

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Гудзенко Л. И., Махвиладзе Т. М. Методика анализа динамической структуры объекта по его стохастическому движению вблизи точки покоя . . . . .	1631
Иванов В. П., Неймарк Ю. И. О зеркально-диффузной модели взаимодействия молекул газа с твердой поверхностью . . . . .	1636
Бруси В. А. Об абсолютной устойчивости стохастических систем с параметрическими возмущениями . . . . .	1643
Тураев Х. Т. Качение колеса с пневматиком в различных режимах увода . . . . .	1648
Тураев Х. Т. Методика определения кинематических параметров и коэффициентов упругости пневматика . . . . .	1654
Лернер В. С. Идентификация процессов в объектах управления с налагающимися явлениями на основе физического подхода . . . . .	1661
Шубравый И. И. Сравнение двух схем самонастройки по критерию среднеквадратического отклонения . . . . .	1677
Любимцев Я. К. К вопросу об устойчивости процессов в $RLC$ цепи с электрической дугой . . . . .	1686
Гинзбург Р. Е. Метод Е. П. Попова для квазилинейных систем с медленно меняющимися параметрами . . . . .	1691
Постников Л. В. К вопросу отыскания и исследования квазигармонических колебаний в слабонелинейных системах . . . . .	1700
Седова К. К. К теории экстремального управления . . . . .	1708
Королев В. И. Резонансные явления в контуре с нелинейной индуктивностью . . . . .	1716
Букатарь М. И., Царьков Е. Ф. О синхронизации лампового генератора с запаздывающей обратной связью в случае $MS \gg RC$ . . . . .	1722
Пономаренко В. П. К теории систем синхронизации с перекрестными связями . . . . .	1728
Сысоева Г. В. К исследованию динамики управляемого ударного виброгасителя . . . . .	1741
Белых В. Н. Об уравнениях систем ФАП с нелинейной цепью управления . . . . .	1749
Белых В. Н. Об оценках областей устойчивости систем ФАП с нелинейной цепью управления . . . . .	1759
Неймарк Ю. И., Баталова З. С., Иванова И. М., Морина Г. И., Бубель М. С., Федоровская Р. Ф. Задача выбора метода лечения . . . . .	1766

### Краткие сообщения и письма в редакцию

Коган Д. И. Аддитивные векторные системы, проблема перевода . . . . .	1774
Алексеев А. С. О предельном переходе от импульсной системы к непрерывной . . . . .	1775
Апаев Б. А., Пиковская С. А., Урьяш Ф. В. Динамика масс в испарителе непрерывного действия . . . . .	1778

УДК 531.391

**МЕТОДИКА АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ОБЪЕКТА ПО ЕГО СТОХАСТИЧЕСКОМУ ДВИЖЕНИЮ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ПОКОЯ**

*Л. И. Гудзенко, Т. М. Махвиладзе*

Рассматривается последовательность действий при оценке параметров динамической модели нерегулируемого объекта в простейшем варианте обсуждающегося ранее метода обратной задачи теории колебаний.

Пусть регулярное поведение сигнала объекта при данных условиях наблюдения хорошо описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^q X}{dt^q} + f\left(X, \frac{dX}{dt}, \dots, \frac{d^{q-1} X}{dt^{q-1}}\right) = 0 \tag{1}$$

с точкой покоя  $X = X_0$  (т. е.  $f(X_0, 0, \dots, 0) = 0$ ), которую будем предполагать асимптотически устойчивой. В работах [1-3] обсуждались общие вопросы отыскания по сигналу формирующих его динамических уравнений, здесь остановимся на конкретной методике оценки параметров динамической модели. Детальнее, чем уравнением (1), установившийся сигнал реального объекта описывается уравнением

$$\frac{d^q X}{dt^q}(t) + f\left(X(t), \frac{dX}{dt}(t), \dots, \frac{d^{q-1} X}{dt^{q-1}}(t)\right) = \xi(t),$$

где  $\xi(t)$  — флуктуационный ( $\langle \xi(t) \rangle \equiv 0$ ) стационарный гауссов процесс, интервал корреляции которого  $\tau^{(0)}$  (т. е.  $|\langle \xi(t + \tau)\xi(t) \rangle| \ll \langle \xi^2 \rangle$  при  $\tau \leq \tau^{(0)}$ ) мал по сравнению с характерными временами модели (1). В ряде задач надо учитывать и случайные искажения сигнала из-за помех на его пути от объекта до регистрации. Эти искажения обычно описываются аддитивным шумом  $\eta(t)$  для фактической записи сигнала  $Y(t) : Y(t) \equiv X(t) + \eta(t)$ ; здесь  $\eta(t) \equiv \eta_1(t) + \eta_2(t)$ ;  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  — стохастически независимые от  $X(t)$  флуктуации, причем интервал  $\tau_1$  корреляции  $\eta_1(t)$  мал по сравнению с минимальным характерным временем, а интервал корреляции  $\tau_2$  шума  $\eta_2(t)$  велик по сравнению с максимальным характерным временем динамической модели (1) объекта.

Считая, что интенсивность отклика модели (1) на возмущение  $\xi(t)$  достаточно мала, ограничимся линеаризованным около точки покоя описанием

$$\frac{d^q x}{dt^q} + \sum_{p=0}^{q-1} a_p \frac{d^p x}{dt^p} = \xi, \tag{2}$$

$x(t) \equiv X(t) - X_0$ ,  $y(t) \equiv x(t) + \eta(t)$ . Здесь  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  — независимые стационарные флуктуации, а величины

$$a_p \equiv \frac{\partial f \left( X, \frac{dX}{dt}, \dots, \frac{d^{q-1}X}{dt^{q-1}} \right)}{\partial \left( \frac{d^p X}{dt^p} \right)} \Bigg|_{X=X_0; \frac{d^n X}{dt^n} = 0 \ (n=1, 2, \dots, q-1)} \quad (3)$$

При  $\eta_2(t) \equiv 0$ , обозначив  $\tau_0 \equiv \max(\tau^{(0)}, \tau_1)$ , имеем

$$\langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = \langle \eta(t) \eta(t+\tau) \rangle = 0 \quad (|\tau| \geq \tau_0), \quad \langle \xi(t) \eta(t+\tau) \rangle \equiv 0. \quad (4)$$

Будем считать, что запись  $Y(t)$  на интервале времени  $0 \leq t < \Theta$  содержит большое число  $B$  ( $B \gg 1$ ) участков длительности  $\Theta_0 = S \tau_0$ , причём  $S > q$ . Для выборочных корреляционных функций

$$Z_B(\tau) \equiv \frac{1}{B} \sum_{\beta=1}^B y(t_\beta) y(t_\beta + \tau)$$

и

$$\Phi_B(\tau) \equiv \frac{1}{B} \sum_{\beta=1}^B y(t_\beta) [\xi(t_\beta + \tau) + L_q \eta(t_\beta + \tau)],$$

где

$$t_\beta \equiv (\beta - 1) \Theta_0 \quad (0 \leq \tau < \Theta_0),$$

$$L_q \equiv \frac{d^q}{d\tau^q} + \sum_{p=0}^{q-1} a_p \frac{d^p}{d\tau^p} \quad (\beta = 1, 2, \dots, B),$$

получаем из (2)

$$L_q Z_B(\tau) = \Phi_B(\tau). \quad (5)$$

В силу предшествования во времени причины следствию отклик  $X(t)$  динамической модели реального объекта на возмущения  $\xi(t')$  не должен зависеть в явной форме от более поздних ( $t' > t$ ) возмущений. Учитывая (4), имеем

$$\langle x(t) \xi(t + \tau) \rangle = 0 \quad (|\tau| \geq \tau_0). \quad (6)$$

Из (4)–(6) следует, что  $\langle \Phi_B(\tau) \rangle = 0$  при  $|\tau| \geq \tau_0$ . Вычисление дисперсии  $\Phi_B(\tau)$  дает

$$D[\Phi_B(\tau)] = \sigma^2 \equiv \frac{\langle y^2 \rangle}{B} [\langle \xi^2 \rangle + \langle (L_q \eta)^2 \rangle].$$

Случайные величины  $\Phi_B(s\tau_0)$  независимы между собой. Действительно, в силу сумматорности они распределены асимптотически нормально, корреляционная же связь между ними отсутствует:  $\langle \Phi_B(s\tau_0) \times \Phi_B(s'\tau_0) \rangle = 0$  при  $s' \neq s$ . Воспользовавшись методом максимального правдоподобия [4], при  $\tau = s\tau_0$  ( $s=1, 2, \dots, S$ ) с помощью  $S \times q$ -матрицы  $P \equiv \left\| \frac{d^p}{d\tau^p} Z_B(s\tau_0) \right\|$  ( $p=0, 1, \dots, q-1$ ) и  $S \times 1$ -матрицы  $K \equiv \left\| \frac{d^q}{d\tau^q} Z_B(s\tau_0) \right\|$  найдем по уравнению (5)  $q \times 1$ -матрицу  $A = \| a_p^{(0)} \|$  несмещенных оценок динамических параметров (3):

$$A = -\mathcal{E} P^T \cdot K, \quad (7)$$

где  $\mathcal{E}^{-1} \equiv P^T \cdot P$ ,  $B^T$  — транспонированная матрица  $B$ . Для дис-

персий оценок  $\alpha_p^{(0)}$  имеем  $D(\alpha_p^{(0)}) = \sigma^2 \mathcal{E}_{pp}$ , величина же  $\sigma^2$  оценивается с помощью

$$\hat{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{S-q} \sum_{s=1}^S \left[ \frac{d^q}{d\tau^q} Z_B(s\tau_0) + \sum_{p=0}^{q-1} \alpha_p^{(0)} \frac{d^p}{d\tau^p} Z_B(s\tau_0) \right]^2.$$

Входящие в формулу (7) старшие производные выборочной функции  $\frac{d^p}{d\tau^p} Z_B(s\tau_0)$  обычно вносят определяющий вклад в дисперсии  $D(\alpha_p^{(0)})$  проводимых так оценок [5]. Поэтому после расчетов (7) целесообразно применить для следующих приближений метод наименьших квадратов непосредственно к  $Z_B(\tau)$ :

$$\sum_{s=1}^S g(s\tau_0) [Z_B(s\tau_0) - Z^{(r)}(s\tau_0)]^2 = \min, \quad [g(s\tau_0)]^{-1} \equiv D[Z_B(s\tau_0)], \quad (8)$$

оценивая дисперсии значений выборочной корреляционной функции с помощью формулы [6]

$$D[Z_B(s\tau_0)] = \frac{2}{\tau_0(S-s)} \sum_{s'=1}^S (S-s-s') \{ \langle Z_B(\tau_0(s-s')) \rangle \langle Z_B(\tau_0(s+s')) \rangle + [ \langle Z_B(s'\tau_0) \rangle ]^2 \}.$$

Обозначим  $\lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}, \dots, \lambda_q^{(r)}$  корни характеристических уравнений  $\lambda^q + \sum_{p=0}^{q-1} \alpha_p^{(r)} \lambda^p = 0$  и представим корреляционные функции откликов соответствующих динамических моделей типа (2) на широкополосные шумы с гладким спектром в виде приближений

$$Z^{(r)}(\tau) \equiv \sum_{p=1}^q C_p^{(r)} \exp(\lambda_p^{(r)} \tau),$$

$$C_p^{(r)} \equiv C_p(\lambda_1^{(r)}, \dots, \lambda_q^{(r)}) = G^{(r)} L_p^{(r)}, \quad L_p^{(r)} \equiv \left[ \prod_{k=1}^q (\lambda_p^{(r)} + \lambda_k^{(r)}) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq p}}^q (\lambda_p^{(r)} - \lambda_m^{(r)}) \right]^{-1}, \quad (9)$$

$$G^{(r)} \equiv \sum_{s=1}^S g(s\tau_0) Z_B(s\tau_0) \sum_{p=1}^q L_p^{(r)} \exp(\lambda_p^{(r)} s\tau_0) \left\{ \sum_{s=1}^S g(s\tau_0) \left[ \sum_{p=1}^q L_p^{(r)} \exp(\lambda_p^{(r)} s\tau_0) \right]^2 \right\}^{-1}.$$

Считая поправки  $\Lambda_p^{(r)} \equiv \lambda_p^{(r)} - \lambda_p^{(r-1)}$  к характеристическим частотам достаточно малыми, согласно (9) получим

$$Z^{(r)}(\tau) = Z^{(r-1)}(\tau) + \sum_{p=1}^q \Lambda_p^{(r)} F_p^{(r-1)}(\tau),$$

где

$$F_p^{(r)}(\tau) \equiv \tau C_p^{(r)} \exp(\lambda_p^{(r)} \tau) + \sum_{k=1}^q \frac{\partial C_k^{(r)}}{\partial \lambda_k^{(r)}} \exp(\lambda_k^{(r)} \tau).$$

С помощью матриц  $\Pi^{(r)} \equiv \| A_p^{(r)} \|$ ,  $U^{(r-1)} \equiv \| Z_B(s\tau_0) - Z^{(r-1)}(s\tau_0) \|$ ,  $G \equiv \| g(s\tau_0) \delta_{ss'} \|$ ,  $F^{(r)} \equiv \| F_p^{(r)}(s\tau_0) \|$ ,

$$W^{(r)} \equiv [(F^{(r)})^T G F^{(r)}]^{-1} \quad (p = 1, \dots, q; s = 1, \dots, S)$$

напишем, следуя (8), для последовательных поправок

$$\Pi^{(r)} = W^{(r)} (F^{(r)})^T G U^{(r-1)} \quad (r = 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Обозначим  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  корни характеристического уравнения динамической модели (2), (3), так что  $a_p = (-1)^{q-p} \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{q-p})} \lambda_{\gamma_1} \dots \lambda_{\gamma_{q-p}} \equiv \equiv a_p(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$  — суммирование ведется по различным наборам из  $q-p$  индексов ( $\gamma_k = 1, 2, \dots, q$ ), где  $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_{q-p}$ . Для последовательных приближений характеристических чисел и соответствующих оценок параметров  $a_p$  имеем

$$\lambda_p^{(r)} \equiv \lambda_p + I_p^{(r)}, \quad a_p^{(r)} = a_p + \sum_{k=1}^q \frac{\partial a_p}{\partial \lambda_k} I_k^{(r)}.$$

Дисперсии этих оценок выразятся в виде

$$D(a_p^{(r)}) = \langle (a_p^{(r)} - a_p)^2 \rangle = \sum_{k, m=1}^q \frac{\partial a_p}{\partial \lambda_k} \frac{\partial a_p}{\partial \lambda_m} \langle I_k^{(r)} I_m^{(r)} \rangle. \quad (11)$$

Написав для корреляционной функции  $r$ -го приближения

$$Z^{(r)}(\tau) = Z(\tau) + \sum_{p=1}^q I_p^{(r)} F_p(\tau), \quad F_p \equiv \tau C_p \exp(\lambda_p \tau) + \sum_{k=1}^q \frac{\partial C_k}{\partial \lambda_p} \exp(\lambda_k \tau)$$

и подставив эти выражения в (8), получим нужную для формул (11) корреляционную матрицу последовательных оценок характеристических частот

$$\| \langle I_k^{(r)} I_m^{(r)} \rangle \| = (\sigma_r)^2 W,$$

где

$$W \equiv [F^T G F]^{-1}, \quad F \equiv \| F_p(s \tau_0) \|,$$

$$(\sigma_r)^2 = \frac{1}{S-q} \sum_{s=1}^S g(s \tau_0) [Z_B(s \tau_0) - Z^{(r)}(s \tau_0)]^2.$$

Когда медленная составляющая  $\eta_2(t)$  аддитивного шума существенна, целесообразно (в силу нестационарности такой задачи) прибегнуть к серии независимых наблюдений. При этом снова приходим к стохастически независимым флуктуационным записям с малым интервалом корреляции  $\tau_0$  внутренних и аддитивных шумов

$$y^{(\gamma)}(t) \equiv x^{(\gamma)}(t) + \eta^{(\gamma)}(t) \quad (\gamma = 1, 2, \dots, \Gamma; \Gamma \gg 1), \quad (12)$$

каждая из которых содержит большое число  $B_1$  участков непрерывной записи длительностью  $\Theta_0 = S \tau_0$ , ( $B_1 \gg 1$ ,  $S > q$ ). Здесь, подобно изложенному,  $y^{(\gamma)}(t) \equiv Y^{(\gamma)}(t) - M(Y^{(\gamma)})$ ;  $Y^{(\gamma)}(t)$  — полные записи сигнала

на этих участках, величины  $M(Y^{(\gamma)}) \equiv \frac{1}{B_1} \sum_{\beta=1}^{B_1} Y^{(\gamma)}(t_\beta)$  оцени-

вают сумму  $X_0 + \eta_2$  среднего значения сигнала и медленной составляющей внешнего шума, практически постоянной на каждом участке,

$$\langle \eta_2^{(\gamma)} \rangle \equiv 0, \quad \langle \eta_2^{(\gamma)} \eta_2^{(\gamma')} \rangle = \langle (\eta_2)^2 \rangle \delta \gamma \gamma'.$$

Среднее значение сигнала оценивается величиной  $M(\hat{X}_0) = \frac{1}{\Gamma} \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} M(Y^{(\gamma)})$ , при этом

$$\langle M(\hat{X}_0) \rangle = X_0, \quad D[M(\hat{X}_0)] = \frac{1}{\Gamma} \langle (\eta_1)^2 \rangle + \frac{1}{B_1 \Gamma} (\langle x^2 \rangle + \langle (\eta_1)^2 \rangle).$$

После вычитания на каждом интервале ( $\gamma$ ) из полных записей  $Y^{(\gamma)}(t)$  их средних значений  $M(Y^{(\gamma)})$  получаем набор флуктуаций (12), удовлетворяющий условиям (4), (5) при этом  $B = B_1 \Gamma$ .

Допустим теперь, что регистрируется не единичный сигнал, а одновременно их совокупность, в простейшем варианте динамически описываемая системой дифференциальных уравнений первого порядка. Если эта система после линеаризации не распадается на отдельные группы независимых уравнений, то можно считать, что флуктуационные возмущения в правых частях всех уравнений, кроме какого-нибудь одного, равны нулю. Оценки параметров проводятся аналогично вышеизложенному, исходя из корреляционной матрицы сигналов. При этом обычно лучше не сводить систему к меньшему числу уравнений высших порядков не только потому, чтобы иметь возможность оценить большее число динамических характеристик, но и потому, что каждое дополнительное численное дифференцирование значительно уменьшает точность оценивания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Гудзенко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 3, 572 (1962).
2. Л. И. Гудзенко, В. Е. Чертопруд, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 3, 438 (1967).
3. Л. И. Гудзенко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 3, 443 (1968).
4. Ю. В. Линник, Метод наименьших квадратов, Физматгиз, М., 1962.
5. С. Я. Вдленкин, Статистические методы исследования систем автоматического регулирования, изд. Сов. радио, М., 1967, стр. 127.
6. А. А. Свешников, Прикладные методы теории случайных функций, Физматгиз, М., 1968.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
28 мая 1970 г.

#### PROCEDURE FOR DYNAMIC STRUCTURE ANALYSIS OF PLANT BY ITS STOCHASTIC MOTION NEAR QUIESCENT POINT

*L. I. Goodzenko, T. M. Makhviladze*

Operations sequence for the estimation of dynamic model parameters of an uncontrolled plant is considered in the simplest version of the previously discussed inverse problem method of the vibration theory.

УДК 533.5

## О ЗЕРКАЛЬНО-ДИФFUЗНОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОЛЕКУЛ ГАЗА С ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

*В. П. Иванов, Ю. И. Неймарк*

Исследовано на ЭВМ стационарное состояние сильно разреженного газа в термически однородных сосудах. Методика вычислений основана на математическом моделировании случайного движения молекул газа и описана в работах [1-3]. Кроме общеупотребительных диффузного и зеркально-диффузного законов отражения молекул газа стенками [4, 5], в работе использован зеркально-диффузный закон отражения, в котором, в соответствии с экспериментом [6-14], доля зеркально отраженных молекул возрастает с увеличением угла падения.

