

УДК 621.372.4

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРУПП К ИССЛЕДОВАНИЮ СНЯТИЯ ВЫРОЖДЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Н. А. Сапогова, В. М. Конторович

В симметричных резонаторах некоторые собственные частоты вырождены. При внесении возмущения, понижающего симметрию, вырождение частично или полностью снимается. Нахождение частот и полей связано с решением секулярного уравнения порядка, равного кратности вырождения. Теория представлений групп позволяет найти такие симметричные комбинации собственных векторов невозмущенного резонатора, для которых порядок секулярного уравнения существенно понижается, т. е. найти правильные поля нулевого приближения. Рассмотрены примеры: сферический резонатор с возмущением, обладающим точечной симметрией, а также случай аксиальной симметрии. Получены правильные поля нулевого приближения для первой и второй мод в таких резонаторах

В симметричных резонаторных устройствах собственные частоты могут быть вырождены, т. е. одной частоте может соответствовать несколько различных функций, описывающих распределение поля в резонаторе. При внесении возмущения, понижающего симметрию резонатора, вырождение частично или полностью снимается. Расчет частот и полей обычно проводится методом теории возмущений. При этом в качестве первого шага приходится решать секулярное уравнение порядка, равного кратности вырождения. Теория групп в ряде случаев позволяет, не решая секулярного уравнения, полностью диагонализировать матрицу возмущения или понизить ее порядок. С помощью теории представлений групп можно построить поля нулевого приближения, для которых матрица возмущения диагональна или состоит из блоков. Заметим, что при таком подходе сначала находятся собственные функции, а затем уже собственные числа.

Применению теории групп к задачам электродинамики посвящены работы [1-5]. В работе Джонса [1] рассмотрен сферический резонатор с возмущением, обладающим точечной симметрией D_2 (рис. 1), и находятся правильные поля нулевого приближения для первой трехкратно вырожденной моды. В этом частном случае искомые функции могут быть легко угаданы, что и сделано автором статьи [1]. Для

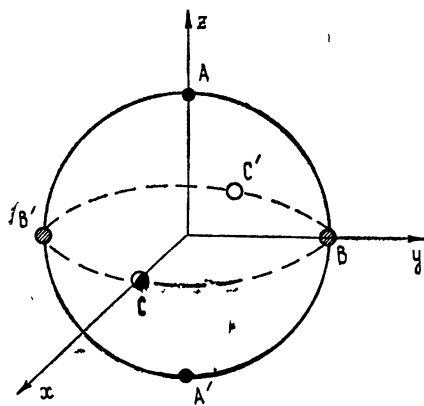


Рис. 1. Сферический резонатор, возмущенный системой, обладающей точечной симметрией D_2 .

высших мод и возмущений другой симметрии результат уже не так очевиден, однако правильные поля нулевого приближения могут быть найдены методом проектирования [6-8],

что составляет содержание данной работы. Метод применим к любым симметричным системам.

В качестве примера рассмотрим сферический резонатор. В сферическом резонаторе наибольшая кратность вырождения, поэтому применение теории групп особенно эффективно. Интерес к этой задаче связан, в частности, с исследованием резонатора, образованного поверхностью Земли и ионосферой [9, 10].

1. НАХОЖДЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ ПОЛЕЙ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Уравнения Максвелла и граничные условия на поверхности сферического резонатора инвариантны относительно всех преобразований полной ортогональной группы [6], а электромагнитные поля преобразуются по представлениям $D^{(j)*}$ этой группы. Согласно теореме Вигнера каждой собственной частоте резонатора отвечает неприводимое представление группы его симметрии, а размерность представления указывает на кратность вырождения. (если вырождение связано только с симметрией и случайного вырождения нет).

В качестве нулевого приближения рассмотрим полый сферический резонатор с идеально проводящими стенками. Невозмущенные электрические поля поперечны и удовлетворяют уравнению [1]

$$(\Delta + k_j^2) E_{jM} = 0, \quad [E_{jM} n] = 0 \quad \text{на } S, \quad (1)$$

причем каждое собственное значение $(2j + 1)$ — кратно вырождено, т. е. ему отвечает набор функций $\{E_{jM}, H_{jM}\}$ при $M = -j, \dots, j$.

