}, \tag{19}$$

где $V_{11}^{(k)}$ вычисляются для неоднородностей, условно помещенных в одном и том же резонаторе, принятом за начало отсчета. Для недиагональных матричных элементов, выделяя зависимость от φ_k — угловой координаты резонатора, в котором расположена k-я неоднородность, получим

$$V_{12}=\sum_{k=1}^{q} V_{12}^{(k)}\exp(2in\varphi_k). \tag{20}$$

Анализ формул (8) и (9) после подстановки в них выражений (19) и (20) и аналогичных соотношений для других матричных элементов показывает, что путем изменения величины и взаимного расположения неоднородностей можно управлять ориентацией высокочастотного поля относительно этих неоднородностей, а также изменять величину расщепления собственных частот.

При определенном расположении неоднородностей V_{12} обращается в нуль. В этом случае для вычисления частотных поправок и нахождения коэффициентов $b_{1,2}$, определяющих структуру поля, надо рассматривать уравнения второго приближения [7], которые ввиду их громоздкости здесь не приводятся. В этих уравнениях вместо матричных элементов V_{jk} стоят суммы $\sum\limits_{m\neq n} V_{jm}V_{mk}/(\omega_m^2-\omega_n^2)$, в которых с помощью матричных элементов V_{jm} и V_{mk} учитывается междувидовая связь основного n-го вида с соседними видами колебаний. Требование малости междувидовой связи приводит к дополнительному условию применимости теории возмущений: необходимо, чтобы сдвиг резонансной частоты был значительно меньше разности частот соседних видов колебаний: $\Delta\omega_n \ll |\omega_m - \omega_n|$.

Известно, что внесение в резонаторную систему неоднородностей вызывает искажения поля, связанные с появлением дополнительных симметричных составляющих поля E_m $(m \neq -n;\ n)$, являющихся поправками к полю нулевого приближения [3]. В первом приближении теории возмущений амплитуды этих составляющих выражаются через амплитудные коэффициенты основной составляющей сложного поля согласно [7]:

$$b_m = \frac{b_1 V_{m1} + b_2 V_{m2}}{\omega_m^2 - \omega_n^2}, \tag{21}$$

что позволяет рассчитать, как изменяется величина искажений поля при соответствующем выборе числа и относительного расположения неоднородностей.

д) Резонаторные системы с потерями. При наличии потерь в системе, рассматривая их как малые возмущения, представим оператор возмущения в виде суммы эрмитовой и антиэрмитовой частей: $\hat{V} = \hat{X} + i\hat{R}$, где $\hat{X}$ и $\hat{R}$ — эрмитовы операторы, описывающие реактивную и диссипативную части возмущения. Для диагональных матричных элементов при этом получаются комплексные выражения, поэтому формула (11) определяет теперь не только сдвиг резонансных частот, но и величину затухания.

Следствием пространственной симметрии системы по-прежнему являются условия (13), (14); временная же симметрия при наличии потерь отсутствует. В частных случаях, когда возмущение сводится к введению диэлектрической или магнитной проницаемостей ε и μ, а также поверхностного импеданса ξ, для матричных элементов оператора $\hat{V}$ существует дополнительное условие:

$$V_{11}(H_0) = V_{22}(-H_0), \tag{22}$$

где H_0 — внешнее магнитное поле. Это условие является следствием микроскопической обратимости, выражаемой соотношениями Онсагера [14]: $\varepsilon_{ik}(H_0) = \varepsilon_{ki}(-H_0)$ (аналогично для μ и ξ), причем (22) справедливо и при ε, зависящем от координат.

В условиях сильного скин-эффекта распределенные потери в системе учитываются, например, с помощью граничных условий Леонтовича [17], причем входящее в них волновое сопротивление имеет численно совпадающие реальную и мнимую части, т. е. можно записать

$$\hat{V} = \hat{R}(1 + i). \tag{23}$$

Из условия сохранения пространственной симметрии системы следует $V_{12} = V_{21} = 0$. Частотные поправки $\alpha_1 = R_{11}(1 + i)$ и $\alpha_2 = R_{22}(1 + i)$ численно совпадают при $H_0 = 0$ вследствие выполнения условия (22).

