

УДК 621.372.825.4

ДИСПЕРСИЯ И ЗАТУХАНИЕ ГРЕБЕНЧАТЫХ ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ВНЕ ПОЛОС ПРОПУСКАНИЯ

Л. М. Бузик

Рассматриваются свойства замедляющих систем вне полос пропускания на примере гребенчатой замедляющей системы с тонкими ламелями. Анализ, проведенный электродинамическим методом частичных областей с последующим свертыванием бесконечной системы уравнений, приводит к простым аналитическим выражениям для уравнений дисперсии и распределения поля. Изучены кривые дисперсии и затухания медленных и быстрых волн вне областей прозрачности, являющиеся продолжением соответствующих дисперсионных зависимостей в полосах пропускания. Построена диаграмма Бриллюэна, дополненная областями с комплексными постоянными распространения. Проанализирована картина поля в режимах, соответствующих различным участкам диаграммы.

При анализе целого ряда приборов СВЧ с длительным взаимодействием важно знать свойства замедляющих систем в полосах непропускания. Однако имеющиеся представления о поведении дисперсии в этих областях крайне ограничены, так как основаны на модельных расчетах, использующих эквивалентные схемы. Анализ известных дисперсионных уравнений в полосах непропускания затруднителен, поскольку необходимо отыскивать комплексные корни сложных трансцендентных уравнений.

В настоящей работе свойства замедляющих систем вне полос пропускания изучаются на примере гребенчатой замедляющей системы с тонкими ламелями. Для такой структуры развиты методы решения краевой задачи [1-3], позволяющие при некоторых вполне приемлемых физических допущениях получить точное решение в сравнительно простой форме, удобной для анализа в областях с комплексными постоянными распространения.

Предложенный в работе [3] метод решения бесконечных систем уравнений, получающихся в задачах о собственных волнах периодических систем, основан на применении формулы Коши для определителей специального вида. Этот метод, получивший дальнейшее развитие в [4], используется в настоящей работе.

Решение задачи, полученное ниже в виде дисперсионного уравнения и выражения для распределения высокочастотного поля, проанализировано как в области частот с незатухающими волнами, так и на частотах, где имеется затухание, обусловленное непрозрачностью системы. Изучены режимы, соответствующие переходам через границы областей.

1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим замедляющую систему, показанную на рис. 1. Хорошо известно (см., например, [5]), что решение задачи о распространении электромагнитных волн в такой системе может быть записано в виде суммы полей отдельных пространственных гармоник*:

* Здесь для сокращения записи мы выписываем выражения только для компонент электрического поля в области $0 < y < A$. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен.

$$E_x = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q \frac{\alpha_q}{\beta_q} \frac{\operatorname{sh} \alpha_q (A - y)}{\operatorname{ch} \alpha_q A} \exp(i \beta_q x); \quad (1)$$

$$E_y = \sum_{q=-\infty}^{\infty} i C_q \frac{\operatorname{ch} \alpha_q (A - y)}{\operatorname{ch} \alpha_q A} \exp(i \beta_q x), \quad (2)$$

где $\beta_q = \beta + 2\pi q/d$ и $\alpha_q = \sqrt{\beta_q^2 - k^2}$ — соответственно продольное и поперечное волновые числа пространственной гармоники с номером q ; $k = \omega/c$; A, d, h — размеры, обозначенные на рис. 1. Полагаем, что действительная часть волнового числа нулевой гармоники $\beta_0 \equiv \beta$ заключена в интервале $-\pi/d < \operatorname{Re} \beta \leq \pi/d$.

Для определенности ограничим область изменения волнового числа: $0 < \operatorname{Re} \beta \leq \pi/d$. Амплитудные коэффициенты C_q могут быть найдены решением бесконечной однородной системы уравнений

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q a_{mq} = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

где $a_{mq} = (\alpha_q \operatorname{th} \alpha_q A + \gamma_m \operatorname{th} \gamma_m h) / (\alpha_q^2 - \gamma_m^2)$, $\gamma_m = \sqrt{(m \pi/d)^2 - k^2}$ — волновые числа типов колебаний в прямоугольном резонаторе, образованном соседними ламелями.

Нетривиальное решение системы (3) можно записать в следующем виде:

$$\det \| a_{mq} \| = 0; \quad (4)$$

$$\frac{C_t}{C_0} = (-1)^t \frac{\det \| a_{mq} \|_{m \neq 0, q \neq t}}{\det \| a_{mq} \|_{m \neq 0, q \neq 0}} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5)$$

Индексы $m \neq 0, q \neq t$ у знака определителя означают, что данный определитель получается из исходного, если в последнем вычеркнуть 0-строку и t -столбец.

Соотношение (4), выражающее условие существования решения бесконечной системы (3), представляет собой дисперсионное уравнение замедляющей системы, а формула (5) позволяет вычислять амплитуды гармоник, если удовлетворяется (4).

Ниже нами будут использованы следующие допущения о возможных пределах изменения свободных параметров задачи.

1) $x^2 = (kd/2\pi)^2 \ll 1$ (длина волны в свободном пространстве больше периода структуры).

Условие 1) влечет за собой упрощение записи волновых чисел гармоник с большими номерами:

$$\alpha_q = \beta_q \operatorname{sgn} q \quad (q \neq 0), \quad \gamma_m = m \pi/d \quad (m \neq 0). \quad (6)$$

Из условия 1), в частности, следует, что рассмотрение ограничено теми случаями, когда в пространстве взаимодействия и в резонаторе может быть не больше одной незатухающей в поперечном направлении пространственной гармоники.

