ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIV, № 12 РАДИОФИЗИКА 1971

УДК 621.371 : 538.574

О ПОПРАВКАХ К ПОЛЯРИЗАЦИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

О. Н. Найда

В рамках «квазиизотропного» приближения, т. е. при $\left|\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\,\mathrm{Sp}\,\hat{\varepsilon}\right| \ll 1$, рассмотрены электромагнитные волны, попадающие из однородной анизотропной среды в неоднородную, вообще говоря, анизотропную среду. Показано, что если у двух волн, распространяющихся вдоль одного и того же луча, большие оси поляризационных эллипсов перпендикулярны, отношения малых и больших полуосей эллипсов одинаковы, а направления круговой поляризации противоположны, то все указанные соотношения между поляризациями двух волн сохраняются и на участках луча, пересекающих неоднородности среды (в том числе при переходе из анизотропной среды в изотропную).

В случае, когда первоначальная волна нормальная, для участков луча, где среда слабо неоднородна, т. е. период Δl пространственных биений нормальных волн много меньше масштаба неоднородности l среды, получены итерационные уравнения для поляризационных параметров волны, причем для первых трех порядков по $\Delta l/l$ получены решения этих уравнений. Показано, что в первом порядке по $\Delta l/l$ неоднородность среды изменяет степень круговой поляризации волны (по сравнению с нормальной волной), а в случае гиротропной среды неоднородность среды в первом порядке по $\Delta l/l$ приводит также к сдвигу осей поляризационных эллипсов по отношению к положению этих осей у нормальных волн. В случае негиротропной среды сдвиг осей происходит лишь во втором порядке по $\Delta l/l$ и оси поляризационных эллипсов отклоняются от осей нормальных волн в сторону, противоположную направлению углового ускорения (при движении вдоль луча) осей у нормальных волн. Таким образом, оси поляризационных эллипсов обладают инерционностью по отношению к осям нормальных волн.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что в однородной анизотропной среде поляризация плоских (т. е. имеющих постоянную амплитуду) волн однозначно определяется тензором $\hat{\varepsilon}$ диэлектрической проницаемости и волновым вектором $\boldsymbol{k}$ (имеется в виду покоящаяся среда, $\mu_{mn} = \delta_{mn}$). Формулы, выражающие поляризации таких волн, т. е. амплитуды $\boldsymbol{e}$ для волн

$$\boldsymbol{E}^{(A)} = \boldsymbol{e}^{(A)}(\hat{\varepsilon}, \boldsymbol{k}) \exp(-i\omega t + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}), \tag{1.1}$$

приведены, например, в учебнике [1] (§§ 77—79, 82)*. Индекс A в (1.1) может принимать два различных значения, что соответствует обыкновенной и необыкновенной волнам. Следуя монографии [2], волны вида (1.1) для однородной среды будем называть нормальными волнами.

В случае неоднородной среды нормальными волнами будем называть векторные функции вида

$$\boldsymbol{E}_0^{(A)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}_0^{(A)}(\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{x}), \nabla\zeta^{(A)}(\boldsymbol{x})) \exp(i\zeta^{(A)}(\boldsymbol{x})), \tag{1.2}$$

* При этом амплитуда $\boldsymbol{e}^{(A)}$ определена лишь с точностью до произвольного скалярного множителя — функции от $\boldsymbol{k}$.

где $\zeta^{(A)}(x)$ — какое-либо из двух возможных решений уравнений эйконала, соответствующих начальному условию задачи, а амплитуды $e_0^{(A)}$ зависят от своих аргументов так же, как амплитуды $e^{(A)}$, фигурирующие в (1.1)*. Разумеется, в случае неоднородной среды нормальные волны могут быть лишь приближенными решениями уравнений Максвелла.

Малый параметр, который используется в настоящей работе для получения поправок к приближению нормальных волн,—это отношение $\Delta l/l$ периода Δl пространственных биений между нормальными волнами к характерному масштабу l неоднородности среды, т. е. рассматривается случай, когда выполняется условие

$$\Delta l/l \ll 1. \tag{1.3}$$

В качестве точных решений, лишь малыми поправками отличающихся от нормальных волн, будем рассматривать такие решения уравнений Максвелла, которые переходят в нормальные волны там, где луч проходит через однородный двупреломляющий ($\Delta l/l \to 0$) участок среды. Такие решения будем называть «почти нормальными» волнами. Легко видеть, что в неоднородной среде всякое волновое решение уравнений Максвелла может быть разложено по «почти нормальным» волнам в виде интеграла, аналогичного интегралу Фурье.

Условие малости поправок к поляризации нормальных волн, эквивалентное условию (1.3), было получено в работе [3] для случая одномерно неоднородной среды. Для этого же случая в [3] были получены и поправки первого порядка по $\Delta l/l$ к поляризации нормальных волн, однако эти поправки получены не для поляризационных параметров волны, а для отношений между компонентами вектора $\boldsymbol{E}$ в системе отсчета, все оси которой существенно не совпадают с направлением волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Впоследствии формулы, позволяющие, в принципе, вычислить поправки любого порядка по $\Delta l/l$ к поляризации нормальных волн, были получены в работе [4], результаты этой работы изложены в § 26 книги [2]. Однако в работе [4] сами поправки к поляризации вычислялись (через спецфункции) лишь для среды $\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r})$ определенного вида, а исходные уравнения для получения этих поправок (уравнения взаимодействующих волн, см. формулу (26.13) книги [2]) были получены лишь для одномерно-неоднородной среды и притом для волны, падающей перпендикулярно слою.

Известно, что геометрооптические уравнения, справедливые при любых значениях $\Delta l/l$, были получены в работе [5] Кравцова («квазиизотропное» приближение). Условие применимости этих уравнений

$$|\nu_{ik}| \ll 1 \left(\nu_{ik} = \varepsilon_{ik} - \varepsilon\delta_{ik}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3}\,\mathrm{Sp}\,\hat{\varepsilon}\right) \tag{1.4}$$

вполне позволяет применять их в таких практически важных случаях, как распространение радиоволн в ионосфере (эта задача рассматривалась в [4]) и распространение света в неравномерно нагретом твердом теле (о важности этой задачи для квантовой оптики см. работу [6]). В последнем случае, как следует из [6], существенными оказываются случаи, когда $\Delta l/l \sim 1$ либо $\Delta l/l$ не на много порядков меньше единицы. Это обстоятельство делает необходимым для расчета рассмотренных в [6] систем вычисление поправок к поляризации нормальных волн хотя бы в низших порядках по $\Delta l/l$ (условие (1.4) для случая, рассмотренного в [6], выполнено).