Как известно (см., например, [15]), под влиянием взаимных соударений устанавливается абсолютное максвелловское распределение молекул газа по скоростям, если при отражении от границы объема сохраняется максвелловское распределение. Известно также, что диффузный и зеркальный законы отражения не нарушают максвелловского распределения, и сколь угодно редкие столкновения между молекулами должны привести к максвелловскому распределению. Очевидно, максвелловское распределение сохранится и в случае зеркально-диффузного закона отражения, когда число молекул, диффузно или зеркально отраженных от элемента поверхности, пропорционально косинусу угла отражения. Однако максвелловское распределение не сохраняется, если коэффициент зеркальности непостоянен и зависит от угла падения, так как распределение зеркально отраженных молекул отличается от косинусного закона. Как показал проведенный математический эксперимент, установившееся движение газа в исследованных сосудах (эллиптический цилиндр и др.) содержит макроскопические потоки, что говорит о том, что этот закон отражения не находится в согласии со вторым началом термодинамики.

Законы взаимодействия молекул газа с твердыми поверхностями сложны и зависят от многих факторов (шероховатость стенки, наличие на стенке адсорбированных слоев газа и т. п.). Трудности теоретического изучения и недостаточность экспериментальных данных оправдывают использование в решении конкретных задач динамики разреженного газа различных упрощенных моделей взаимодействия, таких, как диффузный и зеркально-диффузный законы отражения,

Диффузный закон [4, 15] основан на предположении, что любая поверхность покрыта хаотическими выступами молекулярных размеров, поэтому направление отражения совершенно не зависит от направления падения, и распределение отраженных молекул по направлениям подчиняется закону косинусов. Предполагается, что при отражении от стенки молекулы приобретают случайные скорости, распределенные по величине по максвелловскому закону с температурой, равной температуре стенки\*.

Более общим является зеркально-диффузный закон, в котором учитывается подтвержденная многочисленными экспериментами [5-14] связь между случайными направлениями падения и отражения. Здесь

\* Если молекулы газа не приходят в тепловое равновесие со стенкой, диффузный закон не удовлетворяет условию аддитивности, [15].

предполагается, что часть молекул отражается диффузно, часть—зеркально, причем эксперимент [6–14] указывает на тенденцию более полного сохранения тангенциального импульса молекул с увеличением угла падения их на стенку. В соответствии с экспериментом и по аналогии [14] с отражением света от шероховатой поверхности, в рамках зеркально-диффузного закона остается предположить, что доля зеркально отраженных молекул возрастает с увеличением угла падения.

В настоящей работе с целью исследования этих простейших и наиболее употребительных моделей отражения вычислено на ЭВМ плоское течение сильно разреженного газа без учета соударений между молекулами в сосудах различной формы, изображенных на рис. 1, 4, 10 (эллиптический цилиндр, цилиндр с пилообразными стенками, пространство между плоскостью и поверхностью с пилообразными выступами), стенки этих сосудов нагреты до одинаковой постоянной температуры.

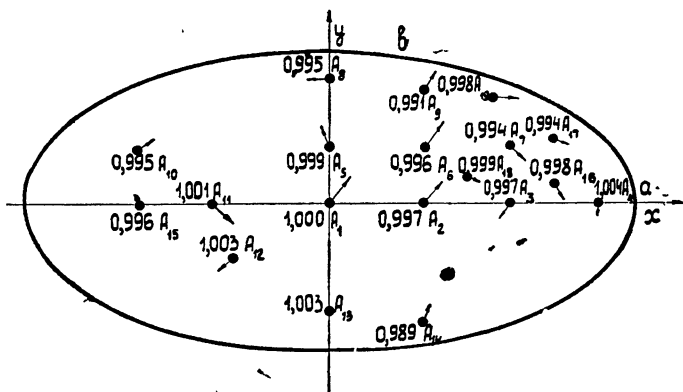


Рис. 1,  $\sigma=0,15$  см,  $M$  1 см : 0,02.

Методика вычислений поля макроскопических скоростей газа основана на математическом моделировании случайного движения молекул газа на ЭВМ. Если молекулы между собой не сталкиваются, то макроскопическое распределение величин скоростей, приобретенное при отражении молекул от стенок, не нарушается. Поэтому при исследовании стационарного режима можно ограничиться моделированием движения одной молекулы с постоянной по величине скоростью  $v_0$  в течение достаточно продолжительного времени. Процесс моделирования состоит в моделировании соударений молекулы со стенками сосуда и в нахождении точки следующего соударения. В соответствии с величиной вероятности  $K$  зеркального соударения разыгрывается тип соударения, затем вычисляется в случае зеркального (или разыгрывается в случае диффузного) соударения направление отражения\*. В процессе моделирования фиксируется число  $N_i$  проходов молекулы через малые  $\delta$ -окрестности точек  $A_i$  исследуемого объема, а также сумма  $\sum_{k=1}^{N_i} n_{ik} v_0$ , где  $n_{ik}$  — единичный вектор скорости молекулы при  $k$ -м пересечении  $\delta$ -окрестности  $A_i$ . Средняя (макроскопическая) скорость  $v_i$ , выраженная в долях средней тепловой скорости  $v_0$  молекул газа, равна

$$v_i = \sum_{k=1}^{N_i} n_{ik} / N_i.$$

\* Использованный здесь способ моделирования детально описан в работах.



Случайная ошибка вычисления  $v_i$  распределена по нормальному закону, следовательно, с вероятностью 0,68 не превышает стандартного отклонения  $\sigma \equiv 0,707/\sqrt{N}$  вдоль каждой из компонент  $v_i$ .

Результаты вычислений макроскопических скоростей газа, заключенного в эллиптический цилиндр и цилиндре с пилообразными стенками, приведены на рис. 1—9. На рисунках макроскопические скорости  $v_i$  газа, вычисленные в окрестностях  $\delta = 0,5$  см исследуемых точек  $A_i$ , показаны в виде векторов в определенном, указанном на каждом рисунке масштабе, в том же масштабе приведена величина  $\sigma$  случайной ошибки вычислений и около каждой точки  $A_i$  записана относительная плотность газа, пропорциональная числу  $N_i$ .

В случае диффузного и зеркально-диффузного с постоянным коэффициентом отражения  $K = 0,5$  зеркальности законов отражения (соответственно рис. 1, 2 а для эллиптического цилиндра и 5, 6—для цилиндра с пилообразными стенками) плотность газа всюду одинакова, макроскопическое движение газа отсутствует (вычисленные значения скоростей  $v_i$  порядка величины стандартного отклонения  $\sigma$  случайной ошибки вычислений, например, на рис. 1 65% всех составляющих  $v_i$  не превышают дисперсии  $\sigma$ , на рис. 2 а—69%), величины скоростей, как уже отмечалось, распределены по максвелловскому закону. Дополнительное исследование показало, что скорости молекул распределены по направлениям равномерно. Это иллюстрируется приведенными на рис. 2 б функциями распределения молекул по скоростям, вычисленными в нескольких точках эллиптического цилиндра при зеркально-диффузном законе отражения молекул стенками;  $K = 0,5$ . Пространство скоростей  $\delta = 0,5$  см окрестностей исследуемых точек разбито на секторы, для каждого сектора вычислено время пребывания молекулы, плоское движение которой со скоростью  $v_0 = 475$  м сек<sup>-1</sup> моделировалось в течение времени  $T = 313,9$  сек. Следовательно, такое равновесное состояние газа описывается абсолютной максвелловской функцией распределения молекул по скоростям.

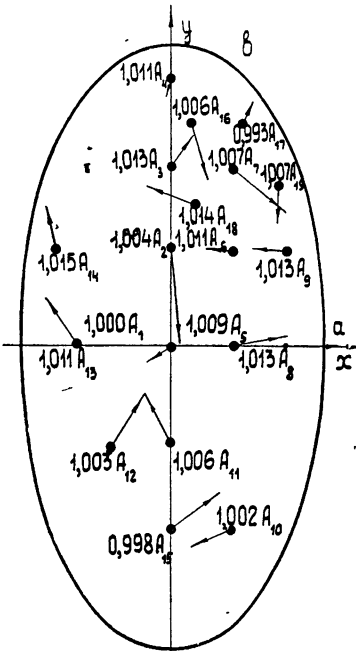


Рис. 2а,  $\sigma = 0,51$  см,  $M$  1 см : 0,08.

Вследствие малой изученности законов отражения затруднительно указать близкую к реальности закономерность возрастания коэффициента зеркальности  $K$  с увеличением угла падения  $\theta$ , поэтому в приведенных ниже примерах были использованы произвольные закономерности этого возрастания (рис. 3 соответствует  $K = 0,95 \sin \theta$  для эллиптического цилиндра, рис. 7 —  $K = 0,95 \sin \theta$ , рис. 8 —  $K = 0,95 (1 - \cos \theta)$ , рис. 9 —  $K = 0,2 (1 - \cos \theta)$  для цилиндра с пилообразными стенками). Здесь плотность газа возрастает у стенок сосудов, и скорости  $v_i$  макроскопического движения газа, величина которых намного превышает стандартное отклонение случайной ошибки вычислений, образуют замкнутые линии тока. Вращательное движение газа в цилиндре с пилообразными стенками пораздо интенсивнее симметричного

относительно осей эллипса движения газа по замкнутым траекториям в эллиптическом цилиндре. Результаты расчетов показали также (рис. 7—9), что характер движения газа не зависит от конкретного закона возрастания зеркальности.

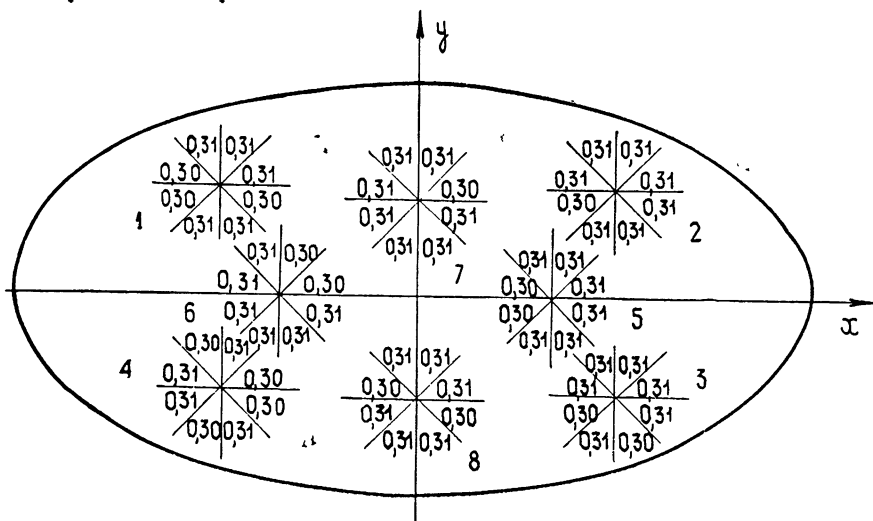


Рис. 2 б)

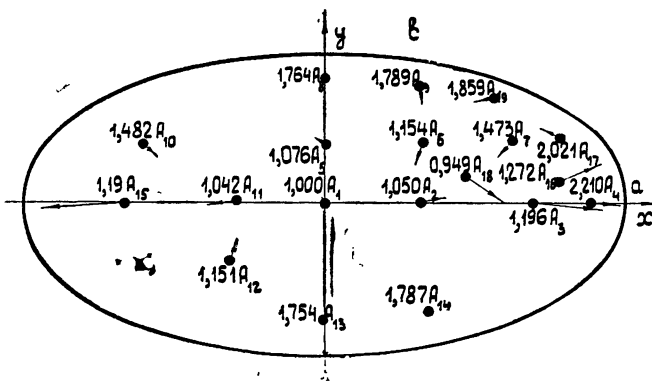


Рис. 3.  $\sigma = 0,75 \text{ м.м.}^2 \text{ М } 1 \text{ см} : 0,04.$

Таким образом, расчеты на ЭВМ с достаточно высокой степенью достоверности указывают на существование упорядоченного макроскопического движения газа в сосудах с одинаково нагретыми стенками, а это противоречит второму началу термодинамики.

Наряду с другими критериями критерий соответствия модели отражения второму началу может оказаться полезным при изучении взаимодействия молекул газа с твердыми поверхностями, например, при выборе необходимого числа коэффициентов аккомодации и установления соотношений между ними\*.

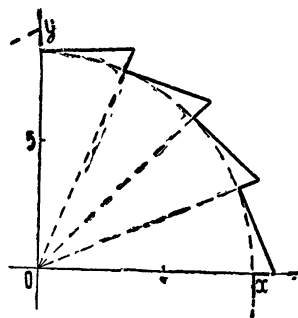


Рис. 4.

\* Как стало известно авторам ко времени корректуры, общие соображения об использовании второго начала термодинамики для исследования законов отражения содержатся в работах Р. А. Милликена [16] и П. С. Эпштейна [17].

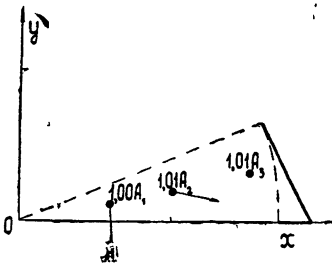


Рис. 5,  $\sigma = 0,42$  см,  
 $M$  1 см: 0,005.

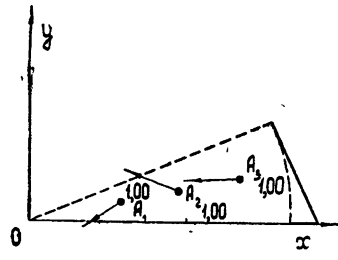


Рис. 6,  $\sigma = 0,5$  см,  
 $M$  1 см: 0,0025.

В данной работе методом, изложенным в [3], вычислено также тангенциальное давление  $p_x$  газа, заключенного между плоскостями, на одной из которых размещены пилообразные выступы (рис. 10). Давление  $p_x$ , приложенное к плоскости I, равно

$$p_x = A \sum_{k=1}^N (l_k - l'_k) / N,$$

где  $l_k, l'_k$  — тангенциальные составляющие единичного вектора скорости молекулы до и после  $k$ -го соударения со стенкой I,  $N$  — общее число соударений с этой стенкой в процессе моделирования,  $A$  — коэффициент, зависящий от температуры стенок, массы и концентрации молекул газа.

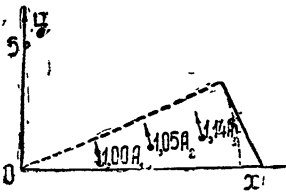


Рис. 7,  $\sigma = 0,07$  мм,  
 $M$  1 см: 0,25.

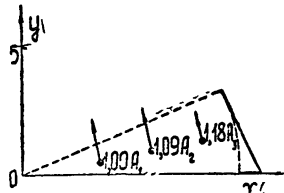


Рис. 8,  $\sigma = 0,06$  мм,  
 $M$  1 см: 0,25.

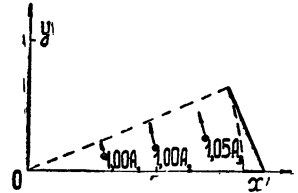


Рис. 9,  $\sigma = 0,4$  мм,  
 $M$  1 см: 0,05.



Рис. 10.

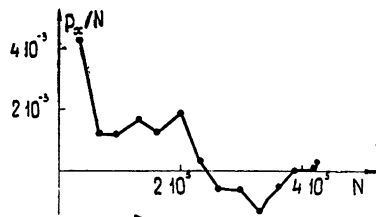


Рис. 11.

При диффузном отражении молекул стенками были получены значения  $N = 4,28 \cdot 10^5$ ,  $p_x/A = 0,026 \cdot 10^{-2}$ . Поскольку вычисленное значение  $p_x/A$  не превышает стандартного отклонения  $\sigma = 0,707 / \sqrt{2N} = 0,078 \cdot 10^{-2}$  случайной ошибки вычислений, можно утверждать, что при диффузном законе отражения тангенциальное давление отсутствует. Это подтверждается приведенным на рис. 11 графиком зависимости случайной величины  $p_x/A$  от  $N$ , полученным в процессе вычислений, где величина  $p_x/A$  испытывает случайные колебания вокруг нулевого значения.

При зеркально-диффузном отражении молекул стенками с возрастающим коэффициентом зеркальности  $K = 0,2$  ( $1 - \cos\theta$  вычисления привели к  $N = 7,93 \cdot 10^{-5}$ ,  $p_x/A = 1,67 \cdot 10^{-2}$ ). Здесь значение  $p_x/A$  намного превышает величину  $\sigma = 0,050 \cdot 10^{-2}$  случайной ошибки, следовательно, на плоскость I действует тангенциальное давление ( $p_x = 0,0154 \text{ дин} \cdot \text{см}^{-2}$  при комнатной температуре стенок и среднем давлении газа  $N_2$  (азот), равном  $10^{-3} \text{ мм рт. ст.}$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Иванов, Ю. И. Неймарк, Изв. АН СССР, МЖГ, № 4, 9 (1967).
2. В. П. Иванов, Ю. И. Неймарк, Изв. АН СССР, МЖГ, № 3, 176 (1968).
3. Г. А. Гарбуз, В. П. Иванов, Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, 29 (1969).
4. Maxwell J. C., On the stresses in Rarefied Gases, The Scientific Papers, Paris, 1890.
5. R. A. Millikan, Phys. Rev., 21, 217 (1923); Русский перевод, Р. А. Милликен, Коэффициенты скольжения в газах и закон отражения молекул от поверхностей твердых тел и жидкостей, Газовая динамика, ИЛ, М., 1950, стр. 260.
6. H. Zahl, A. Ellett, Phys. Rev., 38, 977 (1931).
7. R. M. Zabel, Phys. Rev., 42, 218 (1932)
8. R. R. Hancox, Phys., Rev., 42, 218 (1932).
9. J. N. Smith, W. L. Fite, Recent investigations of gassurface interactions using modulated atomic-beam techniques, Rarefied Gas Dynamics, Proceedings of the Third International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, New York-London, 1963, 430  
Русский перевод, Дж. Смит, У. Файт, Новейшие исследования взаимодействий между газами и поверхностью при помощи метода модулированного атомного пучка, сб. Взаимодействие газов с поверхностями, изд. Мир, М., 1965, стр. 175
10. Sh. Datz, G. E. Moore, E. H. Taylor. The reflection of modulated helium and deuterium molecular beams from platinum surfaces, Rarefied Gas Dynamics, 1, Proceedings Third International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. New York-London, 1963, p. 347, русский перевод, Ш. Датц, Дж. Мур, Э. Тейлор, Отражение модулированных молекулярных пучков гелия и дейтерия от платиновой поверхности, сб. Взаимодействие газов с поверхностями, изд. Мир, М., 1965.
11. W. Jawusch, Investigation of the scattering of gas molecules on various surface, Rarefied Gas Dynamics, 1, Proceedings of the Third International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, New York-London, 1963, p. 414, русский перевод, В. Явтуш. Исследование рассеяния молекул газа на различных поверхностях, сб. Взаимодействие газов с поверхностями, изд. Мир, М., 1965.
12. F. C. Hurlbut, J. Appl. Phys., 28, № 8, 844 (1957).
13. F. C. Hurlbut, On the molecular interactions between gases and solids, Dynamics of Manned Hifting Planetary Entry, Wiley, New York-London, 1963, p. 754; русский перевод, Ф. Херлбат, О молекулярных взаимодействиях между газами и твердыми телами, сб. Взаимодействие газов с поверхностями, изд. Мир, М., 1965.
14. М. Каминский, Атомные и ионные столкновения на поверхности металла, изд. Мир, М., 1967.
15. М. Н. Коган, Динамика разреженного газа, изд. Наука, М., 1967
16. Millikan R. A. The general law of fall of a small spherical body through a gas, and its bearing upon the nature of molecular reflection from surfaces. Phys. Rev., 1923, vol 22, № 1.
17. Epstein P. S. Phys. Rev., 1924, vol 23, p. 710—733. Русск. перев. П. С. Эпштейна. О сопротивлении сфер при движении в газах Сб. «Газовая динамика», изд. иностр. лит., 1950, стр. 283—309.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
25 января 1971 г.

