

УДК 621.372.826

К РАСЧЕТУ ОТКРЫТОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Г. И. Веселов, Г. Г. Воронина

Методом частичных областей решена задача о распространении электромагнитных волн вдоль регулярного прямоугольного диэлектрического волновода (ПДВ), находящегося в неограниченной однородной среде. Получены дисперсионные уравнения, определяющие постоянные распространения всех типов поверхностных волн, которые могут существовать в рассматриваемой системе. На основании приближенных уравнений рассчитаны дисперсионные кривые для четной волны дипольного типа $(HE)_{11}^+$, проведено сравнение с результатами, полученными другими методами. Составлены таблицы специальных вспомогательных функций, упрощающие практические расчеты на основе дисперсионного уравнения первого приближения.

В антенно-волноводной технике хорошо известны разнообразные применения отрезков открытых диэлектрических волноводов (ДВ) в качестве диэлектрических антенн, элементов линий передачи, разветвителей, фильтров, направленных ответвителей и т. п. За последние годы они особенно интенсивно используются в различных устройствах миллиметрового, субмиллиметрового и оптического диапазонов волн [1].

В связи с расширяющимися техническими возможностями все большее внимание уделяется разработке теории открытых ДВ. Медленные электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль ДВ круглого поперечного сечения и вдоль диэлектрических плоских пластин (идеализированная двумерная модель), изучены достаточно полно [1, 3, 4]. Имеется ряд работ и по ДВ эллиптического поперечного сечения [5, 6]. Однако для прямоугольных диэлектрических волноводов (ПДВ), представляющих большой практический интерес [1], не существует эффективной теории, базирующейся на строгом решении задачи и позволяющей достаточно просто находить поля, постоянные распространения и другие важнейшие электродинамические характеристики собственных волн системы. Известны работы, проводимые в МЭИ [2] и посвященные, главным образом, экспериментальному изучению свойств ПДВ.

В теоретическом отношении определенный интерес представляют работы Шлессера [7] и Гоэла [8]. В них, в частности, были получены первые численные результаты. Однако в [7] ПДВ рассматривался как частный случай металлического волновода с диэлектрическим вкладышем прямоугольного сечения. При таком подходе к решению задачи возникают трудности вычислительного характера. Действительно, разложение искомого поля ведется по собственным функциям прилегающей полой области, а, следовательно, с уменьшением частоты резко возрастает необходимое число «пробных» функций, ибо для устранения влияния экрана необходимо удалять его как можно дальше от вкладыша. С другой стороны, с ростом частоты, вследствие влияния волноводно-диэлектрического эффекта, разложение также затруднено и не дает удовлетво-

рительных результатов, так как распределение поля вдоль границы сопряжения приобретает форму, близкую к ступенчатой.

Гоэл [8] исследовал ПДВ, используя метод коллокации, согласно которому тангенциальные составляющие электромагнитных полей смежных областей сопрягаются вдоль границы раздела лишь в отдельных ее точках. Этому методу свойственна плохая обусловленность матриц, к тому же быстрота сходимости приближений определяется выбором точек коллокации, для которого не известны обоснованные правила.

В настоящей работе задача о свободных колебаниях открытого ПДВ решается методом частичных областей. Для данной задачи характерны трудности, связанные со сложностью формулировки граничных условий, поскольку граница сопряжения частичных областей (ЧО) не совпадает с координатной линией так называемой базисной системы координат, в которой записываются частные решения волнового уравнения. Однако, используя метод обобщенного разделения переменных*, а также различные координатные системы (базисную, совокупность локальных, вспомогательную и естественную координатную систему на контуре, отвечающем границе сопряжения (ЧО)), удается представить решение поставленной краевой задачи в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, коэффициенты при неизвестных в которой являются функциями параметров волноводной системы, искомой постоянной распространения и частоты.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЕЙ В ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассмотрим бесконечно протяженный диэлектрический стержень прямоугольного сечения, находящийся в неограниченной однородной среде. Пусть окружающая среда характеризуется проницаемостями ϵ_e , μ_e , а материал стержня — ϵ_i , μ_i . Разобьем плоскость поперечного сечения системы на две частичные области. Одна из них, внутренняя область (i), ограничена периметром диэлектрического стержня длиной $T = 4(a + b)$, другая, внешняя область (e), простирается до бесконечности (рис. 1а).

