ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIV, № 12 РАДИОФИЗИКА 1971

УДК 534—10

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. М. Алексеев, К. Г. Валеев

Получены условия устойчивости в среднем и среднеквадратичном для линейных систем при наличии случайных возмущений (стационарных и нестационарных), отличных от «белых шумов». Используются два способа построения решений и исследования устойчивости: модифицированный метод И. З. Штокало и преобразование Лапласа.

1. Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{Y}(t) = [A + \mu B(t)]Y(t), \quad Y(0) = E, \tag{1.1}$$

где A — постоянная устойчивая (см. [1]) матрица размера $n \times n$, собственные значения которой имеют вид $\pm i\omega_k$, μ — малый параметр ($\mu \geqslant 0$), E — единичная матрица. Элементы матрицы $B(t)$ — случайные процессы, удовлетворяющие некоторым ограничениям (указанным ниже).

Подобные системы с возмущениями типа «белого шума» рассматривались во многих работах (обширная библиография дана в монографии [2]).

После линейной замены зависимых переменных

$$Y(t) = \exp(At)\,Z(t) \tag{1.2}$$

приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \dot{Z}(t) = \mu B_1(t)\,Z(t), \\ B_1(t) = \exp(-At)\,B(t)\exp(At). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Для исследования этой системы используем метод Штокало [3], т. е. систему (1.3) приводим к системе с постоянными коэффициентами:

$$Z(t) = \Big[\sum_{k=0}^{N} \mu^k C_k(t)\Big]V(t), \quad C_0(t) \equiv E; \tag{1.4}$$

$$\dot{V}(t) = \Big[\sum_{s=1}^{N} \mu^s K_s + \mu^{N+1} R_N(t, \mu)\Big]V(t), \quad V(0) = E. \tag{1.5}$$

Дифференцируя (1.4) и подставляя в (1.3), получим, приравнивая матричные коэффициенты при одинаковых степенях μ:

$$\begin{gathered} \dot{C}_1(t) + K_1 = B_1(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{C}_s(t) + K_s = B_s(t) \quad (s = 2, \ldots, N), \\ B_s(t) = B_1(t)C_{s-1}(t) - \sum_{j=1}^{s-1} C_j(t)K_{s-j}. \end{gathered} \tag{1.6}$$

При этом остаточный член $R_N(t, \mu)$ будет иметь вид

$$R_N(t, \mu) = \left(\sum_{k=0}^{N} \mu^k C_k(t) \right)^{-1} B_1(t) C_N(t). \tag{1.7}$$

Постоянные матрицы K_s подбираем следующим образом:

$$\begin{gathered} K_1 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle B_1(t) \rangle \, dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_s = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle B_s(t) \rangle \, dt \quad (s = 2, \ldots, N) \end{gathered} \tag{1.8}$$

($\langle\ \rangle$ обозначает знак математического ожидания). Матрицу $B_1(t)$, указанную в (1.4), можно представить в виде разложения

$$B_1(t) = B_1^0(t) + K_1 + A_1(t), \tag{1.9}$$

где

$$\begin{gathered} B_1^0(t) = B_1(t) - \langle B_1(t) \rangle, \\ A_1(t) = \langle B_1(t) \rangle - K_1. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Теперь укажем ограничения на элементы случайной матрицы $B(t)$:

$$\begin{gathered} 1)\ \langle B_1(t) \rangle = K_1, \\ 2)\ \int_0^t \cdots \int_0^t \left\langle \prod_{k=1}^{2N} B^0(z_k) dz_k \right\rangle < \infty. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Из этих ограничений, учитывая (1.6)—(1.10), получаем, что матрицы K_s существуют для всех $s = 1, 2, \ldots, N$ и что случайные матрицы $C_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ ограничены в среднеквадратичном. Получена теорема.

Теорема 1.1. Для устойчивости в среднем [4] системы (1.1) при выполнении ограничений (1.11) достаточно, чтобы все собственные значения матрицы

$$G(\mu) = \sum_{s=1}^{N} \mu^s K_s + O(\mu^{N+1}) \tag{1.12}$$

имели отрицательные вещественные части независимо от членов $O(\mu^{N+1})$.