ON SPECULAR-DIFFUSE MODEL FOR INTERACTION OF GAS  
MOLECULES WITH SOLID SURFACE

V. P. Ivanov, Yu. I. Neimark

The steady state of a strongly rarefied gas in thermally uniform vessels is investigated on an electronic computer. The computational procedure is based on the mathematical simulation of a gas molecules random motion and is described in [1-3]. Along with the commonly used diffuse and specular-diffuse laws for wall-reflected

gas molecules [4, 5] a specular-diffuse reflection law is employed in which in accordance with experiment [6-14] the specular-reflected molecules fraction increases with incidence angle.

As is generally known (e. g. [15]) the absolute Maxwell distribution in velocity of gas molecules is attained due to mutual collisions if the Maxwell distribution persists under the volume boundary reflection. It is also known that the diffuse and specular reflection laws do not break the Maxwell distribution and whatever small collisions of molecules must lead to the Maxwell distribution. Obviously the Maxwell distribution will also persist in the case of specular-diffuse reflection law when the number of molecules diffusedly or specularly reflected by a surface element is proportional to the cosine of reflection angle. But if the specularity coefficient is not constant and depends on the incidence angle the Maxwell distribution does not persist since the distribution law of specularly reflected molecules differs from the cosine law. As the carried out mathematical experiment indicates a steady motion of gas in the studied vessels (elliptic cylinder and others) includes macroscopic flows which implies that this reflection law is in contradiction to the second principle of thermodynamics.

---

УДК 62—504

**ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ**

*В. А. Брусин*

Рассматривается класс нелинейных дискретных систем управления со стохастическими возмущениями параметров. Ставится задача об абсолютной устойчивости. Формулируется теорема. Рассмотрен конкретный пример. Для этого примера проводится обобщение на непрерывный случай.

1. Будем рассматривать класс дискретных систем управления, которые описываются разностным уравнением вида

$$x_n(\lambda) = \sum_{m=0}^{n-1} G(n-m) \Psi(x_m(\lambda), \mu_m(\lambda), m) + f_n, \tag{1}$$

где  $\mu_n(\lambda)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ;  $\lambda \in \Omega$ )—случайный процесс на вероятностном пространстве  $(\Omega, \chi, P)$  [1], принадлежащий некоторому стохастическому классу  $H$ ;  $\mu_n(\lambda) \equiv (\mu_0(\lambda), \dots, \mu_n(\lambda))$ ; функция  $\Psi(x, \mu, n)$  принадлежит некоторому классу  $K$  непрерывных по всем аргументам функций такого вида, причем

$$\Psi(0, \mu, m) = 0 \quad (m = 0, 1, \dots). \tag{2}$$

Предполагается далее, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |G(n)| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2 < \infty. \tag{3}$$

В силу условия (2) у нашей системы при  $f_n \equiv 0$  имеется стационарное состояние

$$x_n^* = 0 \quad (n = 0, 1, \dots). \tag{4}$$

Относительно этого стационарного состояния можно поставить задачу об абсолютной устойчивости (в стохастическом смысле).

Абсолютно-устойчивая по отношению к классам  $H$  и  $K$  стохастическая система (1)—(3) определяется (по аналогии с детерминированным вариантом этой задачи [2]) как такая система, для которой условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E |x_n|^2 \rightarrow 0 \tag{5}$$

выполняется для всех функций  $f_n$  и при любых  $\Psi \in K$  и  $\mu_n \in H$ .

2. Для детерминированного варианта системы (1)—(3), т. е. когда  $\mu_n$ —детерминированный процесс, наиболее эффективными методами решения задачи об абсолютной устойчивости являются в настоящее время метод В. М. Попова (в дискретном его варианте [2]) и его развитие—метод квадратичных связей Якубовича [3]. При практическом использовании метода квадратичных связей основная задача заключается

в нахождении квадратичной формы  $F(x, \Psi)^*$ , которая в силу (1)–(3) и для всех  $\Psi \in K$  удовлетворяла условиям

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N F(x_n, \Psi_n) > -\infty, \quad (6)$$

$$F(0, \Psi) \geq 0. \quad (7)$$

Если такая форма найдена, то в силу теоремы 1 работы [3] критерий абсолютной устойчивости будет выражаться в виде условия

$$F(\chi(e^{j\omega}) \hat{\Psi}(e^{j\omega}), \hat{\Psi}(e^{-j\omega})) < 0 \quad (\omega \in (-\infty, \infty)) \quad (8)$$

для всех  $\hat{\Psi} \neq 0$ , где  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\chi(z) — D$ -изображение дискретной функции  $G(n)$  [3], а  $\hat{\Psi}(z) — D$ -изображение функции  $\Psi_n \equiv \Psi(x_n, \mu_n, n)$ . Поскольку  $F$  — квадратичная форма, то (и в этом зерно данного метода и метода Попова) вместо условия (8) можно (с помощью критерия Сильвестра) написать другое, вообще говоря, более сильное условие, но зато свободное от неизвестной функции  $\hat{\Psi}(z)$ .

Обратимся к стохастическому варианту задачи. В этом случае от формы  $F$  естественно требовать выполнения более слабого, чем (6), условия

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \sum_{n=0}^N F(x_n, \Psi_n) > -\infty \quad (9)$$

для всех  $\Psi \in K$ ,  $\mu_n \in H$ .

*Теорема.* Если существует такая квадратичная форма  $F$ , которая бы в силу (1)–(3) и для всех  $\Psi \in K$ ,  $\mu_n \in H$  удовлетворяла условиям (7) и (9) (с вероятностью 1), то из выполнения (с вероятностью 1) условия (8) вытекает выполнение условия (5) для всех таких  $\Psi_n$  и  $\mu_n$ .

Доказательство представляет собой естественное обобщение доказательства теоремы 1 работы [3] на стохастический случай.

Из сказанного выше легко понять преимущество стохастической постановки задачи об абсолютной устойчивости перед детерминистской. Помимо ее большей адекватности реальным процессам, это преимущество состоит еще и в менее жестких, вообще говоря, требованиях, предъявляемых к системе (1)–(3) соответствующими методами абсолютной устойчивости. Ибо может случиться (и приведенный ниже пример — подтверждение тому), что для некоторого класса  $K$  нельзя найти квадратичную форму вида (6), (7), но можно найти таковую при условиях (7) и (9).

3. Рассмотрим пример. Пусть  $H$  — класс дискретных случайных процессов  $\{\mu_n\}$  с независимыми приращениями [1], удовлетворяющих условию

$$E[(\mu_{n+1} - \mu_n) | \mu_n] = 0, \quad E[(\mu_{n+1} - \mu_n)^2 | \mu_n] = \sigma_n^2, \quad (10)$$

$$\sigma_n^2 \leq \sigma^2 < \infty \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (10a)$$

Функция  $\Psi$  пусть имеет вид

$$\Psi(x, \mu(n), n) = \varphi_1(x)(\mu_{n+1} - \mu_n) + \varphi_2(x, n). \quad (11)$$

\* Для простоты ограничиваемся связями такого вида, хотя Якубовичем рассматривались и более сложные квадратические связи.

Класс  $K$  определяется как множество непрерывных функций вида (11), удовлетворяющих условиям

$$\varphi_2(0, n) = 0, \quad 0 \leq \frac{\varphi_2(x, n)}{x} \leq h, \quad |\varphi_1(x)| \leq l |\varphi_2(x, n)|. \quad (12)$$

Рассмотрим выражение

$$F(x_n, \Psi_n) \equiv x_n \Psi_n - \mu \Psi_n^2, \quad 0 < \mu \leq [h(1 + l^2 \sigma^2)]^{-1}. \quad (13)$$

Используя свойства процесса  $\{\mu_n\}$  и условие (12), получаем

$$\begin{aligned} E(x_n \Psi_n - \mu \Psi_n^2) &= E E \{ \varphi_1(x_n)(\mu_{n+1} - \mu_n) x_n - \\ &- 2\mu \varphi_1(x_n) \varphi_2(x_n, n)(\mu_{n+1} - \mu_n) - \mu \varphi_1^2(x_n)(\mu_{n+1} - \mu_n)^2 | \mu_n \} + \\ &+ E \{ \varphi_2(x_n, n) x_n - \mu \varphi_2^2(x_n, n) \} \geq \left( \frac{1}{h} - \mu - \mu l^2 \sigma^2 \right) E \varphi_2^2(x_n, n). \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (13) удовлетворяет условиям (7) — (9). Критерий абсолютной устойчивости (8) в этом случае приводится к виду

$$\operatorname{Re} \chi(z) - \mu < 0 \quad (\forall z, |z| = 1). \quad (14)$$

4. Вышеизложенное во многих случаях может быть распространено на непрерывные системы. В частности, это возможно для примера из п. 3.

Пусть в дополнение к сформулированным в п. 2 требованиям  $\mu_n$  — эргодический, гауссовский процесс и  $\sigma_n = \sigma$ . Непрерывным аналогом такого варианта нашего примера будет стохастическая система, описываемая уравнением

$$x(t, \lambda) = (И) \int_0^t G(t - \tau) [\varphi_1(x(\tau, \lambda)) d\mu(\tau, \lambda) + \varphi_2(x(\tau, \lambda), \tau) d\tau + f(t)], \quad (15)$$

где  $\{\mu(t, \lambda)\}$  — непрерывный эргодический гауссовский процесс с независимыми приращениями [1] (винеровский процесс), для которого справедливы соотношения

$$E d\mu = 0, \quad E |d\mu|^2 = \sigma^2 dt, \quad (16)$$

а через (И)  $\int$  обозначен стохастический интеграл Ито [1, 4].

По аналогии с предыдущим определением будем считать стохастическую систему (15) абсолютно-устойчивой относительно класса  $K$  вектор-функций  $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ , удовлетворяющих условию (12), и класса  $H(\sigma^2)$  винеровских процессов  $\mu(t, \lambda)$ , удовлетворяющих условию (16), если при любых  $\mu(t, \lambda) \in H(\sigma^2)$  и  $\{\varphi_1, \varphi_2\} \in K$   $\lim_{t \rightarrow \infty} E |x(t, \lambda)|^2 = 0$ .

*Теорема 2.* Пусть  $K(p)$  — изображение по Лапласу от  $G(t)$  — является дробно-рациональной функцией, и выполняются следующие условия. 1) При некотором  $\varepsilon > 0$

$$|G(t)| + |f(t)| \leq \text{const } e^{-\varepsilon t}. \quad (17)$$

2) При любых  $\omega \geq 0$

$$\operatorname{Re} K(j\omega) - \mu < 0. \quad (18)$$

Тогда стохастическая система (12), (15), (16) будет абсолютно устойчивой.

Доказательство этого результата основывается на том факте, что решения уравнения (15) являются среднеквадратическим пределом ре-



шений семейства стохастических разностных уравнений вида (1), зависящих от положительного параметра  $\nu^{-1}$  — «величины квантования» [4]\*. Для детерминированных непрерывных систем вида (15) ( $\mu_n \equiv 0$ ) подобная процедура приближения их дискретными системами хорошо известна, а для детерминированной задачи об абсолютной устойчивости проводилась в работе [5].

Доказательство теоремы 2 приводится в Приложении.

*Замечание.* Все вышеизложенное может быть обобщено на многомерный случай, т. е. когда  $\Psi, x, \mu, f$  — векторы, а  $G(n)$  — матрица, аналогично тому, как это делается в обычной задаче об абсолютной устойчивости.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся результатами работы [3]. Обозначим

$$\gamma^N(\lambda) = - \sum_{n=0}^N F(x_n(\lambda), \Psi_n(\lambda)).$$

Следуя доказательству теоремы 1 этой работы (стр. 70), находим, что с вероятностью 1

$$\sum_{n=0}^N |\Psi_n(\lambda)|^2 + |x_n(\lambda)|^2 \leq \text{const} \sum_n |G(n)| (|\gamma^N| + \sum_n f_n^2).$$

Применяя к обеим частям этого неравенства оператор математического ожидания  $E$ , устремляя затем  $N \rightarrow \infty$  и учитывая, что в силу (9)  $\lim_{N \rightarrow \infty} E \gamma^N(\lambda) \leq \gamma < \infty$ , получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} E(|\Psi_n(\lambda)|^2 + |x_n(\lambda)|^2) \leq \text{const} (|\gamma| + \sum_{n=0}^{\infty} f_n^2). \quad (\text{П.1})$$

Откуда и следует искомое утверждение.

Доказательство теоремы 2. Дискретная аппроксимация уравнения (15), отвечающая величине квантования  $\nu^{-1}$ ,  $\nu \in [\nu_0, \infty)$ , записывается в виде

$$x_n^{(\nu)} = \sum_{m=0}^{n-1} G^{(\nu)}(n-m) \Psi^{(\nu)}(m) + f_n^{(\nu)}, \quad (\text{П.2})$$

где

$$\Psi^{(\nu)}(n) \equiv \varphi_1(x_n^{(\nu)})(\mu_{n+1}^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}) + \varphi_2(x_n^{(\nu)}, n),$$

$$(\mu_{n+1}^{(\nu)} - \mu_n^{(\nu)}) = \nu \left( \mu \left( \frac{n+1}{\nu} \right) - \mu \left( \frac{n}{\nu} \right) \right),$$

$$G^{(\nu)}(n) = \frac{1}{\nu} G \left( \frac{n}{\nu} \right), \quad f_n^{(\nu)} = f \left( \frac{n}{\nu} \right).$$

При  $\nu \rightarrow \infty$

$$E \left\| x_n^{(\nu)} - x \left( \frac{n}{\nu} \right) \right\|^2 + \left\| \Psi_n^{(\nu)} - \Psi \left( \frac{n}{\nu} \right) \right\|^2 \rightarrow 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Без требования дробно-рациональности  $K(p)$  это утверждать, вообще говоря, нельзя. Такое требование позволяет свести описание процесса  $x(t, \lambda)$  к некоторой системе стохастических дифференциальных уравнений и применить теорию обобщенных марковских процессов.

Очевидно, что для процесса  $\mu_n^{(\nu)}(\lambda)$  будут справедливы все условия теоремы 1, причем  $\sigma_n = \sigma$ ,  $\gamma = 0$ . Обратимся к условию (18). На основании этого условия и условия (17) можно утверждать [5], что найдется такое достаточно малое  $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon)$ , для которого

$$\operatorname{Re} K^{(\nu)}(j\omega - \bar{\varepsilon}) - \nu < 0 \quad (\omega \leq 0),$$

где

$$K^{(\nu)}(j\omega) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} G^{(\nu)}(n) \exp\left(-j\omega n \frac{1}{\nu}\right).$$

Введем новые функции

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \bar{\varepsilon} \nu^{-1}, \quad \omega_\nu = \omega \nu^{-1}, \quad \bar{x}_n^{(\nu)} = x_n^{(\nu)} \exp(\bar{\varepsilon}_\nu n),$$

$$\bar{\Psi}_n^{(\nu)} = \Psi_n^{(\nu)} \exp(n \bar{\varepsilon}_\nu), \quad \bar{f}_n^{(\nu)} = f_n^{(\nu)} \exp(n \bar{\varepsilon}_\nu),$$

$$\bar{G}^{(\nu)}(n) = G^{(\nu)}(n) \exp(n \bar{\varepsilon}_\nu),$$

$$\bar{\chi}(\exp(j\omega_\nu)) = K^{(\nu)}(j\omega_\nu - \bar{\varepsilon}_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{G}^{(\nu)}(n) \exp(-j\omega_\nu n).$$

Из уравнения (П.2) получаем

$$\bar{x}_n^{(\nu)} = \sum_{m=0}^n \bar{G}^{(\nu)}(n-m) \bar{\Psi}_m^{(\nu)} + \bar{f}_n^{(\nu)},$$

причем функции  $\bar{G}^{(\nu)}(n)$ ,  $\bar{\Psi}_n^{(\nu)}$ ,  $\bar{f}_n^{(\nu)}$ ,  $\bar{\chi}(e^{j\omega_\nu})$  удовлетворяют всем условиям теоремы 1 (именно, условиям (2), (3), (13 а), (14)). Поэтому будет справедливо неравенство (1), которое в данном случае ( $\gamma = 0$ ) записывается в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} E |\bar{\Psi}_n^{(\nu)}(\lambda)|^2 + |\bar{x}_n^{(\nu)}(\lambda)|^2 \leq \operatorname{const} \left( \sum_n |\bar{G}^{(\nu)}(n)| \right) \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{f}_n^{(\nu)})^2. \quad (\text{П.3})$$

Умножая обе части неравенства (П.3) на  $\nu^{-1}$  и переходя к пределу при  $\nu \rightarrow \infty$ , получаем оценку

$$\int_0^{\infty} E \Psi^2(t, \lambda) e^{2\bar{\varepsilon} t} dt \leq \operatorname{const} \left( \int_0^{\infty} |G(t)| e^{\bar{\varepsilon} t} dt \right) \int_0^{\infty} f^2(t) e^{2\bar{\varepsilon} t} dt. \quad (\text{П.4})$$

Из оценки (П.4) в силу уравнения (15) и условия (17) следует ограниченность сверху функции  $E |x(t, \lambda)|^2 e^{2\bar{\varepsilon} t}$ , т. е. что  $E |x(t, \lambda)|^2 \xrightarrow{(\text{в.к.с.п.})} 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.
2. Я. З. Цыпкин, ДАН СССР, 145, № 1, 52 (1962).
3. В. А. Якубович, Автоматика и телемеханика, № 2, 59 (1968).
4. Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, изд. Наука, М., 1969.
5. Э. Джурри, Б. Ли, Автоматика и телемеханика, № 6, 945 (1965).

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
25 января 1971 г.

#### ON ABSOLUTE STABILITY OF STOCHASTIC SYSTEMS WITH PARAMETRIC PERTURBATIONS

V. A. Broosin

A class of control nonlinear discrete systems with stochastic perturbations of parameters is studied. A problem in absolute stability is set. A theorem is formulated. A specific example is considered. For this example a generalization to a continuous case is carried out.

УДК 539.3

## КАЧЕНИЕ КОЛЕСА С ПНЕВМАТИКОМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ УВОДА

*Х. Т. Тураев*

Изучается качение колеса при различных режимах увода и выясняется влияние изменения угла наклона колеса на амплитуды деформации пневматика

Качение колеса при угловых и боковых колебаниях было рассмотрено в работах [1-4] с применением кинематических связей, накладываемых на колесо при его качении по плоскости. Однако в работах [2, 4] высказываются различные мнения о влиянии изменения угла наклона колеса на амплитуды боковой и угловой деформации пневматика.

Теория качения пневматика была создана Келдышем [5], позднее был разработан общий подход к решению задачи об устойчивости движения экипажа на баллонных колесах [6].

В данной работе изучается качение колеса при различных режимах увода и выясняется влияние изменения угла наклона колеса на амплитуды боковой и угловой деформации пневматика.

Согласно теории [5], качение пневматика без скольжения характеризуется следующими двумя условиями.

1) Касательная к линии качения пневматика совпадает с осью поверхности контакта.

2) Кривизна линии качения пневматика однозначно определяется параметрами деформации  $\xi$ ,  $\varphi$ ,  $\chi$ , где  $\xi$  — боковое смещение центра площадки контакта пневматика,  $\varphi$  — угол поворота площадки контакта по отношению к следу средней плоскости колеса на дороге,  $\chi$  — угол между осью  $Oz$  и средней плоскостью колеса (рис. 1).