2) $\operatorname{th} \alpha_1 A \approx 1$ (расстояние от гребенки до экрана не очень мало).

3) $\operatorname{th} \gamma_1 h \approx 1$ (глубина гребенки не очень мала).

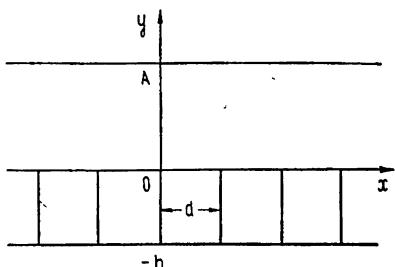


Рис. 1. Гребенчатая замедляющая система.

Допущения 2) и 3) позволяют не учитывать влияние дна резонатора и экрана на затухающие в поперечном направлении гармоники.

Упрощая матричные элементы a_{mq} согласно принятым допущениям 1)–3) и разлагая их на простейшие дроби, представим определители, входящие в (4) и (5), в виде сумм

$$\det || a_{mq} || = \frac{1 + \operatorname{th} \gamma_0 h}{2} \Delta(\alpha_0, \gamma_0) + \frac{1 - \operatorname{th} \gamma_0 h}{2} \Delta(-\alpha_0, -\gamma_0) - \\ - \frac{1 - \operatorname{th} \alpha_0 A}{2} \left\{ \frac{1 + \operatorname{th} \gamma_0 h}{2} [\Delta(\alpha_0, \gamma_0) - \Delta(-\alpha_0, \gamma_0)] + \right. \\ \left. + \frac{1 - \operatorname{th} \gamma_0 h}{2} [\Delta(\alpha_0, -\gamma_0) - \Delta(-\alpha_0, -\gamma_0)] \right\}; \quad (7)$$

$$\det || a_{mq} ||_{m \neq 0, q \neq 0} = \Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq 0}; \quad (8)$$

$$\det || a_{mq} ||_{m \neq 0, q \neq t} = \Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq t} - \\ - \frac{1 - \operatorname{th} \alpha_0 A}{2} [\Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq t} - \Delta(-\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq t}], \quad (9)$$

где обозначено

$$\Delta(\alpha_0, \gamma_0) \equiv \det \left\| \frac{1}{\alpha_q - \gamma_m} \right\|. \quad (10)$$

Определитель $\Delta(\alpha_0, -\gamma_0)$ получается из (10) заменой знака у γ_0 в матричных элементах нулевой строки. Аналогичным образом получаются определители $\Delta(-\alpha_0, \gamma_0)$ и $\Delta(-\alpha_0, -\gamma_0)$.

В результате проведенных преобразований (7)–(9) дисперсионное уравнение задачи (4) и формулу для амплитудных коэффициентов (5) можно выразить через определители простейшего вида:

$$\frac{1 + \operatorname{th} \gamma_0 h}{2} + \frac{1 - \operatorname{th} \gamma_0 h}{2} \frac{\Delta(\alpha_0, -\gamma_0)}{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)} - \\ - \frac{1 - \operatorname{th} \alpha_0 A}{2} \left\{ \frac{1 + \operatorname{th} \gamma_0 h}{2} \left[1 - \frac{\Delta(-\alpha_0, \gamma_0)}{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)} \right] + \frac{1 - \operatorname{th} \gamma_0 h}{2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\Delta(\alpha_0, -\gamma_0)}{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)} \left[1 - \frac{\Delta(-\alpha_0, -\gamma_0)}{\Delta(\alpha_0, -\gamma_0)} \right] \right\} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{C_t}{C_0} = (-1)^t \frac{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq t}}{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq 0}} \left\{ 1 - \frac{1 - \operatorname{th} \alpha_0 A}{2} \left[1 - \frac{\Delta(-\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq t}}{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq t}} \right] \right\}. \quad (12)$$

2. СВЕРТЫВАНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Вычисление выражений (11) и (12) проведем, следуя методу [3, 4], где под бесконечным определителем понимается предел, к которому стремится урезанный определитель, образованный из квадратной матрицы порядка $2N+1$ при $N \rightarrow \infty$. Для вычисления $\Delta(\alpha_0, \gamma_0)$ рассмотрим матрицу с элементами $1/(\alpha_q - \gamma_m)$, определитель которой может быть вычислен по формуле Коши (см., например, [6]):

$$\det \left\| \frac{1}{\alpha_q - \gamma_m} \right\|_{q=-N, m=0}^{N, 2N} = \frac{\prod_{k=-N}^{N-1} \prod_{p=k+1}^N (\alpha_q - \alpha_k) \prod_{k=0}^{2N-1} \prod_{p=k+1}^{2N} (\gamma_k - \gamma_p)}{\prod_{q=-N}^N \prod_{m=0}^{2N} (\alpha_q - \gamma_m)}. \quad (13)$$

Поскольку в выражения (11) и (12) входят отношения определителей, отличающихся только одной строкой или одним столбцом, эти отношения согласно (13), можно представить в виде комбинации уже не двойных, а одинарных произведений, например,

$$\frac{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq t}}{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq 0}} = \lim_{N \rightarrow \infty} (-1)^{t+1} \frac{\prod_{q=-N}^N (\alpha_q - \alpha_0) \prod_{m=1}^{2N} (\alpha_t - \gamma_m)}{\prod_{q=-N}^N (\alpha_q - \alpha_t) \prod_{m=1}^{2N} (\alpha_0 - \gamma_m)}. \quad (14)$$

