

УДК 538.56

**К АНАЛИЗУ УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА ПО ОГИБАЮЩЕЙ***Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд*

Обсуждаются возможности предварительного анализа динамической структуры нерегулируемого объекта по наблюдению его узкополосного сигнала. Рассматривается схема оценки степени возбуждения генератора.

**1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ**

Естествен интерес астрофизиков к каждому вновь зарегистрированному виду квазимонохроматического излучения. Оно формируется в областях сравнительно малых размеров, кроме того с увеличением монохроматичности ослабевают искажения помехами на пути от источника и шумами в приемной аппаратуре. Это позволяет наблюдать далекие локальные объекты.

В то же время ясно, что «чрезмерная» узкополосность имеет и негативную сторону: монохроматический сигнал содержит лишь минимальную информацию о свойствах источника. Поэтому обсуждение возможностей анализа квазимонохроматического сигнала может принести пользу при планировании соответствующих наблюдений и разработке аппаратуры.

В работе [1] имелась в виду возникшая несколько лет назад задача предварительного анализа узкополосного излучения межзвездного радикала ОН. Кратко остановимся здесь на некоторых общих вопросах, возникающих в такой задаче. Речь будет идти о несложной (не требующей большой оперативной памяти вычислительной машины) методике обработки сигнала, позволяющей отличить генератор от пассивного селективного объекта, и, если исследуемый объект — автогенератор, оценить степень его возбуждения. Ограничимся при этом оценками, проводимыми по одномерному распределению интенсивности сигнала.

При анализе условий формирования сигнала будут рассмотрены случаи: 1) когда известна плотность распределения интенсивности сигнала, 2) когда измеряется лишь коэффициент изменчивости интенсивности, 3) когда получены три момента интенсивности и известен общий вид нелинейности, 4) когда нелинейность кубична (системы Рэля и Ван дер Поля).

Оцениваются ошибки, возникающие при измерениях интенсивности сигнала. Обсуждается точность определения коэффициента изменчивости интенсивности, необходимого в данной методике оценки режима генератора. Проведен учет регулярных и шумовых искажений сигнала в приемнике. Результаты иллюстрируются анализом ситуации, возникающей при исследовании квазимонохроматического излучения межзвездного гидроксила.

**2. РЕЖИМ ФОРМИРОВАНИЯ СИГНАЛА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОГИБАЮЩЕЙ**

Простейшее описание источника квазимонохроматического излучения получается, если наблюдаемый флуктуирующий сигнал можно представить в виде отклика  $x(t)$  автономной селективной динамической сис-

темы на флуктуационную силу, интервал корреляции которой мал по сравнению с периодом и со временем установления колебаний. В этом случае напишем

$$d\dot{x}(t) + 2a_0 S(x(t), \dot{x}(t)) dx(t) + (\omega_0)^2 x(t) dt = dF(t), \quad (1)$$

где  $F(t)$  — винеровский процесс, т. е.

$$\langle dF(t) \rangle \equiv 0, \quad \langle [dF(t)]^2 \rangle \equiv Cdt,$$

а безразмерная функция  $S(x, \dot{x})$  нормирована так, что параметр  $a_0$  равен полуширине частотной полосы сигнала ( $2a_0 = \Delta\omega$ ). При такой нормировке среднее значение  $S(x, \dot{x})$  близко к единице. Отношение же параметров  $\Delta\omega/\omega_0$  предполагается достаточно малым, т. е.  $\mu \equiv |a_0|/\omega_0 \ll 1$ .

Будем считать также, что функция

$$B(A) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(A \cos \varepsilon, -A \sin \varepsilon) \sin^2 \varepsilon d\varepsilon, \quad (2)$$

определяющая (в первом приближении по  $\mu$ ) поведение огибающей, непрерывна и при достаточно больших значениях  $A$  неотрицательна. Тогда параметр, оценивающий нелинейность, имеет порядок малости не ниже  $\mu$ . Связанный с ним параметр малости флуктуаций  $\mu = [C^{1/2}/(\omega_0)^2] (1/2 \sigma(x))$  ( $\sigma(x)$  — стандарт флуктуаций) для селективных пассивных систем, а также, как правило, и для узкополосных генераторов практически совпадает с  $\mu$ . Поэтому при анализе одномерных распределений сигнала следует пользоваться схемой Берштейна [2] с флуктуационной силой первого порядка малости относительно  $\mu$ . В первом приближении решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \gamma(t)], \quad \dot{x}(t) = -A(t) \sin [\omega_0 t + \gamma(t)],$$

где огибающая  $A(t) > 0$ , а уходы фазы  $\gamma(t)$  имеют нулевое математическое ожидание, причем текущая фаза

$$\varepsilon(t) \equiv [\omega_0 t + \gamma(t)] \pmod{2\pi},$$

приведенная к интервалу  $(0, 2\pi)$ , не зависима от  $A$ . Используя уравнение Фоккера — Планка в стационарном случае [3], получим в первом приближении по  $\mu$  плотности распределения для огибающей  $A$  и интенсивности  $J \equiv A^2$ :

$$\rho_A = \frac{A \exp \left[ -4 \frac{(\omega_0)^2 a_0}{C} \int_0^A \xi B(\xi) d\xi \right]}{\int_0^\infty \eta \exp \left[ -4 \frac{(\omega_0)^2 a_0}{C} \int_0^\eta \xi B(\xi) d\xi \right] d\eta},$$

$$\rho_J = \frac{\exp \left[ -4 \frac{(\omega_0)^2 a_0}{C} \int_0^{\sqrt{J}} \xi B(\xi) d\xi \right]}{\int_0^\infty \exp \left[ -4 \frac{(\omega_0)^2 a_0}{C} \int_0^{\sqrt{\eta}} \xi B(\xi) d\xi \right] d\eta}.$$