Эти условия приводят к следующим двум уравнениям кинематических неинтегрируемых связей, накладываемых на баллонное колесо при его качении по плоскости [6]:

$$\dot{x} - r\dot{\chi} + \dot{\xi} + V\theta + V\varphi = 0, \tag{1}$$

$$\dot{\theta} + \dot{\varphi} - \alpha V\dot{\xi} + \beta V\dot{\varphi} + \gamma V\dot{\chi} = 0,$$

где  $x$  — абсцисса центра колеса,  $r$  — радиус колеса,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — кинематические параметры пневматика, определяемые экспериментально [7].

Пользуясь уравнениями связи (1), рассмотрим качение колеса с постоянной скоростью  $V$  при  $\chi = \chi_0 \cos(\omega t)$  и  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$ , считая  $\dot{x} = 0$ . Уравнения в данном случае принимают вид

$$\dot{\xi} + V\varphi + (\omega r \chi_0 + V\theta_0) \sin(\omega t) = 0, \tag{2}$$

$$\dot{\varphi} - \alpha V\dot{\xi} + \beta V\dot{\varphi} + (\gamma V\chi_0 + \omega\theta_0) \cos(\omega t) = 0$$

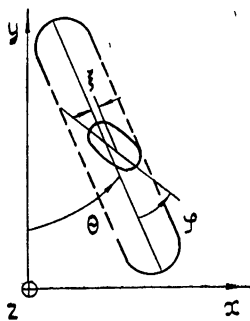


Рис. 1. Схема качения колеса.

или после приведения к одному уравнению второго порядка относительно  $\xi$

$$\ddot{\xi} + \beta V \dot{\xi} + \alpha V^2 \xi = \chi_0 (\gamma V^2 - \omega^2 r) \cos(\omega t) - \beta V (V \theta_0 + \omega r \chi_0) \sin(\omega t).$$

Общее решение уравнения представляет собой сумму затухающих свободных и вынужденных колебаний. Свободные колебания исчезают после переходного процесса, определяемого временем

$$\tau = \text{Re} \{ 2 [\beta V (1 + \sqrt{1 - 4\alpha/\beta^2})]^{-1} \}.$$

Решение для вынужденных колебаний найдем в виде

$$\xi = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad (3)$$

где

$$A = \frac{\chi_0 (\gamma V^2 - \omega^2 r) (\alpha V^2 - \omega^2) + \beta^2 V^2 \omega (V \theta_0 + \omega r \chi_0)}{(\alpha V^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 V^2 \omega^2}, \quad (4)$$

$$B = \frac{\beta V [\omega \chi_0 (\gamma V^2 - \omega^2 r) - (\alpha V^2 - \omega^2) (V \theta_0 + \omega r \chi_0)]}{(\alpha V^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 V^2 \omega^2}.$$

Амплитуда колебаний равна

$$\xi_a = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Подставив в это уравнение выражения  $A$  и  $B$  из (4) и проведя преобразования, получим

$$\xi_a = \left[ \frac{\chi_0^2 \left( \gamma - r \frac{\omega^2}{V^2} \right)^2 + \beta^2 \left( \theta_0 + r \chi_0 \frac{\omega}{V} \right)^2}{\left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right)^2 + \beta^2 \frac{\omega^2}{V^2}} \right]^{1/2}. \quad (5)$$

Колебание боковой деформации  $\xi$  не будет совпадать по фазе с колебанием угла наклона колеса  $\chi$ . Угол сдвига фаз  $\delta_1$  определится из уравнения

$$\text{tg } \delta_1 = \frac{\beta \left[ \left( \frac{\omega}{V} \right) \left( \gamma - r \frac{\omega^2}{V^2} \right) \chi_0 - \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) \left( \theta_0 + r \chi_0 \frac{\omega}{V} \right) \right]}{\chi_0 \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) \left( \gamma - r \frac{\omega^2}{V^2} \right) + \beta^2 \frac{\omega}{V} \left( \theta_0 + r \chi_0 \frac{\omega}{V} \right)}. \quad (6)$$

Найдем из системы уравнений (2), имея в виду (3), после некоторых преобразований, закон изменения угловой деформации при вынужденных колебаниях

$$\varphi = \varphi_a \sin(\omega t - \delta_2), \quad (7)$$

где

$$\varphi_a = \frac{\left( \frac{\omega}{V} \right) (\alpha r - \gamma) \chi_0 + \theta_0 \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right)}{\left[ \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right)^2 + \beta^2 \frac{\omega^2}{V^2} \right]^{1/2}}, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{\beta \left( \frac{\omega}{V} \right)}{\alpha - \frac{\omega^2}{V^2}}. \quad (9)$$

Зная боковую и угловую деформации пневматика, легко вычислить обобщенные силы реакции опорной поверхности на пневматик по следующим уравнениям [6]:

$$\begin{aligned} F &= a\xi + \sigma N\chi, \\ M_\theta &= b\varphi, \\ M_\chi &= \sigma N\xi + \rho N\chi, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $a, b, \sigma, \rho$  — коэффициенты упругости пневматика.

Подставляя значения  $\xi$  и  $\chi$  в первое уравнение системы (10), находим закон изменения боковой силы во время движения колеса

$$F = F_a \cos(\omega t - \delta_3),$$

где

$$\begin{aligned} F_a &= \left\{ \left\{ \chi_0^2 \left[ a \left( \gamma - r \frac{\omega^2}{V^2} \right) + \sigma N \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) \right]^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \beta^2 \left[ \frac{\omega}{V} (ar + \sigma N) \chi_0 + a\theta_0 \right]^2 \right\} \left[ \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right)^2 + \beta^2 \frac{\omega^2}{V^2} \right]^{-1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_3 &= \left\{ a\beta \left[ \frac{\omega}{V} (\gamma - ar) \chi_0 - \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) \theta_0 \right] \right\} \times \\ &\times \left\{ \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) \left[ \sigma N \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) + a \left( \gamma - r \frac{\omega^2}{V^2} \right) \right] \chi_0 + \right. \\ &+ \left. \beta^2 \frac{\omega}{V} \left[ \frac{\omega}{V} (ar + \sigma N) \chi_0 + a\theta_0 \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

а подставляя в третье уравнение, находим момент относительно продольной оси колеса

$$M_\chi = M_a \cos(\omega t - \delta_4),$$

где

$$\begin{aligned} M_a &= \left\{ \left\{ \chi_0^2 \left[ \sigma \left( \gamma - r \frac{\omega^2}{V^2} \right) + \rho \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) \right]^2 + \beta^2 \left[ \frac{\omega}{V} (\sigma r + \rho) + \sigma \theta_0 \right]^2 \right\} \times \right. \\ &\times \left. \left[ \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right)^2 + \beta^2 \frac{\omega^2}{V^2} \right]^{-1/2} N, \right. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta_4 &= \left\{ \sigma\beta \left[ \frac{\omega}{V} (\gamma - ar) \chi_0 - \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) \theta_0 \right] \right\} \times \\ &\times \left\{ \chi_0 \left[ \rho \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) + \sigma \left( \gamma - r \frac{\omega^2}{V^2} \right) \right] \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) + \right. \\ &+ \left. \beta^2 \frac{\omega}{V} \left[ \frac{\omega}{V} (\sigma r + \rho) + \sigma \theta_0 \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Момент относительно вертикальной оси колеса определяется из второго уравнения системы (10).

Для выяснения вопроса о влиянии изменения угла наклона колеса  $\chi$  на амплитуды боковой и угловой деформации пневматика рассмотрим качение колеса с постоянной скоростью  $V$  при

$$\chi = \chi_0 \cos(\omega t) \quad (\theta = 0), \quad \theta = \theta_0 \sin(\omega t) \quad (\chi = 0).$$

В первом случае, положив  $\theta = 0$  в уравнениях (5) и (8), получим амплитуды боковой и угловой деформации пневматика

$$\xi_a = \left\{ \left[ \left( \gamma - r \frac{\omega^2}{V^2} \right)^2 + \beta^2 \frac{\omega^2}{V^2} r^2 \right] \left[ \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right)^2 + \beta^2 \frac{\omega^2}{V^2} \right]^{-1} \right\}^{1/2} \chi_0, \quad (5a)$$

$$\varphi_a = \left[ \frac{\omega}{V} (\alpha r - \gamma) \right] \left[ \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right)^2 + \beta^2 \frac{\omega^2}{V^2} \right]^{-1/2} \chi_0, \quad (8a)$$

а из уравнений (6) и (9) получим углы сдвига фаз

$$\text{tg } \delta_1 = \left[ \beta \frac{\omega}{V} (\gamma - \alpha r) \right] \left[ \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) \left( \gamma - r \frac{\omega^2}{V^2} \right) + \beta^2 \frac{\omega^2}{V^2} r \right]^{-1}, \quad (6a)$$

$$\text{tg } \delta_2 = \beta \frac{\omega}{V} \left[ \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right]^{-1}. \quad (9a)$$

Будем исследовать изменения амплитуды  $\xi_a$  и  $\varphi_a$  в зависимости от скорости  $V$  качения колеса.

При  $V = 0$  амплитуда боковой деформации пневматика  $\xi_a = r\chi_0$  (амплитуде боковых колебаний колеса, получаемой за счет изменения угла наклона колеса), а при  $V \rightarrow \infty$  она стремится к  $\frac{\gamma}{\alpha} \chi_0$  (к величине боковой деформации, возникающей при качении с  $\chi = \chi_0 = \text{const}$ ).

При скорости, равной

$$V_m = \left[ \frac{2r}{\alpha r + \gamma + \sqrt{\alpha r^2 + \gamma^2 + 2\beta^2 r (\alpha r + \gamma)}} \right]^{1/2} \omega, \quad (15)$$

амплитуда боковой деформации достигает максимума.

Подставив  $V_m$  из (15) в (5a) после преобразований, находим максимальную амплитуду боковых деформаций

$$\xi_a = x_a [(A + BC)/(A + BD)]^{1/2}, \quad (16)$$

где

$$x_a = r\chi_0,$$

$$A = x_a^2 \alpha^2 + \chi_0^2 \gamma^2 + 2x_a \beta^2 (x_a \alpha + \chi_0 \gamma) - x_a \chi_0 \alpha \gamma,$$

$$B = [x_a^2 \alpha^2 + \chi_0^2 \gamma^2 + 2x_a \beta^2 (x_a \alpha + \chi_0 \gamma)]^{1/2},$$

$$C = x_a \alpha + x_a \beta^2 - \chi_0 \gamma,$$

$$D = x_a \beta^2 - x_a \alpha + \chi_0 \gamma.$$

Из формулы (16) следует, что максимальная амплитуда боковых деформаций пневматика больше амплитуды  $x_a$  поперечных колебаний колеса.

Найдем скорость качения колеса, при которой  $\xi_a$  равна амплитуде поперечных колебаний колеса. Для этого в уравнение (5a) вместо  $\xi_a$  подставим  $x_a = r\chi_0$  и, решая относительно  $V$ , получим

$$V_k = \left( \frac{2r}{\alpha r + \gamma} \right)^{1/2} \omega. \quad (17)$$

При скорости, равной

$$V_m = \omega / \sqrt{\alpha}, \quad (18)$$

амплитуда угловой деформации достигает максимума

$$\varphi_m = \left( r \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} \right) \chi_0, \quad (19)$$

после чего, с увеличением скорости, уменьшается и при  $V \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

Рассмотрим теперь качение колеса при  $\chi = 0$ ,  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$ . В этом случае пневматика также имеет боковую и угловую деформацию  $\xi$  и  $\varphi$ . Приравняв  $\chi = 0$ , из уравнений (5) и (8) получим амплитуды боковых и угловых деформаций

$$\xi_a = \beta \left[ \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right)^2 + \beta^2 \frac{\omega^2}{V^2} \right]^{-1/2} \theta_0, \quad (56)$$

$$\varphi_a = \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) \left[ \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right)^2 + \beta^2 \frac{\omega^2}{V^2} \right]^{-1/2} \theta_0, \quad (86)$$

а из уравнений (6) и (9) получим углы сдвига фаз

$$\operatorname{tg} \delta_1 = - \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right) \left( \beta \frac{\omega}{v} \right)^{-1}, \quad (66)$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \beta \frac{\omega}{V} \left( \alpha - \frac{\omega^2}{V^2} \right)^{-1}. \quad (96)$$

В данном случае при  $V = 0$  амплитуда боковой деформации  $\xi_a = 0$  и при  $V \rightarrow \infty$  стремится к  $\frac{\beta}{\alpha} \theta_0$ . Амплитуда угловой деформации

$\varphi_a = -\theta_0$  при  $V = 0$  и стремится к  $\theta_0$  при  $V \rightarrow \infty$ . Следовательно, при  $V \rightarrow \infty$   $\xi_a$  и  $\varphi_a$  стремятся к величинам, возникающим при качении колеса с постоянным углом увода  $\theta_0$ .

На рис. 2 приведены графики зависимости амплитуды боковых и угловых деформаций, а также боковой силы от скорости качения колеса для тех же значений кинематических параметров, что и в примере работы [1],  $r = 0,3$  м,  $\sigma = 0,8$ ,  $a = 10000$  кг м<sup>-1</sup>,  $N = 450$  кг,  $\theta_0 = \chi_0 = 0,035$ ,  $\omega = 62,8$  сек<sup>-1</sup>.

Сравнение кривых, полученных при качении в условиях  $\chi = 0$ ,  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$  и  $\theta = 0$ ,  $\chi = \chi_0 \cos(\omega t)$ , показывает, что они резко отличаются по виду: в первом случае наибольшие величины деформаций и боковых сил соответствуют высоким скоростям, а во втором случае, наоборот, при высоких скоростях деформации и силы минимальны.

При качении в случае  $\chi = \chi_0 \cos(\omega t)$ ,  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$  по мере увеличения скорости  $V$  амплитуды боковой и угловой деформации, а также боковой силы увеличиваются, переходят через максимумы, а затем снижаются и при  $V \rightarrow \infty$  стремятся соответственно к асимптотам

$$\xi = \frac{\beta}{\alpha} \theta_0 + \frac{\gamma}{\alpha} \chi_0,$$

$$\varphi = \theta_0,$$

$$F = \left[ \left( \sigma N + a \frac{\gamma}{\alpha} \right)^2 \chi_0^2 + a^2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \theta_0^2 \right]^{1/2}.$$

Таким образом, рассмотрение качения колеса с пневматиком при различных режимах увода позволяет сделать следующие выводы.

- 1) Изменение угла наклона колеса  $\chi$  значительно влияет на амплитуды боковой и угловой деформации пневматика, и тем самым на амплитуды обобщенных сил реакций.
- 2) При исследованиях колебаний колеса применима гипотеза увода лишь при больших скоростях качения, т. е. при  $\omega/V \ll 1$ .

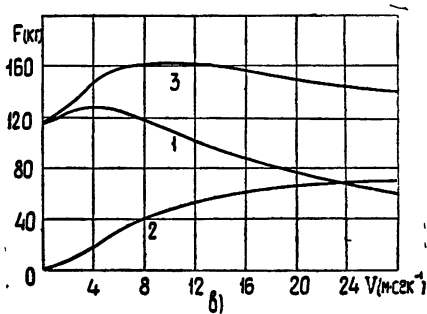
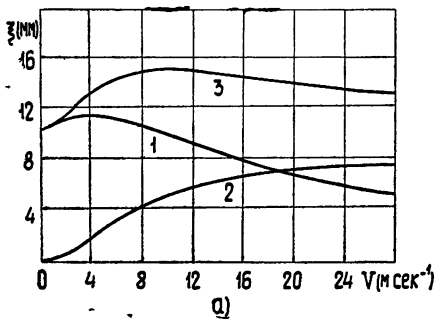
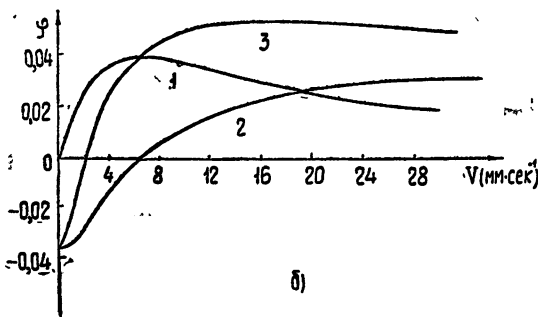


Рис. 2. Зависимость амплитуд боковых (а), угловых (б) деформации пневматика и поперечных сил реакции (в) от скорости качения колеса при качении в различных режимах увода: 1 —  $\theta = 0$ ,  $\chi = \chi_0 \cos(\omega t)$ ; 2 —  $\chi = 0$ ,  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$ ; 3 —  $\chi = \chi_0 \cos(\omega t)$ ,  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$ .

- 3) Полученные формулы позволяют определить величины деформации пневматика и обобщенных сил реакции, возникающих при колебаниях колес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. М. Певзнер, Автомобильная и тракторная промышленность, № 5, 13 (1954).
2. Я. М. Певзнер, Тр научно-исследовательского автомобильного и автомоторного института, вып. 3, 3 (1969).
3. И. К. Пчелин, А. А. Хачатуров, Автомобильная промышленность, № 12, 12 (1964).
4. И. К. Пчелин, А. А. Хачатуров, Автомобильная промышленность, № 6, 19 (1966).
5. М. В. Келдыш, Тр центрального аэро-гидродинамического института, № 564, 1 (1945).
6. Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев, Динамика неголономных систем, изд. Наука, М., 1967
7. Х. Т. Тураев, Изв высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 11 (1971).

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию 10 июля 1970 г.

ROLLING MOTION OF WHEEL WITH PNEUMATIC UNDER VARIOUS MODES OF WALK-OFF

Kh. T. Turayev

A rolling motion of a wheel is studied under various modes of walk-off and the influence of a change in wheel's angle of gradient on the pneumatic deformation amplitude is ascertained.



УДК 539.3

## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И КОЭФФИЦИЕНТОВ УПРУГОСТИ ПНЕВМАТИКА

Х. Т. Тураев

Предлагается одна из возможных методик для определения кинематических параметров и коэффициентов упругости пневматика.

После создания теории качения пневматика [1] и разработки общего подхода к решению задачи об устойчивости движения экипажа на баллонных колесах [2] возникла необходимость в создании методики экспериментального определения значений кинематических параметров и коэффициентов упругости пневматика. В работе предлагается одна из возможных методик для определения этих параметров пневматика с использованием специального испытательного стенда [3].

### 1. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ БАЛЛОННОГО КОЛЕСА НА СТЕНДЕ

Для экспериментального определения значений кинематических параметров и коэффициентов упругости пневматика может быть использован стенд, основанный на принципе обратимости процесса качения колеса. На этом стенде колесо с испытуемой шиной должно иметь возможность устанавливаться под различными углами и катиться по беговому (вращающемуся) барабану. Рассмотрим динамику баллонного колеса на стенде.

Для того, чтобы написать уравнение движения колеса на стенде с учетом упругости пневматика, воспользуемся общими уравнениями движения экипажа на баллонных колесах [4]. Введем неподвижную ортогональную систему координат  $Oxyz$ , оси  $Ox$  и  $Oy$  которой расположены в касательной горизонтальной плоскости, а ось  $Oz$  направлена вертикально вверх, и подвижную систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  с началом в центре колеса  $O_1$ : ось  $O_1y_1$  направлена по радиусу колеса, ось  $O_1z_1$  — перпендикулярно к плоскости колеса, а ось  $O_1x_1$  — горизонтально (рис. 1).

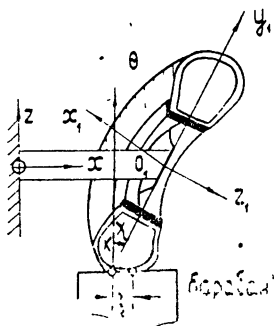


Рис. 1.