Индексы $(0, t)$ означают, что в данном произведении опущены множители с указанными номерами. Вычисление полученных отношений определителей проводится с использованием гамма-функций, для которых, как известно, справедливо равенство

$$\Gamma(z + N) = \Gamma(z) \prod_{m=1}^N (z + m - 1). \quad (15)$$

Учитывая (6) и вводя обозначения $b_j = \beta_j d/2\pi$, $a_j = \alpha_j d/2\pi$, имеем

$$\begin{aligned} \prod_{q=-N}^N (\alpha_q - \alpha_0) &= \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{2N-1} \prod_{|q|=1}^N (|q| - b - a) \prod_{q=1}^{t-1} (q + b - a) \times \\ &\times \prod_{q=1}^{N-t} (q + t + b - a), \end{aligned} \quad (16)$$

где для определенности рассмотрен случай $t > 0$. Используя (15), запишем окончательно:

$$\prod_{q=-N}^N (\alpha_q - \alpha_0) = \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{2N-1} \frac{1}{a_t - a} \frac{\Gamma(N+1-b-a) \Gamma(N+1+b-a)}{\Gamma(1-b-a) \Gamma(1+b-a)}. \quad (17)$$

Для отрицательных t формула (17) не меняется. Далее подобно (16) вычисляем

$$\prod_{q=-N}^N (\alpha_q - \alpha_t) = \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{2N-1} (-1)^{t+1} \Gamma(t) \frac{\Gamma(N+1-b-a_t) \Gamma(N+1+b-a_t)}{\Gamma(1-b-a_t)} \quad (18a)$$

при $t > 0$ и

$$\prod_{q=-N}^N (\alpha_q - \alpha_t) = \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{2N-1} (-1)^{|t|+1} \Gamma(|t|) \frac{\Gamma(N+1-b-a_t) \Gamma(N+1-b-a_t)}{\Gamma(1+b-a_t)} \quad (18b)$$

при $t < 0$.

Объединяя (18a) и (18b), в итоге получим

$$\begin{aligned} \prod_{q=-N}^N (\alpha_q - \alpha_t) &= (-1)^{|t|+1} \left(\frac{2\pi}{d}\right)^{2N-1} \Gamma(|t|) \times \\ &\times \frac{\Gamma(N+1-|t|) \Gamma(N+1-|t|-2b \operatorname{sgn} t)}{\Gamma(1-|t|-2b \operatorname{sgn} t)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким же образом для двух оставшихся произведений, входящих в (14), имеем

$$\prod_{m=1}^{2N} (\alpha_t - \gamma_m) = \left(\frac{\pi}{d} \right)^{2N} \frac{\Gamma(2N+1-2a_t)}{\Gamma(1-2a_t)}, \quad (20)$$

$$\prod_{m=1}^{2N} (\alpha_0 - \gamma_m) = \left(\frac{\pi}{d} \right)^{2N} \frac{\Gamma(2N+1-2a)}{\Gamma(1-2a)}. \quad (21)$$

Подставляя (17), (19) — (21) в (14), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq t}}{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq 0}} &= \frac{\Gamma(1-|t|-2b \operatorname{sgn} t) \Gamma(1-2a)}{(a_t-a) \Gamma(|t|) \Gamma(1-2a_t) \Gamma(1-b-a) \Gamma(1+b-a)} \times \\ &\times \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\Gamma(N+1-b-a) \Gamma(N+1+b-a) \Gamma(2N+1-2a_t)}{\Gamma(N+1-|t|) \Gamma(N+1-|t|-2b \operatorname{sgn} t) \Gamma(2N+1-2a)} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение под знаком предела после применения формулы Стирлинга дает в результате 2^{-2a_t+2a} . Таким образом, отношение двух бесконечных определителей выражено в виде простой функции. Другие отношения, входящие в (11), (12), вычисляются аналогично (22), и мы приведем только окончательные результаты

$$\frac{\Delta(\alpha_0, -\gamma_0)}{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)} = \frac{a-i\infty}{a+i\infty} \frac{B(i\infty)}{B(-i\infty)}; \quad (23a)$$

$$\frac{\Delta(-\alpha_0, \pm \gamma_0)}{\Delta(\alpha_0, \pm \gamma_0)} = -\frac{a \mp i\infty}{a \pm i\infty} \frac{B(-a)}{B(a)}; \quad (23b)$$

$$\frac{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq t}}{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq 0}} = (-1)^t \frac{B_t(a)}{B(-a)}; \quad (23c)$$

$$\frac{\Delta(-\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq t}}{\Delta(\alpha_0, \gamma_0)_{m \neq 0, q \neq t}} = -\frac{a_t-a}{a_t+a} \frac{B(-a)}{B(a)}, \quad (23d)$$

где обозначено

$$B(z) = 2^{2z} \frac{\Gamma(1+b+z) \Gamma(1-b+z)}{\Gamma(1+2z)}; \quad (24)$$

$$B_t(a) = \frac{2^{-2a_t} \prod_{m=1}^{|t|} (2a_t - m)}{(a_t - a) \Gamma(|t|)}. \quad (25)$$

Допущение 1) позволяет упростить выражение для $B(\pm i\infty)$. Разлагая гамма-функцию в ряд по ∞ , имеем

$$\Gamma(1 \pm b \pm i\infty) = \Gamma(1 \pm b) [1 \pm i\infty \Psi(1 \pm b)], \quad (26)$$

где $\Psi(z) = \frac{d}{dz} [\ln \Gamma(z)]$ — дигамма-функция [7]. Подставляя (26) в (24)

и используя формулу $\Gamma(1+b)\Gamma(1-b) = \frac{\pi b}{\sin \pi b}$, получим

$$B(\pm i\infty) = \frac{\pi b}{\sin \pi b} [1 \pm i\infty 2f(b)], \quad (27)$$

где

$$2f(b) = \Psi(1+b) + \Psi(1-b) + 2C + 2\ln 2, \quad (28)$$

$C = 0,5772\dots$ — постоянная Эйлера.