Отсюда видно, что основная в этой задаче характеристика  $B(A)$  динамической системы связана с оцениваемой из наблюдений плотностью  $\rho_J$  простой формулой

$$\frac{B(A)}{C} = \frac{1}{2a_0(\omega_0)^2} \left. \frac{d \ln \rho_J}{dJ} \right|_{J=A} \quad (3)$$

Если коэффициент изменчивости  $v_0 \equiv \sigma J / \langle J \rangle$  мал, то из условия нормировки  $S(x, x)$  следует:

$$\langle B(A) \rangle \approx B(\langle A \rangle) \approx -1/2,$$

при этом

$$C = \frac{1}{4a_0(\omega_0)^2 \rho_J(0)}. \quad (4)$$

В общем случае значение  $C$  можно оценивать численным методом, например, перебирая значения  $C$  (а следовательно, и  $B(A)$ , согласно (3)), определять методом Монте—Карло интервал корреляции. Для случайного процесса  $J(t)$ , подчиняющегося уравнению

$$\frac{dJ}{dt} = -4a_0 \hat{B}(\sqrt{J}) J + \sqrt{J} F_1, \quad \langle F_1(t) F_1(t+\tau) \rangle = C_1 \delta(t), \quad \langle F_1(t) \rangle \equiv 0,$$

нормировка функции  $\hat{B}(A)$ , при которой интервал корреляции  $J(t)$  равен  $2a_0$ , соответствует искомой величине  $C$ .

Таким образом, по одномерной функции распределения с относительной точностью  $\mu$  можно оценить  $\omega_0, a_0, C$  и  $B(A)$ .

Переход ко второму по  $\mu$  приближению сопряжен в обратной задаче теории колебаний [4] с увеличением времени наблюдения по крайней мере в  $1/\mu$  раз и уже поэтому не всегда практически осуществим. Так, если для анализа узкополосного сигнала межзвездного гидроксила в первом приближении по  $\mu$  достаточно времени наблюдения порядка секунды, то для второго приближения потребовалась бы регистрация сигнала в течение тысячелетия.

Условия формирования сигнала грубой системы\* вида (1) отражаются числом  $\Pi$  невырожденных корней  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_\Pi$  уравнения

$$B(A)=0. \text{ Полагая } J_k \equiv (A_k)^2, \text{ имеем } \Pi=0, \frac{d\rho_J}{dJ} \leq 0 \text{ — пассивная система; } \Pi=1,$$

$$\frac{d\rho_J}{dJ} (J < J_1), \frac{d\rho_J}{dJ} (J > J_1) < 0, J_1 > 0 \text{ — генератор с одним устойчивым}$$

$$\text{предельным циклом; } \Pi > 1, \frac{d\rho_J}{dJ} (J_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \Pi) \text{ — сложный}$$

генератор с устойчивыми и неустойчивыми предельными циклами.

В некоторых случаях можно ограничиться менее подробной информацией — не выявлять деталей распределения  $\rho_J$ , а используя два первых момента  $J$ , оценить коэффициент изменчивости:

$$v_0 \equiv (\langle J^2 \rangle / \langle J \rangle^2 - 1)^{1/2}.$$

Как показано в Приложении, из  $\Pi = 0$  следует

$$v_0 > v_{кр} = \sqrt{1/3} \approx 0,58. \quad (5)$$

\* В рамках поставленной здесь задачи неразумно обсуждать вырожденные случаи (в частности — касание оси), характеризующие негрубые колебательные системы.

Условие (5) необходимо для  $\Pi = 0$ , а значит  $v_0 \leq v_{кр}$  — достаточно для  $\Pi \neq 0$ . Исходя из этого, в предварительном анализе можно различать два класса систем:  $v_0 \geq v_{кр}$  — пассивные системы и слабо возбужденные генераторы,  $v_0 < v_{кр}$  — генераторы в режиме сильного возбуждения.