Положение колеса с учетом деформации можно определить пятью обобщенными координатами  $x_0, \theta, \chi, \xi, \varphi$ , где  $x_0$  — абсцисса центра колеса,  $\chi$  — угол между осью  $Oz$  и средней плоскостью колеса,  $\theta$  — угол между осью  $Oy$  и прямой пересечения средней плоскости колеса с плоскостью  $xOy$ ,  $\xi$  — боковое смещение центра площадки контакта пневматика относительно точки  $k$ ,  $\varphi$  — угол поворота площадки контакта по отношению к следу средней плоскости колеса на плоскости  $xOy$ .

Предположим, что проскальзывание баллонного колеса отсутствует, а величины  $\chi, \theta, \xi, \varphi$  являются малыми. Пренебрежем кинетиче-

ской энергией деформации пневматика. Проекция мгновенной угловой скорости  $\Omega$  на оси подвижной системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  равны

$$\Omega(\dot{\chi}, \dot{\theta} \cos \chi, + \omega - \dot{\theta} \sin \chi),$$

где  $\omega$ —угловая скорость собственного вращения колеса. Учитывая малости углов  $\chi, \theta$  с точностью до малых величин второго порядка включительно, перепишем выражение мгновенной угловой скорости в виде

$$\Omega(\dot{\chi}, \dot{\theta}, + \omega - \dot{\theta}\chi).$$

Тогда в принятой идеализации кинетическая энергия колеса будет равна

$$T = \frac{1}{2} [m\dot{x}_0^2 + A(\dot{\theta}^2 + \dot{\chi}^2)] - \frac{V}{r} C \dot{\theta}\chi,$$

где  $A$ —главный момент инерции относительно диаметра колеса,  $C$ —главный момент инерции колеса относительно его оси собственного вращения,  $m$ —масса колеса со ступицей,  $r$ —радиус качения колеса. Постоянное слагаемое опущено.

Потенциальная энергия деформированного колеса равна [4]

$$U = \frac{1}{2} (a\xi^2 + b\varphi^2 + \rho N\chi^2 + 2\sigma N\xi\chi).$$

Поэтому, принимая во внимание соотношение

$$x = x_0 - r\chi, \tag{1.1}$$

находим обобщенные силы реакции опорной площадки

$$R_{x_0} = a\xi + \sigma N\chi,$$

$$R_\theta = b\varphi,$$

$$R_\chi = -(\sigma N + ar)\xi - (\sigma r + \rho)N\chi.$$

Кроме обобщенных сил реакции опорной площадки, во время испытания на колесо будут действовать внешние силы и моменты: поперечная сила  $F$ , моменты  $M_\theta, M_\chi$ , возникающие в держателе колеса, которые можно измерять тензодатчиками.

После подстановки найденных выражений кинетической энергии  $T$  и обобщенных сил в уравнение движения экипажа на баллонных колесах получим

$$m\ddot{x}_0 = -F + a\xi + \sigma N\chi,$$

$$A\ddot{\theta} - \frac{V}{r} C \dot{\chi} = b\varphi + M_\theta, \tag{1.2}$$

$$A\ddot{\chi} + \frac{V}{r} C \dot{\theta} = -(\sigma N + ar)\xi - (\sigma r + \rho)N\chi + M_\chi.$$

К системе уравнений (1.2) нужно добавить, принимая во внимание соотношения (1.1), уравнения кинематических связей, накладываемых на баллонное колесо при его качении без проскальзывания по плоскости:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 - r\dot{\chi} + \dot{\xi} + V\theta + V\varphi &= 0, \\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} - \alpha V\dot{\xi} + \beta V\dot{\varphi} + \gamma V\dot{\chi} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

После этого система уравнений для определения  $x_0$ ,  $\theta$ ,  $\chi$ ,  $\xi$ ,  $\varphi$  как функций времени оказывается полной. Уравнения (1.2), (1.3) и являются искомыми уравнениями движения колеса на стенде.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И КОЭФФИЦИЕНТОВ УПРУГОСТИ ПНЕВМАТИКА

Рассмотрим ряд статических и динамических испытаний и найдем формулы для определения значений кинематических параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и коэффициентов упругости пневматика  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ .

1. *Статические испытания* ( $V = 0$ ). а) Для определения боковой жесткости пневматика  $a$  и коэффициента  $\sigma$  установим колесо на плиту с подшипниками так, чтобы  $\theta = \chi = 0$ . При данной вертикальной нагрузке  $N$  заставим плиту перемещаться в направлении оси  $Ox$  поперечной силой  $F$ , пренебрегая силой трения ввиду ее малости. Уравнения движения колеса (1.2) и (1.3) в данном случае примут вид

$$-F + a\xi = 0, \quad M_\chi - (\sigma N + ar)\xi = 0.$$

Отсюда находим формулы для определения

$$a = F/\xi, \quad \sigma = (M_\chi - Fr)/N\xi. \quad (2.1)$$

Следовательно, измеряя во времени испытания величины  $F$ ,  $\xi$ ,  $N$ ,  $M_\chi$  и статический радиус колеса  $r$ , находим по формулам (2.1) величины  $a$  и  $\sigma$ .

б) Чтобы определить коэффициент  $\rho$ , надо установить колесо в положении  $\chi = \chi_0$ ,  $\theta = 0$  и приложить вертикальную нагрузку  $N$ . Уравнения движения колеса для данного случая примут вид

$$\begin{aligned} -F + a\xi + \sigma N\chi_0 &= 0, \\ M_\chi - (\sigma N + ar)\xi - (\sigma r + \rho)N\chi_0 &= 0. \end{aligned}$$

Из полученных уравнений находим

$$\rho = \frac{aM_\chi - F(\sigma N + ar) + \sigma^2 N^2 \chi_0}{aN\chi_0}. \quad (2.2)$$

Из первого эксперимента нам известны значения  $a$ ,  $\sigma$ . Поэтому достаточно измерить величины  $F$ ,  $N$ ,  $M_\chi$  и статический радиус колеса  $r$ , чтобы вычислить  $\rho$  по формуле (2.2).

2. *Динамические испытания* ( $V \neq 0$ ). Пренебрегая деформацией балки—держателя колеса, положим в дальнейшем  $x_0 = \text{const}$ . Тогда уравнения движения колеса примут вид

$$\begin{aligned} -F + a\xi + \sigma N\chi &= 0, \\ A\ddot{\theta} - \frac{V}{r} C\dot{\chi} &= M_\theta + b\varphi, \\ A\ddot{\chi} + \frac{V}{r} C\dot{\theta} &= M_\chi - (\sigma N + ar)\xi - (\sigma r + \rho)N\chi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} - r\dot{\chi} + V\theta + V\varphi &= 0, \\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} - \alpha V\dot{\xi} + \beta V\dot{\varphi} + \gamma V\dot{\chi} &= 0. \end{aligned}$$

В этих уравнениях все коэффициенты, кроме величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $b$ , считаем известными. Для определения величин кинематических параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  проведем следующие испытания.

а) Качение колеса с постоянной скоростью при  $\chi = 0$ ,  $\theta = \theta_0$ . В этом случае уравнения движения (2.3) примут вид

$$\begin{aligned} -F + a\xi &= 0, \\ M_\theta + b\varphi &= 0, \\ M_\chi - (\sigma N + ar)\xi &= 0, \\ \dot{\xi} + V\theta + V\varphi &= 0, \\ \dot{\varphi} - \alpha V\xi + \beta V\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (2.3a)$$

В установившемся режиме

$$\varphi = -\theta_0, \quad \alpha/\beta = \varphi/\xi.$$

Отсюда определяется величина коэффициента увода  $\kappa_1$ :

$$\kappa_1 = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\theta_0}{F}. \quad (2.4)$$

Этот эксперимент также позволяет определить коэффициенты упругости  $b$ ,  $\sigma$ , если известен коэффициент боковой жесткости пневматика  $a$ . Действительно, из второго уравнения системы (2.3)

$$b = M/\theta_0. \quad (2.5)$$

Решая теперь первое и третье уравнения (2.3 а) совместно, найдем  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{a(M_\chi - Fr)}{NF}. \quad (2.6)$$

Следовательно, измерив после переходного режима величины  $F$ ,  $N$ ,  $M_\chi$ ,  $M_\theta$  и радиус колеса  $r$ , легко вычислить коэффициент увода  $\kappa_1$  и коэффициенты упругости  $b$ ,  $\sigma$  по формулам (2.4)—(2.6). Время переходного режима определяется корнями характеристического уравнения

$$p^2 + \beta Vp + \alpha V^2 = 0$$

и имеет вид

$$\tau = \text{Re} \left\{ 2 \left[ \beta V \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{\beta^2}} \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (2.7)$$

б) Качение колеса с постоянной скоростью при  $\theta = 0$ ,  $\chi = \chi_0$ . Для данного случая уравнения движения (2.3) примут вид

$$\begin{aligned} -F + a\xi + \sigma N \chi_0 &= 0, \\ M_\theta + b\varphi &= 0, \\ M_\chi - (\sigma N + ar)\xi - (\sigma r + \rho) N \chi_0 &= 0, \\ \dot{\xi} + V\varphi &= 0, \\ \dot{\varphi} - \alpha V\xi + \beta V\varphi + \gamma V\chi_0 &= 0. \end{aligned}$$

После переходного режима, определяемого временем  $\tau$ , установившиеся значения  $\xi$  и  $\varphi$  будут равны

$$\xi = \frac{\gamma}{\alpha} \chi_0, \quad \varphi = 0. \quad (2.8)$$

Решая первое уравнение совместно с третьим и с (2.8), находим коэффициент упругости  $\rho$  и второй коэффициент увода  $\chi_2$ :

$$\rho = \frac{aM_\chi - F(\sigma N + ar) + \sigma^2 N^2 \chi_0}{aN \chi_0}, \quad (2.9)$$

$$\chi_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{F - \sigma N \chi_0}{a \chi_0}, \quad (2.10)$$

подставляя в эти формулы измеренные после переходного процесса значения  $F, N, M_\chi$ .

в) Качение колеса с постоянной скоростью при  $\chi = e \cos(\omega t)$ ,  $\theta = e \sin(\omega t)$ . Этот случай движения можно осуществить путем закрепления колеса на горизонтальной ступице под углом  $(\pi/2 - e)$ .

После переходного процесса, определяемого временем  $\tau$ , установится стационарное движение, при котором

$$F = F_0 \cos(\omega t - \delta), \quad M_\chi = M_1 \cos(\omega t - \delta_1), \quad M_\theta = M_2 \cos(\omega t - \delta_2).$$

Уравнения движения колеса в данном случае принимают вид

$$\begin{aligned} -F_0 \cos(\omega t - \delta) + a\xi + \sigma N e \cos(\omega t) &= 0, \\ -\omega^2 e(A - C) \sin(\omega t) &= M_2 \cos(\omega t - \delta_2) + b\varphi, \\ -\omega^2 e(A - C) \cos(\omega t) &= M_1 \cos(\omega t - \delta_1) - (\sigma N + ar)\xi - (\sigma r + \rho)Ne \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\ddot{\xi} + V\varphi + \omega r e \sin(\omega t) + V e \sin(\omega t) = 0,$$

$$\dot{\varphi} + \beta V\varphi - \alpha V\xi + \omega e \cos(\omega t) + \gamma V e \cos(\omega t) = 0.$$

Решая совместно первое, четвертое и пятое уравнения системы (2.11), после некоторых преобразований приходим к уравнению

$$\begin{aligned} [K_1(\alpha r^2 - 1) + \gamma e r^2 - er - K_2(\alpha r^2 - 1) \cos \delta - K_2 \beta r \sin \delta] \cos(\omega t) + \\ + [-K_2(\alpha r^2 - 1) \sin \delta - (K_1 + 2er)\beta r + K_2 \beta r \cos \delta] \sin(\omega t) = 0, \end{aligned}$$

где

$$K_1 = \frac{\sigma N e}{a}, \quad K_2 = \frac{F_0}{a}. \quad (2.12)$$

Последнее равенство имеет место при всех  $t$  только тогда, когда одновременно обращаются в нуль коэффициенты при синусах и косинусах, т. е.

$$\begin{aligned} K_1(\alpha r^2 - 1) + \gamma e r^2 - er - K_2(\alpha r^2 - 1) \cos \delta - K_2 \beta r \sin \delta &= 0, \\ -K_2(\alpha r^2 - 1) \sin \delta + K_2 \beta r \cos \delta - (K_1 + 2er)\beta r &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для определения кинематических параметров  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  необходимо решить полученную систему совместно с уравнением (2.4) или (2.10). Будем решать систему (2.13) совместно с уравнением (2.10) относительно кинематических параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\alpha = B_1 B_2, \quad (2.14)$$

$$\beta = B_2 B_3, \quad (2.15)$$

$$\gamma = x_2 B_1 B_2, \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= M + r(3B_4 + x_2^{-1}L), \\ B_2 &= r^{-2}[M + B_4(x_2 + 2r) + L]^{-1}, \\ B_3 &= ar(x_2 - r)eF_0 \sin \delta, \\ B_4 &= ae(\sigma Ne - F_0 \cos \delta), \\ M &= \sigma^2 N^2 e^2 - 2\sigma NeF_0 \cos \delta + F_0^2, \\ L &= 2a^2 e^2 x_2 r. \end{aligned}$$

Заметим, что из данного эксперимента можно также определить динамические значения коэффициентов упругости пневматика  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ . Действительно, подставляя значения  $\xi$  и  $\varphi$  соответственно из первого и четвертого уравнения системы (2.11) во второе и третье уравнения той же системы, после некоторых преобразований приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} &(arM_2 \cos \delta_2 - bF_0 \sin \delta) \cos(\omega t) + [ar(K + M_2 \sin \delta_2) - \\ &\quad - b(2aer + \sigma Ne - F_0 \cos \delta)] \sin(\omega t) = 0, \\ &[a(K + M_1 \cos \delta_1) + (\sigma Ne - F_0 \cos \delta)(\sigma N + ar) - aNe(\sigma r + \rho)] \cos(\omega t) + \\ &\quad + [aM_1 \sin \delta_1 - F_0(\sigma N + ar) \sin \delta] \sin(\omega t) = 0, \end{aligned}$$

где

$$K = \omega^2 e(A - C),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} aM_1 \sin \delta_1 - F_0(\sigma N + ar) \sin \delta &= 0, \\ a(K + M_1 \cos \delta_1) + (\sigma Ne - F_0 \cos \delta)(\sigma N + ar) - (\sigma r + \rho)aNe &= 0, \\ arM_2 \cos \delta_2 - bF_0 \sin \delta &= 0, \\ ar(K + M_2 \sin \delta_2) - b(2aer + \sigma Ne - F_0 \cos \delta) &= 0. \end{aligned}$$

Решая полученную систему относительно  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ , получим

$$a = E_1 F_0^2 H N \sin \delta_1, \quad (2.17)$$

$$b = E_1 E_2^{-1} e^{-1} F_0 r, \quad (2.18)$$

$$\sigma = E_1 E_3 F_0 H, \quad (2.19)$$

$$\rho = H(E_1 E_3^2 + E_2 E_4 M_2 \cos \delta_2) \csc \delta, \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} E_1 &= K \sin \delta M_2 \cos(\delta - \delta_2), \\ E_2 &= M_1 \sin \delta_1 + F_0 r \sin \delta, \\ E_3 &= M_1 \sin \delta_1 - F_0 r \sin \delta, \\ E_4 &= K \sin \delta - M_1 \sin(\delta - \delta_1), \\ H &= (E_2 e M_2 N \cos \delta_2)^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, измерения величин  $F_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $\delta$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  позволяют вычислить значения кинематических параметров и коэффициентов упругости пневматика по формулам (2.14) — (2.20).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Келдыш, Тр. Центрального аэрогидродинамического института, № 564, 1 (1945).
2. Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев, ДАН СССР, 170, № 3, 533 (1966).
3. Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев, Х. Т. Тураев и др., Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки, № 12, 161 (1971).
4. Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев, Динамика неавтономных систем, изд. Наука, М, 1967.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
2 июля 1970 г.

#### PROCEDURE FOR DETERMINATION OF KINEMATIC PARAMETERS AND ELASTICITY COEFFICIENTS OF PNEUMATIC

*Kh. T. Turayev*

One possible procedure is proposed for determination of kinematic parameters and elasticity coefficients of a pneumatic.

---

УДК 62—50

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОЦЕССОВ В ОБЪЕКТАХ УПРАВЛЕНИЯ С НАЛАГАЮЩИМИСЯ ЯВЛЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ ФИЗИЧЕСКОГО ПОДХОДА

*В. С. Лернер*

Для построения моделей изучаемых объектов управления применены результаты теории неравновесных процессов. Это позволило получить достаточно общий метод составления уравнений управляемых процессов, базирующийся на законах физики, учитывающий наложение разнообразных физических явлений, их необратимость во времени и случайность. Разработаны методы идентификации объектов управления (с сосредоточенными и распределенными параметрами). Эффективность полученных результатов подтверждена практически решенными задачами идентификации технологических процессов.

### 1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основной задачей идентификации является получение дифференциальных (либо интегро-дифференциальных) уравнений наблюдаемого процесса по результатам измерений контролируемых величин. Внутренняя структура объекта, количество величин (из общего числа контролируемых), необходимых для построения динамической модели объекта, неизвестно. Идентификация направлена на решение актуальной в автоматическом управлении проблемы управления в условиях неопределенности, когда уравнения и функционал процесса неизвестны и могут меняться в процессе работы системы; их нужно восстановить по результатам наблюдений\*. Известные математические методы, используемые для решения указанной задачи, основываются на аппроксимации наблюдаемых процессов тем или иным классом уравнений (операторов), выбор которых обычно не связан с физикой исследуемых процессов и зачастую произволен. Критерий аппроксимации, определяющий меру близости наблюдаемого процесса и решений уравнений идентификаций, также не связан с физическими особенностями процесса и выбирается произвольно. Поскольку решение задачи идентификации определяется свойствами выбранного оператора и критерия аппроксимации, такой подход не является естественным. Указанные методы идентификации позволяют построить некоторую информационную математическую модель процесса [1—3] и др., часто не связанную с его физическими особенностями. На практике мы в большинстве случаев наблюдаем физическую макросистему, которой требуется управлять. Физическими закономерностями поведения исследуемых систем определяется и вид математической модели соответствующего процесса. Поэтому правомерен и актуален для решения указанных выше задач физический подход. Такой подход позволяет понять и пределы физической реализуемости некоторых развитых математических методов. Аппроксимирующие соотношения справедливы лишь для конкретных выбранных реализаций; объективные

\* Задача восстановления функционала и синтеза оптимальных управлений на основе физического подхода будет рассмотрена в следующей статье.