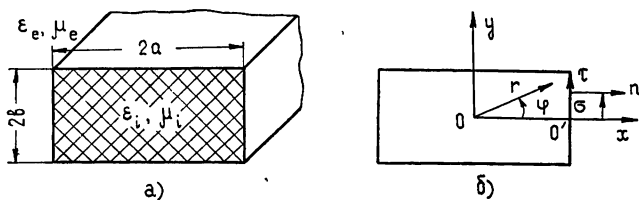


Рис. 1. Прямоугольный диэлектрический волновод (а) и используемые системы координат (б).

Будем полагать, что закон изменения составляющих поля вдоль оси z определяется для прямой волны функцией $\exp(-i\beta z)$, где β — фазовая постоянная соответствующего собственного типа колебания волновода. Волновой множитель $\exp[i(\omega t - \beta z)]$ в дальнейшем опускаем. Для описания полей в качестве базисной используем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) (рис. 1б), поскольку в этой системе условие 2π -периодичности выполняется наиболее просто.

* Строгое математическое обоснование его применимости в данном случае авторам не известно. Для некоторых частных случаев такие обоснования содержатся в работе [9].

Продольные составляющие электромагнитного поля в каждой частичной области представляем в виде простых рядов по полным системам скалярных функций, почленно удовлетворяющих волновому уравнению, и соответствующим «внутренним» граничным условиям [11, 12]: ограниченности поля (в области i), излучения (в области e) и 2π -периодичности*. Получаем:

$$\begin{aligned} E_{zi} &= \sum_{\nu} A_{\nu} J_{\nu}(k_{ci}r) \exp(i\nu\varphi), \\ H_{zi} &= \sum_{\nu} B_{\nu} J_{\nu}(k_{ci}r) \exp(i\nu\varphi), \\ E_{ze} &= \sum_{\mu} C_{\mu} K_{\mu}(\bar{k}_{ce}r) \exp(i\mu\varphi), \\ H_{ze} &= \sum_{\mu} D_{\mu} K_{\mu}(\bar{k}_{ce}r) \exp(i\mu\varphi) \end{aligned} \quad (1)$$

($\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$),

где

$$\begin{aligned} k_{ci}^2 &= \omega^2 \epsilon_i \mu_i - \beta^2, \\ \bar{k}_{ce}^2 &= -k_{ce}^2 = \beta^2 - \omega^2 \epsilon_e \mu_e, \end{aligned}$$

$J_{\nu}(k_{ci}r)$, $K_{\mu}(\bar{k}_{ce}r)$ — функции Бесселя 1-го рода и Макдональда; A_{ν} , B_{ν} , C_{μ} , D_{μ} — неизвестные коэффициенты.

Наличие двух плоскостей симметрии ПДВ приводит к распадению всех типов поверхностных волн на четыре независимые группы. В цилиндрической системе координат их удобно классифицировать как волны четные (ч) и нечетные (н) с четной ($2n$) и нечетной ($2n+1$) азимутальной вариацией. Четные волны в плоскости $y=0$ характеризуются наличием электрической стенки, нечетные — магнитной. Волны четные с четной азимутальной вариацией и нечетные с нечетной в плоскости $x=0$ имеют электрическую стенку, остальные — магнитную. Такая классификация отражает структуру решения и соответствует классификации волн открытого эллиптического волновода [5, 6].

Указанные группы волн удобно рассматривать независимо, при этом условие 2π -периодичности заменяется нулевыми условиями Дирихле или Неймана на концах интервала $[0, \pi/2]$. Так, для четных волн с нечетной азимутальной вариацией $(HE)_{2n+1, m}^c$ и $(EH)_{2n+1, m}^c$ (m — номер корня дисперсионного уравнения) выражения для продольных составляющих полей (1) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} E_{zi} &= \sum_{\nu} A_{2\nu+1} J_{2\nu+1}(k_{ci}r) \sin(2\nu+1)\varphi, \\ H_{zi} &= \sum_{\nu} B_{2\nu+1} J_{2\nu+1}(k_{ci}r) \cos(2\nu+1)\varphi, \\ E_{ze} &= \sum_{\mu} C_{2\mu+1} K_{2\mu+1}(\bar{k}_{ce}r) \sin(2\mu+1)\varphi, \end{aligned} \quad (1a)$$