В заключение настоящего раздела выпишем дисперсионное уравнение задачи и формулу для амплитудных коэффициентов пространственных гармоник, полученных в результате решения бесконечной системы уравнений (3). Подставляя (23) и (27) в (11), после некоторых преобразований получим

$$\exp(2\alpha_0 A) = \frac{B(-a)}{B(a)} \frac{a - \kappa^2 2f(b) + \xi(1 + 2af(b))}{a + \kappa^2 2f(b) - \xi(1 - 2af(b))}, \quad (29)$$

где $\xi = \kappa \operatorname{tg} kh$. Формула (12) с учетом (23) дает

$$\frac{C_t}{C_0} = \frac{B_t(a)}{B(-a)} \left\{ 1 - \frac{1 - \operatorname{th} \alpha_0 A}{2} \left[1 - \frac{a_t - a}{a_t + a} \frac{B(-a)}{B(a)} \right] \right\}. \quad (30)$$

При выводе соотношений (29) и (30) были использованы только допущения 1), 2), 3), которые накладывают ограничения на соотношения между размерами структуры и длиной волны в свободном пространстве. При рассмотрении различных режимов приведенные выражения еще больше упрощаются и допускают достаточно простой анализ (как численный, так и аналитический).

3. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

3.1. Медленные волны в полосе пропускания

В режиме медленных волн ($b > \kappa$) должно выполняться соотношение $0 < a \ll b$. В этом случае для расчета дисперсии можно пользоваться уравнением в форме (29), причем величина $B(-a)/B(a)$ вычисляется непосредственно по формуле (24). При большом замедлении ($b^2 \gg \kappa^2$, $a \approx b$) вычисление упрощается, так как $B(a) = 2^{ab}$ и дисперсионное уравнение приобретает вид

$$\xi = \frac{b}{1 - 2bf(b)} \frac{1 - \exp[-(2\pi A/d + 4 \ln 2)b]}{1 + \frac{1 + 2bf(b)}{1 - 2bf(b)} \exp[-(2\pi A/d + 4 \ln 2)b]}. \quad (31)$$

Уравнение (31) позволяет достаточно просто получать дисперсионную зависимость графически. Для этого необходимо построить зависимость ξ от b при различных A , после чего легко найти длину волны λ .

Ряд значений λ , отвечающих одному значению ξ , соответствует различным полосам пропускания замедляющей системы, отличающимся количеством вариаций поля по высоте зуба гребенки. Решение с наибольшим значением λ обычно называют основной или нулевой полосой пропускания. Из формулы (31) легко видеть, например, что приближение экрана к гребенке увеличивает длину волны при фиксированном фазовом сдвиге как для основной, так и для следующих полос пропускания в области медленных волн.

В случае, если экран удален на бесконечность, дисперсионное уравнение (29), пригодное при произвольных замедлениях, переходит в

$$a - \kappa^2 2f(b) + \xi(1 + 2af(b)) = 0, \quad (32)$$

совпадающее с хорошо известными дисперсионными уравнениями медленных волн в открытой гребенчатой структуре [8-10].

3.2. Быстрые волны в полосе пропускания

В случае $b < \kappa$ нулевая пространственная гармоника поля имеет фазовую скорость больше скорости света. Величина $a = \sqrt{b^2 - \kappa^2}$

в этом случае является чисто мнимой и дисперсионное уравнение в форме (29) мало пригодно для анализа. Согласно допущению 1) в рассматриваемом режиме $|a|^2 \ll 1$, и, следуя (27), можем записать тогда

$$B(\pm a) = \frac{\pi b}{\sin \pi b} [1 \pm a 2f(b)]. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (29) и обозначая $a = ia'$, после некоторых преобразований запишем уравнение дисперсии в форме

$$\operatorname{arctg} \frac{\xi \{1 + [a' 2f(b)]^2\} - b^2 2f(b)}{a' \{1 + \xi^2 [2f(b)]^2\}} + 2\pi a' \frac{A}{d} = n\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (34)$$

удобной для расчетов в режиме быстрых волн, причем каждому n соответствует своя ветвь решений этого уравнения.

При нулевом фазовом сдвиге ($b = 0$) из (34) следует равенство

$$k(A + h) = n\pi. \quad (35)$$

Оно соответствует стоячим волнам, когда между двумя плоскостями, расположенными на расстоянии $A + h$ друг от друга, укладывается n полуволны.

Дисперсионные кривые в области быстрых волн, которые легко могут быть получены из (34), непосредственно продолжаются в область медленных волн, и число n , входящее в уравнение (34), совпадает с номером высшей полосы пропускания в области медленных волн.