Если априорная информация позволяет сузить класс динамических характеристик наблюдаемого объекта, то, исходя из первых трех моментов интенсивности  $J$ , можно получить существенно более подробное описание. В качестве примера остановимся на нелинейности в виде дву-члена

$$S(x, \dot{x}) \equiv \frac{1}{a_0} \left( a + \frac{b}{2} x^l \dot{x}^{m-1} \right), \quad (6)$$

в котором  $l$  — четное, а  $m$  — нечетное числа. В этом случае стационарная плотность распределения интенсивности равна

$$\rho_J = \frac{\exp \left[ -\frac{2J}{g(L-1)} + \frac{L+1}{L-1} \lambda^{1-L} \left( \frac{J}{g} \right)^{(L+1)/2} \right]}{\int_0^\infty \exp \left\{ -\left[ \frac{2\xi}{g(L-1)} + \frac{L+1}{L-1} \lambda^{1-L} \left( \frac{\xi}{g} \right)^{(L+1)/2} \right] \right\} d\xi}, \quad (7)$$

где

$$g \equiv \frac{C}{a(L-1)(\omega_0)^2}, \quad L \equiv l + m,$$

а безразмерный параметр

$$\lambda_{l,m} \equiv \sqrt{\frac{2}{|g|}} \operatorname{sgn}(a) \left[ \frac{2 \left( \frac{L+1}{2} \right)!}{m!! (l-1)!!} \right]^{1/(L-1)} \frac{|a|^{1/(L-1)}}{b(\omega_0)^{m-1}}$$

характеризует режим формирования сигнала. Аналогично обсуждавшему выше получим:  $\lambda = \infty$ ,  $b = a$ ,  $a = a_0$  — линейная система ( $\Pi = 0$ );  $0 \leq \lambda < \infty$ ,  $b > 0$ ,  $a \geq 0$  — нелинейная пассивная система ( $\Pi = 0$ );  $\lambda = 0$ ,  $a = 0$  — порог самовозбуждения ( $\Pi = 0$ );  $\lambda < 0$ ,  $b > 0$ ,  $a < 0$  — автогенератор с отрицательным декрементом затухания ( $\Pi = 1$ ).

Из формулы (7) видно, что в рассматриваемом примере (6) одномерное распределение интенсивности стационарного сигнала в принципе может быть найдено по трем первым моментам  $J$ , это распределение позволяет оценить общую степень  $L$  нелинейности, формирующей ограничение амплитуды колебаний. Выражение (7) свидетельствует также о том, что в первом приближении по  $\mu$  в примере (6) нельзя выявить отдельно показатель степени  $l$  (или  $m$ ).

Остановимся на самом простом примере (6), когда общая степень минимальна:  $L = 3$ . В обоих возможных вариантах — генераторы типа Рэлея ( $l = 0$ ,  $m = 3$ ) и Ван дер Поля ( $l = 2$ ,  $m = 1$ ) — одномерная плотность распределения интенсивности имеет вид

$$\rho_J = \frac{\exp \left[ - (1/2) (J/g\lambda + \lambda)^2 \right]}{\sqrt{2\pi} g\lambda [1 - \Phi(\lambda)]},$$

где

$$\Phi(\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} \exp \left( -\frac{\eta^2}{2} \right) d\eta, \quad g = \frac{C}{2a\omega_0}, \quad (8)$$

$$\lambda_{0,3} = \frac{4\sqrt{2}a}{\sqrt{3bC}}, \quad \lambda_{2,1} = \frac{4\sqrt{2}a\omega_0}{\sqrt{bC}}.$$

Из (8) следует

$$\langle J \rangle = g\theta_1(J), \quad v_0(\lambda) = \frac{1}{\theta_1(\lambda)} \sqrt{[1 - \theta_1(\lambda)]^2 - [\theta_1(\lambda)]^2}, \quad (9)$$

$$\theta_1(\lambda) = \frac{\lambda}{M(\lambda)} - \lambda^2,$$

$M(\xi) \equiv \exp(\xi^2/2) \int_{\xi}^{\infty} \exp(-\eta^2/2) d\eta$  — отношение Миллса (затабулировано в [5]). Определив из наблюдений  $\langle J \rangle$  и  $v_0$ , нетрудно получить с помощью формул (4), (8), (9) значения параметров  $a$ ,  $b$  и  $C$  в каждом из вариантов. Величина коэффициента изменчивости отражает режим формирования сигнала. Зависимость  $v_0(\lambda)$  представлена на рис. 1.

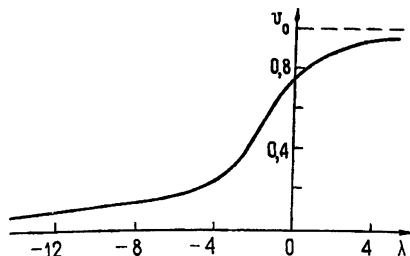


Рис. 1.

При  $\lambda = 0$  имеем  $v_0 = \sqrt{\pi/2} - 1$ , т. е. в этом случае необходимым и достаточным условием для  $\Pi = 0$  является

$$v_0 \geq v_{\text{кр1}} \equiv \sqrt{\pi/2} - 1 \approx 0,76 \quad (v_{\text{кр1}} > v_{\text{кр}} = 1/\sqrt{3}). \quad (10)$$