* Полнота и замкнутость систем функций $\{J_{\nu}(k_{ci}r) \exp(i\nu\varphi)\}$ и $\{K_{\mu}(\bar{k}_{ce}r) \exp(i\mu\varphi)\}$ для областей с границей типа Ляпунова вытекает из теорем работы [10]. Как показывают расчеты, влиянием угловых точек в данном случае можно пренебречь.

$$H_{ze} = \sum_{\mu} D_{2\mu+1} K_{2\mu+1} (\bar{k}_{ce} r) \cos(2\mu+1)\varphi$$

$$(\nu, \mu = 0, 1, 2, \dots).$$

Для волн типа $(HE)_{2n+1, m}^H$ и $(EH)_{2n+1, m}^H$ в (1а) следует произвести замену $\sin \vec{z} \rightarrow \cos$, а при переходе к четным азимутальным вариациям $2\nu+1 \rightarrow 2\nu$, $2\mu+1 \rightarrow 2\mu$.

Поперечные составляющие полей определяются из уравнений Максвелла.

ВЫВОД ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Для нахождения дисперсионных уравнений и неизвестных коэффициентов воспользуемся «внешними» граничными условиями [11, 12], в данном случае непрерывностью тангенциальных составляющих полей на границе раздела двух сред. Поскольку граница раздела не совпадает с координатными линиями базисной системы (r, φ) , для выполнения условий непрерывности дополнительно используем следующие координатные системы: а) совокупность локальных систем координат (τ, n) (рис. 1б), каждая из которых предназначена для представления полей на соответствующем участке границы; б) вспомогательную декартову систему координат (x, y) для связи базисной и локальной систем; в) естественную координату контура σ , отсчитываемую вдоль контура против часовой стрелки от точки $x = a, y = 0$.

С учетом уравнений Максвелла условия непрерывности можно представить в виде [12]

$$E_{zi} = E_{ze},$$

$$H_{zi} = H_{ze},$$

$$\beta \frac{\partial E_{zi}}{\partial \tau} - \omega \mu_i \frac{\partial H_{zi}}{\partial n} = \chi_{ie} \left(\beta \frac{\partial E_{ze}}{\partial \tau} - \omega \mu_e \frac{\partial H_{ze}}{\partial n} \right), \quad (2)$$

$$\omega \varepsilon_i \frac{\partial E_{zi}}{\partial n} + \beta \frac{\partial H_{zi}}{\partial \tau} = \chi_{ie} \left(\omega \varepsilon_e \frac{\partial E_{ze}}{\partial n} + \beta \frac{\partial H_{ze}}{\partial \tau} \right),$$

где

$$\chi_{ie} = - (k_{ci} / \bar{k}_{ce})^2.$$

Из-за симметрии ПДВ условия непрерывности достаточно задать лишь на части контура, расположенной в первом квадранте $\sigma = 0 \div T/4$, τ, n и σ связаны с x и y соотношениями

$$\tau = y, \quad n = x - a, \quad \sigma = y \quad (0 \leq \sigma \leq b), \quad (3)$$

$$\tau = a - x, \quad n = y - b, \quad \sigma = T/4 - x \quad (b \leq \sigma \leq T/4).$$

Подставляя в уравнения (2) выражения для продольных составляющих полей, получаем для каждой из четырех групп волн бесконечную систему функциональных уравнений. Последнюю сводим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, используя свойство полноты и ортогональности специально вводимых систем «функций контура», удовлетворяющих на концах интервала $[0, T/4]$ тем же граничным условиям, что и искомые поля в соответствующих плоскостях симметрии. Так, в случае волн типа $(HE)_{2n+1, m}^H$, $(EH)_{2n+1, m}^H$ системами функций контура могут служить $\{\sin [(2k+1)(2\pi/T)\sigma]\}$ и $\{\cos [(2k+1) \times$

$\times (2\pi/T) \sigma \}$ при переразложении электрического и магнитного полей соответственно.

Систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов представим в форме

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{\nu} a e_{\nu}^{(k)} A_{\nu} + \sum_{\mu} c e_{\mu}^{(k)} C_{\mu} &= 0 \\ \sum_{\nu} a h_{\nu}^{(k)} B_{\nu} + \sum_{\mu} c h_{\mu}^{(k)} D_{\mu} &= 0 \\ \sum_{\nu} b e_{\nu}^{(k)} A_{\nu} + d e_{\nu}^{(k)} B_{\nu} + \sum_{\mu} f e_{\mu}^{(k)} C_{\mu} + g e_{\mu}^{(k)} D_{\mu} &= 0 \\ \sum_{\nu} d h_{\nu}^{(k)} A_{\nu} + b h_{\nu}^{(k)} B_{\nu} + \sum_{\mu} g h_{\mu}^{(k)} C_{\mu} + f h_{\mu}^{(k)} D_{\mu} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

($\nu, \mu, k = 0, 1, 2, \dots$).

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a e_{\nu}^{(k)} &= I e_{i, \nu}^{(k)}, & c e_{\mu}^{(k)} &= - I e_{e, \mu}^{(k)}, \\ b e_{\nu}^{(k)} &= \beta \tilde{I} e_{i, \nu}^{(k)}, & d e_{\nu}^{(k)} &= - \omega \mu_i \frac{\partial}{\partial n} I h_{i, \nu}^{(k)}, \\ f e_{\mu}^{(k)} &= - \chi_{ie} \beta \tilde{I} e_{e, \mu}^{(k)}, & g e_{\mu}^{(k)} &= \chi_{ie} \omega \mu_e \frac{\partial}{\partial n} I h_{e, \mu}^{(k)}. \end{aligned}$$

Выражения для остальных величин в соответствии с принципом перестановочной двойственности можно получить путем замен вида

$$I e \leftrightarrow I h, \quad -\mu_i, e \leftrightarrow \epsilon_i, e.$$

Для четных волн

$$\begin{aligned} I e_{i, \nu}^{(k)} &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} J_{\nu}(k_{ci} r) \sin(\nu\varphi) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} \sigma\right) d\sigma, \\ I h_{i, \nu}^{(k)} &= \frac{4\epsilon_k}{T} \int_0^{T/4} J_{\nu}(k_{ci} r) \cos(\nu\varphi) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} \sigma\right) d\sigma, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tilde{I} e_{i, \nu}^{(k)} = \frac{4\epsilon_k}{T} \int_0^{T/4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} [J_{\nu}(k_{ci} r) \sin(\nu\varphi)]_{\tilde{r}, \tilde{\varphi}} \right\} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} \sigma\right) d\sigma = k \frac{2\pi}{T} I e_{i, \nu}^{(k)},$$

$$\tilde{I} h_{i, \nu}^{(k)} = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} [J_{\nu}(k_{ci} r) \cos(\nu\varphi)]_{\tilde{r}, \tilde{\varphi}} \right\} \sin\left(k \frac{2\pi}{T} \sigma\right) d\sigma = -k \frac{2\pi}{T} I h_{i, \nu}^{(k)},$$

$\epsilon_k = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 2 & (k>0) \end{cases}$ — множитель Неймана, $\tilde{r} = r(\tau, \bar{n})$, $\tilde{\varphi} = \varphi(\tau, \bar{n})$,
 $I e_{i, \nu}^{(k)} \rightarrow I e_{e, \mu}^{(k)}$, $I h_{i, \nu}^{(k)} \rightarrow I h_{e, \mu}^{(k)}$ и т. д.; $J_{\nu}(k_{ci} r) \rightarrow K_{\mu}(\bar{k}_{ce} r)$, $\nu \rightarrow \mu$.
 Значок (\sim) над координатой указывает на то, что она принимает на контуре фиксированное значение. Индексы ν, μ, k в случае волн с чет-

ной азимутальной вариацией принимают четные значения, с нечетной вариацией — нечетные.

Для нечетных волн в (5) необходима замена вида $Ie \rightleftharpoons Ih, \tilde{I}e \rightleftharpoons \tilde{I}h$.

Вычисление полученных интегралов с помощью рядов дано в Приложении к настоящей работе.