Режим перехода быстрых волн в медленные иногда называют режимом скольжения. В этом случае фазовая скорость нулевой гармоники равна скорости света ($b = \infty$). Для режима скольжения (29) и (34) дают

$$\operatorname{tg} 2\pi\xi \frac{h}{d} = 2\xi f(\infty). \quad (36)$$

Ветви решений уравнения (36) показаны на рис. 2. Каждая ветвь соответствует определенной полосе пропускания системы. Из (36), в частности, следует, что точка перехода волны из быстрой в медленную определяется только отношением глубины резонатора к периоду гребенки.

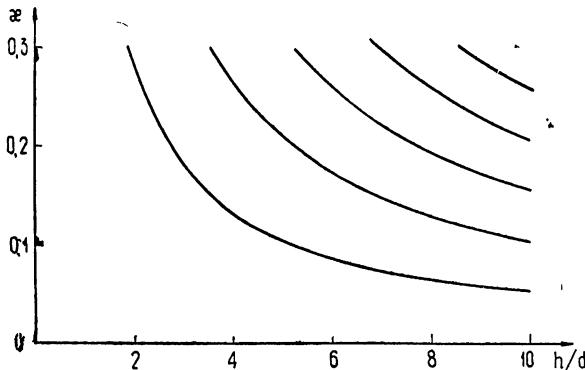


Рис. 2. Зависимость точек перехода быстрых волн в медленные от глубины резонатора гребенки для первых пяти полос пропускания.

Следует отметить, что анализ дисперсии высших полос пропускания, в том числе и в режимах быстрых волн, для исследуемой системы

содержится в монографии [11]. Полученные в настоящей работе результаты согласуются с расчетами [11]. В работе [12] такие режимы изучены для гребенки с толстыми ламелями. Аналогичные результаты получены в работе [13] на основе качественной теории распространения волн в одномерно-периодических структурах.

3.3 Медленные волны в полосе непропускания

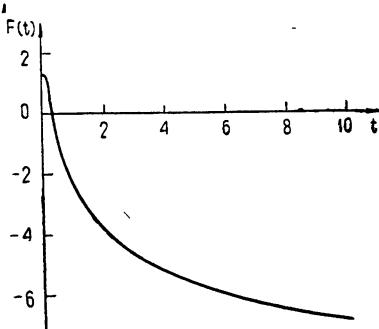
Из анализа дисперсии медленных волн (см. п. 3.1) видно, что между соседними полосами пропускания имеется область по x , в которой существование волны с действительными b невозможно. В этой области волновое число должно быть комплексно, и дисперсионное уравнение (29) в общем случае представляет собой систему из двух трансцендентных уравнений. В случае достаточно больших замедлений, когда влияние экрана мало, эту систему можно свести к одному трансцендентному уравнению относительно мнимой части волнового числа. В этом случае переход частоты в область непрозрачности при отсутствии потерь в системе не приводит к изменению фазового сдвига $\varphi = 2\pi b$, который остается равным π на границе полосы и за границей, а вызывает только появление затухания.

Действительно, используя свойство дигamma-функции $\Psi(1+z) = \Psi(z) + 1/z$ и подставляя (28) в (31), получим $1/\xi = -[\Psi(b) + \Psi(1-b) + 2C + 2\ln 2]$. Обозначая теперь $b = 1/2 + it$, имеем уравнение

$$1/\xi = F(t) \equiv - \left[\Psi\left(\frac{1}{2} + it\right) + \Psi\left(\frac{1}{2} - it\right) + 2C + 2\ln 2 \right], \quad (37)$$

правая часть которого представляет собой вещественную функцию t (см. рис. 3). Как следует из (37), изменение затухания от нуля до бес-

Рис. 3. Зависимость правой части дисперсионного уравнения (37) от величины затухания.



конечности приводит к изменению параметра $1/\xi$ в интервале $2\ln 2 > 1/\xi > -\infty$ в любой из полос непропускания. При этом длина волны меняется от $\lambda \geq 4h/(1+2n)$ при малом затухании до $\lambda = 2h/n$, когда $t \rightarrow \infty$. Здесь n — номер полосы непропускания.

3.4. Быстрые волны в полосе непропускания

Рассмотрим продолжение дисперсионных зависимостей в область частот за отсечкой ($b = 0$), где волновое число становится комплексным. В этом случае быстрые волны, распространяясь вдоль структуры, испытывают затухание, которое является аналогом запредельного затухания высших типов волн в плоском волноводе. Можно показать, что волновое число в этом случае мнимо ($b = it$) и волна остается стоячей, как и в случае режима отсечки, описываемого уравнением (35).

Обратимся к полному дисперсионному уравнению (29). В рассматриваемом случае $a = \sqrt{-t^2 - x^2} = ia'$, и входящие в это уравнение члены можно записать следующим образом:

$$\exp(2\alpha_0 A) = \exp(2i\varphi_1), \quad \frac{B(a)}{B(-a)} = \exp(2i\varphi_2),$$

$$\frac{a + x^2 2f(b) - \xi(1 - 2af(b))}{a - x^2 2f(b) + \xi(1 + 2af(b))} = \exp(2i\varphi_3),$$

где φ_1 , φ_2 и φ_3 — вещественные функции t и оставшихся параметров задачи:

$$\varphi_1 = 2\pi a' A/d,$$

$$\varphi_2 = (2 \ln 2)a' + \operatorname{Im}\{\ln \Gamma[1+i(a'+t)] + \ln \Gamma[1+i(a'-t)] - \ln \Gamma[1+i2a']\},$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{a' + 2\xi f(it)}{\xi - 2x^2 f(it)} + \pi. \quad (38)$$

Заметим, что $f(it)$ — вещественная функция t в силу (28). Как и в случае медленных волн, дисперсионное уравнение быстрых волн в полосе пропускания сводится к одному трансцендентному уравнению:

$$\Phi \equiv \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = n\pi, \quad (39)$$

где n — номер полосы пропускания, примыкающей к данной ветви решения дисперсионного уравнения (39). На рис. 4 показана зависимость левой части (39) от величины затухания t . Пересечение линии $\Phi(t)$ с прямыми $\Phi = n\pi$ определяет значение параметра затухания при данных внешних параметрах.