### 3. ОЦЕНКА ВЕЛИЧИН $v_0$ И $L$

В ходе наблюдений непосредственно принимается сигнал  $x(t) = A(t) \cos \varepsilon(t)$ . В силу его узкополосности имеем  $[\widetilde{x(t)}]^{2S} = \widetilde{J(t)^S (\cos \varepsilon)^{2S}}$  и с относительной точностью  $1/\omega_0 S$

$$\widetilde{J(t)^S} = 2 [\widetilde{x(t)}]^{2S},$$

где  $\widetilde{u(t)^S}$  означает скользящее усреднение по времени функции  $u(t)$  с интервалом усреднения  $S$ . Выделение квадрата огибающей  $A^2 \equiv J$  можно проводить, например, с помощью квадратичного детектирования. При выборе  $S$  надо учесть, что с ростом интервала усреднения уменьшается ошибка в оценке  $\widetilde{J(t)^S}$ , связанная с отличием  $[\widetilde{\cos \varepsilon(t)}]^{2S}$  от  $1/2$ , но увеличивается отличие коэффициента изменчивости сглаженной интенсивности  $\widetilde{J(t)^S}$  от коэффициента изменчивости  $v_0$  величины  $J \equiv A^2$ . Оптимизация ошибок достигается при

$$S_0 \approx \mu^{2/3} \tau_J, \quad (11)$$

где  $\tau_J \approx 1/\Delta\omega = 1/2a_0$  — интервал корреляции интенсивности, т. е. сдвиг, при котором автокорреляционная функция  $J$  уменьшается в  $e$  раз; вносимая таким сглаживанием ошибка в оценке коэффициента

изменчивости  $v_0$  будет  $\sim 2\mu^{2/3}$ . Конечно, если в конкретной задаче достаточна меньшая точность, то интервал усреднения для сокращения обработки полезно увеличить.

Учтем теперь ошибки в оценке  $v_0$  из-за конечности времени наблюдения  $T$  сигнала. Оценки моментов одномерного распределения  $J \approx \tilde{J}$  по непрерывной регистрации  $J(t)$  на интервале  $T$  практически совпадают с оценками для выборки из  $n = T/\tau_j = 2Ta_0$  независимых значений  $J_{(1)}, J_{(2)}, \dots, J_{(n)}$  интенсивности. Переход к дискретным значениям  $J_{(k)} = J(t_k)$  при больших  $n$  приводит лишь к малым поправкам, тогда как в предварительном анализе требуется оценивать ошибки с точностью до множителя в несколько единиц.

Выборочный коэффициент изменчивости интенсивности

$$v(J) \equiv \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n J_{(k)} \right)^{-1} \sqrt{ \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left( J_{(k)} - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n J_{(m)} \right)^2 }$$

не смещен ( $\langle v \rangle = v_0$ ) и имеет дисперсию [6]

$$D(v) = (4 \langle J \rangle^4 \mu_2 n)^{-1} \{ \langle J \rangle^2 [\mu_4 - (\mu_2)^2] - 4 \langle J \rangle \mu_2 \mu_3 + 4(\mu_2)^3 \} + O(n^{-3/2}),$$

где  $\mu_k \equiv \langle (J - \langle J \rangle)^k \rangle$ . В случае (6) при  $L = 3$  имеем\*

$$D(v) = \gamma/n, \quad \gamma(\lambda) \equiv 4(\theta_2)^2 (\theta_1)^4 [9\theta_4 (\theta_1)^2 - (\theta_1 \theta_2)^2 - 8\theta_1 \theta_2 \theta_3 + 4(\theta_2)^3],$$

где  $\theta_1$  определяется формулой (8),  $\theta_2 \equiv \lambda^2(1 - \theta_1) - (\theta_1)^2$ ,

$$\theta_3 \equiv \frac{1}{2} [\lambda^4(\theta_1 - 1) + \lambda^2 \theta_1 (3\theta_1 - 1) + 3(\theta_1)^3],$$

$$\theta_4 \equiv \frac{1}{9} \left\{ \lambda^6(1 - \theta_1) + \lambda^4 [3 - \theta_1 - 4(\theta_1)^2] - 2\lambda^2(\theta_1)^2 (1 + 3\theta_4) - \frac{3}{4} (\theta_1)^4 \right\}.$$

При изменении  $\lambda$  от  $-\infty$  до  $\infty$  величина  $\gamma(\lambda)$  монотонно возрастает от 0 до 1. Во всем диапазоне  $\lambda$  относительная ошибка  $\sqrt{D(v)}/v_0$  в оценке  $v \sim v_0$  составляет

$$\frac{\sqrt{D(v)}}{v_0} = \frac{\gamma_1}{\sqrt{n}} \quad (\gamma_1 \approx 0,7 \div 1,0).$$

В случае  $L > 3$  аналогичные расчеты громоздки, при  $|\lambda| \gg 1$  (практически—при  $|\lambda| > 3$ ) окончательные выражения остаются теми же. И в более общем случае, когда вид нелинейности не совпадает с (6), а  $v_0$  существенно меньше  $v_{кр}$ , остается пригодной та же формула для относительной ошибки в оценке  $v_0$ . В самом общем случае можно писать

$$\frac{\sqrt{D(v)}}{v_0} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Следующая по сложности (и по порядку используемых моментов) характеристика — коэффициент асимметрии интенсивности  $d \equiv \mu_3/(\sigma J)^3$ . При  $-\lambda \gg 1$  он связан с  $L$  простой формулой

$$\frac{d}{v_0} = \frac{5}{4} (L - 3),$$

\* Здесь и далее в равенствах сохраняются только главные члены; более высокие порядки малости по  $n^{-1}$  для краткости опущены.

позволяющей (помимо  $a, b$ ) оценивать также общую степень  $L$  нелинейности, ограничивающей амплитуду колебаний.

