

УДК 621.372.8.09

## КОМПЛЕКСНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНИИ ГУБО

С. И. Переверзев

На основе анализа поведения корней дисперсионного уравнения на комплексной плоскости их значений исследуется спектр симметричных волн (поверхностных и комплексных, в частности, вытекающих) волновода, образованного идеально проводящим цилиндром со слоем диэлектрика. Как частный случай рассмотрены волны в диэлектрическом цилиндре. Рассмотрен случай диэлектрика с потерями

К настоящему времени множество работ посвящено исследованию комплексных волн (т. е. волн, имеющих комплексную постоянную распространения) вблизи слоя плазмы [1-3]. Однако, как было показано [4, 5], и диэлектрические волноводы, которые раньше рассматривались лишь как волноводы поверхностных волн (см., например, [6, 7]), могут поддерживать некоторые типы таких волн—вытекающие волны.

Задачей настоящей работы является рассмотрение симметричных  $E$ - и  $H$ -комплексных волн в линии Губо и диэлектрическом цилиндре. Такое рассмотрение представляется полезным как для расчета линий передач электромагнитной энергии, так и для задач антенной техники, поскольку вытекающие волны существенно влияют на диаграмму излучения [8, 9].

Дисперсионное уравнение, соответствующее симметричным волнам линии Губо, имеет вид [7]

$$F_E = gb \frac{J_0(gb) N_0(ga) - J_0(ga) N_0(gb)}{J'_0(gb) N_0(ga) - J_0(ga) N'_0(gb)} = \epsilon \frac{\chi b H_0^{(2)}(\chi b)}{H_0^{(2)'}(\chi b)} \text{ для } E_{on}\text{-волн}; (1a)$$

$$F_H = gb \frac{J_0(gb) N'_0(ga) - J'_0(ga) N_0(gb)}{J'_0(gb) N'_0(ga) - J'_0(ga) N'_0(gb)} = \mu \frac{\chi b H_0^{(2)}(\chi b)}{H_0^{(2)'}(\chi b)} \text{ для } H_{on}\text{-волн}; (1б)$$

где  $J_0$ ,  $N_0$ ,  $H_0^{(2)}$  — функции Бесселя, Неймана и Ганкеля,  $a$  — радиус металлического стержня,  $b$  — внешний радиус структуры,  $\epsilon$  ( $\mu$ ) — относительная диэлектрическая (магнитная) проницаемость материала покрытия,  $\chi$  и  $g$  — поперечные волновые числа поля вне и внутри слоя соответственно. Дополнительный чл в уравнению (1) является уравнение связи поперечных волновых чисел для поля внутри и вне слоя.

$$g^2 + (i\chi)^2 = k^2 (\epsilon\mu - 1). (2)$$

Рассмотрим поведение корней системы уравнений (1), (2) на плоскости комплексного переменного  $\chi l$  (см. рис. 1), где  $l = b - a$  — толщина слоя диэлектрика, при изменении частоты.

1.  $\omega = 0$ . Из (2) следует, что  $\chi l = gl$ , и уравнение (1 а) дает, во-первых,  $\chi l = 0$ ; во-вторых, на большом расстоянии от начала координат, учитывая асимптотику [7], имеем

$$\operatorname{tg} \kappa l = \begin{cases} i \varepsilon & \text{для } E_{on}\text{-волн} \\ i \frac{1}{\mu} & \text{для } H_{on}\text{-волн} \end{cases} \quad (3)$$

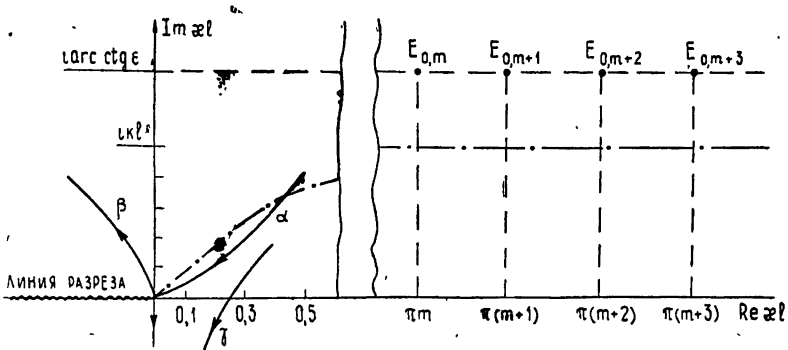


Рис. 1.