Если в системе имеются только сосредоточенные потери, не обладающие реактивностью, т. е. $\hat{X} = 0$, частотные поправки первого приближения $\alpha_{1,2} = i(R_{11} \pm |R_{12}|)$. Одна из стоячих волн имеет при этом максимум поля в области, где сосредоточены потери, и испытывает поэтому сильное затухание; смещение частоты проявляется лишь во втором приближении. В общем случае локальные неоднородности обладают реактивностью и потерями и приводят к одновременному сдвигу частот и уширению резонансных линий.

5. КОНКРЕТНЫЙ ВИД ОПЕРАТОРА ВОЗМУЩЕНИЯ

Рассматривая неоднородное волновое уравнение для вихревых полей

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} E = -\frac{4\pi}{c^2} i\omega j^e, \tag{24}$$

где j^e — плотность электрического тока, видим, что в самосогласованной постановке в линейном приближении оно сводится к виду (6), если ввести оператор возмущения

$$\hat{V} E = i \frac{4\pi\omega}{c^2} j^e. \tag{25}$$

Для возмущения, вносимого электронным потоком, материальное уравнение находится из уравнений движения, причем связь интересующих нас вихревых компонент j^e и E можно представить с помощью линейного преобразования:

$$j_i^e(r, \varphi) = \int dr' \, d\varphi' \, K_{il}(r, r', \varphi - \varphi', \omega) \, E_l(r, \varphi). \tag{26}$$

Из (25) и (26), воспользовавшись связью между пространственными гармониками полей вырожденных видов E_n и E_{-n} (одно поле содержит ряд по $\gamma = n + mN$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, другое поле — ряд по $(-\gamma)$, а $\mathcal{E}_\gamma^* = e^{i\delta} \mathcal{E}_{-\gamma}$), можно получить следующее соотношение между матричными элементами, аналогичное (22)*:

$$V_{11}(H_0) = V_{11}^*(H_0) = V_{22}(-H_0), \tag{27}$$

или $V_{11}(v_0) = V_{22}(-v_0)$, где v_0 — начальная скорость пучка.

Связь между пространственными гармониками тока и поля наиболее просто выглядит в одноволновом резонансном приближении [18, 19]. Согласно [19], например, получаем при больших замедлениях на границе бриллюэновского облака

$$j_\varphi(\gamma) = -\frac{i\rho_0}{\gamma\omega_L - \omega} \frac{e}{m} E_\varphi(\gamma), \qquad \omega_L = \frac{eH_0}{2mc}. \tag{28}$$

Выражение (28) иллюстрирует условие (27) и снятие вырождения при внесении пучка, являющееся следствием нарушения симметрии относительно обращения времени (3).

В тех случаях, когда возмущение системы содержится в граничных условиях, появление на стенках невозмущенного резонатора касательных составляющих полей можно учитывать как поверхностные электрические или магнитные токи с плотностями [17]:

---

* При этом, используя малость возмущения, пренебрегается изменением частоты в (25) и (26). Это справедливо, как видно из (28), лишь при $|\gamma\omega_L - \omega| \gg |\omega_n - \omega|$. Использование подстановки $\omega = \omega_n$ означает, кроме того, что не учитываются собственные волны электронного пучка [18]. Эти ограничения, однако, не столь существенны при выяснении вопроса о снятии вырождения и структуре поля, где основную роль играют свойства симметрии возмущения.

$$j^e = \frac{c}{4\pi}\,[Hn]\,\delta(r - r_s), \quad j^m = \frac{c}{4\pi}\,[nE]\,\delta(r - r_s), \tag{29}$$

где r_s принадлежит точкам на возмущенной поверхности резонатора. Для различных конкретных случаев отсюда могут быть получены выражения для оператора возмущения.