#### 4. УЧЕТ РЕГУЛЯРНЫХ И ШУМОВЫХ ИСКАЖЕНИЙ В ПРИЕМНИКЕ

Если одна из границ полосы частот приема близка к частотам сигнала, а интенсивность шума в первом каскаде усиления не мала по сравнению с мощностью сигнала, возникают существенные искажения, что приводит к усложнению обсуждаемой здесь задачи. Приходится пользоваться более трудоемкой обработкой сигнала, возрастает запоеминаемый числовой массив и, соответственно, время регистрации, нужное для надежных оценок динамических параметров. Это особенно существенно при необходимости детального анализа колебательной системы вблизи порога самовозбуждения. Длительность же времени непрерывной регистрации не может быть слишком большой прежде всего из-за нестабильности аппаратуры и низкочастотных шумов.

В простейшей ситуации регулярные искажения сигнала в приемной аппаратуре описываются линейным оператором второго порядка; при этом сигнал  $z(t)$  на выходе приемника удовлетворяет уравнению

$$\ddot{z} + 2\delta_0 \dot{z} + \Omega^2 z = \Omega^2 (x + \eta), \quad \Omega^2 \equiv (\omega_0)^2 + (\delta_0)^2, \quad a_0 < \delta_0, \quad (12)$$

в котором  $x(t)$  — сигнал исследуемого объекта, поступающий на вход приемника, а  $\eta(t)$  — аддитивный шум в первом каскаде усиления. Линейность уравнения (11) позволяет написать отдельно для регулярно преобразованной и шумовой составляющих

$$\ddot{z}_p + 2\delta_0 \dot{z}_p + \Omega^2 z_p = \Omega^2 x, \quad \ddot{z}_m + 2\delta_0 \dot{z}_m + \Omega^2 z_m = \Omega^2 \eta, \quad z_p + z_m = z.$$

С относительной ошибкой, не превышающей  $1/\omega_0 \Delta$ , квадраты огибающих преобразованного системой (12) сигнала и его составляющих получаются усреднениями во времени:

$$\begin{aligned} \overline{I(t)}^\Delta &= \frac{2}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} [z(\theta)]^2 d\theta, & \overline{I_p(t)}^\Delta &= \frac{2}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} [z_p(\theta)]^2 d\theta, \\ \overline{I_m(t)}^\Delta &= \frac{2}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} [z_m(\theta)]^2 d\theta, \end{aligned}$$

где

$$\Delta \approx \mu^{2/3} \tau_{I_p}, \quad \tau_{I_p} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a_0} + \frac{1}{\delta_0} \right) > \tau_{I_m} \approx \frac{1}{2\delta_0}. \quad (13)$$

Относительная ошибка усреднения, как и прежде, составляет  $\sim 2\mu^{2/3}$ . В дальнейшем знак усреднения  $\sim \Delta$  писать не будем. С той же точностью

$$I(t) = I_p(t) + I_m(t) + \sqrt{\langle I_p \rangle \langle I_m \rangle} \xi(t), \quad (14)$$

где случайный процесс  $\xi(t)$  практически не зависит от интенсивностей  $I_p(t)$ ,  $I_m(t)$ , а его выборочное среднее  $\bar{\xi}^n$  асимптотически нормально с  $(0, 1/\sqrt{n})$ . Для одномерной плотности распределения шумовой и регулярной (при  $\lambda \gg 1$ ) составляющих интенсивности имеем

$$\rho_{I_m} = \frac{1}{2L_m} \exp\left(-\frac{I_m}{2L_m}\right), \quad L_m \equiv \frac{\Omega^4 \Delta \langle \tilde{\eta}^2 \rangle}{(\omega_0)^2 4\delta_0} \approx \frac{(\omega_0)^2 \Delta}{4\delta_0} \langle \tilde{\eta}^2 \rangle,$$

$$\rho_{I_p} = \frac{1}{2D} \exp\left(-\frac{I_p}{2D}\right), \quad D \equiv \frac{(\omega_0)^2 \langle x^2 \rangle}{4\delta_0(\delta_0 + a)} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Оценку одномерной плотности распределения  $I_p$  при  $\lambda \rightarrow -\infty$  можно получить, воспользовавшись близостью распределений  $I_p$  и  $A_p \equiv \sqrt{I_p}$  к гауссовым и малостью коэффициентов изменчивости для  $I_p$  и  $A_p$ . В силу сказанного огибающие сигналов на входе  $A(t)$  и на выходе приемника  $A_*(t)$  связаны уравнением [7]

$$\frac{d}{dt} A_*(t) + \delta_0 A_*(t) = \delta_0 \frac{\langle A_* \rangle}{\langle A \rangle} A(t).$$

Отсюда при  $L = 3$  можно получить [1]

$$v_{I_p} = v_J \sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_0 + a}}, \quad \rho_{I_p} = \frac{\exp[-(I_p/g_*\lambda_* + \lambda_*^2)]}{\sqrt{2\pi} g_*\lambda_* [1 - \Phi(\lambda_*)]}, \quad (15)$$

$$g_* = \frac{2D_{ш}}{\kappa(\lambda_*)^2}, \quad \lambda_* = \lambda \left(1 + \frac{a_0}{\delta_0}\right)^{1/2},$$