Бесконечная система уравнений (4) имеет нетривиальные решения, если равен нулю определитель, составленный из элементов квадратной матрицы:

$$\begin{vmatrix} Ie_{i,\nu}^{(k)} & 0 & Ie_{e,\mu}^{(k)} & 0 \\ 0 & Ih_{i,\nu}^{(k)} & 0 & Ih_{e,\mu}^{(k)} \\ p\tilde{I}e_{i,\nu}^{(k)} & -\mu \frac{\partial}{\partial n} Ih_{i,\nu}^{(k)} & \chi_{ie} p\tilde{I}e_{e,\mu}^{(k)} & -\chi_{ie} \frac{\partial}{\partial n} Ih_{e,\mu}^{(k)} \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial n} Ie_{i,\nu}^{(k)} & p\tilde{I}h_{i,\nu}^{(k)} & \chi_{ie} \frac{\partial}{\partial n} Ie_{e,\mu}^{(k)} & \chi_{ie} p\tilde{I}h_{e,\mu}^{(k)} \end{vmatrix}, \quad (6)$$

где $p = \beta/\omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}$ — коэффициент замедления; $\varepsilon = \varepsilon_i/\varepsilon_e$, $\mu = \mu_i/\mu_e$ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости материала стержня.

Полученные таким образом дисперсионные уравнения определяют постоянные распространения всех типов поверхностных волн, которые могут существовать в рассматриваемой системе. Приближенные дисперсионные уравнения строятся по методу редукции, правомерность применения которого в задачах на собственные значения обычно проверяется численным исследованием сходимости последовательных приближений.

УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Дисперсионное уравнение в первом приближении (диагональное приближение) получается приравниванием нулю определителя матрицы (6). Для волн типа $(HE)_{2n+1, m}^{u, H}$, $(EH)_{2n+1, m}^{u, H}$ оно может быть записано в следующем удобном для анализа и проведения количественных расчетов виде:

$$\left(F_H - \frac{\chi_{ie}}{\mu} Q_H \right) \left(F_E - \frac{\chi_{ie}}{\varepsilon} Q_E \right) - \frac{p^2}{\varepsilon \mu} \left(\frac{\varepsilon \mu - 1}{1 - p^2} \right)^2 = 0, \quad (7)$$

где

$$F_H = \frac{T}{(2k+1)2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial n} Ih_{i, 2\nu+1}^{(2k+1)}}{Ih_{i, 2\nu+1}^{(2k+1)}}, \quad Q_H = \frac{T}{(2k+1)2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial n} Ih_{e, 2\mu+1}^{(2k+1)}}{Ih_{e, 2\mu+1}^{(2k+1)}},$$

$$F_E = \frac{T}{(2k+1)2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial n} Ie_{i, 2\nu+1}^{(2k+1)}}{Ie_{i, 2\nu+1}^{(2k+1)}}, \quad Q_E = \frac{T}{(2k+1)2\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial n} Ie_{e, 2\mu+1}^{(2k+1)}}{Ie_{e, 2\mu+1}^{(2k+1)}},$$

причем для четных волн

$$Ie_{i, 2\nu+1}^{(2k+1)} = \frac{8}{T} \int_0^b \left\{ J_{2\nu+1} (k_{cl} \sqrt{x^2 + y^2}) \sin \left[(2\nu+1) \arctg \frac{y}{x} \right] \right\}_{x=a} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sin \left[(2k+1) \frac{2\pi}{T} y \right] dy + (-1)^{\nu+k} \frac{8}{T} \int_0^a \left\{ J_{2\nu+1}(k_{cl} \sqrt{x^2+y^2}) \cos \left[(2\nu+1) \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right] \right\}_{y=b} \cos \left[(2k+1) \frac{2\pi}{T} x \right] dx, \\ I h_{i, 2\nu+1}^{(2k+1)} &= \frac{8}{T} \int_0^b \left\{ J_{2\nu+1}(k_{cl} \sqrt{x^2+y^2}) \cos \left[(2\nu+1) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right] \right\}_{x=a} \times \\ & \times \cos \left[(2k+1) \frac{2\pi}{T} y \right] dy + (-1)^{\nu+k} \frac{8}{T} \int_0^a \left\{ J_{2\nu+1}(k_{cl} \sqrt{x^2+y^2}) \times \right. \\ & \quad \left. \times \sin \left[(2\nu+1) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right] \right\}_{y=b} \sin \left[(2k+1) \frac{2\pi}{T} x \right] dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегралы $Ie_{e, 2\nu+1}^{(2k+1)}$, $Ih_{e, 2\nu+1}^{(2k+1)}$ получаются из $Ie_{i, 2\nu+1}^{(2k+1)}$, $Ih_{i, 2\nu+1}^{(2k+1)}$, если $J_{2\nu+1}(k_{cl} \sqrt{x^2+y^2}) \rightarrow K_{2\nu+1}(k_{ce} \sqrt{x^2+y^2})$, $\nu \rightarrow \mu$.