Для исследования устойчивости в среднеквадратичном рассмотрим матрицу вторых моментов решений системы (1.1), обозначив ее $R(t)$:

$$\begin{gathered} R(t) = \langle K(t) \rangle, \\ K(t) = [k_{js}(t)] = [y_j(t) y_s(t)]. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Случайную матрицу $K(t)$ можно представить в виде

$$K(t) = Y(t) Y^*(t), \quad K(t) = K^*(t) \tag{1.14}$$

(* обозначает знак транспонирования).

Для $K(t)$ получим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{K}(t) = AK(t) + K(t)A^* + \mu(B(t)K(t) + K(t)B^*(t)). \tag{1.15}$$

Вводя в рассмотрение случайный вектор

$$Q(t) = [q_k(t)], \quad q_k(t) = k_{js}(t)$$
$$\left(k = 1, 2, ..., \frac{n(n+1)}{2} = m\right), \tag{1.16}$$

систему (1.15) запишем в виде

$$\dot{Q}(t) = [C + \mu D(t)]Q(t), \tag{1.17}$$

где C — матрица размера $m \times m$, элементы матрицы $D(t)$ — линейные комбинации элементов матрицы $B(t)$. Очевидно, что условия устойчивости в среднем системы (1.17) эквивалентны условиям устойчивости в среднеквадратичном системы (1.1).

Пример 1.1. Исследуем устойчивость в среднеквадратичном решений уравнения 2-го порядка

$$\ddot{y}(t) + \mu^2\delta\,\dot{y}(t) + [\lambda^2 + \mu\, b(t)]\, y(t) = 0, \tag{1.18}$$

где $\delta > 0$, $b(t)$ — стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $k(\tau)$ и спектральной плотностью $s(\omega)$, удовлетворяющей ограничениям (1.11), $\langle\, b(t)\, \rangle = 0$.

Приводя уравнение (1.18) к виду (1.1), получаем после вычислений

$$K_1 = -\frac{\mu\delta}{2}E, \quad K_2 = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2/\lambda^2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix} + O(\mu^2), \tag{1.19}$$

где

$$a_1 = \frac{\pi}{4\lambda^2}[s(2\lambda) - s(0)], \quad a_2 = \frac{\pi}{4\lambda}\int_0^\infty k(\tau)\sin 2\lambda\tau\, d\tau.$$

Составляя матрицу $G(\mu)$ по формуле (1.12), получаем по критерию Гурвица [1] условия устойчивости в среднем:

$$s(2\lambda) - s(0) < \frac{2\lambda^2\delta}{\pi} + O(\mu). \tag{1.20}$$

Система (1.17) в данном примере имеет вид

$$\dot{Q}(t) = [C - \mu D(t)]Q(t),$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 1 \\ 0 & -2\lambda^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b(t) & \mu\delta & 0 \\ 0 & 2b(t) & 2\mu\delta \end{bmatrix}. \tag{1.21}$$

После аналогичных вычислений получаем условия устойчивости в среднеквадратичном

$$\begin{cases} s(2\lambda) - s(0) < \dfrac{3\delta\lambda^2}{2\pi} + O(\mu) \\ s(2\lambda) - 2s(0) < \dfrac{2\lambda^2\delta}{\pi} + O(\mu) \end{cases}. \tag{1.22}$$

Следует отметить, что аналогичный результат получен в [5].

Пример 1.2. Рассмотрим систему двух уравнений 2-го порядка:

$$\begin{gathered}
\ddot{x}_1(t) + 2\mu^2\delta_1\dot{x}_1(t) + \omega_1^2 x_1(t) + \mu\, b(t)[a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)] = 0, \\
\ddot{x}_2(t) + 2\mu^2\delta_2\dot{x}_2(t) + \omega_2^2 x_2(t) + \mu\, b(t)[a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)] = 0.
\end{gathered} \tag{1.23}$$

Здесь $b(t)$ — случайный процесс, удовлетворяющий условиям примера 1.1, δ_1, $\delta_2 > 0$, $\omega_1 \neq \omega_2$.