где  $\kappa^{-1} \equiv \langle I \rangle / \langle I_{ш} \rangle$  — отношение средних интенсивностей «сигнала к шуму». Для других значений  $L$  при введении малой поправки эти соотношения сохраняют смысл, кроме того

$$\frac{\mu_3(I)}{(\sigma I)^3 v_I} = \frac{\mu_3(J)}{(\sigma J)^3 v_J} = -\frac{5}{4} (L - 3).$$

Итак, интенсивность  $I$  сигнала на выходе приемника претерпевает по сравнению с интенсивностью  $J$  сигнала, поступающего на вход, следующие изменения: 1) появляется неаддитивная шумовая компонента (см. (14)); 2) увеличивается интервал корреляции интенсивности:  $\tau_{I_p} > \tau_J$ ; 3) завышается оценка  $\lambda$  по изменчивости  $v_0$  ( $\tau_p$ ):  $\lambda_* > \lambda$ .

Формулы (13) и (15) позволяют учесть эффекты (2) и (3). Для учета же влияния шума на формирование огибающей выходного сигнала можно воспользоваться следующей методикой отыскания  $\lambda$  (значок при  $\lambda$  в дальнейшем опустим) или  $v_0$ . Определяются выборочные средние\*

$$\bar{I}, \bar{I}^2, \bar{I}^3, \bar{I}_{ш}, (\bar{I}_{ш})^2, (\bar{I}_{ш})^3$$

и в качестве статистики для оценки  $(v_0)^2 = [v_0(I_p)]^2$  квадрата коэффициента изменчивости  $I_p$  берется

$$\beta_1 \equiv \frac{m_2(I) - m_2(I_{ш}) - \bar{I}_{ш}(\bar{I} - \bar{I}_{ш})}{(\bar{I} - \bar{I}_{ш})^2}. \quad (16)$$

Можно показать [1], что

$$\langle \beta_1 \rangle = (v_0)^2, \quad D(\beta_1) = \gamma_2/n,$$

где для  $L = 3$  и любых  $\lambda$

\* Далее черта сверху обозначает выборочное среднее; объем выборки при усреднении всюду равен  $n$ . Выборочный  $p$ -й центральный момент обозначим  $m_p$ , а истинный —  $\mu_p$ . Предполагается, что измерения на выходе приемника производятся попеременно, то шум с сигналом, то шум без сигнала. Значения  $I$  и  $I_{ш}$  предполагаются независимыми.



$$\gamma_2 = \left\{ (v_0)^4 [4(v_0)^2 - 1] + g \frac{\theta_4}{(\theta_1)^4} - 8(v_0)^2 \frac{\theta_3}{(\theta_1)^3} + x \left[ 8(v_0)^4 + 4(v_0)^2 - 4 \frac{\theta_3}{(\theta_1)^3} \right] + x^2 [1 + 5(v_0)^2 + 8(v_0)^4] + x^3 [7 - 8(v_0)^2] + 10 x^4 \right\},$$

а для любых  $L$  и достаточно больших  $(-\lambda)$  (практически — при  $\lambda < -3$ )

$$\gamma_2 = 26(v_0)^4 + 4(v_0)^2 x + x^2 + 7x^3 + 10x^4.$$

После того, как установлено, что величина  $(-\lambda)$  значительно больше единицы, полезно оценить степень нелинейности, используя статистику величины

$$\beta_2 \equiv \frac{m_3(I) - m_2(I_m)}{(\bar{I} - \bar{I}_m)^3}, \quad (17)$$

для математического ожидания и дисперсии которой при больших  $(-\lambda)$  имеем

$$\langle \beta_2 \rangle = -\frac{5}{4} (L - 3) (v_0)^4, \quad D(\beta_2) = \frac{6(v_0)^6 + 424 x^6}{n}. \quad (18)$$

Относительная ошибка в определении величины  $L - 3 = -\frac{4}{5} \frac{\beta_2}{(\beta_1)^2}$  примерно равна  $\sigma_{\beta_2} / \langle \beta_2 \rangle + 2\sigma_{\beta_1} / \langle \beta_1 \rangle$ .

Кратко остановимся на числовых соотношениях, возникающих при анализе узкополосного излучения межзвездного гидроксила.

### 5. К АНАЛИЗУ УЗКОПОЛОСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ГИДРОКСИЛА

Воспользуемся конкретными данными о свойствах наблюдаемого квазимонохроматического радиоизлучения межзвездного гидроксила и об имеющейся радиоастрономической аппаратуре. Частота анализируемого излучения  $\nu = 1,7 \cdot 10^9$  гц, соответствующая угловая частота  $\omega_0 \approx 10^{10}$  сек<sup>-1</sup>. Ширина полосы излучения ОН отдельным облаком согласно [8] составляет  $\Delta\nu \approx 10^3$  гц, т. е.  $\Delta\nu/\nu = \Delta\omega/\omega_0 \approx 6 \cdot 10^{-7}$ . Для хороших приемников излучения ОН, по-видимому, отношение средних интенсивностей сигнала к шуму  $3 \div 10$ , так что  $x \approx 0,1 \div 0,3$ . Можно полагать также, что постоянная затухания приемника  $\delta_0 \approx 10^4$  сек<sup>-1</sup>.