---

* Здесь и в дальнейшем x означает совокупность координат $t, \boldsymbol{r}$.

В отличие от уравнений взаимодействующих волн, уравнения «квазиизотропного «приближения» получены для среды $\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r})$ произвольного вида (лишь бы выполнялось (1.4)) и для произвольного направления лучей.

Оказывается, уравнения «квазиизотропного» приближения позволяют получить простые формулы для поправок к поляризационным параметрам нормальных волн. Получение асимптотических решений «квазиизотропного» приближения в пределе (1.3) позволяет практически в общем случае слабоанизотропной среды решать проблему предельной поляризации, т. е. проблему «сшивания» нормальных волн с решениями уравнений Максвелла в изотропной среде (именно этой проблеме и были посвящены работы [3, 4]).

При расчетах поправок к поляризации нормальных волн мы ограничимся случаем стационарной неподвижной непоглощающей среды (тензор $\hat{\varepsilon}$ эрмитов). Все формулы будут выводиться в пренебрежении дифракцией и лишь в нулевом и первом порядках по $\Delta l/l$ в соответствии с «квазиизотропным» приближением.

2. УРАВНЕНИЯ «КВАЗИИЗОТРОПНОГО» ПРИБЛИЖЕНИЯ

Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к траектории луча (т. е. к проекции бихарактеристики на трехмерное пространство), а $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$ — какие-либо единичные векторы, образующие с $\boldsymbol{\tau}$ ортогональную правую тройку $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$. Обозначим через $\hat{\nu}_{(2)} = \begin{pmatrix} \nu_{n'n'}, & \nu_{n'b'} \\ \nu_{b'n'}, & \nu_{b'b'} \end{pmatrix}$ двумерную часть тензора ν_{ik}, соответствующую ортам $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$, а сами эти векторы в каждой точке траектории выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\nu_{n'b'} + \nu_{b'n'} = 0.$$

Тогда в осях $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$ уравнение, полученное Кравцовым (см. [5], уравнение (5)) для поляризационных параметров монохроматической волны, можно переписать в виде

$$k^{-1}\frac{d\Theta}{d\sigma} = \frac{1}{4}\varepsilon^{-1/2}\left[g + i(\nu_{b'b'} - \nu_{n'n'})\sin 2\Theta\right]; \tag{2.1}$$

$$g = 2\,\mathrm{Im}\,\nu_{nb} - 4\varepsilon^{1/2}k^{-1}\left(-T^{-1} + \frac{d\varphi}{d\sigma}\right); \tag{2.2}$$

$$\nu_{b'b'} - \nu_{n'n'} = (\nu_{bb} - \nu_{nn})\cos^{-1}2\varphi, \tag{2.3}$$

где $\Theta = \mathrm{arctg}\,[(\boldsymbol{E}\boldsymbol{b}')/(\boldsymbol{E}\boldsymbol{n}')]$, $d\sigma$ — элемент длины луча; $k = c^{-1}\omega$ (ω — частота), $\varphi(\sigma)$ — какое-либо непрерывное по σ решение уравнения

$$\mathrm{tg}\,2\varphi = 2\,\mathrm{Re}\,\nu_{nb}/(\nu_{nn} - \nu_{bb}), \tag{2.4}$$

ν_{nn}, ν_{bb}, ν_{nb}, ν_{bn} означают компоненты тензора $\hat{\nu}_{(2)}$ в осях $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ естественного трехгранника ($\boldsymbol{n}$ — нормаль, $\boldsymbol{b}$ — бинормаль):

$$\nu_{nn} = \boldsymbol{n}\hat{\nu}\boldsymbol{n}, \quad \nu_{nb} = \boldsymbol{n}\hat{\nu}\boldsymbol{b}, \quad \nu_{bn} = \boldsymbol{b}\hat{\nu}\boldsymbol{n}, \quad \nu_{bb} = \boldsymbol{b}\hat{\nu}\boldsymbol{b}, \tag{2.5}$$

T — радиус кручения луча, т. е. величина, определяемая формулой

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{d\sigma} = T^{-1}\boldsymbol{n}^{*}. \tag{2.6}$$

* При таком способе определения радиуса кручения величина T оказывается отрицательной для правовинтовой спирали, что приводит к отличию в знаке от обозначений, традиционных для математической литературы (см. [8, 9]).

Запись уравнения Кравцова в форме (2.1) была предложена в работе [7] автора (см. уравнение (6) работы [7]). В отличие от формулы (6) работы [7], в формулах (2.2), (2.4) существенно использована эрмитовость тензора $\hat{\varepsilon}$ и немного изменены обозначения: величина $i(\nu_{b'n'} - \nu_{n'b'})$, фигурировшая в [7], здесь обозначена через g, а θ' из [7] обозначено здесь через Θ.

В работе [7] указывалось, что угол φ, фигурирующий в (2.4), есть угол поворота осей $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ к $\boldsymbol{n}', \boldsymbol{b}'$:

$$\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{n}\cos\varphi + \boldsymbol{b}\sin\varphi, \quad \boldsymbol{b}' = -\boldsymbol{n}\sin\varphi + \boldsymbol{b}\cos\varphi. \tag{2.7}$$

Таким образом, $d\varphi > 0$ соответствует повороту вектора $\boldsymbol{n}'$ в сторону кратчайшего поворота от $\boldsymbol{n}$ к $\boldsymbol{b}$. С другой стороны, из (2.6) следует, что положительное T соответствует вращению (по отношению к неподвижной системе) векторов $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ в сторону, противоположную (при $d\sigma > 0$) направлению кратчайшего поворота от $\boldsymbol{n}$ к $\boldsymbol{b}$ Следовательно, разность $\frac{d\hat{\varphi}}{d\sigma} = \frac{d\varphi}{d\sigma} - T$, фигурирующая в выражении для g, есть проекция на ось $\boldsymbol{\tau}$ мгновенной угловой скорости осей $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$, взятой по отношению к неподвижной системе (в которой задан тензор $\hat{\varepsilon}$) и отнесенной к единице длины луча. При этом $\frac{d\hat{\varphi}}{d\sigma} > 0$ соответствует повороту осей $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$ в направлении от $\boldsymbol{n}$ к $\boldsymbol{b}$ (при $d\sigma > 0$), т. е. в правовинтовом направлении. В соответствии с введенным обозначением, выражение для g будем в дальнейшем записывать в виде

$$g = 2\,\mathrm{Im}\,\nu_{nb} - 4\varepsilon^{1/2} k^{-1} \frac{d\hat{\varphi}}{d\sigma}. \tag{2.8}$$