Возмущенное уравнение

$$(\Delta + k^2 + \hat{V}) E = 0 \quad (2)$$

инвариантно относительно преобразований группы симметрии возмущения G_V . Если она ниже симметрии невозмущенного резонатора, то представление $D^{(j)}$ становится приводимым, что свидетельствует о снятии вырождения.

Вначале с помощью теории характеров [6–8] можно установить, какие неприводимые представления группы симметрии возмущения и сколько раз входят в приводимые $D^{(j)}$, что дает ответ на вопрос, каким образом снимается вырождение. Прямое применение теории возмущений для отыскания правильных полей нулевого приближения требует решения секулярного уравнения [6]

$$\det | V_{ik} - \delta_{ik} (k^2 - k_j^2) | = 0, \quad (3)$$

где V_{ik} — матричный элемент оператора \hat{V} , взятый с невозмущенными полями E_{jM} ($i \equiv jM$).

Существенно, что правильные поля нулевого приближения преобразуются по неприводимым представлениям группы симметрии возмущения. Действительно, матричный элемент отличен от нуля, только если он вычислен между функциями, принадлежащими одной и той же строке одного и того же неприводимого представления [7]:

* Полная ортогональная группа имеет счетное множество представлений $D^{(j)+}$ и $D^{(j)-}$ размерности $(2j + 1)$, где $j = 0, 1, 2, \dots$. Индексы «+» и «-» указывают на четность относительно инверсии. Полярные векторы E_{jM} преобразуются по векторному представлению $D^{(j)-}$, аксиальные векторы H_{jM} — по псевдовекторному представлению $D^{(j)+}$.

$$V_{in}^{\mu\nu} = \int E_i^{(\mu)\hat{V}} E_n^{(\nu)} d\tau = \frac{1}{n_\mu} \sum_k \left(E_k^{(\mu)\hat{V}} E_k^{(\nu)} \right) \delta_{\mu\nu} \delta_{in}, \quad (4)$$

где $E_i^{(\mu)}$ — вектор электрического поля, преобразующийся по i -й строке μ -го неприводимого представления, n_μ — размерность представления. Если каждое представление входит в приводимое один раз, то отличны от нуля только диагональные матричные элементы (причем они будут одинаковы для всех строк данного неприводимого представления). Если одно и то же представление входит несколько раз, то появляются недиагональные матричные элементы $(E_k^{(a\mu)}, \hat{V} E_k^{(b\mu)})$, где индексы a и b различают векторы E , преобразующиеся по повторяющимся неприводимым представлениям. В матрице возмущения на главной диагонали появятся в этом случае блоки размерности, равной числу повторений данного неприводимого представления.

Правильные поля нулевого приближения, таким образом, могут быть найдены с помощью метода проектирования [6–8]. Он состоит в действии оператора проектирования

$$\hat{P}_i^{(\mu)} = \frac{n_\mu}{g} \sum_R D_{ii}^{(\mu)*}(R) \hat{O}_R, \quad (5)$$

где суммирование ведется по всем элементам R группы G_V , а \hat{O}_R — оператор представления группы (см. (8)).

Действуя оператором (5) на невозмущенные поля, относящиеся к вырожденному уровню, получим те их линейные комбинации, которые преобразуются по неприводимым представлениям группы G_V .

Для сферического резонатора решения уравнения (1) имеют вид [12] (для волны ТМ)

$$\begin{aligned} E_{jM} &= N \left[\sqrt{\frac{j}{j+1}} g_{j+1}(kr) Y_{j,j+1,M}(r) + \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} g_{j-1}(kr) Y_{j,j-1,M}(r) \right], \\ H_{jM} &= -Ng_j(kr) Y_{jM}(r), \end{aligned} \quad (6)$$

где, например, в случае резонатора, образованного одной сферой,

$$g_j = (2\pi)^{3/2} j \frac{J_{j+1/2}(kr)}{\sqrt{kr}},$$

$J_{j+1/2}(kr)$ — функция Бесселя, N — нормирующий множитель.