Для нечетных волн в (8) следует произвести замену $\sin \leftrightarrow \cos$.

Как нетрудно заметить, введение обобщенных функций типа F_H , F_E , Q_H , Q_E позволило записать дисперсионное уравнение первого приближения (7) в таком же виде, как и для диэлектрического волновода эллиптического сечения [5]. Это, естественно, упрощает его анализ и дает возможность применять хорошо освоенный графо-аналитический метод для расчета электродинамических характеристик ПДВ.

Используемые в (7) специальные функции были рассчитаны с точностью до пяти значащих цифр применительно к волне дипольного типа $(HE)_{1,m}^n$ при следующих параметрах ПДВ: $b/a=0,5$ и 1 ; $\epsilon=2,5$; $\mu=1$. Полученные значения для F_H , F_E , Q_H , Q_E сведены в табл. 1 и 2.

Количественные расчеты по приближенному дисперсионным уравнениям проводились для волны типа $(HE)_{1,1}^n$, являющейся одной из низших волн ПДВ [2].

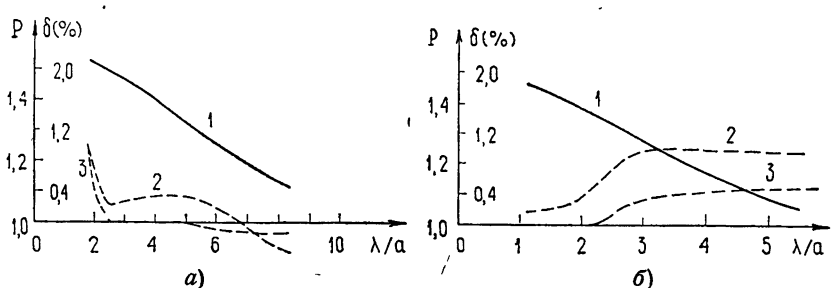


Рис. 2. Дисперсионная характеристика ПДВ для волны типа $(HE)_{1,1}^n$ (1) и кривые погрешности вычисления коэффициента замедления в первом (2) и втором (3) приближениях:

- а) сравнение с результатами работы [7], $\epsilon=2,5$, $\mu=1$, $b/a=2,5$;
б) сравнение с результатами работы [8], $\epsilon=2,25$, $\mu=1$; $b/a=1$.

На рис. 2а в координатах p и λ/a представлена рассчитанная по уравнению (7) дисперсионная характеристика (кривая 1) ПДВ с относительными проницаемостями материала $\epsilon=2,5$; $\mu=1$ и соотношением сторон $b/a=2,5$. На том же рисунке изображены зависимости $\delta(\%)$ от

Таблица 1

b/a	$k_{ct} r$	0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	2,4	2,8	3,0	3,2
0,5	F_H	0,40755	0,37346	0,26261	0,061056	-0,26674	-0,67380	-1,3214	-1,8165	-2,5351
	F_E	1,2260	1,2059	1,1414	1,0291	0,86002	0,67421	0,43035	0,28095	0,10895
1	$F_H = F_E$	0,52960	0,48940	0,35601	0,10157	-0,35426	-1,0248	-2,5163	-4,3743	-10,525

Таблица 2

b/a	$\bar{k}_{ce} r$	0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
0,5	Q_H	-0,85004	-0,99863	-1,2469	-1,5185	-1,8011	-2,0905	-2,3847	-2,6829	-2,9847
	Q_E	-0,61194	-0,74656	-0,98807	-1,2632	-1,5562	-1,8606	-2,1727	-2,4904	-2,8124
1	$Q_H = Q_E$	-0,54751	-0,71075	-0,97724	-1,2668	-1,5668	-1,8757	-2,1888	-2,5059	-2,8261