Согласно сказанному выше, интервал корреляции интенсивности составляет при этом  $\tau_I \sim \tau_f \sim 2 \cdot 10^{-4}$  сек. Для получения квадрата огибающей  $I$  (с минимальной ошибкой сглаживания) следует проводить скользящее усреднение  $[z(t)]^2$  с временем  $S_0 \sim 10^{-8}$  сек, квадратичным детектором на выходе приемника; при этом ошибка, вносимая сглаживанием в оценку коэффициента изменчивости, составит  $\sim 10^{-4}$ . Продолжительность  $T$  времени попеременной регистрации сигнала и шума (за один сеанс) для формирования серии оценок ограничена прежде всего ростом интенсивности шумов. Последние связаны в основном с низкочастотными флуктуациями коэффициента усиления, существенными при временах наблюдения порядка минуты. Учитывая это, будем предполагать, что время  $T$  общего усреднения  $[z(t)]^2$  составляет несколько секунд. Тогда для объема выборки  $n$  имеем  $n \approx T/\tau_I \sim 10^4$ .

В приведенных выше формулах предполагаются одинаковыми объемы выборок  $n$  каждой из величин  $I$  и  $I_m$ . Оценки  $I$  и  $I_m$  получаются скользящим линейным усреднением с временем  $T$  случайных

последовательностей  $I(t_k)$  и  $I_m(t_k)$ . Затем вычисляются вторые моменты

$$m_2(I) \equiv \overline{I^2} - (\bar{I})^2, \quad m_2(I_m) \equiv (\overline{I_m})^2 - (\bar{I}_m)^2$$

и по формуле (16)—выборочный параметр  $\beta_1$ . Последний оценивает изменчивость квадрата огибающей  $v_0(I_p)$ , с помощью которой можно получить оценку  $\lambda$ .

В двух крайних случаях—линейной системы и предельно возбужденного автогенератора ( $v_0 = 1$  и  $v_0 = 0$ )—для значений  $x = 0,1$  и  $x = 0,3$  стандарты выборочных оценок  $\beta_1$  равны соответственно

$v_0 = 1$	$x = 0,1:$	$\sigma(\beta_1) = 0,022;$
	$x = 0,3:$	$\sigma(\beta_1) = 0,028;$
$v_0 = 0$	$x = 0,1:$	$\sigma(\beta_1) = 0,0013;$
	$x = 0,3:$	$\sigma(\beta_1) = 0,0060.$

В случае  $L = 3$ ,  $x = 0,3$  при выборочной оценке, например,  $\beta_1 < 0,50$ , гипотеза о том, что анализируемый источник излучения пассивен (точка покоя соответствующей динамической системы устойчива) и, следовательно,  $v_0 > 0,577$ , отвергается с уровнем значимости  $< 0,5\%$ . Естественно, что при  $\lambda < 0$  (активный генератор) с ростом абсолютной величины параметра  $\lambda$  растет относительная ошибка\* в его определении: например, при  $x = 0,3$  и  $\lambda = -2,8$  относительная ошибка в оценке параметра  $\lambda$  составит  $\approx 3\%$ , а при  $\lambda = -14$  она составит  $\approx 50\%$ ; отметим также для иллюстрации, что при  $x = 0,1$  и  $\lambda = -14$  величина относительного разброса в оценке  $\lambda$  составляет  $\approx 13\%$ .

При оценке степени нелинейности можно воспользоваться формулами (17), (18). Из них следует, что определение  $\beta_2$  требует кроме квадратичных детекторов также использования кубичных преобразователей сигнала. В случае  $L > 3$  относительная ошибка в определении величины  $L - 3$ , примерно равная  $\sigma\beta_2 / \langle \beta_2 \rangle + 2(\sigma\beta_1 / \langle \beta_1 \rangle)$ , растет с величиной  $(-\lambda)$  при  $\lambda < 0$  и уменьшается с ростом  $L$ . Например, при  $\lambda = -2,8$ ,  $x = 0,1$  она составляет  $10\%$  для  $L = 4$  и  $3\%$ —для  $L = 13$ ; при  $\lambda = -2,8$ ,  $x = 0,3$  она составляет  $67\%$  для  $L = 4$  и  $18\%$ —для  $L = 13$ .

Надо обратить внимание еще на один важный эффект. При несоблюдении довольно жестких условий на направленность антенны и полосу пропускания приемника регистрируемый сигнал может оказаться суммарным излучением нескольких независимых источников узкополосного радиозлучения космического ОН. Для рассмотрения влияния наложения источников удобнее перейти от коэффициента изменчивости к моментам самого сигнала. Нетрудно видеть, что

$$[v(J)]^2 = \frac{2}{3} \frac{\mu_4(x)}{[\mu_2(x)]^2} - 1.$$

При сложении  $N$  независимых одинаково распределенных сигналов

$$X_{(N)} = \sum_{i=1}^N x_i \text{ получим}$$

$$\mu_2(X_{(N)}) = N\mu_2(x), \quad \mu_4(X_{(N)}) = N\mu_4(x) + 3N(N-1)[\mu_2(x)]^2,$$

следовательно,

\* Под относительной ошибкой здесь понимается коэффициент изменчивости оценки.