Таким образом, решения системы (1), (2), например, для волн типа  $E_{on}$ , при условии  $\omega = 0$  представляют из себя дискретные точки плоскости комплексного переменного  $\kappa l$ , находящиеся на некоторой огибающей, которая, выходя из начала координат, переходит в прямую  $\operatorname{Im}(\kappa l) = \operatorname{arctg} \operatorname{ctg} \varepsilon$  (при действительных  $\varepsilon > 1$ ). При этом разность действительных частей двух соседних корней равна  $\pi$ . Из (3) легко получить начальное положение поперечных волновых чисел и для комплексных значений  $\varepsilon$ , а также для волн типа  $H_{on}$ .

При увеличении частоты все эти корни двигаются по направлению к началу координат и приходят в него поочередно при частоте, равной критической для данного типа волны.

2. Рассмотрим теперь поведение корней вблизи критической частоты ( $\omega = \omega_{кр}$ ). В этом случае  $\kappa b \approx 0$  и правая часть дисперсионного уравнения (1) принимает вид

$$\left(\frac{b}{l}\right)^2 (\kappa l)^2 \left\{ \frac{\pi}{2} i + \ln \left[ 0,89 \frac{b}{l} (\kappa l) \right] \right\} \nu. \quad (4)$$

Левую часть уравнения (1) разложим в ряд Тейлора в окрестности точки  $gl = x_n$ , которая соответствует критической частоте  $n$ -го типа поверхностной волны, и перегруппируем, отбросив члены с производными порядка выше второго:

$$F \approx \frac{F'(x_n)}{2x_n} [(gl)^2 - x_n^2] + \left\{ F''(x_n) - \frac{F'(x_n)}{x_n} \right\} \frac{(gl - x_n)^2}{2}. \quad (5)$$

Если выполняется условие

$$\frac{|gl + x_n|}{|(F''(x_n)/F'(x_n))x_n - 1|} \gg |gl - x_n|,$$

то второй член в равенстве (5) может быть отброшен. Уравнение (1) с учетом (2), (4) и (5) переписывается в виде

$$\Psi \{ (\kappa l)^2 + [(kl)^2(\varepsilon\mu - 1) - x_n^2] \} = (\kappa l)^2 \left\{ \frac{i\pi}{2} + \ln \left( 0,89 \frac{b}{l} \kappa l \right) \right\}, \quad (6)$$

где  $\Psi = \left(\frac{l}{b}\right)^2 \frac{F'(x_n)}{2x_n \nu}$ , а  $\nu = \varepsilon$  для случая  $E_{on}$ -волн и  $\nu = \mu$  в случае волн типа  $H_{on}$ .

Продолжая считать  $\kappa l$  малым комплексным числом (т. е.  $\kappa l = \rho e^{i\varphi}$ , где  $\rho < 1$ ) и вводя потери, т. е.  $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + i\Delta)$ ,  $\mu = \mu_0(1 + i\delta)$ , приравниваем отдельно действительные и мнимые части равенства (6) и, опуская выкладки, запишем для  $E_{on}$ -волн

$$\ln\left(0,89\rho\frac{b}{l}\right) = \frac{(\varphi + \pi/2)A + \Psi B}{C},$$

$$\rho^2 = \frac{\Psi C}{(\varphi + \pi/2)(1 + \Delta^2) + \Delta\Psi},$$
(7)

где

$$A = (\kappa l)^2 \varepsilon_0 \mu_0 (1 + \Delta^2) (\cos 2\varphi + \delta \sin 2\varphi) - [(\kappa l)^2 + x_n^2] (\cos 2\varphi - \Delta \sin 2\varphi),$$

$$B = (\kappa l)^2 \varepsilon_0 \mu_0 (\delta + \Delta) \cos 2\varphi - \{(\kappa l)^2 [\varepsilon_0 \mu_0 (1 - \delta\Delta) - 1] - x_n^2\} \sin 2\varphi,$$

$$C = [(\kappa l)^2 + x_n^2] (\sin 2\varphi + \Delta \cos 2\varphi) - (\kappa l)^2 \varepsilon_0 \mu_0 (1 + \Delta^2) (\sin 2\varphi - \delta \cos 2\varphi).$$