λ/a , характеризующие погрешности вычисления коэффициента замедления по дисперсионным уравнениям первого (кривая 2) и второго (кривая 3) приближений по отношению к значениям, полученным другим методом в восьмом приближении [7]. Как видим, даже при использовании уравнения первого приближения (7) получаем достаточно хорошее совпадение результатов. Увеличение относительной погрешности в области коротких и длинных волн объясняется отмеченными выше недостатками метода расчета, примененного Шлессером, который, по существу, рассматривал экранированный ПДВ.

На рис. 2б представлены аналогичные кривые для ПДВ с параметрами: $\epsilon = 2,25$; $\mu = 1$; $b/a = 1$. Значения δ (%) вычислялись по отношению к результатам, полученным Гозлом [8]. Относительная погрешность первого приближения и в этом случае не превышает 1% в широком диапазоне длин волн.

Проведенные сравнения подтвердили возможность расчета параметров ПДВ по предложенным уравнениям.

В заключение авторы считают своим долгом выразить благодарность Л. А. Вайнштейну за интерес к данной работе и полезные критические замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Интегралы, входящие в (4), после замены переменных (3) и несложных преобразований можно свести к виду

$$J C_{\nu}^{(k)}(k_{ci} v, \zeta) = \int_0^{\zeta} \{ J_{\nu}(k_{ci} \sqrt{u^2 + v^2}) \cos(\nu\varphi) \} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} u\right) du,$$

$$J S_{\nu}^{(k)}(k_{ci} v, \zeta) = \int_0^{\zeta} \{ J_{\nu}(k_{ci} \sqrt{u^2 + v^2}) \sin(\nu\varphi) \} \sin\left(k \frac{2\pi}{T} u\right) du,$$

$$K C_{\mu}^{(k)}(\bar{k}_{ce} v, \zeta) = \int_0^{\zeta} \{ K_{\mu}(\bar{k}_{ce} \sqrt{u^2 + v^2}) \cos(\mu\varphi) \} \cos\left(k \frac{2\pi}{T} u\right) du,$$

$$K S_{\mu}^{(k)}(\bar{k}_{ce} v, \zeta) = \int_0^{\zeta} \{ K_{\mu}(\bar{k}_{ce} \sqrt{u^2 + v^2}) \sin(\mu\varphi) \} \sin\left(k \frac{2\pi}{T} u\right) du$$

$$(\nu, \mu, k = 0, 1, 2, \dots),$$

где

$$\varphi = \arctg \frac{u}{v}, \quad \zeta = b \quad \text{при} \quad u = y, \quad v = x; \quad \zeta = a \quad \text{при} \quad u = x, \quad v = y.$$

При вычислении подобных интегралов целесообразно к ядру подынтегрального выражения (в фигурных скобках) применить теорему сложения Графа [13], а затем свести интеграл к табличному, представив цилиндрическую функцию, аргумент которой содержит переменную интегрирования, степенным рядом. В результате получим

$$J C_{\nu}^{(k)}(k_{ci} v, \zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \varphi_{\nu}^{(s)}(k_{ci} v) \beta_s^{(k)}(k_{ci} \zeta),$$

$$J S_{\nu}^{(k)}(k_{ci} v, \zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \delta_{\nu}^{(s)}(k_{ci} v) \alpha_s^{(k)}(k_{ci} \zeta),$$

$$K_{c_{\mu}^{(k)}}(\bar{k}_{ce} v, \zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \theta_{\mu}^{(s)}(\bar{k}_{ce} v) \gamma_s^{(k)}(\bar{k}_{ce} \zeta),$$

$$K_{s_{\mu}^{(k)}}(\bar{k}_{ce} v, \zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \eta_{\mu}^{(s)}(\bar{k}_{ce} v) \psi_s^{(k)}(\bar{k}_{ce} \zeta),$$