$$[\sigma_J(X_N)]^2 = \frac{2}{3} \frac{\mu_4(x)}{N [\mu_2(x)]^2} + \frac{N-2}{N} = \frac{[\sigma_J(x)]^2}{N} + 1 - \frac{1}{N}.$$

Таким образом (при оценке по изменчивости интенсивности), суммирование сигналов уже только двух однотипных независимых источников, даже находящихся в условиях предельного возбуждения, приведет к неправильному заключению о пассивности «единой» наблюдаемой системы.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть  $\rho(u)$  — плотность одномерного распределения неотрицательной случайной величины:  $\rho(u) \geq 0$ ,  $\int_0^{\infty} \rho(u) du = 1$ . Смеси этого распределения с равномерным на интервале  $0 \leq u \leq d$  распределением соответствует плотность

$$\rho^*(u) = \rho^*(u, \alpha, d) \equiv (1 + \alpha d)^{-1} [\rho(u) + d E_d(u)], \quad (\text{П.1})$$

$$E_d(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq d \\ 0, & u > d \end{cases}$$

Средние значения и средние квадраты случайных величин, характеризующихся плотностями распределения  $\rho$  и  $\rho^*$ , связаны формулами

$$\langle u \rangle \equiv \int_0^{\infty} \rho(u) u du, \quad \langle u \rangle^* \equiv \int_0^{\infty} \rho^*(u) u du = (1 + \alpha d)^{-1} \left( \langle u \rangle + \frac{1}{2} \alpha d^2 \right),$$

$$\langle u^2 \rangle \equiv \int_0^{\infty} \rho(u) u^2 du, \quad \langle u^2 \rangle^* \equiv \int_0^{\infty} \rho^*(u) u^2 du = (1 + \alpha d)^{-1} \left( \langle u^2 \rangle + \frac{1}{3} \alpha d^3 \right).$$

Полагая здесь

$$W \equiv \frac{\langle u^2 \rangle}{(\langle u \rangle)^2} \equiv \frac{4 + \beta}{3}, \quad W^* \equiv \frac{\langle u^2 \rangle^*}{(\langle u \rangle^*)^2} \equiv \frac{4 + \beta^*}{3}, \quad (\text{П.2})$$

получим

$$\beta^* = \frac{\beta (1 + \alpha d) \langle u \rangle^2 + \alpha d (2 \langle u \rangle - d)^2}{(\langle u \rangle + \alpha d^2/2)^2}.$$

Таким образом, если для исходных распределений  $W \geq 4/3$  и  $\alpha d \geq 0$ , то для их смеси (П.1) справедливо соотношение

$$W^* \geq 4/3. \quad (\text{П.3})$$

Рассмотрим произвольную нормированную невозрастающую ступенчатую неотрицательную функцию неотрицательного аргумента

$$\rho_N(u) = \rho(n) \quad \text{при } d_{n-1} < u \leq d_n,$$

где

$$d_0 = 0, \quad 0 \leq \rho_{(n+1)} \leq \rho_{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots, N),$$

$$\int_0^{\infty} \rho_N(u) du = 1.$$

Обозначим

$$W_N \equiv \frac{\int_0^{\infty} \rho_N(u) u^2 du}{\left[ \int_0^{\infty} \rho_N(u) u du \right]^2}.$$

При  $N = 1$  имеем

$$\langle u \rangle_1 = \frac{d_1}{2}, \quad \langle u^2 \rangle_1 = \frac{(d_1)^2}{3}, \quad W_1 = \frac{4}{3}.$$

С помощью (П.1), (П.2) (П.3) получаем затем  $W_2 \geq 4/3$  и, вообще,  $W_N \geq 4/3$ , если  $W_{N-1} \geq 4/3$ . Это говорит о том, что при любом  $N$   $W_N \geq 4/3$ . Переходя теперь в этом соотношении к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , приходим к выводу, что для неотрицательной случайной величины  $u$  с невозрастающей плотностью одномерного распределения всегда

$$\frac{\langle u^2 \rangle}{\langle u \rangle^2} \geq \frac{4}{3}.$$

Коэффициент изменчивости такой случайной величины не меньше  $1/\sqrt{3}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд, Препринт ФИАН № 185, 1969.
2. И. Л. Берштейн, ЖТФ, 11, 4 (1941).
3. Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов, А. А. Витт, ЖЭТФ, 3, 3 (1933).
4. Л. И. Гудзенко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 3, 572 (1962).
5. Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов, Таблицы математической статистики, ВЦ АН СССР, 1968.
6. Г. Крамер, Математические методы статистики, М., ИЛ, 1948.
7. Г. С. Горелик, Г. А. Елкин, Радиотехника и электроника, 2, № 1 (1957).
8. H. Weaver, N. H. Dieter, D. R. W. Williams, Astrophis. J., 16, № 146 (1968).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
6 июля 1970 г.

#### ANALYSIS OF A NARROW-BAND SIGNAL USING THE ENVELOPE

L. I. Gudzenko, V. E. Chertoprud

The paper discusses the possibilities of preliminary analysis of the dynamic structure of an uncontrolled object according to observation of a narrow-band signal. The procedure of evaluating the generator excitation degree is considered.