Аналогичная система исследована в [6] в предположении, что $b(t)$ — гауссов «белый шум».

Как и в [6], система (1.23) приводится к матричной форме (1.1), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11}b(t) & -2\mu\delta_1 & -a_{12}b(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{12}b(t) & 0 & -a_{22}b(t) & -2\mu\delta_2 \end{bmatrix}.$$

После вычислений находим

$$\begin{gathered}
K_1 = -\mu \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{bmatrix}, \\
K_2 = \frac{\pi}{4} \begin{bmatrix} a_1 & -b_1/\omega_1^2 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & -b_2/\omega_2^2 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{bmatrix},
\end{gathered} \tag{1.24}$$

где

$$\begin{gathered}
a_k = \frac{1}{\omega_k}\left\{\frac{a_{kk}^2}{\omega_k}[s(2\omega_k) - s(0)] + \frac{a_{kj}^2}{\omega_j}[s(\omega_+) - s(\omega_-)]\right\}, \\
b_k = \frac{a_{kk}^2}{\omega_k} p(2\omega_k) + \frac{a_{kj}^2}{\omega_j}[p(\omega_+) + p(\omega_-)],
\end{gathered} \tag{1.25}$$

$$p(x) = \int_0^\infty k(\tau)\sin x\tau\, d\tau, \quad \omega_+ = \omega_2 + \omega_1, \quad \omega_- = \omega_2 - \omega_1.$$

Индексы k и j в (1.25) принимают одновременно такие значения: $(k = 1, j = 2)$ или $(k = 2, j = 1)$.

Составляя матрицу $G(\mu)$, получим условия устойчивости в среднем:

$$\frac{\pi}{4} a_1 < \delta_1 + O(\mu), \quad \frac{\pi}{4} a_2 < \delta_2 + O(\mu). \tag{1.26}$$

Замечание. Изложенный выше асимптотический способ при некоторых ограничениях может быть применен к исследованию нелинейных систем, содержащих случайные процессы. При этом удобно привести нелинейную систему к стандартной форме [7].

2. Рассмотрим систему (1.1), предполагая элементы матрицы $B(t)$ вещественными стационарными в широком смысле случайными процессами, удовлетворяющими ограничениям (1.11). Используем спектральное разложение [8]

$$B(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}dC(\omega),\qquad dC(-\omega)=-dC^{1}(\omega). \tag{2.1}$$

Здесь $C^1(\omega)$ — матрица, комплексно-сопряженная матрице $C(\omega)$. Для элементов $c_{kj}(\omega)$, $c^1_{vm}(\omega)$ матриц $C(\omega)$, $C^1(\omega)$ выполнены соотношения

$$\langle dc_{kj}(\omega)dc^1_{pm}(\omega_1)\rangle = s^{jm}_{kp}(\omega)\delta(\omega-\omega_1)d\,\omega\,d\,\omega_1, \tag{2.2}$$

где $\delta(u)$ — функция Дирака, $s^{jm}_{kp}(\omega)$ — взаимные спектральные плотности.

Применим к системе (1.1) преобразование Лапласа. Используя теорему о смещении [9], придем к системе разностных уравнений

$$[Ep-A]F(p)=E+\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty} dC(\omega)F(p-i\omega), \tag{2.3}$$

где

$$F(p)\longleftrightarrow Y(t),\qquad \langle F(p)\rangle\longleftrightarrow\langle Y(t)\rangle. \tag{2.4}$$

Произведя в системе (2.3) замену со случайными коэффициентами

$$F(p)=Z(p)-\mu(Ep-A)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dC(-\omega_1)Z(p+i\omega_1), \tag{2.5}$$

приходим к системе разностных уравнений, в которой отсутствуют члены порядка μ:

$$(Ep-A)Z(p)=E-\mu^2\iint\limits_{-\infty}^{\infty} dC(\omega)[E(p-i\omega)-A]^{-1}dC(-\omega_1)Z(p-i\omega+i\omega_1). \tag{2.6}$$

Введем вспомогательную случайную матрицу

$$H(p,\ \omega,\ \omega_1)=dC(\omega)[E(p-i\omega)-A]^{-1}dC(-\omega_1). \tag{2.7}$$

Применяя операцию математического ожидания, из (2.2) получим

$$\langle H(p,\ \omega,\ \omega_1)\rangle=\delta(\omega-\omega_1)H(p,\ \omega)\,d\,\omega\,d\omega_1, \tag{2.8}$$

где элементы матрицы $H(p,\omega)$ выражаются линейно через взаимные спектральные плотности $s^{jm}_{kp}(\omega)$.