где

$$\varphi_v^{(s)}(k_{ci} v) = \frac{\varepsilon_s}{2} \left\{ J_{v+s}(k_{ci} c) \cos \left[v \frac{\pi}{2} - (v+s) \gamma \right] + \right. \\ \left. + (-1)^s J_{v-s}(k_{ci} c) \cos \left[v \frac{\pi}{2} - (v-s) \gamma \right] \right\},$$

$$\theta_{\mu}^{(s)}(\bar{k}_{ce} v) = \frac{\varepsilon_s}{2} \left\{ K_{\mu+s}(\bar{k}_{ce} c) \cos \left[\mu \frac{\pi}{2} - (\mu+s) \gamma \right] + \right. \\ \left. + K_{\mu-s}(\bar{k}_{ce} c) \cos \left[\mu \frac{\pi}{2} - (\mu-s) \gamma \right] \right\},$$

$$\beta_s^{(k)}(k_{ci} \zeta) = \frac{1}{k_{ci}} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \frac{(s+2t)!}{t!(s+t)! 2^{s+2t}} (k_{ci} \zeta)^{s+2t+1} \times \\ \times \sum_{q=0}^{s+2t} \frac{1}{(s+2t-q)!} \left(k \frac{2\pi}{T} \zeta \right)^{-(q+1)} \sin \left(q \frac{\pi}{2} \right),$$

$c = \sqrt{v^2 + \zeta^2}$, $\gamma = \arctg v/\zeta$, ε_s — множитель Неймана; $\gamma_s^{(k)}(\bar{k}_{ce} \zeta)$ отличается от $\beta_s^{(k)}(k_{ci} \zeta)$ отсутствием множителя $(-1)^t$ и заменой k_{ci} на \bar{k}_{ce} .

Выражения для величин $\delta_v^{(s)}(k_{ci} v)$, $\eta_{\mu}^{(s)}(\bar{k}_{ce} v)$, $\alpha_s^{(k)}(k_{ci} \zeta)$, $\psi_s^{(k)}(\bar{k}_{ce} \zeta)$ можно получить соответственно из выражений для $\varphi_v^{(s)}(k_{ci} v)$, $\theta_{\mu}^{(s)}(\bar{k}_{ce} v)$, $\beta_s^{(k)}(k_{ci} \zeta)$, $\gamma_s^{(k)}(\bar{k}_{ce} \zeta)$ с помощью подстановки $\sin \leftrightarrow \cos$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Взятыйшев, Диэлектрические волноводы, изд. Сов. радио, М., 1970.
2. Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1968—1969 гг. (апрель 1970 г.); Секция радиотехн., подсекция линий передачи и волноводных устройств, изд. МЭИ, М, 1969.
3. Б. З. Каценеленбаум, Высокочастотная электродинамика, изд. Наука, М., 1966.
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
5. Л. А. Любимов, Г. И. Веселов, Н. А. Бей, Радиотехника и электроника, 6, № 11, 1871 (1961).
6. C. Yeh, J. Appl. Phys., 33, № 11, 3235 (1962).
7. W. Schlösser, Arch. Electr. Übertr., 18, № 7, 403 (1964).
8. J. E. Goell, Bell Syst. Techn. J., 48, № 7, 2133 (1969).
9. Р. Г. Баранцев, Докл. АН СССР, 147, № 3, 569 (1962).
10. И. Н. Векуа, Докл. АН СССР, 90, № 5, 715 (1953).
11. Г. И. Веселов, Тезисы докладов V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Ленинград, июнь, 1970.

12. Г. И. Веселов, Сб трудов Воронежского политехнического института, вып. 2, 136 (1969).
13. Г. Бейтмен, А. Эрдейн, Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, изд. Наука, М., 1966.

Московское высшее техническое
училище им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию
1 февраля 1971 г.

CALCULATION OF OPEN DIELECTRIC WAVEGUIDE OF RECTANGULAR SECTION

G. I. Veselov, G. G. Voronina

The propagation of electromagnetic waves along a regular dielectric waveguide being in unbounded uniform medium is considered by the method of partial regions. The dispersion equations determining propagation constants of all types of the surface waves which may exist in the considered system are derived. On the basis of approximate equations the dispersion curves are calculated for an even dipole type $(HE)_{1,1}^e$ wave. A comparison is made with results obtained by other methods. The tables of special auxiliary functions simplifying practical calculations on the basis of the dispersion equation of the first approximation are made up.