Легко видеть, что для случая  $H_{on}$ -волн получаются аналогичные выражения с заменой  $\varepsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$ ,  $\Delta \leftrightarrow \delta$ . Если ни магнитных, ни электрических потерь в слое нет ( $\Delta = \delta = 0$ ), то система (7) записывается в виде

$$\begin{cases} \rho^2 = \Psi [(\kappa l)^2 (\varepsilon_0 \mu_0 - 1) - x_n^2] \frac{-\sin 2\varphi}{\varphi + \pi/2} \\ \rho = \frac{l}{b} e^\Psi \rho_0(\varphi) = \frac{l}{b} e^\Psi 1,12 \exp\left[-\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{ctg} 2\varphi\right] \end{cases}$$
(8)

и может быть решена графически. Очевидно, что второе уравнение этой системы не зависит от частоты явно, но, завися от материала и геометрических размеров, описывает траектории движения корней по комплексной плоскости  $\kappa l$  при изменении частоты. Заметим, что параметры линии Губо выступают в роли масштабной поправки  $(l/b)e^\Psi$  к предельному значению траекторий.

При  $\omega = \omega_{кр}$  все траектории сходятся в начале координат. При частоте меньшей, чем критическая, правая часть первого уравнения положительна только в первом квадранте и уравнение  $\rho = \rho_0(\varphi)$  описывает в этом случае кривую  $\alpha$  (рис. 1), заключенную в интервале  $0 \leq \varphi < \pi/4$  и соответствующую, согласно [8], несобственным комплексным (вытекающим) волнам. При частоте, превышающей критическую частоту данного типа волны, траектория лежит в интервале  $\pi/2 \leq \varphi < (3/4)\pi$  (кривая  $\beta$ ), кроме того при  $\omega \geq \omega_{кр}$  появляется корень, который, двигаясь с ростом частоты из начала координат по отрицательной мнимой полуоси, соответствует чисто поверхностной волне.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1)  $l = b - a \ll b$  (тонкий слой на цилиндре). В этом случае  $F$  принимает вид [7]

$$F_E = \frac{b}{l} (gl) \operatorname{tg} (gl), \quad F_H = -\frac{b}{l} (gl) \operatorname{ctg} (gl).$$

Тогда

$$F'(x_n) = \frac{b}{l} x_n, \quad F''(x_n) = 2 \frac{b}{l}, \quad \Psi = \frac{l}{b} \frac{1}{2\nu}.$$

Видно, что в этом случае траектории корней простым образом зависят от материала и поперечных размеров структуры.

2)  $a = 0$  (диэлектрический стержень). В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$-\frac{\kappa b K_0(\kappa b)}{K_1(\kappa b)} = \frac{1}{\epsilon} \frac{g b J_0(g b)}{J_1(g b)}, \quad (9)$$

$$F'(x_n) = x_n, \quad F''(x_n) = 3, \quad l = b, \quad \Psi = 1/2\gamma.$$

Здесь следует заметить, что случай диэлектрического стержня уже рассматривался некоторыми авторами, однако результаты рассмотрения или ошибочны [10]\* или недостаточны для понимания вопроса [5, 11]\*\*.

3. Однако не всем комплексным решениям уравнений (1), (2) соответствуют комплексные волны. В работе [8] даны границы той части плоскости комплексного переменного, располагаясь на которой, корни (1), (2) дают начало комплексным волнам. На плоскости комплексного переменного  $\kappa l$  эта граница имеет вид

$$\text{Im } \kappa l = \frac{\kappa l \text{Re } \kappa l}{\sqrt{(\kappa l)^2 + (\text{Re } \kappa l)^2}}$$

и показана на рис. 1 штрихпунктирной линией. Поперечные волновые числа вытекающих волн располагаются в первом квадранте плоскости  $\kappa l$  ниже этой кривой. Из рис. 1 видно, что при очень малой частоте ( $\kappa l \ll 1$ ) штрихпунктирная линия практически сливается с действительной осью и ни один из корней уравнения (1) не вносит вклад в поле, за исключением корня «основной» поверхностной волны  $E_{00}$ . При достаточном увеличении частоты корень  $\kappa l_{0n}$  (который с ростом частоты движется из своей начальной точки в точку  $\kappa l = 0$ ) пересекает эту границу и дает начало вытекающей волне, переходящей в поверхностную при  $\omega \gg \omega_{кр}$ , и т. д. Легко видеть, что, начиная с некоторой частоты ( $\kappa l \gg \gg \arcsin \text{ctg } \epsilon$ , если  $\epsilon' > 1$ ,  $\epsilon'' = 0$ ), одновременно может существовать бесконечное количество электрических вытекающих волн, которые одна за другой переходят в поверхностные с ростом частоты. Аналогичным образом обстоит дело и с магнитными вытекающими (поверхностными) волнами.