Векторы E_{jM} и H_{jM} выражены через так называемые шаровые векторы Y_{jM} ($l = j, j \pm 1$), подобное описание которых можно найти в [12] (стр. 43):

$$Y_{jM} = \sum_{m+\mu=M} C_{lm}^{jM} Y_{lm} \chi_\mu, \quad (7)$$

где C_{lm}^{jM} — коэффициенты Клебша—Гордона, Y_{lm} — скалярная сферическая функция, χ_μ — сферические орты [12]. Формулы для волны ТЕ получаются из (6) заменой $E \rightarrow -iH, H \rightarrow iE$.

Для того, чтобы к векторам (6) применить оператор проектирования (5), необходимо знать матрицы преобразования этих векторов

при поворотах. Представление полной ортогональной группы в базисе скалярных сферических функций известно (см. [13], стр. 202):

$$\hat{O}_R Y_{lm} = \sum_{m'} D_{mm'}^{(l)} Y_{lm'}. \quad (8)$$

Матрицы преобразования χ_{μ} совпадают с $D_{mm'}^{(l)}$ для $l = 1$:

$$\hat{O}_R \chi_{\mu} = \sum D_{\mu\mu'}^{(1)} \chi_{\mu'}. \quad (9)$$

Шаровые векторы преобразуются по неприводимым представлениям $D^{(l)}$, на которые разлагается произведение представлений:

$$C^{-1} (D^{(l)} \times D^{(1)}) C = \sum_{j=l-1}^{l+1} D^{(j)}, \quad (10)$$

где элементами матрицы C являются коэффициенты Клебша—Гордона $C_{lm\ 1\mu}^{jM}$ (7). Векторы E_{jM} и H_{jM} строятся из шаровых векторов и преобразуются по такому же представлению $D^{(l)}$:

$$\hat{O}_R E_{jM} = \sum D_{MM'}^{(j)} E_{jM'}. \quad (11)$$

В результате проектирования (6) на неприводимые представления группы возмущения получим искомые поля нулевого приближения $E_i^{(p)}$, $H_i^{(p)}$. Для этих функций верны формулы теории возмущений в отсутствие вырождения, если нет повторяющихся неприводимых представлений [7]. Окончательно возмущенный волновой вектор в первом порядке теории возмущений (причем, согласно (4), диагональный матричный элемент не зависит от номера строки i)

$$k_{j\mu}^2 = k_j^2 + V_{ii}^{\mu\mu}. \quad (12)$$

Для частного случая пологих деформаций границы оператор возмущения имеет вид [14] (стр. 566)

$$\hat{V} E = - [n \operatorname{rot} E] \delta(r - r_0), \quad (13)$$

где r_0 — радиус-вектор локального возмущения на границе. Матричный элемент оператора (13)

$$V_{ik}^{a\mu b\nu} = k_{\mu} (k_{\nu} \rho_{ik}^{a\mu b\nu} - k_{\mu} g_{ik}^{a\mu b\nu}), \quad (14)$$

где $\rho_{ik}^{a\mu b\nu} = \int_{\tau} H_i^{(a\mu)} H_k^{(b\nu)} d\tau \delta_{ik} \delta_{\mu\nu}$, $g_{ik}^{a\mu b\nu} = \int_{\tau} E_i^{(a\mu)} E_k^{(b\nu)} d\tau \delta_{ik} \delta_{\mu\nu}$;

τ — объем, занимаемый возмущением.

Если возмущением является тонкий металлический стержень, то [14] (стр. 568)

$$\hat{V} E = 2\pi k^2 \beta E \delta(r - r_0), \quad (15)$$

причем дипольный момент стержня $p = (\beta/2) E$.