физические законы, вообще говоря,—для бесконечного множества этих реализаций. Поэтому и модели, построенные на основе физических законов, действуют на «большем» множестве значений переменных, чем аппроксимирующие модели, т. е. точнее и при меньших ограничениях отображают свойства идентифицируемого физического процесса. Математическим содержанием многих известных физических законов является тот факт, что уравнения, описывающие закон, являются экстремалами некоторого функционала [4]. Ясно, что аппроксимирующие на конкретном множестве переменных уравнения идентификации, вообще говоря, не являются экстремалами такого функционала. Поэтому такие уравнения менее содержательны, чем уравнения физических законов. Возникает задача построения таких методов идентификации, которые основывались бы на физических закономерностях конкретного процесса. Мы будем решать ее для физико-химических технологических процессов. Это объекты, для которых главную роль играют налагающиеся явления переноса: электропроводность, теплопроводность, электрокинетические, электромагнитные, диффузионные явления, химические реакции и т. п. Такое наложение связанных физико-химических явлений характерно для многих объектов управления в металлургии, химии и других областях. Важным качеством изучаемых явлений является макроскопическая необратимость. Идентификация таких процессов на основе известных математических методов обычно приводит к обратимым во времени математическим моделям [3] и др., которые не соответствуют их физическому содержанию. Для задач управления исследование таких систем осложняется наличием случайных внешних сил (неотъемлемым свойством объектов управления\*) и необходимостью получения уравнений динамики. В классической термодинамике изучаются равновесные (квазистатические) процессы [5, 6]. Используемые в настоящее время в автоматическом управлении уравнения Лагранжа (I и II рода) [7] пригодны в основном для детерминированного описания механических систем, не содержат статистики и не приспособлены для решения задач идентификации [8, 9]. Макроскопический подход возникает, когда, кроме чисто механических движений, необходимо учесть и другие их виды: тепловые, химические и их взаимодействие. При макроскопическом рассмотрении обнаруживаются новые физические закономерности: закон возрастания энтропии, уравнения Гиббса, феноменологические соотношения, третий закон термодинамики—теорема Нернста [6], которые уже не укладываются в схему уравнений Лагранжа. Такой подход основывается на статистической физике и является более общим, включающим, в частности, физические закономерности процессов без налагающих явлений. Закономерности исследуемых физических процессов не могут быть обоснованы только в рамках классической механики даже после введения в нее статистики. Необходимо выполнить условия статистического перемешивания [10, 11], при которых динамическое описание может перейти в стохастическое, приводящее к необратимым макропроцессам. Это накладывает определенные ограничения на вид математической модели процесса и методы оптимального управления. Таким образом, существует широкий класс объектов управления с налагающимися явлениями, для которых в автоматическом управлении нет общих физических основ составления дифференциальных уравнений. Физической основой изучаемых налагающихся процессов является теория неравновесных процессов (ТНП) [8] и др., включающая статистическую механику неравновесных процессов в феноменологическую

\* В объекте управления характерно наложение не менее трех процессов: управляющих, реакций других объектов (возмущающие воздействия) и изменений во времени выходных—фазовых координат—реакций объекта на управления и возмущения.

неравновесную термодинамику (ФНТ). ТНП дает общие методы составления дифференциальных уравнений, учитывающие, с одной стороны, взаимодействие различных физико-химических явлений и, с другой стороны, тот факт, что физические процессы необратимы и имеют определенное направление во времени. В ТНП статистические методы и физика тесно взаимосвязаны; получаемые уравнения ТНП являются стохастическими, но вместе с тем базируются на прочном фундаменте физических законов. Поэтому рассматриваемые физические модели изучаются в рамках ТНП. Уравнения ТНП, однако, не содержат управляющих воздействий и ранее для задач управления не применялись. Взаимодействие внутренних процессов можно рассматривать как управление одним процессом посредством другого. Поэтому существование в системе налагающихся процессов предполагает наличие обратных связей и системы управления (в указанном смысле); и ТНП, изучающая налагающиеся процессы, оказывается объективно связанной с теорией управления. Используемые нами методы и идеи ФНТ [8] приводят к матричному уравнению

$$I = LX, \quad (1.1)$$

которое связано с термодинамикой соотношением

$$X = \frac{\partial \Delta S}{\partial \alpha}, \quad (1.2)$$

где  $\Delta S$  — отклонение энтропии,  $X$  — обобщенные термодинамические силы,  $I$  — обобщенные потоки, характеризующие скорости процессов переноса или производные координат системы  $\alpha (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^*$ ,  $L$  — феноменологические коэффициенты, для которых справедливы соотношения взаимности Онзагера

$$L_{ik}(0, 0) = L_{ki}(0, 0), \quad (1.3)$$

дополненные Казимиром при наличии магнитного поля ( $B$ ) и вращения ( $\omega$ )

$$L_{ik}(B, \omega) = L_{ki}(-B, \omega), \quad (1.4)$$

где матрица  $L_0$  определено положительная\*\* [8]. Феноменологические уравнения могут иметь более общую форму, чем (1.3), (1.4); коэффициенты  $L_{ik}$  могут зависеть от времени. Уравнения (1.1) — (1.4) обобщают экспериментально установленные законы проводимости типа закона Ома, Фурье, Фика и т. п. и учитывают влияние на данный поток  $I_i$  как основной силы ( $X_i$ ), так и термодинамических сил, возникающих при наложении всех других физических процессов ( $X_k$ ). Согласно постулату Больцмана энтропия  $\Delta S$  связана с плотностью вероятности макропеременных формулой ([8], стр. 91)

$$p(\alpha) \doteq p(0) \exp \Delta S; \quad (1.5)$$

энтропия неравновесного процесса  $\Delta S(\alpha)$  после разложения в ряд может быть принята в форме, обычно используемой в ТНП [8] и др.,

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \alpha' h \alpha, \quad (1.6)$$

где

$$\alpha = A - A_0, \quad (1.7)$$

\* В качестве координат  $\alpha$  в ФНТ берутся независимые макропеременные [8].

\*\* Соотношения (1.3), (1.4), как и (1.1), (1.2), справедливы для исследуемых необратимых процессов [8].

$A_0$  — равновесные значения макропеременных  $A$ ,  $p(0)$  — плотность вероятности для равновесного состояния. Макропеременные являются суммами большого числа независимых случайных слагаемых, каждое из которых имеет незначительные размеры по сравнению со всей суммой. Поэтому в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятности распределение величин  $A$  подчиняется нормальному закону. Отсюда следует гауссова форма плотности вероятности  $p(\alpha)$  и соотношение для определения

$$h^{-1} = M(\alpha\alpha'). \quad (1.6a)$$

Как показано в [8], феноменологические уравнения (1.1) и гауссова форма  $p(\alpha)$  тесно связаны с «марковостью» процесса  $\alpha(t)$ ; исследуемого в ТНП. Результат (1.5), (1.6) может быть получен и непосредственно при разложении  $p(\alpha)$  в ряд [8]. Для полного описания макросистемы требуется множество макропеременных  $\alpha$ . Поэтому выбор определенного конечного их числа позволяет решить задачу лишь с той или иной степенью приближения. Для исследуемых систем справедлив принцип макроскопической необратимости, выражаемый теоремой Больцмана о положительности макроскопической скорости  $\frac{d\Delta S}{dt}$  [5, 6, 8]. Для стационарного процесса уравнения (1.1) — (1.7) дополняются условием необратимости в форме

$$\sigma = \frac{1}{\theta} \frac{d\Delta S_i}{dt} = \frac{1}{\theta} \sum \dot{\alpha}_i \frac{\partial \Delta S}{\partial \alpha_i}, \quad (1.8)$$

где  $\sigma$  — производство энтропии,  $\theta$  — абсолютная температура,  $\Delta S_i$  — прирост энтропии из-за необратимости внутренних процессов. Приняв  $\Delta S_i$  в форме (1.6), получаем правую часть (1.8); последнюю с учетом (1.1), (1.2) записываем в форме

$$\frac{d\Delta S_i}{dt} = \sum_i I_i X_i. \quad (1.8a)$$

Условие минимума  $\sigma$  известно в ТНП как принцип минимума Пригожина, используемый в ФНТ в качестве критерия стационарных состояний. Выбор потоков и сил, для которых справедливы уравнения (1.1) — (1.8), не однозначен. При переходе к новым переменным  $(\alpha')\Delta S(\alpha')$  и  $p(\alpha')$  должны оставаться инвариантными. Это соответствует описанию системы с помощью нового набора независимых переменных. Важно лишь, чтобы соответствующие потоки и силы были сопряжены согласно (1.2). Тогда справедливы соотношения Онзагера (1.4). В неравновесной феноменологической термодинамике не дается общих методов определения кинетических коэффициентов  $L_{ik}$ . Это в значительной мере ограничивает возможности практического применения рассмотренных соотношений для описания физических процессов. Принятые в ФНТ допущения относительно марковости изучаемых процессов, формы выражения для  $p(\alpha)$  ограничивают класс физических задач, к которым применима эта теория. Учет необратимости в уравнениях ТНП (появление энтропии  $\Delta S$ ) приводит к необходимости вероятностного описания изучаемых процессов. Детерминированные уравнения являются математической моделью обратимых процессов и могут быть получены при  $\frac{d\Delta S_i}{dt} \rightarrow 0$ . Описание исследуемых объектов уравнениями статики (как это принято в [3] и других применениях математической статистики) приводит к  $\Delta S \equiv 0$ ,  $\frac{d\Delta S_i}{dt} \equiv 0$ . Плотность вероятности (1.5) при этом

стремится к  $\delta$ -распределению, что свидетельствует о невозможности статистического описания. Поэтому описание реальных процессов методами ТНП является более точным и содержательным. Величина  $\frac{d\Delta S_t}{dt}$ , являясь оценкой необратимости, может быть измерена также количеством информации [9, 12]. Это открывает принципиальную возможность получения количественного измерения более точного описания процесса методами ТНП по сравнению с обратимыми математическими моделями.

## 2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. АДАПТИВНАЯ МОДЕЛЬ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Пусть наблюдается объект управления с марковской (переходной) плотностью вероятности  $p(x, t)$ , характерной для процессов с налагающимися явлениями;  $x(t) (x_1(t), \dots, x_n(t)_{n+r})$  — вектор наблюдаемых макровеличин. Предполагается, что состояние объекта можно охарактеризовать вектором  $x$ , измеряемым в конечном числе фиксированных точек его объема, без непосредственного контроля его внутренних процессов. Это объекты с сосредоточенными внешними макровеличинами ( $x$ ). В дальнейшем целесообразно разделить общее число наблюдаемых величин ( $n+r$ ) на выходные  $x_1(x_1, \dots, x_n)$ , характеризующие состояние объекта, и входные  $x^2(x_{n+1}, \dots, x_{n+r})$  — управления, посредством которых можно изменять  $x^1$ . С физической точки зрения координаты  $x^2$  характеризуют состояние управляющего устройства, присоединяемого к объекту, однако, как и  $x^1$ , могут быть измерены на объекте. Отклонение физической энтропии такой системы в соответствии с [8] можно записать в виде

$$\Delta S(x, t) = -\frac{1}{2} x(t)' h(t) x(t), \quad (2.1)$$

где  $h$  — обратная ковариационная матрица:

$$r = h^{-1} = M(x x'), \quad (2.2)$$

плотность вероятности макропеременных (1.5) приобретает вид

$$p(x, t) = p(x(0), 0) \exp \Delta S(x, t). \quad (2.3)$$

Размерность распределения  $p(x)$  определяется рангом матрицы  $h$  [13], который равен числу независимых координат, характеризующих состояние системы, т. е. равен  $n^*$ . Обозначив

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

и

$$h = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

и раскрывая матричную форму (2.1), получим

$$\Delta S = -\frac{1}{2} (x^1' h_{11} x^1 + x^1' h_{12} x^2 + x^2' h_{21} x^1 + x^2' h_{22} x^2). \quad (2.6)$$

Феноменологические уравнения ТНП (1.1, 1.2) теперь можно записать в виде

$$\dot{x}^1 = LX, \quad (2.7)$$

где

\* Где  $n$  до идентификации не известно.

$$X = - \frac{\partial \Delta S}{\partial x^1}. \quad (2.8)$$

С учетом (2.6) вектор обобщенных термодинамических сил (ТДС)  $X$  выражается в форме

$$X = h_{11} x^1 + h_{12} x^2. \quad (2.9)$$

Предположим, что матрица  $h_{11}$  имеет порядок, равный рангу матрицы  $h$ , и что  $\det h_{11} \neq 0$ . Ввиду неособенности матрицы  $h_{11}$ , выражение для ТДС (2.9) можно преобразовать следующим образом:

$$X = h_{11} (x^1 + h_{11}^{-1} h_{12} x^2). \quad (2.10)$$

Обозначая

$$h_{11}^{-1} h_{12} x^2 = x^{2^1} \quad (2.11)$$

и

$$x^1 + x^{2^1} = x^1(\cdot), \quad (2.12)$$

получаем

$$X = h_{11} x^1(\cdot), \quad (2.13)$$

где размерность вектора  $x^1(\cdot)$ , как и вектора  $X$ , равна  $n$ . Так как ранг  $h$  равен  $n$ , то распределение вектора  $x$  (спектр) сосредоточено на некоторой  $n$ -мерной гиперплоскости в пространстве  $E^{n+r}$ . Поэтому  $x$  можно представить в виде  $n$ -мерного вектора  $x^1(\cdot)$ , измеряемого в  $n$ -мерной системе координат этой гиперплоскости. В дальнейшем используем  $n$ -мерную систему координат, образованную на собственных векторах матрицы  $h$ , которую назовем базовой. Составляющие вектора управления могут быть приведены к базовой системе координат. Это учитывают соотношения (2.12), (2.13), в которых  $x^{2^1}$  — вектор управления ( $x^2$ ), приведенный к  $n$ -мерной координатной системе, в которой определены также координаты вектора  $x^1$ . При этом составляющие вектора  $x^1$  являются термодинамическими переменными той же физической природы, что и  $x^1$ . Преобразование  $x = \left\| \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \end{matrix} \right\|$  в  $x^1(\cdot)$  можно записать следующим образом:

$$x^1(\cdot) = \left\| E_n, h_{11}^{-1} h_{12} \right\| \left\| \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \end{matrix} \right\| = \left\| E_n, h_{11}^{-1} h_{12} \right\| x, \quad (2.14)$$

где  $E_n$  — единичная матрица размерности  $n \times n$ . Учитывая инвариантность энтропии при указанном преобразовании, имеем

$$\Delta S(x^1(\cdot)) = \Delta S(x), \quad (2.15)$$

где  $\Delta S(x^1(\cdot))$ , аналогично (2.1), имеет форму

$$\Delta S = - 1/2 x^1(\cdot)' h_{11} x^1(\cdot), \quad (2.16)$$

а

$$h_{11}^{-1} = M(x^1(\cdot) x^1(\cdot)). \quad (2.17)$$

Используя (2.15), запишем (2.16) в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(x^1(\cdot)) &= - 1/2 x' \left\| E_n, h_{11}^{-1} h_{12} \right\|' \times h_{11} \left\| E_n, h_{11}^{-1} h_{12} \right\| x = \\ &= - 1/2 x' \left\| \begin{matrix} E_n \\ h_{12} h_{11}^{-1} \end{matrix} \right\| \times h_{11} \left\| E_n, h_{11}^{-1} h_{12} \right\| x = \\ &= - 1/2 x' \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} h_{11}^{-1} & h_{12} \end{matrix} \right\| x. \end{aligned}$$

Учитывая (2.6), получаем

$$x' \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}^{-1} x = x' \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} x,$$

откуда

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}^{-1}$$

и

$$h_{22} = h_{21} h_{11}^{-1} h_{12} = h'_{12} h_{11}^{-1} h_{12}, \quad (2.18)$$

т. е. матрица  $h_{22}$  выражается через  $h_{11}$  и  $h_{12}$ . Определитель матрицы  $h$  согласно (2.18) при этом обращается в нуль; последнее свидетельствует о том, что ранг ее не может быть равен  $n + r$ . В итоге определение энтропии целесообразно по формуле

$$\Delta S = -1/2 x'(\cdot) X, \quad (2.19)$$

где  $X = h_{11} x^1(\cdot)$ . Уравнение идентификации (2.7) приобретает вид

$$\dot{x}^1 = L h_{11} (x^1 + x^{21}). \quad (2.20)$$

Для этой системы в установившемся состоянии  $x^1_y$ , когда  $\dot{x}^1 = 0$ , справедливо соотношение

$$x^{21} = -x^1_y, \quad (2.21)$$

если

$$\det \Delta h_{11} \neq 0. \quad (2.22)$$

Последнее условие в силу свойств матриц  $L$  и  $h_{11}^*$  (следующих из физических соображений) выполняется. Это позволяет записать формулу для  $h_{11}$  (2.17) в виде

$$r_{11} = h_{11}^{-1} = M [(x^1 - x^1_y)(x^1 - x^1_y)']. \quad (2.23)$$

Размерность вектора  $x^1$  может быть определена по рангу матрицы  $h_{11}$ . Из общего числа  $n + r$  координат выбираем столько и такие, которые давали бы максимальный порядок матрицы  $h_{11}$ . Поскольку размерность вектора  $x^1$   $n$ -мерная, все его  $n$ -составляющие в базовой системе координат—термодинамические переменные—должны быть линейно независимы. Возможные управления—остальные  $r$  координат вектора  $x$ . Зная  $x^2$  и  $x^{21} = -x^1_y$ , по формуле (2.11) можно восстановить матрицу  $h_{11}^{-1} h_{12}$  и  $h_{12}$ . Из условий физической реализуемости решений полученной системы можно получить следующее соотношение, которому должно удовлетворять  $\Delta S$  [9]:

$$\frac{d\Delta S}{dt} = 0. \quad (2.24)$$

Условие (2.24) приводит к  $p(x, t) = \text{const}$  на каждом участке постоянства  $\Delta S(x^1, x^{21}, t)$  и поэтому к кусочной эргодичности исследуемых процессов. Для изучаемых марковских процессов это приводит к выполнению условия статистического перемешивания [10], т. е. к расщеплению во времени корреляций переменных, характеризующих состояния системы [11]. Уравнения идентификации, построенные без учета этих условий физической реализуемости, не будут отображать эти важные качества

\* Это следует также из получаемых ниже выражений для матрицы  $L$ .