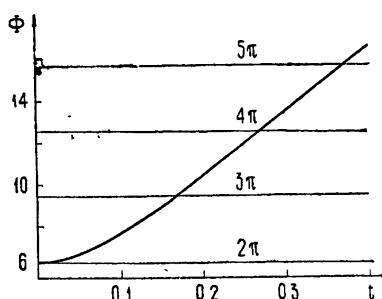


Рис. 4. Зависимость левой части дисперсионного уравнения (39) от величины затухания.

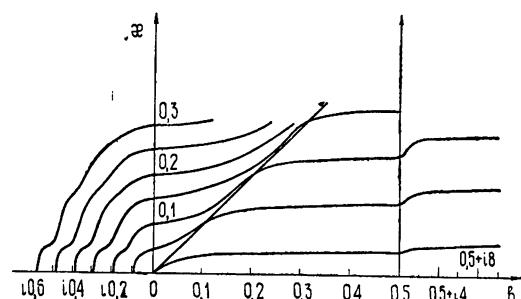


Рис. 5 Полная диаграмма Бриллюэна, включающая режимы с затухающими собственными волнами для системы $A = 5d$, $h = 5d$.

Полную картину дисперсии и затухания можно изобразить на диаграмме Бриллюэна [14], дополнив ее областями с комплексным волновым числом. Такая диаграмма, полученная решением уравнений (29), (34), (37) и (39), изображена на рис. 5. Области, соответствующие четырем рассмотренным режимам гребенки, разделены на диаграмме прямыми линиями $b = 0$, $b = x$ и $b = 1/2$, а дисперсионные кривые непрерывно переходят из одной области в другую.

Неплавный характер затухания быстрых волн в полосе непропускания объясняется возникновением на дискретных частотах новых полос пропускания, которые, как видно из рисунка, могут перекрываться. Значение t при $x = 0$ дает решение дисперсионного уравнения, соответст-

вующее структуре, у которой гребенчатая поверхность переходит в импедансную.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ

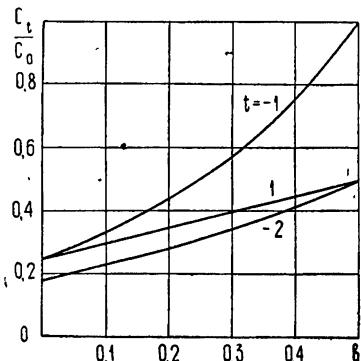
Здесь мы остановимся на некоторых свойствах распределения электромагнитного поля исследуемой системы в различных режимах, для которых выше был проведен анализ дисперсии. Если найдено решение дисперсионного уравнения, то могут быть вычислены коэффициенты разложения искомого поля в ряд Фурье по формуле (30). Суммируя далее ряды с известными коэффициентами, найдем окончательное выражение для распределения высокочастотного поля.

В режиме медленных волн мы ограничимся случаем больших заделений, а также пренебрежем влиянием экрана. Тогда (30) переходит в

$$C_t = C_0 \frac{2^{-2|t|-2b(\operatorname{sgn} t - 1)} \prod_{m=1}^{|t|} (2|t| + 2b \operatorname{sgn} t - m)}{[|t| + b(\operatorname{sgn} t - 1)] \Gamma(|t|)}. \quad (40)$$

Величина C_t/C_0 представляет собой отношение амплитуды гармоники с номером t к амплитуде нулевой пространственной гармоники как для продольной, так и для поперечной компонент электрического поля на поверхности гребенки ($y = 0$). На рис. 6 показана зависимость C_t/C_0 трех первых пространственных гармоник от фазового сдвига b в полосе пропускания. Просуммируем далее фурье-разложение поля (1) и (2) на поверхности гребенки.

Рис. 6. Относительные амплитуды пространственных гармоник в режиме медленных волн как функция фазового сдвига.



Обозначая $E^{\parallel} = E_y|_{y=0}$, $E^{\perp} = E_x|_{y=0}$ и подставляя (40) в (1), имеем для продольной компоненты

$$E^{\parallel} = C_0 e^{i\beta x} \left\{ \sum_{q=0}^{\infty} \exp\left(iq \frac{2\pi x}{d}\right) \frac{2^{2b-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(q+b)\Gamma(q+b+1/2)}{q!\Gamma(q+2b)} - 2^{4b-2} \exp\left(-i \frac{2\pi x}{d}\right) \left[\sum_{q=0}^{\infty} \exp\left(-iq \frac{2\pi x}{d}\right) \frac{2^{-2b+1}}{\sqrt{\pi}} \times \right. \right. \\ \left. \times \frac{\Gamma(q+1-b)\Gamma(q+3/2-b)}{q!\Gamma(q+2-2b)} \right] \right\}. \quad (41)$$