Если резонатор заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью $\hat{\epsilon}$ и помещен в магнитное поле H_0 , то оператор возмущения пропорционален изменению диэлектрической постоянной в магнитном поле $\hat{\Delta\epsilon}(H_0)$:

$$\hat{V} E = k^2 \hat{\Delta\epsilon}(H_0) E. \quad (16)$$

Примеры. 1. Рассмотрим сферический резонатор с системой возмущающих элементов, обладающей симметрией D_2 (рис. 2). Первая мода, рассмотренная Джонсом [1], расщепляется полностью, так как в приводимое представление входят три одномерных представления $D^{(1)} = B_1 + B_2 + B_3$, по которым преобразуются соответственно z, y, x —компоненты вектора. Согласно (6) невозмущенные векторы для первой моды типа ТМ с точностью до нормирующего множителя

$$E_{\pm 1} = B \sin \theta e^{\pm i\varphi} r + D \cos \theta e^{\pm i\varphi} \theta \mp D e^{\pm i\varphi} \varphi, \\ E_0 = B \cos \theta r - D \sin \theta \theta. \quad (17)$$

Результат Джонса легко получается методом проектирования

$$E^{(B_3)} = B \sin \theta \cos \varphi r + D \cos \theta \cos \varphi \theta - \\ - D \sin \varphi \varphi, \quad E^{(B_2)} = B \sin \theta \sin \varphi r + \\ + D \cos \theta \sin \varphi \theta + D \cos \varphi \varphi, \quad (18)$$

$$E^{(B_1)} = B \cos \theta r - D \sin \theta \theta,$$

где

$$B = [2/(kr)^{1/2}] J_{3/2}(kr), \quad D = [1/(kr)^{1/2}] \frac{d}{dr} [r J_{3/2}(kr)].$$

$E^{(B_1)}, E^{(B_2)}, E^{(B_3)}$ представляют собой компоненты вектора на сфере. Рассмотрим следующую моду $j = 2, M = -2, -1, 0, 1, 2$, оставив симметрию возмущения той же. Даже для такой простой симметрии результат проектирования уже не столь очевиден. Собственные электрические и магнитные векторы невозмущенного резонатора для типа ТМ и $j = 2$ согласно (6) равны

$$E_0 = R(3 \cos^2 \theta - 1) - C \cos \theta \sin \theta \theta, \\ E_{\pm 1} = R e^{\pm i\varphi} \sin \theta \cos \theta r + C e^{\pm i\varphi} \cos 2\theta \theta \pm C i e^{\pm i\varphi} \cos \theta \varphi, \\ E_{\pm 2} = R e^{\pm 2i\varphi} \sin^2 \theta r + C e^{\pm 2i\varphi} \sin \theta \cos \theta \theta \mp C i e^{\pm 2i\varphi} \sin \theta \varphi, \\ H_0 = R \cos \theta \sin \theta \varphi, \quad (19) \\ H_{\pm 1} = \pm R e^{\pm i\varphi} \cos \theta \theta + C i e^{\pm i\varphi} \cos 2\theta \varphi, \\ H_{\pm 2} = \pm R e^{\pm 2i\varphi} \cos \theta \sin \theta \theta + C i e^{\pm 2i\varphi} \sin \theta \varphi,$$

где

$$R = \frac{6}{(kr)^{3/2}} J_{5/2}(kr), \quad C = \frac{1}{(kr)^{3/2}} \frac{d}{dr} [r J_{5/2}(kr)].$$

По формулам (3.149), (3.158) [7] найдем, что

$$D^{(2)} = 2A + B_1 + B_2 + B_3. \quad (20)$$

Матрицы поворотов $\hat{O}_x^2, \hat{O}_y^2, \hat{O}_z^2$ в базисе собственных векторов невозмущенного резонатора:

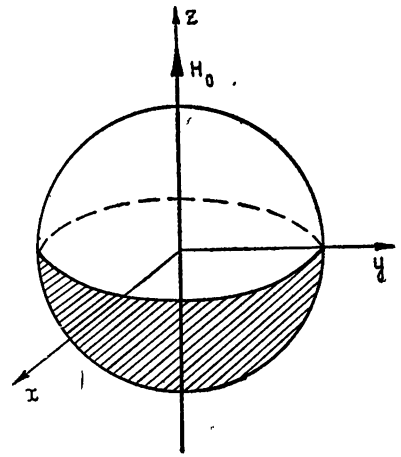


Рис. 2. Сферический резонатор, состоящий из различных полушфер и помещенный в магнитное поле H_0 .