необратимого процесса. Перемешивание—достаточно сильное свойство неравновесного физического процесса; при выполнении его удовлетворяются условия эргодичности процесса. Математическим содержанием (2.24) в [9] является ограниченность решений дифференциальных уравнений (диссипативность системы уравнений, описывающих процесс [14], стр. 281), что соответствует устойчивости решений по Лагранжу [15]. Подставляя в (2.24)  $\Delta S$  из (2.16), получим

$$\dot{x}^1(\cdot) = -1/2 h_{11}^{-1} \dot{h}_{11} x^1(\cdot), \quad (2.25)$$

т. е. форму дифференциального уравнения для исследуемой физической системы. Уравнения (2.20) и (2.25) описывают один и тот же процесс при  $x^{21} = 0$ , т. е.

$$L h_{11} x^1(\cdot) = -1/2 h_{11}^{-1} \dot{h}_{11} x^1(\cdot),$$

откуда

$$L = -1/2 h_{11}^{-1} \dot{h}_{11} h_{11}^1, \quad (2.26)$$

либо

$$L = 1/2 \frac{d}{dt} (r_{11}). \quad (2.27)$$

Матрица  $r_{11}(t)$ , в силу ее определения (2.12), является симметрической, ранг которой и порядок равны  $n$ . Поэтому условие

$$L h_{11} = 1/2 r_{11}^{-1} \frac{d}{dt} (r_{11}) \neq 0, \quad (2.22a)$$

очевидно, выполняется. Матрица  $L$ —также симметрическая ранга  $n$ . Из соотношения

$$\dot{x}^1(\cdot) = \dot{x}_1 \quad (2.27a)$$

приходим к выводу о кусочном постоянстве управлений для исследуемого процесса. В итоге получаем форму дифференциального уравнения идентификации

$$\dot{x}^1 = 1/2 \dot{r}_{11} r_{11}^{-1} (x^1 + x^{21}), \quad (2.28)$$

где  $x^{21}$ —кусочно-постоянная функция времени\*. В уравнение (2.28) по результатам наблюдений вносится конкретное физическое содержание. Процедура идентификации объекта по наблюдаемым координатам  $x$  выглядит так. 1) Определение ранга матрицы  $r_{11}$  и разделение вектора  $x$  на составляющие  $x^1$  и  $x^2$ . 2) Определение матрицы  $r_{11}(t)$  согласно (2.23) и вычисление  $\dot{r}_{11}(t)$ . 3) Запись дифференциальных уравнений (2.28). В процессе функционирования объект подвергается воздействию управлений, которые должны фиксироваться в течение конечных интервалов  $\Delta t_1$ . В течение этого же интервала определяются элементы матриц  $r_{11}^{-1}$  и  $\dot{r}_{11}$ . Уравнения (2.28) позволяют по известной матрице  $r_{11}(\Delta t_1)$  и заданным  $x^{21}(\Delta t_1)$  получить решения  $x^1(x^{21}, r_{11}, t)$ , пользуясь которыми можно найти новые значения  $r_{11}(\Delta t_2)$  при управлениях  $x^{21}(\Delta t_2)$  и т. д. Меняя управления, можно последовательно восстанавливать уравнения системы и плотность вероятности  $p(x^1(\cdot), t)$ . Адаптивная модель идентификации, реализующая указанную процедуру, изображена на рис. 1. Вычисление  $h_{11}^{-1}$  можно осуществить согласно

\* Уравнения идентификации (2.7), (2.28), вообще говоря, нелинейны в силу зависимости оператора от фазовых координат, управлений и возмущений. Это следует из (2.23), (2.27). В замкнутой системе, кроме того,  $x^{21} = f(x^1)$ , поэтому  $r_{11}(x^1, t)$

непрерывному алгоритму, полученному на основе вероятностных итеративных методов [2]:

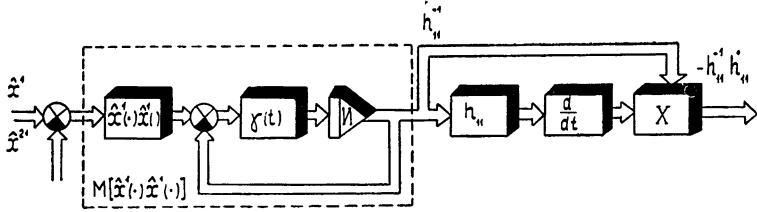


Рис. 1. Матричная адаптивная модель идентификации: D — дифференциатор, X — умножитель, И — интегратор, M — вычисление математического ожидания.

$$\frac{dh_{11}^{-1}}{dt} + \gamma(t) h_{11}^{-1} = \gamma(t) (x^1 + x^{21}) \times (x^1 + x^{21}), \quad (2.29)$$

где  $\gamma(t)$  — матрица подбираемых коэффициентов. Этот путь пояснен в примере (разд. 4). Полученные результаты обобщены и на тот случай, когда плотность вероятности координат не обязательно гауссова. В зависимости от вида функции  $\Delta S(x, t)$  соотношение (2.3) обобщает многие известные виды непрерывных распределений. В этом случае исследуемые процессы описываются нелинейными уравнениями, по форме совпадающими с (2.28), а  $r_{11}$  является матричной функцией координат  $x^1$  и  $x^{21}$ ; от последних зависит и  $\Delta t_i$ . Это создает возможность формализации процедуры идентификации на ЭЦВМ по общей программе, применимой к исследуемому классу процессов. В итоге уравнения управляемых макропроцессов можно привести к гамильтоновой форме записи

$$\Delta S = -1/2'(\cdot) X,$$

где  $X = -\frac{\partial \Delta S}{\partial x^1(\cdot)}$ . Причем из  $\frac{d\Delta S}{dt} = 0$  следует  $\dot{x}^1(\cdot) X = -x^1(\cdot) \dot{X}$ ,

где

$$\dot{x}^1(\cdot) X = H, \quad (2.30)$$

откуда

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\frac{\partial H}{\partial x^1(\cdot)}, \\ \dot{x}^1(\cdot) &= \frac{\partial H}{\partial X}. \end{aligned} \quad (2.30a)$$

Уравнения (2.30 а) являются стохастическими и поэтому должны быть дополнены уравнением для плотности вероятности в форме (2.3). Гамильтонова форма (2.30 а) при этом принципиально отличается от известных гамильтоновых уравнений механики. Здесь обобщенными координатами являются термодинамические макропеременные, связанные с каноническими микропеременными вероятностными соотношениями (разд. 1), а гамильтонианом является производство энтропии  $(\frac{d\Delta S_i}{dt})$ . Переход от уравнений в форме (2.28), (2.29) к классической



$$\dot{x}^i = A(t) x^i + B(t) u \quad (2.31)$$

достигается при замене

$$A(t) = 1/2 r_{11}^{-1}(t) \dot{r}_{11}(t) \quad \text{и} \quad A^{-1}(t) B(t) u = x^{21}(t) u = x^2.$$

При этом получается вероятностная модель процесса, включающая наряду с (2.31) уравнение для  $p(x^1, x^{21}, t)$ . Переход к детерминированной модели достигается заменой плотности вероятности  $\delta$ -распределением. Существенное отличие (2.28), (2.30а) от классической формы состоит в зависимости коэффициентов от математических ожиданий управления и фазовых координат\*. Это позволяет учесть направление процесса

Мерой близости наблюдаемого процесса  $\hat{x}^1(\hat{x}^{21}, t)$  и полученного в результате решения уравнения идентификации  $x^1(x^{21}, t)$  является числовое значение  $\Delta S(x^1, x^{21}, t)$ , определяющее для каждого из указанных процессов плотность вероятности (2.3). С учетом [9, 12] близость таких процессов можно измерить также количеством информации. Минимизируя  $-\Delta S$  (либо, что то же,  $\frac{d\Delta S_i}{dt}$  (1.8)), получим процесс «максимальный по вероятности».

Показано [9], что если в качестве критерия оптимальности использовать собственный физический функционал процесса, определенный в силу уравнений его движения, то задача оптимизации сводится к минимизации  $\Delta S$ , либо  $\frac{d\Delta S_i}{dt}$ . То есть этот естественный

функционал приводит к созданию «наиболее вероятного» процесса, минимизирующего необратимые потери  $\frac{d\Delta S_i}{dt}$ . Тогда  $\frac{d\Delta S_i}{dt}$  выступает

также в качестве меры оптимальности процесса. Такой путь кажется нам наиболее естественным. Однако уравнения идентификации (2.28), (2.30 а) можно использовать в качестве модели процесса и при решении других задач оптимизации. Например, синтезируя оптимальные управления при заданном функционале, отличном от «физического». Такая процедура не отличается от рассмотренной в литературе [16, 17].

### 3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Как известно [17], для систем с распределенными параметрами характерным является образование в объекте пространственных распределений (полей) физических величин (температурных, электрических, магнитных и др.). Воздействие на объект управлений и возмущающих сил также осуществляется через соответствующие поля. В результате взаимодействия (наложения) полей в исследуемых технологических процессах совершаются те или иные преобразования вводимых веществ и энергии. Образующиеся при этом неравновесные процессы также изучаются в рамках ТНП\*\*. Аппарат ТНП при этом включает уравнения в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения ([8], стр. 212). Возникает задача использования этого аппарата для задач идентификации и управления. Пусть в каждой точке  $p$  объекта состояние его характеризуется  $n + r$  макроскопическими физическими величинами  $(x_1, \dots, x_{n+r})$ , образующими вектор  $x(x_1, \dots, x_{n+r})$ . Тогда состояние объекта в целом характеризуется случайным векторным

\* Кроме того, выбором надлежащих управлений можно влиять на устойчивость объекта (разомкнутой системы), не изменяя формы уравнений (2.30 а).

\*\* ТНП по сравнению с другими методами описания и здесь сохраняет преимущества, отмеченные в разд. 1.

полем  $x(p, t)$ ;  $p(p_1, p_2, p_3)$  — вектор пространственных координат точки  $p$ , определенных в объеме объекта  $V$ . Задача идентификации состоит в восстановлении уравнений поля по результатам контроля вектор-функций  $x(p, t)$ . Функции  $x(p, t)$  можно считать квадратично суммируемыми [18], т. е. принять, что существует сумма

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n+r} \int_V [x_i(p, t)]^2 dp, \quad (3.1)$$

где  $dp = dp_1 dp_2 dp_3$  — элемент объема. Рассмотрим пространство квадратично суммируемых вектор-функций (3.1), в котором определено скалярное произведение

$$\langle x^{(i)} x^{(k)} \rangle = \sum_{k=1}^{n+r} \int_V x_k(p, t) x_i(p, t) dp, \quad (3.2)$$

где  $x^{(i)}$  —  $i$ -й вектор  $x$ ,  $x^{(k)}$  —  $k$ -й вектор  $x$ . Определим уравнения, связывающие вектор-функции и являющиеся аналогами матричных уравнений (1.1). Примем сначала для простоты, что объект описывается полем одной физической величины  $x^1(p, t)$  и находится под воздействием одного управляющего поля  $x^2(p, t)$ . В объекте тогда действует поле одной ТДС  $X(p, t)$ . Известно, что аналогом матричных уравнений в конечномерном пространстве являются интегральные уравнения, связывающие различные функции (рассматриваемые как бесконечномерные векторы в гильбертовом пространстве). Это позволяет получить аналог уравнения (1.1) в виде

$$\frac{\partial x^1(p, t)}{\partial t} = \int_V L(p, q, t) X(q, t) dq, \quad (3.3)$$

т. е.  $\frac{\partial x^1(p, t)}{\partial t}$  и  $X(p, t)$  связаны интегральным оператором с ядром  $L(p, q)$ . Из ТНП [8] известно, что оператор  $L$  должен быть симметрическим и положительно определенным, т. е. должны выполняться соотношения

$$L(p, q, t) = L(q, p, t) \quad (3.4)$$

и

$$\int_V \int_V X'(p, t) L(p, q, t) X(q, t) dpdq \geq 0 \quad (3.5)$$

при любых  $X(p, t)$ . В общем случае при наличии  $n$  полей  $x_1(p, t), \dots, x_n(p, t)$  уравнение (3.3) переходит в систему

$$\frac{\partial x_i(p, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \int_V L_{ij}(p, q, t) X_j(q, t) dq \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (3.6)$$

которая при перемене порядка суммирования и интегрирования записывается в виде

$$\frac{\partial x_i(p, t)}{\partial t} = \int_V \left[ \sum_{j=1}^n L_{ij}(p, q, t) X_j(q, t) \right] dq. \quad (3.6a)$$

В матричной форме соотношение (3.6 a) примет вид

$$\frac{\partial x^1(p, t)}{\partial t} = \int_V \sum_{j=1}^n L_{ij}(p, q, t) X_j(q, t) dq, \quad (3.7)$$

где  $L(p, q, t)$  — матричное ядро размера  $n \times n$ :

$$L(p, q, t) = \| L_{ij}(p, q, t) \| . \quad (3.8)$$

Кроме того, в силу (3.4), (3.5) справедливо равенство

$$L_{ij}(p, q, t) = L_{ji}(q, p, t) \quad (3.9)$$

и

$$\begin{aligned} & \int_V \int_V X'(p, t) L(p, q, t) X(q, t) dp dq = \\ & = \int_V \int_V \sum_{i, j=1}^n X_i(p, t) L_{ij}(p, q, t) X_j(q, t) dp dq \geq 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

для любых полей  $X(p, t)$ . Выражение для энтропии, согласно [9], тогда примет вид

$$\begin{aligned} \Delta S &= -1/2 \sum_{i, j=1}^{n+r} \int_V \int_V h_{ij}(p, q, t) x_i(p, t) x_j(q, t) dp dq = \\ &= -1/2 \int_V x'(p, t) h(p, q, t) x(q, t) dp dq, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $h$  — матрица-ядро размера  $(n+r) \times (n+r)$ . Аналогично соотношениям (2.12), (2.13) заменим  $(n+r)$ -мерное векторное поле  $x(p, t)$   $n$ -мерным:

$$x^*(p, t) = x^1(p, t) + x^{2^1}(p, t), \quad (3.12)$$

где  $x^1(p, t)$  —  $n$ -мерное векторное поле независимых координат объекта;  $x^{2^1}(p, t)$  — приведенное ( $n$ -мерное) векторное поле управлений, определяемое выражением

$$x^{2^1}(p, t) = \int_V \int_V h_{11}^{-1}(p, s, t) h_{12}(s, q, t) x^2(q, t) ds dq. \quad (3.13)$$

Здесь  $h_{11}(p, q, t) = \| h_{ij}(p, q, t) \|$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) — матрица-ядро, допускающая обращение. Т. е. существует некоторая матрица-ядро  $r_{11}(p, q, t) = h_{11}^{-1}(p, q, t)$ , для которой при любых  $x^*(p, t)$  выполняется соотношение

$$\begin{aligned} x^*(p, t) &= \int_V r_{11}(p, s, t) ds \int_V h_{11}(s, q, t) x^*(q, t) dq = \\ &= \int_V \int_V r_{11}(p, s, t) h_{11}(s, q, t) x^*(q, t) ds dp = \int_V r_{11}(p, s, t) X(s, t) ds; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$h_{12}(p, q, t)$  — матрица-ядро размера  $(n \times r)$  — аналог матрицы  $h_{12}$  (2.11), (2.18). Используя результаты разд. 3, выражение для энтропии запишем в виде

$$\Delta S = -1/2 \int_V \int_V x^{*'}(p, t) h_{11}(p, q, t) x^*(q, t) dp dq. \quad (3.15)$$

Отсюда, следуя результатам, полученным в разд. 2, имеем

$$X(p, t) = \int_V h_{11}(p, q, t) x^*(q, t) dq. \quad (3.16)$$

Выражение для  $\Delta S$  с учетом (3.16) можно записать в виде

$$\Delta S = -1/2 \int_V x^{*'}(p, t) X(p, t) dp. \quad (3.17)$$

Из условия (2.24) можно получить соотношение, связывающее  $L(p, q, t)$  и  $r_{11}(p, q, t)$ , в форме, аналогичной (2.27):

$$L(p, q, t) = 1/2 \frac{\partial r_{11}(p, q, t)}{\partial t}. \quad (3.18)$$

С этой целью преобразуем выражение для энтропии (3.17). Подставляя  $x^*$  из (3.14), получим

$$\Delta S = -1/2 \int_V \int_V X'(p, t) r_{11}(p, q, t) X(q, t) dp dq. \quad (3.19)$$

Дифференцируя (3.19) по  $t$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta S}{dt} = & 2 \int_V \int_V \frac{\partial X'(p, t)}{\partial t} r_{11}(p, q, t) X(q, t) dp dq + \\ & + \int_V \int_V X'(p, t) \frac{\partial r_{11}(p, q, t)}{\partial t} X(q, t) dp dq = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

либо с учетом (3.14)

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta S}{dt} = & 2 \int_V \frac{\partial X'(p, t)}{\partial t} x^*(p, t) dp + \int_V \int_V X'(p, t) \frac{\partial r_{11}(p, q, t)}{\partial t} X(q, t) \times \\ & \times dp dq = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Дифференцируя (3.17) по  $t$ , получаем

$$\frac{d\Delta S}{dt} = \int_V \frac{\partial x^{*'}(p, t)}{\partial t} X(p, t) dp + \int_V x^{*'}(p, t) \frac{\partial X(p, t)}{\partial t} dp = 0. \quad (3.22)$$

Подставляя в (3.22) (3.3), получаем

$$\frac{d\Delta S}{dt} \int_V \int_V X'(p, t) L(p, q, t) X(q, t) dp dq + \int_V \frac{\partial X'(p, t)}{\partial t} x^*(p, t) dp = 0. \quad (3.23)$$

Решая совместно (3.21) и (3.23), получаем

$$\int_V \int_V X'(p, t) \left[ L(p, q, t) - 1/2 \frac{\partial r_{11}(p, q, t)}{\partial t} \right] X(q, t) = 0. \quad (3.24)$$

Так как последнее равенство должно выполняться при любых  $X(p, t)$ , то справедливо соотношение (3.18). Используя (3.16) и (3.18), уравнение движения объекта управления можно записать в виде

$$\frac{\partial x^*(p, t)}{\partial t} = 1/2 \int_V \int_V \frac{\partial r_{11}(p, s, t)}{\partial t} h_{11}(s, q, t) x^*(q, t) ds dq. \quad (3.25)$$

Обозначая

$$1/2 \int_V \frac{\partial r_{11}(p, s, t)}{\partial t} h_{11}(s, q, t) ds = A(p, q, t), \quad (3.26)$$

получим

$$\frac{\partial x^*(p, t)}{\partial t} = \int_V A(p, q, t) x^*(q, t) dq. \quad (3.27)$$

При использовании в качестве критерия оптимальности физического функционала [9] приходим к условиям оптимальности в форме

$$Q_0 = \max_{x^2} H,$$

где

$$H = - \frac{d\Delta S_i}{dt}$$

в нашем случае примет вид

$$H = \int_V \frac{\partial x^{*'}(p, t)}{\partial t} X(p, t) dp, \quad (3.28)$$

либо, с учетом (3.16) и (3.25),

$$H = 1/2 \int_V \int_V \int_V x^{*'}(p, t) h_{11}(p, s_1, t) \frac{\partial r_{11}(s_1, s_2, t)}{\partial t} \times \\ \times h_{11}(s_2, q, t) x^*(q, t) dp ds_1 ds_2 dq. \quad (3.29)$$

Таким образом, для систем с распределенными параметрами критерий оптимальности ( $H$ ), в отличие от (2.30), является некоторым функционалом, зависящим от полей  $x^*(p, t)$ . Выражение для  $r_{11}(p, q, t)$  записывается в виде

$$r_{11}(p, q, t) = M [x^*(p, t) x^{*'}(q, t)] = \\ = \int_{\mathcal{Q}_{x_p}} \int_{\mathcal{Q}_{x_q}} p(x_p, p, x_q, t) x^*(p, t) x^{*'}(q, t) dx_p dx_q. \quad (3.30)$$

Для физического процесса с «перемешиванием» [10, 11] на каждом интервале постоянства управлений

$$r_{11}(p, q) = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T x^*(p, t) x^{*'}(q, t) dt, \quad (3.31)$$

где, как и ранее,  $x^*(p, t) = x^1(p, t) + x^2(p, t)$ . В итоге получены основные уравнения идентификации для систем с распределенными параметрами на основе методов ТНП. Оказалось, что эти соотношения имеют вид, аналогичный соотношениям разд. 2, при этом векторы заменены вектор-функциями, а численные матрицы — операторными. Идентификация объектов по этим соотношениям также строится аналогично разд. 2. Однако измерение вектора  $x^1$ , определение его размерности и матрицы  $r_{11}$  производится в каждой точке объема идентифицируемого объекта. Аналогично рис. 1, получаем адаптивную стохастическую модель идентификации для каждой точки пространственного распределения.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ. ПРИМЕРЫ

В качестве примера рассмотрим реализацию на АВМ модели идентификации (рис. 1) при  $n = 1^*$ . Измеряемая величина с датчика, установленного на объекте, подается на вход  $a$  сумматора схемы рис. 2. С выхо-

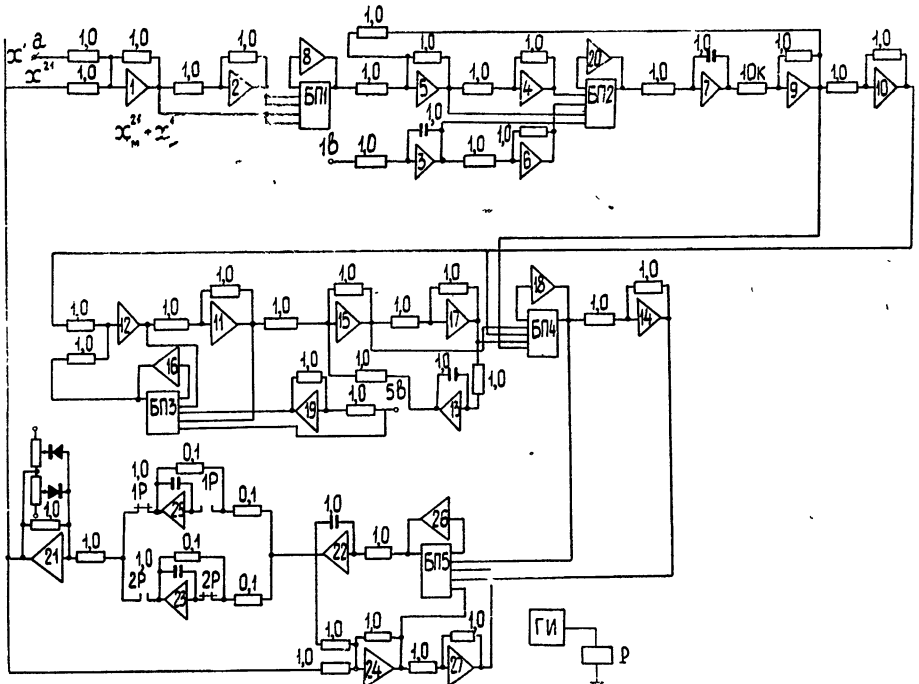


Рис. 2. Моделирование на АВМ задачи идентификации объекта.