Не снижая точности уравнения (2.1) (оно определяет Θ с относительной точностью $|\nu_{ik}|$), луч, элемент длины $d\sigma$ которого фигурирует в (2.1), можно брать из бихарактеристических уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dx^0} = \frac{\partial k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{k}}, \quad \frac{d\boldsymbol{k}}{dx^0} = -\frac{\partial k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad x^0 = ct, \tag{2.9}$$

в которых зависимость $k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k})$ берется из приближенного уравнения эйконала

$$k = \varepsilon^{-1/2} |\boldsymbol{k}|, \tag{2.10}$$

как это и делалось в работе [5].

Величина Θ, фигурирующая в (2.1), имеет простой физический смысл. $\mathrm{Re}\,\Theta$ есть угол между осью $\boldsymbol{n}'$ и большой полуосью поляризационного эллипса, соответствующего электрическому вектору $\boldsymbol{E}$. Положительность $\mathrm{Re}\,\Theta$ означает, что указанная полуось находится на пути кратчайшего поворота от $\boldsymbol{n}'$ к $\boldsymbol{b}'$. $\mathrm{th}\,|\mathrm{Im}\,\Theta|$ есть отношение между малой и большой полуосями поляризационного эллипса*; $\mathrm{Im}\,\Theta > 0$ при правовинтовой поляризации ($\boldsymbol{E}(t)$ вращается от $\boldsymbol{n}'$ к $\boldsymbol{b}'$), и $\mathrm{Im}\,\Theta < 0$ при левовинтовой поляризации; случай $\mathrm{Im}\,\Theta \to \infty$ соответствует чисто круговой поляризации. Указанный способ описания поляризации был предложен в работе [5].

---

* Содержащееся в [7] утверждение, что θ' (здесь Θ) есть угол между вектором $\boldsymbol{E}$ и осью $\boldsymbol{n}'$, относится к линейно поляризованной волне.

Легко видеть, что уравнение (2.1) инвариантно относительно подстановки

$$\Theta' = \pi/2 + \Theta^*, \tag{2.11}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Из этой инвариантности следует, что если какая-либо волна $E = E(x)$ есть решение уравнений Максвелла, то решением является и волна $E'(x)$, отличающаяся от $E(x)$ лишь направлением круговой поляризации и тем, что большая ось поляризационного эллипса волны $E'(x)$ перпендикулярна (при всех x) большой оси поляризационного эллипса волны $E(x)$. А так как, согласно (2.1), начальное значение Θ в какой-либо точке луча однозначно определяет значения Θ в других точках луча, то из инвариантности относительно (2.11) следует, что если вдоль луча распространяются две волны и если в какой-либо точке луча их поляризационные параметры Θ, Θ' связаны соотношением (2.11), то это соотношение для указанных двух волн будет выполняться и во всех остальных точках луча, включая области перехода из анизотропной среды в изотропную. Следовательно, соотношением (2.11) связаны и поляризации «почти нормальных» волн, поскольку у нормальных волн (с которыми «почти нормальные» волны совпадают на определенных участках луча), как известно, направления круговой поляризации противоположны, большие полуоси поляризационных эллипсов перпендикулярны, а отношения между полуосями одинаковы (см. [1], § 82, а также [2], § 11)*.

3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ «ПОЧТИ НОРМАЛЬНЫХ» ВОЛН

В работе [7] были получены исходные уравнения для итерационной процедуры, которая для случая (1.3) дает решения уравнения (2.1), близкие к нормальным волнам:

$$B(y) = e^{-iF}\left[B(y_b) - \frac{1}{2}\int\limits_{y_b}^{y} (1+B^2)\,\frac{d\Theta_1}{dy}\,e^{iF}\,dy\right]; \tag{3.1}$$

$$F = \Phi + f, \quad f = 4\int\limits_{y_b}^{y} \sin\frac{\Theta_2}{2}\,\sin\left(2\Theta_1 + \frac{\Theta_2}{2}\right) dy; \tag{3.2}$$

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2, \quad \Theta_2 = 2\ \mathrm{arctg}\, B. \tag{3.3}$$

Символы Θ_1, Φ, y здесь означают следующее:

$$\Theta_1 = \frac{1}{2}\arcsin(i\alpha) \ \text{либо}\ \Theta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin(i\alpha); \tag{3.4}$$

$$\alpha = g\,(\nu_{b'b'} - \nu_{n'n'})^{-1}, \quad dy = \frac{1}{4}\,k\varepsilon^{-1/2}(\nu_{b'b'} - \nu_{n'n'})\,d\sigma; \tag{3.5}$$

$$\Phi = -\int\limits_{y_b}^{y} 2\cos 2\Theta_1 dy. \tag{3.6}$$

---

* Указанные соотношения между поляризациями нормальных волн справедливы, строго говоря, лишь применительно к векторам индукции D и B (если обе волны имеют одинаковое направление вектора k). Однако с той степенью точности, с которой справедливы уравнения (2.1), указанные соотношения можно перенести и на векторы E и H.

Следует подчеркнуть, что сформулированное выше утверждение о $E(x)$ и $E(x)$ делается лишь в пределах точности «квазиизотропного» приближения.

Фигурирующие в (3.3), (3.4) обратные тригонометрические функции подразумеваются взятыми в виде рядов Маклорена (т. е. $\arcsin z \to 0$, $\operatorname{arctg} z \to 0$ при $z \to 0$).