$$\hat{O}_2^z(\theta=0, \varphi_1=\pi, \varphi_2=0) \quad \hat{O}_2^x(\theta=\pi, \varphi_1=\varphi_2=0) \quad \hat{O}_2^y\left(\theta=\pi, \varphi_1=-\frac{\pi}{2}, \varphi_2=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Поддействуем оператором проектирования (5) на E_0, E_1, E_2 (E_{-1}, E_{-2} дадут тот же результат):

$$\hat{P}^{(A)} E_2 = \frac{1}{4} (\hat{E}E_2 + \hat{O}_2^x E_2 + \hat{O}_2^y E_2 + \hat{O}_2^z E_2) = \frac{1}{2} (E_2 + E_{-2}),$$

$$\hat{P}^{(B_1)} E_2 = \frac{1}{4} (\hat{E}E_2 - \hat{O}_2^x E_2 - \hat{O}_2^y E_2 + \hat{O}_2^z E_2) = \frac{1}{2} (E_2 - E_{-2}),$$

$$\hat{P}^{(B_2)} E_1 = \frac{1}{4} (\hat{E}E_1 - \hat{O}_2^x E_1 + \hat{O}_2^y E_1 - \hat{O}_2^z E_1) = \frac{1}{2} (E_1 + E_{-1}),$$

$$\hat{P}^{(B_3)} E_1 = \frac{1}{4} (\hat{E}E_1 + \hat{O}_2^x E_1 - \hat{O}_2^y E_1 - \hat{O}_2^z E_1) = \frac{1}{2} (E_1 + E_{-1}).$$

Представление A , согласно (20), встречается дважды, поэтому получим еще один вектор, обладающий этой симметрией:

$$\hat{P}^{(A)} E_0 = E_0.$$

Группа D_2 не содержит отражений, поэтому для магнитных векторов получим в результате проектирования подобные комбинации. Выпишем правильные поля нулевого приближения, полученные в результате проектирования:

$$E^{(B_1)} = R \sin 2\varphi \sin^2 \theta r + C \sin 2\varphi \sin \theta \cos \theta \theta - Ci \cos 2\varphi \sin \theta \varphi,$$

$$E^{(B_2)} = R \sin \varphi \sin \theta \cos \theta r + C \sin \varphi \cos 2\theta \theta - Ci \cos \varphi \cos \theta \varphi,$$

$$E^{(B_3)} = R \cos \varphi \sin \theta \cos \theta r + C \cos \varphi \cos 2\theta \theta + Ci \sin \varphi \cos \theta \varphi, \quad (22)$$

$$E_1^{(A)} = R(3 \cos^2 \theta - 1) r + C \cos \theta \sin \theta \theta,$$

$$E_2^{(A)} = R \cos 2\varphi \sin^2 \theta r + C \cos 2\varphi \sin \theta \cos \theta \theta - C \sin 2\varphi \sin \theta \varphi.$$

Так как представление A встречается дважды, то в матрицу оператора \hat{V} войдет кроме трех диагональных элементов для B_1, B_2, B_3 блок размерности 2×2 . $E_1^{(g)}, E_2^{(g)}$ еще не являются правильными функциями нулевого приближения. Соображений симметрии в случае повторяющихся представлений недостаточно. Правильные функции нулевого приближения находятся как собственные векторы матрицы

$$\begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{vmatrix}, \quad \text{где } V_{ik} = \int E_i^{(A)} \hat{V} E_k^{(A)} dV.$$

Итак

$$E^{(1A)} = E_1^{(A)} \left(1 + \frac{V_{12}}{\lambda_1 - V_{22}} \right), \quad E^{(2A)} = E_1^{(A)} \left(1 + \frac{V_{21}}{\lambda_2 - V_{22}} \right),$$

где

$$\lambda_{1,2} = (1/2) [(V_{11} + V_{22}) \pm \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4 |V_{12}|^2}].$$

2. Рассмотрим понижение симметрии до аксиальной, например, сферический резонатор, состоящий из различных полусфер. В резонаторе Земля—ионосфера эта симметрия «день—ночь». Такой резонатор обладает группой симметрии $C_{\infty v}$. Базисные функции неприводимых представлений группы аксиальной симметрии $\psi_m \sim e^{im\varphi}$. Посмотрим, как снимается вырождение первой и второй мод. Поля в невозмущенном резонаторе для этих мод имеют вид (17) и (19). Нас интересует зависимость этих функций только от φ . Формулы проектирования в этом случае можно не применять, так как из вида функций ясно, что они преобразуются следующим образом: при $m = 0$ по A_1 или A_2 , при $|m| = 1$ по E_1 , при $|m| = 2$ по E_2 .