Пусть, например, имеется пологая деформация оболочки резонатора. Используя известные выражения из теории возмущений для невырожденных собственных колебаний [17, 20], легко показать, что оператор возмущения после введения поверхностного электрического тока приводится к виду

$$\hat{V}E = -[n\,\mathrm{rot}\,E]\,\delta(r - r_s). \tag{30}$$

Для систем с потерями, учитывая конечную проводимость стенок резонатора путем введения поверхностного магнитного тока [17], оператор возмущения можно записать следующим образом:

$$\hat{V}E = \mathrm{rot}\,[nE]\,\delta(r - r_s). \tag{31}$$

Если на стенках выполняются приближенные граничные условия Леонтовича: $[nE] = -w\,[n[nH]]$, причем волновое сопротивление w равно $(1 - i)\sqrt{\omega/8\pi\sigma}$, оператор возмущения можно переписать в виде (23), где с учетом граничных условий (2) для полей невозмущенной системы обозначено

$$\hat{R}E \approx -\frac{\omega}{2c}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}\,E\delta(r - r_s). \tag{32}$$

Аналогичным образом устанавливается вид оператора возмущения и для других конкретных случаев.

Таким образом, характер распределения высокочастотного поля в магнетронной резонаторной системе существенно зависит от свойств симметрии возмущения, снимающего вырождение видов колебаний. В резонаторной системе с локальной неоднородностью, нарушающей пространственную периодичность, устанавливаются стоячие волны. При наличии вращающегося электронного потока, когда нарушается симметрия относительно обращения времени, собственные колебания описываются бегущими в противоположные стороны волнами. При одновременном воздействии этих возмущений структура высокочастотного поля представляет собой суперпозицию бегущей и стоячей волн, что необходимо учитывать при определении величины связи резонаторной системы с нагрузкой магнетрона на каждой из двух расщепленных частот.

Полученные результаты могут быть использованы при анализе других резонаторных систем с вырожденными видами колебаний, например, в кольцевых лазерах, в различных ферритовых устойствах, в приборах типа мазера на циклотронном резонансе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Фиск, Г. Хагструм, П. Гатман, Магнетроны, изд. Сов. радио, М., 1948.
2. В. Б. Штейншлейгер, Явления взаимодействия волн в электромагнитных резонаторах, Оборонгиз, М., 1955
3. Р. А. Силин, В. П. Сазонов, Замедляющие системы, изд. Сов. радио, М., 1966.
4. Б. Лакс, А. Берк, Вопросы радиолокационной техники, 3 (21), 12 (1954).

5. S. I. Buschbaum, L. Mower, S. C. Brown, Phys. Fluids., 3, 806 (1960).
6. В. Е. Голант, СВЧ методы исследования плазмы, изд. Наука, М., 1968.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.
8. D. M. Kerns, J. Res. Natn. Bur. Stand., **46**, 267 (1951).
9. B. A. Auld, IRE, Trans., **MTT-7**, 238 (1959).
10. R. M. Bevensee, Arch. der Electr. Übertragung, **16**, H-9, 449 (1962).
11. M. N. Jones, Int. J. Electronics, **22**, 361 (1967).
12. Е. Вигнер, Теория групп и ее применения к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, М., 1961.
13. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, изд. ВКАС им. С. М. Буденного, 1949
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1962; Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М, 1959
15. Р. Дансмюр, сб. Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями, ИЛ, М., **1**, 516 (1961).
16. Ю. А. Ковалев, Ю. В. Масленников, Тезисы докладов VI Межвузовской конференции по электронике СВЧ, Минск, 1969, стр. 90
17. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
18 А. В. Гапонов, В. К. Юлпатов, Радиотехника и электроника, **7**, 613 (1962).
19. В. Я. Малеев, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, № 2, 333 (1962).
20. Д Слэтер, Электроника сверхвысоких частот, изд. Сов. радио, М., 1948.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
2 декабря 1969 г.,
после доработки
25 июня 1971 г.

APPLICATION OF THE SYMMETRY THEORY TO INVESTIGATING DEGENERATE MODE SPLITTING IN MAGNETRON RESONATORS

V. V. Gaplevskii, V. M. Kontorovich

We investigate the splitting of natural frequencies of degenerated modes in magnetron resonators depending on the symmetry properties of perturbations removing degeneration by means of the group theory. The electromagnetic field structure at perturbations introduced both by local inhomogeneities (the spatial symmetry distortion) and rotating electron current (the symmetry with respect to time inversion being distorted) is studied. In the general case the field structure is shown to be represented as a superposition of standing and travelling waves the relative amplitudes of which are determined by the matrix elements of the perturbation operator.