Обозначим

$$\langle Z(p)\rangle=G_1(p). \tag{2.9}$$

Из (2.5) и (1.5) следует, что $Z(p)$ имеет вид

$$Z(p)=\Big[Ep-A-\sum_{s=1}^{N}\mu^s K_s\Big]^{-1}+\mu Z_1(p), \tag{2.10}$$

где $Z_1(p)$ — некоторая случайная матрица.

Отсюда получаем, что

$$\langle H(p,\ \omega,\ \omega_1)Z(p)\rangle=\langle H(p,\ \omega,\ \omega_1)\rangle\langle Z(p)\rangle+O(\mu) \tag{2.11}$$

(так как матрицы K_s — детерминированные).

Произведя в системе (2.6) операцию математического ожидания и учитывая (2.11) и (2.8), получим систему уравнений

$$\Big[Ep-A+\mu^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(p,\ \omega)d\,\omega+O(\mu^3)\Big]G_1(p)=E. \tag{2.12}$$

Особые точки $G_1(p)$ определяют особые точки $\langle F(p) \rangle$ и, следовательно, определяют асимптотическое поведение $\langle Y(t) \rangle$. Они находятся из уравнения

$$\det\left[Ep - A + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} H(p, \omega) d\omega + O(\mu^3)\right] = 0. \tag{2.13}$$

Если корни этого уравнения имеют отрицательные вещественные части независимо от членов порядка μ^3, то система (1.1) устойчива в среднем.

Для получения условий устойчивости в среднеквадратичном нужно применить к системе (1.17) указанные операции.

Пример 2.1. Получим вторым способом условия устойчивости в среднем и среднеквадратичном решений системы (1.18). Уравнение (2.13) в этом случае имеет вид

$$a(p, \mu) - \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\omega) d\omega}{a(p - i\omega, \mu)} + O(\mu^3) = 0,$$

$$a(p, \mu) = p^2 + \mu^2 \delta p + \lambda^2. \tag{2.14}$$

Для корней $p_{1,2}$ этого уравнения находим

$$\operatorname{Re} p_{1,2} = \frac{\pi\mu^2}{4\lambda^2} [s(2\lambda) - s(0)] - \frac{\mu^2\delta}{2} + O(\mu^3).$$

Отсюда получаем условие устойчивости в среднем, которое полностью совпадает с (1.20).

Аналогичным образом получаем и условия устойчивости в среднеквадратичном, совпадающие с (1.22).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, изд. Наука, М., 1967.
2. Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, изд. Наука, М., 1969.
3. И. З. Штокало, Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, изд. АН УССР, Киев, 1960.
4. И. Я. Кац, Н. Н. Красовский, ПММ, 24, № 5, 809 (1960).
5. М. Ф. Диментберг, Инж. ж., МТТ, № 1 (1966).
6. Ф. Ванденхаммер, Механика (сб. перев.), № 6, 33 (1967).
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
8. В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, М., 1960.
9. И. З. Штокало, Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, изд. АН УССР, Киев 1961.

Киевский институт инженеров гражданской авиации

Поступила в редакцию
21 апреля 1970 г.,
после доработки
1 июля 1971 г.

INVESTIGATION OF OSCILLATIONS OF A LINEAR SYSTEM WITH RANDOM COEFFICIENTS

V. M. Alekseev, K. G. Valeev

The stability conditions are obtained „in the mean“ and „mean root square“ for linear systems in the presence of random perturbations (stationary and nonstationary) which differ from „white noises“. Two methods of building the solutions and investigating the stability are used: the modified method of I. Z. Shtokalo and Laplace transformation.