Отсюда следует, что

$$D^{(1)} = \begin{cases} E_1 + A_1 \\ E_2 + A_2 \end{cases}, \quad D^{(2)} = \begin{cases} A_1 + E_1 + E_2 & (\text{для } E) \\ A_2 + E_1 + E_2 & (\text{для } H) \end{cases}. \quad (23)$$

Таким образом, первая, трехкратно вырожденная мода расщепляется на синглет и дублет, вторая, пятикратно вырожденная—на синглет и два дублета. Правильные поля нулевого приближения есть

$$j = 1; \quad \begin{cases} E^{(A_1)} = B \cos \theta r - D \sin \theta \theta \\ E^{(E_1)} = B \sin \theta e^{\pm i\varphi} r + D \cos \theta e^{\pm i\varphi} \theta \mp D e^{\pm i\varphi} \varphi \end{cases}$$

$$j = 2; \quad \begin{cases} E^{(A_1)} = R(3 \cos^2 \theta - 1) r - C \cos \theta \sin \theta \theta \\ E^{(E_1)} = R e^{\pm i\varphi} \sin \theta \cos \theta r + C e^{\pm i\varphi} \cos 2\theta \theta \pm C i e^{\pm i\varphi} \cos \theta \varphi \\ E^{(E_2)} = R e^{\pm 2i\varphi} \sin^2 \theta r + C e^{\pm 2i\varphi} \sin \theta \cos \theta \theta \mp C i e^{\pm 2i\varphi} \sin \theta \varphi \end{cases} \quad (24)$$

Если сферический резонатор помещен в магнитное поле, направленное как показано на рис. 2, оператор обращения времени не входит в группу, и представления $D^{(m)}$ и $D^{(-m)}$ не объединяются в двумерные [13], так что вырождение снимается полностью.

2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОЕКТИРОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ВОЗБУЖДЕНИИ РЕЗОНАТОРА

Задача о возбуждении резонатора в пренебрежении потенциальными полями состоит в решении [14] уравнения

$$(\Delta + k^2) E = \frac{4\pi i k}{c} j(r_0).$$

Решение, как известно, записывается в виде [14]

$$E = ik \sum_{\mu} \frac{\int E^{(j\mu)*}(r_0) j(r_0) dV}{(k_{j\mu}^2 - k^2) N_{j\mu}} E^{(j\mu)}(r), \quad (25)$$

где $E^{(j\mu)}$ — электрический вектор, преобразующийся по μ -му неприводимому представлению группы симметрии резонатора, в данном случае системы штырей, возбуждающих резонатор.

Произвольный ток $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$, возбуждающий в резонаторе суперпозицию всех мод, можно представить в виде суммы токов, каждый из которых возбуждает одну из мод

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_0) = \sum_{\nu} \mathbf{j}^{(\nu)}(\mathbf{r}_0). \quad (26)$$

Из формулы (25), используя теорему ортогональности неприводимых представлений [6], можно получить, что, если $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$ преобразуется по ν -му неприводимому представлению, то этим током возбуждается в резонаторе одна только ν -мода. Токи $\mathbf{j}^{(\nu)}$ можно найти, проектируя произвольный ток на неприводимые представления группы симметрии резонатора:

$$\mathbf{j}^{(\nu)}(\mathbf{r}_0) = \frac{n_{\nu}}{g} \sum \chi^{(\nu)*}(R) \hat{O}_R \mathbf{j}(\mathbf{r}_0). \quad (27)$$

Пример. Рассмотрим систему штырей, обладающую группой симметрии D_2 (рис. 1). Тогда $\mathbf{j}^{(B_1)}(\mathbf{r}_0, A)$ есть ток в штыре A , возбуждающий моду B_1 , и т. д.