От уравнений (13), (13 а) работы [7] уравнения (3.1)—(3.3) отличаются лишь обозначениями: символы θ', θ_0, θ_1, $\tilde{\Phi}$, y_0, фигурировавшие в [7], заменены здесь соответственно на Θ, Θ_1, Θ_2, Φ, y_b. Как и величина $\tilde{\Phi}$ в [7], величина Φ здесь с относительной точностью порядка $\max|\nu_{ik}|$ совпадает с разностью $\Phi_т$ точных эйконалов нормальных волн, т. е. с эйконалом пространственных биений между нормальными волнами. С относительной точностью порядка $\max|\nu_{ik}|$ совпадает с $\Phi_т$ также следующая величина:

$$\Phi_0 = -\int\limits_{y_b}^{y} 2\cos\Theta_0\, dy, \tag{3.6a}$$

где y, y_b — те же, что и в (3.6), (3.5), а величины Θ_0 соответствуют нормальным волнам:

$$\Theta_0 = \frac{1}{2}\arcsin(i\alpha_0) \quad \text{либо} \quad \Theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin(i\alpha_0); \tag{3.4a}$$

$$\alpha_0 = 2\,\mathrm{Im}\,\nu_{nb}(\nu_{b'b'} - \nu_{n'n'})^{-1}. \tag{3.5a}$$

Легко видеть, что $\operatorname{sgn}\cos\Theta_0 = \operatorname{sgn}\cos\Theta_1$, следовательно, знаки производных $\frac{d\Phi}{d\sigma}$, $\frac{d\Phi_0}{d\sigma}$ совпадают. При этом $\frac{d\Phi_0}{d\sigma} > 0$ для той из двух волн, определяемых двумя значениями Θ_0 из (3.4 а), фазовая (и, следовательно, групповая) скорость которой меньше, и наоборот. Это нетрудно видеть из (3.5 а), (3.6 а)*. Заметим, что два значения Θ_0, указанные в (3.6), связаны между собой соотношением (2.11).

Начальная точка y_b в (3.1), (3.2), (3.6), а также начальное значение $B(y_b)$ в общем случае могут быть выбраны произвольно. Однако в качестве исходного уравнения для построения итерационной процедуры уравнение (3.1) может быть использовано лишь в том случае, если $|B(y_b)|$ достаточно мало по сравнению с единицей. При должном выборе $B(y_b)$ уравнения (3.1)—(3.3) приводят к «почти нормальным» волнам, определение которых было дано в разд. 1. Для получения уравнений этих волн перепишем (3.1) в виде

$$B(y) = e^{-iF}\left[B(y_b) - \frac{1}{2}\int\limits_{\Phi(y_b)}^{\Phi(y)} \Omega(\Phi)\, e^{i\Phi}\, d\Phi\right], \tag{3.7}$$

где

$$\Omega = (1 + B^2)\, e^{if}\,\frac{d\Theta_1}{d\Phi}. \tag{3.8}$$

Проинтегрируем (3.7) по частям:

$$B(y) = e^{-iF}\left[B(y_b) + \frac{i}{2}\left(e^{i\Phi}\sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{d^n\Omega}{d\Phi^n}\right)\Bigg|_{y_b}^{y}\right]. \tag{3.9}$$

* Здесь учтено также, что в гиротропной среде, как и в негиротропной, при $\nu_{n'n'} \neq \nu_{b'b'}$ большая ось поляризационного эллипса более быстрой из нормальных волн совпадает с осью $n'(b')$, если $\nu_{n'n'} < \nu_{b'b'}$ ($\nu_{n'n'} > \nu_{b'b'}$).

Отсюда для искомых «почти нормальных» волн получаем следующее уравнение:

$$B_{\text{н}}(y) = \frac{i}{2} \exp(-if_{\text{н}}) \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{d^n \Omega_{\text{н}}}{d\Phi^n}, \qquad (3.10)$$

где $\Omega_{\text{н}}$, $f_{\text{н}}$, как и $B_{\text{н}}$, соответствуют «почти нормальным» волнам и составляются из $B_{\text{н}}$ в соответствии с (3.8), (3.2)—(3.6), причем выбор точки y_b в выражении (3.2) для f не существен в (3.10). Подставляя в (3.10), (3.8) в качестве Θ_1 каждое из двух его значений, указанных в (3.4), получаем две «почти нормальных» волны, поляризации которых связаны соотношением (2.11). Таким образом, функции $B_{\text{н}}(y)$, соответствующие «почти нормальным» волнам, могут быть получены из итерационной процедуры, не содержащей в себе уравнения (3.7). Разумеется, функции $B_{\text{н}}(y)$, получающиеся из (3.10), тождественно удовлетворяют уравнению (3.1) (следовательно, и уравнению (2.1)) и формально могут быть получены из уравнения (3.7), если при каком-либо y_b положить $B(y_b) = B_{\text{н}}(y_b)$, предварительно вычислив $B_{\text{н}}(y_b)$ из уравнения (3.10).

Легко видеть, что ряд, стоящий в правой части (3.9) (и, соответственно, в (3.10)), даже в случае выполнения условия (3.1) сходится не при всяком виде функции $\Omega(\Phi)$. Например, при $\Omega(\Phi)$ вида

$$\Omega(\Phi) = \Omega_a (\Phi - \Phi_a)^{-p}, \quad \Omega_a = \text{const}, \quad p = \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ \ldots \qquad (3.11)$$

условие (1.3) выполняется, если $|\Phi - \Phi_a| \gg 1$, но и при этом условии $\dfrac{d^n\Omega(\Phi)}{d\Phi^n}$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. Для таких случаев уравнение (3.7) следует записывать не в виде (3.9), а в виде

$$\begin{gathered} B(y) = e^{-iF}\left[B(y_b) + \frac{i}{2}\left(e^{i\Phi}\sum_{n=0}^{m} i^n \frac{d^n\Omega}{d\Phi^n}\right)\Bigg|_{y_b}^{y}\right] + R_m(y), \\ R_m(y) = -\frac{i^{m+1}}{2}\int_{\Phi(y_b)}^{\Phi(y)} \frac{d^{m+1}\Omega}{d\Phi^{m+1}}\, e^{i\Phi}\, d\Phi. \end{gathered} \qquad (3.7\text{a})$$

Для частного случая, когда $\Omega(\Phi)$ имеет вид (3.8), $y_b \to \infty$, $\operatorname{sgn} y_b = \operatorname{sgn} y$, оценку для R_m нетрудно получить из асимптотических разложений для интегральной экспоненты и интеграла вероятности (см. формулы (8.215), (8.254) из [8]):

$$|R_m(y)| < \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{(y,\, y_b)} \left|\frac{d^{m+1}\Omega}{d\Phi^{m+1}}\right|^{*}. \qquad (3.12)$$

В случае, когда зависимость $\Omega(\Phi)$ имеет более общий вид, чем (3.11):

$$\Omega(\Phi) = \Omega_a (\Phi - \Phi_a)^{\nu} \exp[\mu(\Phi - \Phi_a)], \qquad (3.11\text{a})$$

---

* В формуле (8 254) из [11], очевидно, содержится опечатка: в верхнем пределе суммы вместо ∞ следует поставить $n-1$, подобно тому, как это сделано в (8 215).