Используя формулу удвоения гамма-функции $\Gamma(z)$ и определение гипергеометрической функции $F(a, b; c; z)$, запишем (41) в виде

$$E^{\parallel} = C_0 \exp^{i\beta x} \left\{ F \left[b, b + \frac{1}{2}; 2b; \exp \left(i \frac{2\pi x}{d} \right) \right] - \right. \\ \left. - 2^{4b-2} \exp \left(-i \frac{2\pi x}{d} \right) F \left[1-b, \frac{3}{2}-b; 2-2b; \exp \left(-i \frac{2\pi x}{d} \right) \right] \right\}. \quad (42)$$

Гипергеометрические функции, входящие в (42), являются вырожденными и могут быть выражены через элементарные [7]. Выпишем окончательные выражения для продольной и поперечной компонент поля:

$$E^{\parallel} = C_0 2^{2b-1} \exp \left[i \left(\beta - \frac{\pi}{d} \right) x \right] \left\{ \frac{\exp \left(i \frac{\pi x}{d} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \exp \left(i \frac{2\pi x}{d} \right)} \right]^{1-2b}}{\sqrt{1 - \exp \left(i \frac{2\pi x}{d} \right)}} - \right. \\ \left. - \frac{\exp \left(-i \frac{\pi x}{d} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \exp \left(-i \frac{2\pi x}{d} \right)} \right]^{2b-1}}{\sqrt{1 - \exp \left(-i \frac{2\pi x}{d} \right)}} \right\}, \quad (43)$$

$$E^{\perp} = i C_0 2^{2b-1} \exp \left[i \left(\beta - \frac{\pi}{d} \right) x \right] \left\{ \frac{\exp \left(i \frac{\pi x}{d} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \exp \left(i \frac{2\pi x}{d} \right)} \right]^{1-2b}}{\sqrt{1 - \exp \left(i \frac{2\pi x}{d} \right)}} + \right. \\ \left. + \frac{\exp \left(-i \frac{\pi x}{d} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \exp \left(-i \frac{2\pi x}{d} \right)} \right]^{2b-1}}{\sqrt{1 - \exp \left(-i \frac{2\pi x}{d} \right)}} \right\}.$$

Особенно простой вид имеет распределение поля на границе полосы пропускания ($b = 1/2$)

$$E^{\parallel} = i C_0 (-1)^p \sqrt{2} \frac{\sin [(\pi/4)(2x'/d + 1)]}{\sqrt{\sin (\pi x'/d)}}, \quad (44)$$

$$E^{\perp} = i C_0 (-1)^p \sqrt{2} \frac{\cos [(\pi/4)(2x'/d + 1)]}{\sqrt{\sin (\pi x'/d)}}.$$

Здесь p — номер периода структуры, а x' — координата в пределах периода. Эти зависимости показаны на рис. 7. Как видно из рисунка, вблизи острых ребер гребенки поле имеет особенность, и, согласно (43), (44), выполняется условие Майкслера на ребре. Поле растет как $\rho^{-1/2}$, где ρ — расстояние до ребра.

Для произвольной величины фазового сдвига E^{\parallel} и E^{\perp} — величины комплексные. Это соответствует вырождению поля в структуре, когда имеется два независимых распределения поля. На рис. 8 показано одно из возможных распределений поля для $b = 1/4$.

Полученные формулы (43) справедливы также и в режиме затухающих медленных волн, когда $b = 1/2 + it$. Из них, в частности, видно, что в этом режиме поле остается невырожденным, как и на границе полосы пропускания ($b = 1/2$).

Рассмотрим теперь распределение поля в режиме быстрых волн. Воспользовавшись (25), (30) и (33), запишем

$$C_t = iC_0 \frac{2^{-2a_t} \prod_{m=1}^{|t|} (2a_t - m)}{\Gamma(|t|)} \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha' A}{a_t} + a' \frac{1 + 2a_t f(b)}{a_t^2} \right] \frac{\sin \pi b}{\pi b}. \quad (45)$$

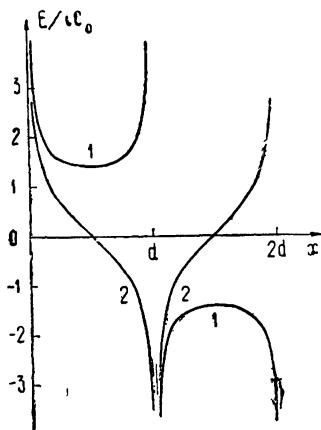


Рис. 7. Распределение электромагнитного поля на поверхности гребенки для 1) продольной E^{\parallel} и 2) поперечной E^{\perp} компонент ($b = 1/2$).

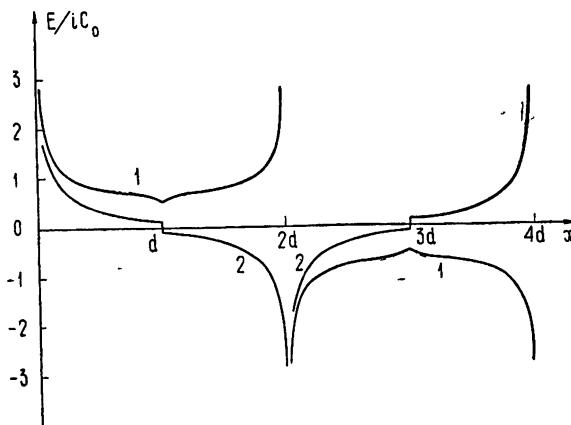


Рис. 8. Одно из возможных распределений электромагнитного поля на поверхности гребенки для 1) продольной E^{\parallel} и 2) поперечной E^{\perp} компонент ($b = 1/4$).