Таким образом, вытекающая волна является как бы предвестником соответствующей поверхностной волны и переходит в последнюю при переходе частоты через критическую. Очевидно, что «основная» поверхностная волна (имеющая критическую частоту, равную нулю) не имеет такого предвестника. Аналогичный результат для «основной» волны плоского диэлектрического волновода получен авторами [4] из других соображений.

\* Рассуждения автора [10] базировались на предположении, что действительным значениям  $-1 \ll \kappa b < 0$  уравнения (9) соответствуют действительные значения  $g b$ . Однако это не так. Для действительных  $|\kappa b| < 1$  можно записать

$$-\frac{\kappa b K_0(\kappa b)}{K_1(\kappa b)} = (\kappa b)^2 \ln(0,89 \kappa b) = (\kappa b)^2 \{ \ln 0,89 |\kappa b| + iA \},$$

где  $A \neq 0$  при  $\kappa b < 0$ , т. е. левая часть (9), являясь действительной при  $0 < \kappa b < 1$ , становится комплексной при малых отрицательных значениях  $\kappa b < 0$ , и равенство (9) оказывается возможным лишь при комплексных значениях  $g b$ , так как при любых действительных значениях  $g b$  правая часть (9) остается действительной.

\*\* В работе [6] рассматривается лишь очень частный случай  $\epsilon = \infty$  (автор с самого начала положил  $\frac{1}{\epsilon} \frac{J_0(g b)}{J_1(g b)} g b = 0$ ), не имеющий практического интереса. Соответствующие результаты работы [6] совпадают с результатами, полученными в данной работе, если положить  $\epsilon = \infty$ .

4. Для того, чтобы показать характер комплексных волн при наличии потерь в слое, следует проследить за движением точки  $O$  на плоскости  $\kappa l$ . Полагая в (7)  $(kl)^2(\epsilon_0\mu_0 - 1) = \kappa_n^2$  и решая полученную систему графически, можно видеть, что, выходя под углом  $\varphi = -\pi/4$  из начала координат, эта точка описывает лепесток и возвращается в  $\kappa l = 0$  при  $\varphi = -\pi/2$ , если  $\Delta$  меняется в интервале  $0 \div \infty$ . В самом деле, в случае идеальной проводимости  $h = k$  и  $\kappa l = 0$  [7].

Таким образом, при наличии потерь траектория комплексного корня на рис. 1 принимает вид ( $\gamma$ ).

Автор выражает признательность Б. З. Каценеленбауму и А. Д. Шатрову за внимание к работе и ряд критических замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. T. Tamir, A. A. Oliner, Trans. IRE, AP-10, № 1, 55 (1962).
2. T. Tamir, A. A. Oliner, Proc. IEEE, 51, № 2, 317 (1963).
3. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 9, № 1, 110 (1966).
4. В. П. Мальцев, Е. И. Нефедов, В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 12, 1855 (1969).
5. J. Arnbak, Electr. Lett., 5, № 3, 41 (1969).
6. D. G. Kiely, Dielectric aeriats, London, 1953.
7. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд Сов. радио, М., 1957.
8. T. Tamir, A. A. Oliner, Proc. IEE, 110, № 2, 310 (1963).
9. В. В. Шевченко, Плавные переходы в открытых волноводах, изд Наука, М., 1969.
10. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 10, 1528 (1970).
11. Б. З. Каценеленбаум, ЖТФ, 19, № 10, 1173 (1949).

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию  
6 марта 1970 г.,  
после объединения  
7 июля 1971 г.

#### COMPLEX WAVES IN GUBO'S LINE

*S. I. Pereverzev*

On the basis of analyzing the behaviour of the dispersion equation roots on the complex plane of their values we investigate the spectrum of symmetric waves (surface and complex, in particular, leakage) in a waveguide formed by a perfectly conducting cylinder with a dielectric layer. In particular, the paper considers the waves in the dielectric cylinder. The case of the dielectric with losses is discussed.