где Ω_a, Φ_a, ν, μ — константы, причем $\operatorname{Im}\nu = \operatorname{Im}\mu = 0$, $\operatorname{Re}[\mu(\Phi-\Phi_a)] < 0$, из асимптотики неполной гамма-функции (см. формулу (8.357) из [8]) следует, что для каждого m можно указать такое (достаточно большое) Φ, для которого (и для больших $|\Phi - \Phi_a|$) оценка (3.12) справедлива. Таким образом, можно считать достаточно распространенным (в физических задачах) случай, когда даже при больших m остаточный член R_m в (3.7 а) меньше любого из слагаемых в квадратных скобках:

$$|R_m| < \left|\frac{d^q\Omega}{d\Phi^q}\right| \qquad (q \leqslant m); \tag{3.13}$$

например, если Ω дается формулой (3.11), то условие (3.13) выполняется при $m + p < 2^{-1/2}|\Phi - \Phi_a|$. Это обстоятельство позволяет уравнение (3.10) даже в общем случае, когда ряд в (3.10) расходится, считать хотя и приближенным, но обеспечивающим достаточную для практических целей точность уравнением для «почти нормальной» волны. В этом приближенном уравнении средует оставить члены ряда при $n \leqslant m$, где m определяется уравнением (3.13), а остальные члены ряда отбросить (положить равными нулю).

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ «ПОЧТИ НОРМАЛЬНЫХ» ВОЛН МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

Для того, чтобы решать уравнение (3.10) (точное либо приближенное) относительно Θ_2 либо B методом последовательных приближений, необходимо оценить величины производных $\frac{d^n\Omega}{d\Phi^n}$, фигурирующих в (3.10). Для этой цели перепишем производные $\frac{d\Theta_1}{d\Phi}$ и $\frac{df}{d\Phi}$ в виде

$$\frac{d\Theta_1}{d\Phi} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\Theta_1 \frac{d\ln\alpha}{d\Phi}; \tag{4.1}$$

$$\frac{df}{d\Phi} = -\operatorname{tg} 2\Theta_1 \sin\Theta_2 - 2\sin^2\frac{\Theta_2}{2}, \tag{4.2}$$

в соответствии с (3.4), (3.2). Из (4.1) получаем

$$\left|\frac{d\Theta_1}{d\Phi}\right| \leqslant \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{\Delta l}{l}, \qquad \frac{d^n\Theta}{d\Phi^n} \leqslant \frac{\Delta l}{l}\left|\frac{d^{n-1}\Theta_1}{d\Phi^{n-1}}\right| \qquad (n \geqslant 1), \tag{4.3}$$

где l означает характерный масштаб неоднородности среды, т. е. величину, участвующую в оценке

$$\left|\frac{d^n\alpha}{d\sigma^n}\right| \leqslant l^{-1}\left|\frac{d^{n-1}\alpha}{d\sigma^{n-1}}\right|, \qquad \left|\frac{d^n\hat{\varphi}}{d\sigma^n}\right| \leqslant l^{-1}\left|\frac{d^{n-1}\hat{\varphi}}{d\sigma^{n-1}}\right| \qquad (n \geqslant 1), \tag{4.4}$$

если $\alpha \neq 0$. Если $\alpha \equiv 0$, то символ l теряет смысл, но зато $\Theta_{2н} = B_н = \Theta_н \equiv 0$. Здесь по-прежнему индекс «н» означает, что соответсвтующая величина Θ_2, Θ относится к «почти нормальной» волне. Номера n производных в (4.3) и (4.4) и в дальнейших формулах предполагаются ограниченными сверху (например, числом m из (3.13)), если определяемая формулой (4.4) величина l стремится к нулю при $n \to \infty$ (это имеет место, например, если $\alpha = \mathrm{const}\,\sigma^{-p}$, $p > 0$). Будем считать, что во всех случаях n в (4.3), (4.4) не на много порядков превышает единицу, т. е. $n \leqslant 10 \div 10^3$.

Будем искать для уравнений (3.10) такие решения, которые удовлетворяют оценкам

$$|B_{\text{н}}| \ll 1, \quad \left|\frac{d^n B_{\text{н}}}{d\Phi^n}\right| \leqslant \frac{\Delta l}{l}\left|\frac{d^{n-1} B_{\text{н}}}{d\Phi^{n-1}}\right| \qquad (n \geqslant 1), \tag{4.5}$$

где l — то же, что и в (4.4). Из (4.2) и (3.3) легко видеть, что для решений $B_{\text{н}}(y)$, удовлетворяющих (4.5), оценка, аналогичная (4.5), должна выполняться для производной $\dfrac{df_{\text{н}}}{d\Phi}$ и, следовательно (согласно (3.8), (4.3)), для $\Omega_{\text{н}}$:

$$\begin{gathered} \left|\frac{df_{\text{н}}}{d\Phi}\right| \approx \frac{2|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,|B|, \quad \left|\frac{d^n f_{\text{н}}}{d\Phi^n}\right| \leqslant \left|\frac{d^{n-1} f_{\text{н}}}{d\Phi^{n-1}}\right| \frac{\Delta l}{l}, \\ |\Omega_{\text{н}}| \leqslant \frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\frac{\Delta l}{l}, \quad \left|\frac{d^n \Omega}{d\Phi^{н}}\right| \leqslant \frac{\Delta l}{l}\left|\frac{d^{n-1}\Omega_{\text{н}}}{d\Phi^{n-1}}\right| \quad (n \geqslant 1). \end{gathered} \tag{4.6}$$