Выражение (45) пригодно для непосредственного расчета амплитуд пространственных гармоник в режиме быстрых волн. Отношение амплитуд гармоник на поверхности гребенки связано с коэффициентами C_t так:

$$\frac{E_t^{\parallel}}{E_0^{\parallel}} = \operatorname{sgnt} \frac{b}{a'} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha' A} \frac{C_t}{C_0}, \quad \frac{E_t^{\perp}}{E_0^{\perp}} = i \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha' A} \frac{C_t}{C_0}. \quad (46)$$

Видно, что в режиме отсечки быстрой волны ($b = 0$) отсутствует продольная компонента электрического поля. Относительные амплитуды гармоник оставшейся поперечной компоненты определяются простым выражением:

$$\frac{E_t^{\perp}}{E_0^{\perp}} = \frac{2^{-2|t|} (2|t|)!}{2(|t|)!^2} \left(1 + \frac{1 + |t| 2 \ln 2}{|t| \operatorname{tg} kA} \right). \quad (47)$$

Входящая сюда величина k берется из решения уравнения (35).

В режиме, близком к скольжению ($b \approx x$), удобно, вводя множитель $\operatorname{tg} \alpha_0 A$ в произвольную постоянную $C'_0 = C_0 \operatorname{th} \alpha_0 A$, представить поля в следующем виде:

$$E^{\parallel} = C'_0 \frac{\alpha}{\beta} e^{i\beta x} + C'_0 \sum_{t=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgnt} \frac{C_t}{C_0} \exp(i\beta_t x); \quad (48)$$

$$E^{\perp} = iC'_0 e^{i\beta x} + iC'_0 \sum_{t=-\infty}^{\infty} \frac{C_t}{C_0} \exp(i\beta_t x), \quad (49)$$

где

$$\frac{C_t}{C_0} = i \frac{2^{-2a_t} \prod_{m=1}^{|t|} (2a_t - m)}{a_t \Gamma(|t|)} \left[1 + \frac{1 + 2a_t f(x)}{a_t} \frac{d}{2\pi A} \right] \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \quad (50)$$

Величину какой-либо гармоники продольного поля (48) в этом случае лучше оценивать по отношению ее не к нулевой гармонике, а к одной из высших, поскольку нулевая может обращаться в нуль.

На основе асимптотически точного решения задачи о собственных волнах гребенчатой замедляющей системы изучены свойства дисперсии в полосе пропускания и затухания в полосе непропускания. Анализ показал, что изменение частоты в область непропускания не меняет сдвига фазы поля на период, а приводит к появлению затухания, растущего по мере удаления от критической частоты.

Построена диаграмма Бриллюэна, дополненная областями с комплексными постоянными распространения. Медленные волны в полосе непропускания аналогичны волнам в электрических фильтрах. Свойства быстрых волн в полосе непропускания подобны свойствам волноводных волн в запредельных волноводах.

Проведен анализ распределения электромагнитного поля в системе. Получены простые формулы, позволяющие вычислять поле в различных режимах и определять вклад отдельных пространственных гармоник в полное поле. Ряд формул этого раздела может найти применение для изучения свойств более сложных составных структур в качестве эквивалентных граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

- Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1967.
- Б. Нобл, Метод Винера—Хопфа, ИЛ, М., 1962.
- R. Mittra, S. Laxpati, Canadian J. Phys., 43, 353 (1965).
- И. Л. Вербицкий, Л. М. Бузик, Радиотехника и электроника, 15, 1003 (1970).
- А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, УФН, 44, 321 (1951).
- Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, изд. Наука, М., 1965.
- Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 1, изд. Наука, М., 1965.
- R. A. Hurd, Canadian J. Phys., 32, 727 (1954).
- Л. А. Вайнштейн, ЖТФ, 26, 385 (1956).
- И. Л. Вербицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 9, 1411 (1969).
- Р. А. Силин, В. П. Сazonов, Замедляющие системы, изд. Сов. радио, М., 1966.
- Л. Н. Литвиненко, А. М. Радин, В. Г. Сологуб, О. А. Третьяков, В. П. Шестopalов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 5, 752 (1969).
- В. И. Короза, Э. С. Масунов, Радиотехника и электроника, 15, 1594 (1970).
- Л. Бриллюэн, М. Пароди, Распространение волн в периодических структурах, ИЛ, М., 1959.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
10 марта 1971 г.

DISPERSION AND DAMPING OF COMB SLOWING-DOWN SYSTEMS OUTSIDE TRANSMISSION BANDS

L. M. Buzik

The features of slowing-down systems outside transmission bands are considered on the example of a comb slowing-down system with thin lamellas. The analysis made by means of the electrodynamic method of partial regions with further convolution of the infinite system of equations leads to simple analytical expressions for dispersion and field distribution equations. The curves are studied of dispersion and slow and fast wave damping outside transparent regions which are the extension of the corresponding dispersion dependences in transmission bands. Brillouin's diagram to which the regions with the complex propagation constants are added is built. The field picture in regimes corresponding to different parts of the diagram is analyzed.