В результате проектирования с помощью (27) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^{(B_1)}(A) &= [j_z(A) + j_z(A')] \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{j}^{(B_2)}(A) &= [j_x(A) - j_x(A')] \mathbf{e}_x + [j_y(A) + j_y(A')] \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{j}^{(B_3)}(A) &= [j_x(A) + j_x(A')] \mathbf{e}_x + [j_y(A) - j_y(A')] \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (28)$$

Формулы для $\mathbf{j}^{(B_1)}(B)$, $\mathbf{j}^{(B_2)}(B)$ и $\mathbf{j}^{(B_3)}(B)$ получаются из (28) заменой $B_1 \rightleftharpoons B_2$ и $y \rightleftharpoons z$, а формулы для $\mathbf{j}^{(B_1)}(C)$, $\mathbf{j}^{(B_2)}(C)$, $\mathbf{j}^{(B_3)}(C)$ заменой $B_1 \rightleftharpoons B_3$, $z \rightleftharpoons x$. Полагая $\mathbf{j}^{(\nu)} = 0$ при $\nu \neq \mu$, получим амплитудно-фазовые соотношения между токами, при выполнении которых в резонаторе возбуждается одна только μ -мода.

Например, условия возбуждения моды B_1 :

$$\begin{aligned} j_{\alpha}(A) = j_{\alpha}(A') = 0; \quad j_{\alpha}(B) = -j_{\alpha}(B'), \quad j_{\alpha}(C) = -j_{\alpha}(C'), \\ j_z(B) = j_z(B') = 0; \quad j_z(C) = j_z(C') = 0, \end{aligned}$$

где $\alpha = x, y$. При этом амплитуда поля пропорциональна сумме токов в штырях A, A' , а распределение поля в резонаторе определяется вектором $\mathbf{E}^{(B_1)}$ (18)

$$\mathbf{E} = ik \frac{\int \mathbf{E}^{(B_1)*}(\mathbf{r}_0) [j_z(A) + j_z(A')] \mathbf{e}_z dV}{(k_{B_1}^2 - k^2) N_{B_1}} \mathbf{E}^{(B_1)}(\mathbf{r}), \quad (29)$$

где N_{B_1} — нормирующий множитель.

Таким образом, метод проектирования, широко применяемый в спектроскопии, может найти применение в решении различных задач электродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Iones, International J. Electr., **22**, № 4, 361 (1967).
2. N. Bevensee, Archiv der Electr., **16**, № 7 (1962).
3. D. Kerns, J. Research National Bureau, **46**, № 4 (1951).
4. Р. А. Силин, В. П. Сазонов, Замедляющие системы, изд. Сов. радио, М., 1966.
5. В. И. Гаплевский, В. М. Конторович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика (в печати).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, М., 1963.

7. М. Хамермеш, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, изд. Мир, М., 1966
8. Г. Я. Любарский, Теория групп и ее применение к физике, Гостехиздат, М., 1957.
9. T. Madden, W. Thompson, Rev. Geophys., 3, № 2, 211 (1965).
10. П. В. Блюх, А. П. Николаенко, Ю. Ф. Филиппов, Геомagnetизм и аэрономия, 8, № 2, 250 (1968).
11. В. В. Никольский, Вариационные методы для внутренних задач электродинамики, изд. Наука, М., 1967.
12. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, изд. Наука, М., 1969.
13. Е. Вигнер, Теория групп и ее приложение к квантовомеханической теории атомных спектров, ИЛ, М., 1961.
14. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
8 декабря 1970 г.

APPLICATION OF THE GROUP THEORY TO INVESTIGATING DEGENERATION REMOVED IN A SPHERICAL RESONATOR

N. A. Sapogova, V. M. Kontorovich

In symmetrical resonators some natural frequencies are degenerated. When applying a disturbance reducing the symmetry, the degeneration is partially or completely removed. In order to find the frequencies and fields it is necessary to solve a secular equation of the order being equal to the degeneration multiplicity. The theory of group representations enables one to find such symmetrical combinations of natural vectors of the undisturbed resonator for which the order of the secular equation is considerably decreased, i. e. to find correct fields of the zero approximation. The examples are considered a spherical resonator with the disturbance possessing a point-size symmetry. The correct zero-approximation fields have been obtained for the first and second modes in such resonators.