Решая уравнения (3.10) методом последовательных приближений с использованием оценок (4.5), (4.6) и условия (1.3), получаем

$$\begin{gathered} \Theta_{\text{н}} = \Theta_1 + i\,\frac{d\Theta_1}{d\Phi} - \left[\frac{d^2\Theta_1}{d\Phi^2} + \left(\frac{d\Theta_1}{d\Phi}\right)^2 \operatorname{tg} 2\Theta_1\right] - i\left[\frac{d^3\Theta_1}{d\Phi^3} + \right. \\ \left. + 4\,\frac{d^2\Theta_1}{d\Phi^2}\frac{d\Theta_1}{d\Phi}\operatorname{tg} 2\Theta_1 + \left(\frac{d\Theta_1}{d\Phi}\right)^3\left(4\operatorname{tg}^2 2\Theta_1 + \frac{8}{3}\right)\right] + O\left[\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^4\right]. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Символ вида $O(\xi)$ здесь и в дальнейшем означает величину, по порядку величины не большую, чем $|\xi|$. В качестве Θ_1 в (4.7) можно подставить любое из двух значений из (3.4), причем Φ должно соответствовать Θ_1 согласно (3.6). Два получающихся при этом выражения для $\Theta_{\text{н}}$ связаны между собой подстановкой (2.11), в чем легко убедиться, исходя непосредственно из (4.7).

Решение (4.7) справедливо, разумеется, и при $\alpha \equiv 0$, хотя определение (4.4) в этом случае теряет смысл. Из (2.1) легко видеть, что при $\alpha \equiv 0$ «почти нормальная» волна совпадает с нормальной, а сам случай $\alpha \equiv 0$ соответствует однородной среде без гирации либо одномерной задаче в неоднородной среде без гирации. Противоположный случай $\alpha \to \infty$ соответствует чисто гиротропной (вообще говоря, неоднородной) среде. В этом случае определение (4.4) для l также теряет смысл, как и правая часть (4.7). Однако здесь ($\nu_{b'b'} - \nu_{n'n'}$) простое решение может быть получено и непосредственно из (2.1):

$$\Theta = \Theta(\sigma_b) + \frac{1}{4}\,k\int_{\sigma_b}^{\sigma} \varepsilon^{-1/2} g\,d\sigma^{*}. \tag{4.8}$$

«Почти нормальная» волна соответствует случаю $\operatorname{Im}\Theta(\sigma_b) \to \infty$. Легко видеть, что здесь, как и при $\alpha \equiv 0$, «почти нормальная» волна совпадает с нормальной.

5. ПОПРАВКИ К ПОЛЯРИЗАЦИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН

Рассмотрим определяемые формулой (4.7) поправки, различающие поляризацию нормальной и «почти нормальной» (т. е. реальной) волн

* Решение такого типа было указано в работе [5].

в случае, когда $g \neq 0$ и $\nu_{b'b'} - \nu_{n'n'} \neq 0$, т. е., когда указанные поправки не обращаются тождественно в нуль. Для этой цели вычислим прежде всего разность между величинами α и α_0, вводимыми формулами (3.5), (3.5 а); согласно (3.5), (3.5 а), (2.8), получаем

$$\alpha = \alpha_0 - 4\varepsilon^{1/2} k^{-1} (\nu_{b'b'} - \nu_{n'n'})^{-1} \frac{d\hat{\varphi}}{d\sigma},$$

или, учитывая (3.6 а), (3.5), (3.4), (3.4 а):

$$\alpha = \alpha_0 + 2\cos 2\Theta_0 \frac{d\hat{\varphi}}{d\Phi_0}, \quad \Theta_1 = \Theta_0 + i\frac{d\hat{\varphi}}{d\Phi_0} + O\left[\left(\frac{d\hat{\varphi}}{d\Phi_0}\right)^2\right]. \tag{5.1}$$

Из (4.7) и (5.1) получаем

$$\operatorname{Im}\Theta_{н} = \operatorname{Im}\Theta_0 + \frac{d\hat{\varphi}}{d\Phi_0} + O\left[\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2\right], \tag{5.2}$$

где α_0, Θ_0, Φ_0 те же, что и в (3.4 а)—(3.6 а). В разд. 3 указывалось, что $\frac{d\Phi_0}{d\sigma} > 0$ в более медленной волне, и $\frac{d\Phi_0}{d\sigma} < 0$ в более быстрой волне. Таким образом, в первом неисчезающем приближении неоднородность среды действует на круговую поляризацию волны таким образом, что в более медленной волне появляется добавка к круговой поляризации, стремящаяся вращать вектор $\boldsymbol{E}(t)$ в том же направлении, в каком вращаются оси $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$ по отношению к неподвижной системе*. В более быстрой волне добавка к $\operatorname{Im}\Theta_0$, происходящая от неоднородности, имеет ту же величину, что и в более медленной волне, но противоположный знак, так что форма поляризационных эллипсов обеих «почти нормальных» волн остается одинаковой.

Пусть p означает величину положительную (отрицательную) в случае правовинтовой (левовинтовой) поляризации, по модулю равную отношению между малой и большой полуосями поляризационного эллипса ($|p| \leqslant 1$). Тогда в этом обозначении уравнение (5.1) перепишется в виде

$$\frac{p}{p_0} = 1 + (1 - p_0^2)\, p_0^{-1}\, d\hat{\varphi} + O\left[\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 p_0^{-1}\right] \quad (p_0 = \operatorname{th}\operatorname{Im}\Theta_0). \tag{5.2a}$$

Из этой формулы, как и из (5.1), следует, что если неоднородность среды достаточно мала:

$$\left|\frac{d\hat{\varphi}}{d\Phi_0}\right| < |\operatorname{Im}\Theta_0| = \operatorname{arth}|p_0|,$$

то неоднородность среды делает поляризационные эллипсы обеих волн более близкими к окружностям (к прямым), если направление вращения вектора $\boldsymbol{E}(t)$ в более медленной (более быстрой) волне совпадает с на-

---

* Этот результат, при учете формул (4.8), (2.2), согласуется с тем обстоятельством, что (как нетрудно получить из формул (82.11), (82.12), (82.5) книги [1]) направление вращения вектора $\boldsymbol{E}(t)$ внутри поляризационного эллипса в более быстрой из нормальных волн совпадает с тем направлением, в котором вектор $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ линейно поляризованной волны вращается под действием гиротропной части тензора $\hat{\varepsilon}$.

правлением вращения осей $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$ по отношению к неподвижной системе.

В случае одномерной задачи для негиротропной среды с равномерно вращающимися осями $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{b}'$ полученные выше результаты могут быть выведены из точных формул, полученных для указанного случая Гинзбургом [11]. В частности, формула (5.2а) при $p_0 \to 0$ может быть выведена из формулы (21) работы [11].

Вычислим теперь сдвиг осей поляризационных эллипсов «почти нормальных» волн по отношению к соответствующим осям в нормальных волнах. Из (4.7), (5.1) находим

$$\operatorname{Re}\Theta_{\text{н}} = \operatorname{Re}\Theta_0 - \operatorname{Im}\frac{d\Theta_0}{d\Phi_0}\left[1 - \frac{2p_0}{1-p_0^2}\frac{d\hat{\varphi}}{d\Phi_0}\right] - \frac{d^2\hat{\varphi}}{d\Phi_0^2} + O\left[\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^3\right]. \tag{5.3}$$

Это уравнение имеет простой физический смысл. В разд. 2 указывалось, что возрастание $\operatorname{Im}\Theta_0$ соответствует увеличению правовинтовой (либо уменьшению левовинтовой) поляризации в той «почти нормальной» волне, которой соответствует Θ_0. Следовательно, второе слагаемое в правой части (5.3) означает, что если неоднородность среды приводит к возрастанию правовинтовой (левовинтовой) поляризации в более быстрой волне, то она приводит и к правовинтовому (левовинтовому) сдвигу, т. е. к сдвигу в кратчайшем направлении от $\boldsymbol{n}'$ к $\boldsymbol{b}'$ (от $\boldsymbol{b}'$ к $\boldsymbol{n}'$), осей поляризационных эллипсов «почти нормальных» волн по отношению к соответствующим осям в нормальных волнах.

Если среда негиротропная, т. е. $\alpha_0 \equiv 0$, то в силу (4.7), (5.1) уравнение (5.3) перепишется в виде

$$\operatorname{Re}\Theta_{\text{н}} = \operatorname{Re}\Theta_0 - \frac{d^2\hat{\varphi}}{d\Phi_0^2} + O\left[\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^4\right].$$

Это уравнение означает, что если среда негиротропна, то в обеих «почти нормальных» волнах поворот поляризационных эллипсов нормальных волн (из-за неоднородности среды) при движении вдоль луча приводит к отклонению осей поляризационных эллипсов «почти нормальных» волн от соответствующих осей нормальных волн в сторону, противоположную направлению ускорения (углового) осей нормальных волн, причем ускорение берется по отношению к неподвижной системе и отсчитывается по отношению к эйконалу Φ_0 пространственных биений нормальных волн. Иными словами, оси «почти нормальных» волн как бы обладают инерционностью по отношению к осям нормальных волн.

6. ФОРМУЛЫ ПЕРЕХОДА К НЕПОДВИЖНОЙ КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЕ

В реальных задачах заданными величинами следует считать компоненты тензора $\hat{\varepsilon}$, взятые по отношению к какой-либо фиксированной системе отсчета, и волновой вектор $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}_b)$ в некоторой заданной точке пространства. Через эти величины необходимо выразить, для любой точки $\boldsymbol{r}$ луча, компоненты ν_{nn}, ν_{bb}, ν_{nb} и производные $\frac{d^m\nu_{nn}}{d\sigma^m}, \ldots, \frac{d^m\nu_{nb}}{d\sigma^m}$, через которые по формулам разд. 3, 4 с любой степенью точности (в пределах сходимости ряда (3.10)) могут быть выражены искомые величины Θ. Кроме того, необходимо в достаточно явной форме выразить положение поляризационных осей нормальных и «почти нормальных» волн, исходя из $\hat{\varepsilon}(\boldsymbol{r})$ и начального условия $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}_b)$.

Пусть на каком-либо отрезке луча одна из компонент вектора $\boldsymbol{\tau}$ не обращается в нуль; обозначим эту компоненту через τ_3. Тогда, подставляя (2.10) в (2.9), в пределах указанного отрезка оси x^3 нетрудно получить следующее уравнение для $\boldsymbol{\tau}$:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dx^3} = \tau_3^{-1}\left[\nabla U - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau}\nabla U)\right] \qquad (U = \ln\sqrt{\varepsilon}). \tag{6.1}$$

Уравнение (6.1), при учете, что $\tau_3 = \sqrt{1-\tau_1^2-\tau_2^2}$, представляет собой систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных τ_1, τ_2. Уравнение луча получается из формулы

$$\boldsymbol{r}(x^3) = \boldsymbol{r}(x_b^3) + \int\limits_{x_b^3}^{x^3} \tau_3^{-1}\boldsymbol{\tau}\, dx^3, \tag{6.2}$$

которая непосредственно вытекает из (2.9), (2.10); x_b^3 — произвольная начальная точка.

Для векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ из (2.9), (2.10) нетрудно получить выражения

$$\boldsymbol{b} = R[\boldsymbol{\tau}, \nabla U], \quad \boldsymbol{n} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\tau}], \quad R = |\nabla U - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau}\nabla U)|^{-1}, \tag{6.3}$$

т. е. R есть радиус кривизны траектории (см. (6.1)).

Для T^{-1} получаем из (2.9), (2.10), (6.3) выражение

$$T^{-1} = -Rb_i\tau_j U_{,ij}. \tag{6.4}$$

Здесь и в дальнейших формулах по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Запятая с последующим индексом означает дифференцирование по соответствующей координате.

Для первых производных по σ от $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$ из (6.3) получаем

$$\boldsymbol{\tau}_{,\sigma} = R^{-1}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n}_{,\sigma} = -R^{-1}\boldsymbol{\tau} - T^{-1}\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b}_{,\sigma} = T^{-1}\boldsymbol{n}^*. \tag{6.5}$$

Для $R_{,\sigma}$, $T_{,\sigma}$ из (6.3)—(6.5) получаем

$$\begin{cases} (R^{-1})_{,\sigma} = -R^{-1}\boldsymbol{\tau}\nabla U + n_i\tau_j U_{,ij} \\ (T^{-1})_{,\sigma} = -(R^{-1})_{,\sigma}RT^{-1} - (RT^{-1}\tau_i + b_i)n_j U_{,ij} - Rb_i\tau_j\tau_k U_{,ijk} \end{cases}. \tag{6.6}$$

Последовательно комбинируя формулы (6.3)—(6.6), можно получить выражения, не содержащие производных по σ, для производных (по σ) любого порядка от $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, R, T. В частности:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_{,\sigma\sigma} = -R^{-2}\boldsymbol{\tau} + (R^{-1})_{,\sigma}\boldsymbol{n} - R^{-1}T^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{n}_{,\sigma\sigma} = -(R^{-1})_{,\sigma}\boldsymbol{\tau} - (T^{-2}+R^{-2})\boldsymbol{n} - (T^{-1})_{,\sigma}\boldsymbol{b}\,. \\ \boldsymbol{b}_{,\sigma\sigma} = -R^{-1}T^{-1}\boldsymbol{\tau} + (T^{-1})_{,\sigma}\boldsymbol{n} - T^{-2}\boldsymbol{b} \end{cases} \tag{6.7}$$

Таким образом, для производных по σ от компонент ν_{nn}, ν_{nb}, ν_{bb} получаем

$$\nu_{nn,\sigma} = 2\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{n}_{,\sigma}\hat{\nu}\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{n}\hat{\nu}_{,\sigma}\boldsymbol{n},$$

* Формулы (6.5) представляют собой хорошо известные формулы Серре—Френе (см. [8, 9]), выписанные с учетом выбранного здесь определения для T. В справочнике [8] вторая из этих формул приведена с ошибкой в знаке правой части (ср., например, с формулами из [9]).

$$\nu_{bb,\sigma} = 2\,\mathrm{Re}\,(b_{,\sigma}\hat{\nu}\,b) + b\,\hat{\nu}_{,\sigma}\,b,$$

$$\nu_{nb,\sigma} = n_{,\sigma}\hat{\nu}\,b + n\,\hat{\nu}\,b_{,\sigma} + n\,\hat{\nu}_{,\sigma}\,b,$$

$$\nu_{nn,\sigma\sigma} = 2\,\mathrm{Re}\,(n_{,\sigma\sigma}\hat{\nu}\,n) + 2\,n_{,\sigma}\hat{\nu}\,n_{,\sigma} + 4\,\mathrm{Re}\,(n_{,\sigma}\hat{\nu}_{,\sigma}\,n) + n\,\hat{\nu}_{,\sigma\sigma}\,n,$$

$$\nu_{bb,\sigma\sigma} = 2\,\mathrm{Re}\,(b_{,\sigma\sigma}\hat{\nu}\,b) + 2b_{,\sigma}\hat{\nu}\,b_{,\sigma} + 4\,\mathrm{Re}\,(b_{,\sigma}\hat{\nu}_{,\sigma}\,b) + b\,\hat{\nu}_{,\sigma\sigma}\,b,$$

$$\nu_{nb,\sigma\sigma} = n_{,\sigma\sigma}\hat{\nu}\,b + 2\,\mathrm{Re}\,(n_{,\sigma}\hat{\nu}\,b_{,\sigma}) + n\,\hat{\nu}\,b_{,\sigma\sigma} + 2n_{,\sigma}\hat{\nu}_{,\sigma}\,b + {}$$
$$+ 2n\,\hat{\nu}_{,\sigma}\,b_{,\sigma} + n\,\hat{\nu}_{,\sigma\sigma}\,b,$$

где $\hat{\nu}_{,\sigma}$, $\hat{\nu}_{,\sigma\sigma}$ берутся из формул

$$\hat{\nu}_{,\sigma} = (\tau\,\nabla)\,\hat{\nu}, \quad \hat{\nu}_{,\sigma\sigma} = (\tau_{,\sigma}\,\nabla)\,\hat{\nu} + \tau_i\tau_j\,\hat{\nu}_{,ij}$$

и производные по σ от τ, n, b берутся из формул (6.5), (6.7).

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить участников семинара В. П. Быкова, а также Ю. А. Кравцова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
3. H. G. Booker, Proc. Roy. Soc., **155**, 235 (1936).
4. K. G. Budden, Proc. Roy. Soc., **215**, 215 (1952).
5. Ю. А. Кравцов, Докл АН СССР, **183**, 74 (1968).
6. И. Кертес, Е. А Кононков, П Г. Крюков, Ю. В. Сенатский, С. В. Чекалин, ЖЭТФ, **59**, 1115 (1970).
7. О. Н. Найда, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **13**, № 10, 1496 (1970).
8. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, Справочник по математике, Физматгиз, М., 1962, стр. 256.
9. П. К. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, М.—Л., 1950, стр. 178; М. Я. Выгодский, Дифференциальная геометрия, Гостехиздат, М.—Л., 1949, стр 160; А. П. Норден, Краткий курс дифференциальной геометрии, Физматгиз, М., 1958, стр. 67.
10. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений, Физматгиз, М., 1962.
11. В. Л. Гинзбург, ЖТФ, **14**, 181 (1944).

Поступила в редакцию
11 января 1971 г.

ON CORRECTIONS TO NORMAL WAVE POLARIZATION

O. N. Naida

Electromagnetic waves falling from a homogeneous anisotropic medium into an inhomogeneous, generally speaking, anisotropic medium have been considered in the frames of the quasi-isotropic approximation, i. e. at $\left|\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}\,\mathrm{Sp}\,\hat{\varepsilon}\right| \ll 1$. It is shown that if two waves propagating along one and the same beam have large axes of polarization ellipses perpendicular, the ratios of small and large semi-axes are the same and senses of rotation of circular polarization are opposite, all the relations mentioned

between two wave polarizations are also remained on the beam parts traversing the medium inhomogeneities (and when passing from the anisotropic medium into the isotropic one).

The iteration equations have been obtained for the polarization parameters when a primary wave is normal for the beam parts where the medium is weakly inhomogeneous, i. e. the period of the spatial beats of normal waves Δl is much less than the medium inhomogeneity scale l. These equations have been solved for the first three orders over $\Delta l/l$. It is shown that in the first order over $\Delta l/l$ the medium inhomogeneity changes the degree of the circular wave polarization (as compared with the normal wave). For the gyrotropic medium, the inhomogeneity in the first order over $\Delta l/l$ leads also to the shift of the polarization ellipse axes with respect to the position of the normal wave polarization axes. For the nongyrotropic medium the shift of these axes occurs only in the second orderover $\Delta l/l$. In this case the polarization ellipse axes deviate from the normal wave axes towards the side opposite to the direction of angular acceleration (when moving along the beam) of the normal wave axes. Thus the axes of polarization ellipses are inertial with respect ot those of normal waves.