да сумматора (1) снимается напряжение  $x^1 + x^2$ , а на блоке произведения (БП1, 8) формируется сигнал, пропорциональный  $(x^1 + x^2)^2$ . Сумматор 5, интегратор 7 и блок произведения (БП2, 20) образуют схему вычисления  $h_{11}^{-1}$  согласно (2.29) при  $\gamma(t) = 1/t$ . Делитель (12, 11, БП3, 16) обрабатывает сигнал, пропорциональный  $(h_{11})$ . Дифференциатор (15, 17, 13) вычисляет  $\dot{h}_{11}$ , а на блоке произведения (БП4, 18) получаем  $0,5 (\dot{h}_{11}^{-1} h_{11}) \cdot 10^{-3}$ , которое вводится в модель уравнений в качестве коэффициента; на выходе 22 получаем процесс  $x'(t)$ . На рис. 3 сопоставлены показания датчи-

ка  $\hat{x}^1(t)$  и решения уравнения идентификации  $x'(t)$ . Мерой близости указанных кривых является числовое значение  $Q(\hat{Q} \cdot 10^{-3} = 3\sigma; Q \cdot 10^{-3} = 2,5\sigma)$ . На основе результатов изложенной теории практически решены задачи идентификации реальных технологических процессов. Это весьма актуальные задачи построения математической модели и управления про-

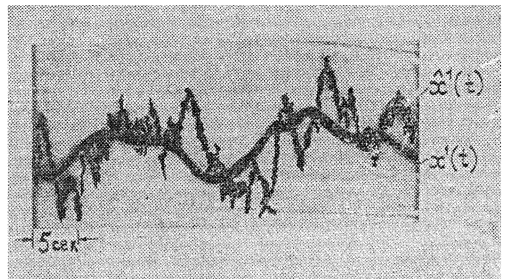


Рис. 3. Сопоставление решений уравнений идентификации и наблюдаемого процесса.

\* Моделирование на АВМ выполнял М. Т. Шаргородский.

цесса литья микропровода, идентификации и оптимизации процесса рудной электроплавки. Указанные приложения имеют самостоятельное значение и рассмотрены отдельно [9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Райбман, Что такое идентификация?, изд. Наука, М, 1970
2. Я. З. Цыпкин, Адаптация и обучение в автоматических системах, изд. Наука, М., 1968
3. В. В. Налимов, Н. А. Чернова, Статистические методы планирования экспериментальных экспериментов, изд. Наука, М, 1965.
4. Р. Фейнман, Характер физических законов, изд. Мир, М, 1968.
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, изд. Наука, М, 1964
6. И. П. Базаров, Термодинамика, Физматгиз, М, 1961.
7. Б. В. Булгаков, Колебания, Гостехиздат, М, 1948
8. С. Р. де Гроот, П. Мазур, Неравновесная термодинамика, изд. Мир, М, 1964
9. В. С. Лернер, Применение физического подхода к некоторым задачам управления, «Карта Молдовеняскэ», Кишинев, 1969
10. Н. С. Крылов, Работы по обоснованию статистической физики, изд. АН СССР, М., 1950.
11. Г. М. Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, Физматгиз, М, 1970.
12. Л. Бриллюэн, Наука и теория информации, Физматгиз, М, 1960.
13. Т. Андерсон, Введение в многомерный статистический анализ, Физматгиз, М, 1963
14. Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, М, 1967.
15. Ж. Ла-Сааль, С. Лефмец, Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, изд. Мир, М, 1964.
16. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, М, 1960
17. А. Г. Бутковский, Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, изд. Наука, М., 1965
18. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, изд. Наука, М., 1966

Кишиневский политехнический институт

Поступила в редакцию  
1 февраля 1971 г.

#### PHYSICALLY APPROACHED IDENTIFICATION OF PROCESSES IN CONTROLLED PLANTS WITH IMPOSING PHENOMENA

*V. S. Lerner*

For the simulation of controlled plants under study the results of the nonequilibrium processes theory are made use of. This allowed the development of a sufficiently general method for writing controlled processes equations which is based on physical laws and takes account of imposition of various physical phenomena, their irreversibility in time and chance. Identification methods for controlled plants (with lumped and distributed parameters) are worked out. The efficiency of the obtained results is supported by practically solved identification problems of technology processes.

УДК 62—506

## СРАВНЕНИЕ ДВУХ СХЕМ САМОНАСТРОЙКИ ПО КРИТЕРИЮ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО ОТКЛОНЕНИЯ

*И. И. Шубравый*

Эффект самонастройки двух видов самонастраивающихся систем. (СНС) оценивается по критерию среднеквадратичной ошибки между выходными величинами реальной и идеально настроенной СНС. Находятся области, в которых имеет преимущество либо автоколебательная, либо СНС с эталонной моделью как при синусоидальном, так и при случайном изменении параметров. В частности, автоколебательную СНС выгодно применять при медленных изменениях параметров объекта управления, а СНС с эталонной моделью—при больших скоростях или при больших частотах изменения параметров по сравнению со скоростью самонастройки автоколебательной системы и сравнительно малой величине изменения параметров.

Самонастраивающиеся системы должны иметь малую чувствительность к изменению параметров. Понятие чувствительности электрических цепей к изменению параметров было введено Бодэ [1] еще в 1948 г. Метод теории чувствительности описан в работе Быховского [2] применительно к электрическим и механическим цепям, а также в работе [3]. Интерес к изучению теории чувствительности особенно усилился за последние годы в связи с развитием самонастраивающихся и адаптивных систем. Используя методы теории чувствительности, можно непосредственно оценивать влияние изменения параметров на качество переходного процесса. Информация о тенденции поведения и качестве систем в зависимости от изменения параметров, получаемая в результате анализа чувствительности, является весьма ценной для решения ряда задач автоматического управления. Метод анализа чувствительности применяется как для построения самонастраивающихся систем (например, с применением моделей чувствительности) [4], так и для их оценки [5]. Используя метод теории чувствительности, можно сравнивать различные виды самонастраивающихся систем по критерию среднеквадратичной ошибки между выходом реальной самонастраивающейся системы и выходом идеально настроенной системы. Ниже приводится такое сравнение для двух видов самонастраивающихся систем, автоколебательной и с эталонной моделью; находятся области, в которых имеет преимущество тот или другой метод самонастройки при синусоидальном и при случайном изменении параметра.

Предположим, что передаточная функция замкнутой системы без контура самонастройки равна  $\Phi(j\omega)$ . Автоколебательную систему самонастройки можно осуществить по схеме рис. 1 или по схеме рис. 2. При самонастройке с помощью модели имеем схему рис. 3.

Передаточная функция схемы рис. 1

$$\Phi^*(j\omega) = \Phi_{\text{opt}} \frac{kW(j\omega)}{1 + kW(j\omega)}, \quad (1)$$

при

$$k \rightarrow \infty \quad (k = k_0 k_{\omega})$$

$$\Phi^*(j\omega) = \Phi_{\text{opt}}(j\omega).$$



Для схемы рис. 2

$$\Phi^*(j\omega) = \frac{k_{np} W^*(j\omega)}{1 + k_{np} W^*(j\omega)}, \quad (2)$$

где

$$W^*(j\omega) = \frac{k W_{np}(j\omega)}{1 + k_n H(j\omega) k W_{np}(j\omega)} \quad (k = k_0, k_-), \quad (3)$$

$$k_n H(j\omega) = 1/W_{opt}(j\omega).$$

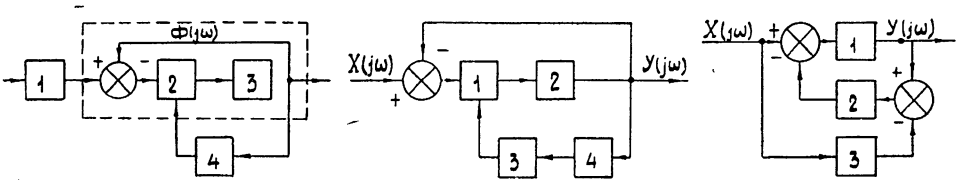


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 1. Блок-схема автоколебательной системы самонастройки с включенным на входе оптимальным фильтром; 1 —  $\Phi_{opt}(j\omega)$ , 2 — усилитель с переменным коэффициентом усиления  $k$ , 3 —  $k_0 W(j\omega)$ , 4 — схема измерения параметров.

Рис. 2. Блок-схема автоколебательной самонастраивающейся системы с фильтром в цепи местной обратной связи; 1 — усилитель с переменным коэффициентом усиления  $k_-$ , 2 —  $k_0 W_{np}(j\omega)$ , 3 —  $H(j\omega)$ , 4 — схема измерения параметров  $k_n$ .

Рис. 3. Блок-схема самонастраивающейся системы с моделью; 1 —  $\Phi(j\omega)$ , 2 —  $H(j\omega)$ , 3 —  $\Phi_M(j\omega)$ .

Тогда при  $k \gg 1$

$$W^*(j\omega) = 1/k_n H(j\omega) = W_{opt}(j\omega)$$

и

$$\Phi^*(j\omega) = \frac{W_{opt}(j\omega)}{1 + W_{opt}(j\omega)} = \Phi_{opt}(j\omega).$$

Для схемы рис. 3

$$\Phi^*(j\omega) = \frac{1 + \Phi_n(j\omega) H(j\omega)}{1 + \Phi(j\omega) H(j\omega)} \Phi(j\omega), \quad (4)$$

где

$$H(j\omega) = k_M/\Phi_M(j\omega)$$

и при  $k_n \gg 1$

$$\Phi^*(j\omega) = \Phi_M(j\omega).$$

Определим чувствительность системы к изменению какого-либо параметра, например  $p$ , следующим образом:

$$S_{p_i}^* = \frac{\partial \ln \Phi^*(j\omega)}{\partial \ln p_i} = \frac{\partial \ln \Phi^*(j\omega)}{\partial \ln \Phi(j\omega)} \frac{\partial \ln \Phi(j\omega)}{\partial \ln p_i} = S_\Phi S_{p_i}, \quad (5)$$

где  $S_\Phi$  — чувствительность системы к изменению функции  $\Phi$ ,  $S_{p_i}$  — чувствительность  $\Phi$  к изменению параметра  $p_i$ . Можно показать, что для схемы рис. 1 и 2

$$S_\Phi = 1.$$

Поэтому в дальнейшем будем вести сравнение двух типов схем (рис. 1 и рис. 3), так как схема рис. 2 аналогична схеме рис. 1.

Для схемы рис. 3

$$\Phi^*(j\omega) = \frac{[1 + \Phi_m(j\omega) H(j\omega)] \Phi(j\omega)}{1 + \Phi(j\omega) H(j\omega)},$$

$$\ln \Phi^*(j\omega) = \ln [1 + \Phi_m(j\omega) H(j\omega)] + \ln \Phi(j\omega) - \ln [1 + \Phi(j\omega) H(j\omega)], \quad (6)$$

$$S_\Phi = \frac{\partial \ln \Phi^*}{\partial \ln \Phi} = 1 - \frac{H(j\omega) \Phi(j\omega)}{1 + H(j\omega) \Phi(j\omega)} = \frac{1}{1 + H(j\omega) \Phi_0(j\omega)}.$$

Но так как производная вычисляется в точке полной настройки, то  $\Phi(j\omega)$  имеет индекс 0, при этом полная настройка соответствует случаю, когда передаточная функция замкнутой системы равна передаточной функции модели, т. е.

$$\Phi(j\omega) = \Phi_0(j\omega) = \Phi_m(j\omega).$$

При этом

$$S_\Phi = 1/(1 + k_m) \quad (7)$$

и

$$S_{p_i}^* = 1/(1 + k_m) S_{p_i}. \quad (8)$$

### 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОШИБКИ САМОНАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

Среднеквадратичная ошибка самонастраивающейся системы может быть определена из сравнения данной самонастраивающейся системы с идеальной системой (настроенной оптимальным образом), т. е.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |E(j\omega)|^2 d\omega dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)[\Phi(j\omega) - \Phi_0(j\omega)]|^2 d\omega dt. \end{aligned} \quad (9)$$

В передаточной функции  $\Phi$  меняется параметр  $p_i = p_{i0}(1 + \alpha_i)$  при  $\alpha_i = 0$ ,  $p_i = p_{i0}$ . В соответствии с этим передаточная функция  $\Phi[j\omega, p_{i0}(1 + \alpha_i)]$  является функцией двух переменных: частоты  $\omega$  и рассматриваемого параметра  $p_i$ .

Разложим выражение для передаточной функции в ряд Маклорена по степеням  $\alpha_i$ , предполагая, что  $\alpha_i < 1$ :

$$\Phi[j\omega, p_{i0}(1 + \alpha_i)] = \Phi_0(j\omega) + \frac{\partial \Phi(j\omega)}{\partial \alpha_i} \alpha_i + 1/2 \frac{\partial^2 \Phi(j\omega)}{\partial \alpha_i^2} \alpha_i^2 + \dots$$

При  $\alpha_i \ll 1$  ряд быстро сходится и можно ограничиться первыми членами его, т. е.

$$\Phi[j\omega, p_{i0}(1 + \alpha_i)] \simeq \Phi_0(j\omega) + \frac{\partial \Phi(j\omega)}{\partial \alpha_i} \alpha_i. \quad (10)$$

Тогда

$$\bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(j\omega) \alpha_i \frac{\partial \Phi(j\omega)}{\partial \alpha_i} \right|^2 d\omega dt, \quad (11)$$

но

$$\frac{\partial \Phi(j\omega)}{\partial \alpha_i} \simeq \frac{\partial \ln \Phi(j\omega)}{\partial \ln p_i} = \frac{\partial \ln \Phi(j\omega, p_i)}{\partial \ln p_i} \quad (p_i = p_{i0})$$

и

$$\begin{aligned} p_i &= p_{i0} (1 + \alpha_i), \\ \ln p_i &= \ln p_{i0} + \ln(1 + \alpha_i), \\ d \ln p_i &= d \ln(1 + \alpha_i). \end{aligned}$$

Разложим в ряд Тейлора  $\ln(1 + \alpha_i)$

$$\ln(1 + \alpha_i) = \alpha_i + \alpha_i^2/2 + \alpha_i^3/3 + \dots$$

Ограничившись первыми членами ряда, получим

$$d \ln p_i = d \ln(1 + \alpha_i) \simeq d\alpha_i.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Phi(j\omega)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \Phi(j\omega)}{\partial \ln p_i} = \frac{\Phi(j\omega)}{\Phi(j\omega)} \frac{\partial \Phi(j\omega)}{\partial \ln p_i},$$

но

$$1/\Phi(j\omega) \partial [\Phi(j\omega)] = \partial \ln \Phi(j\omega),$$

поэтому

$$\left. \frac{\partial \Phi(j\omega)}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_i = \alpha_0} = \Phi_0(j\omega) \frac{\partial \ln \Phi(j\omega)}{\partial \ln p_i} = \Phi_0(j\omega) S_{p_i}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в выражение для  $\bar{\varepsilon}^2$ , получим

$$\bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega) \Phi_0(j\omega) \alpha_i S_{p_i}|^2 d\omega dt. \quad (13)$$

Применим этот результат для приведенных выше самонастраивающихся систем. Рассмотрение начнем со схемы рис. 3. Для нее

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_m^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0^*(j\omega) X(j\omega) \alpha_i S_{p_i}^*|^2 d\omega dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0(j\omega) X(j\omega) \alpha_i 1/(1 + k_M) S_{p_i}|^2 d\omega dt = \\ &= 1/(1 + k_M)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0(j\omega) X(j\omega) \alpha_i S_{p_i}|^2 d\omega dt = \\ &= (1 + k_M)^{-2} \bar{\varepsilon}_0^2, \end{aligned}$$

где

$$\bar{\varepsilon}_0^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0(j\omega) X(j\omega) \alpha_i S_{p_i}|^2 d\omega dt. \quad (14)$$

Для колебательной самонастраивающейся системы рис. 1 передаточная функция может быть представлена в виде

$$\Phi(j\omega, p_{i0}(1 + \alpha_i)).$$

При этом предполагается, что процесс самонастройки какого-либо параметра происходит с помощью нелинейного элемента путем образования функции, изменяющейся обратно пропорционально изменению рассматриваемого параметра. Например, коэффициент усиления усилителя с ограничением меняется по закону  $k_{-} = b/k_0$ . Чтобы найти  $\alpha_i$ , изобразим процесс самонастройки в виде блок-схемы (рис. 4). Эту схему нужно понимать так. Изменение параметра  $p_i$  на величину  $1 + \alpha_i$  приводит к изменению параметра настраиваемого элемента в  $p_{i0}/[p_{i0}(1 + \alpha_i)]$  раз таким образом, чтобы их произведение стремилось к исходному параметру  $p_{i0}$ . Однако элемент самонастройки работает не идеально, поэтому  $\alpha_i^*$  отличается от  $\alpha_i'$ .

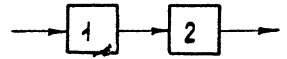


Рис. 4. Схематическое изображение для определения ошибки системы при изменении параметров; 1 —  $p_{i0}(1 + \alpha_i)$ , 2 —  $p_{i0}/p_{i0}(1 + \alpha_i)$ .

Из схемы рис. 4 видно, что

$$p_{i0} [p_{i0}(1 + \alpha_i'')]^{-1} p_{i0}(1 + \alpha_i) \simeq p_{i0}(1 - \alpha_i'')(1 + \alpha_i) \simeq p_{i0}(1 + \alpha_i - \alpha_i'').$$

Обозначив  $\alpha_i - \alpha_i''$  через  $\alpha_i'$ , получим

$$p_{i0}(1 + \alpha_i').$$

В качестве изменяющегося параметра можно взять какую-либо постоянную, времени системы или коэффициент усиления разомкнутой системы  $k_0$ . Формула для вычисления среднеквадратичной ошибки имеет вид

$$\overline{\varepsilon^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0(j\omega) X(j\omega) \alpha_i' S_{p_i}|^2 d\omega dt. \quad (15)$$

Закон изменения параметра  $\alpha_i$  может быть самым разнообразным, в зависимости от условий работы системы. Скорее всего изменение параметров в системе происходит случайным образом в результате совокупного действия разнообразных случайных факторов. Рассмотрим вначале синусоидальное изменение параметра

$$\alpha_i = \alpha_{i0} \sin \Omega_0 t,$$

где  $\Omega_0$  характеризует скорость изменения параметра  $p_i$ . Сначала вычислим  $\overline{\varepsilon_0^2}$ , воспользовавшись формулой (14),

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_0^2} &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0(j\omega) X(j\omega) \alpha_{i0} \sin \Omega_0 t S_{p_i}|^2 d\omega dt = \\ &= \pi/4 \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0(j\omega) X(j\omega) \alpha_{i0} S_{p_i}|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (16)$$

Применим это выражение для системы с моделью

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_m^2} &= \lim 1/T \int_0^T 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(j\omega) X(j\omega) \alpha_{i0} \sin \Omega_0 t (1 + k_m)^{-1} S_{p_i}|^2 \times \\ &\quad \times d\omega dt = (1 + k_m)^{-2} \overline{\varepsilon_0^2}, \end{aligned}$$

где  $\overline{\varepsilon_0^2}$  определяется из выражения (16).

Автоколебательную самонастраивающуюся систему можно рассматривать как систему с несущей частотой, амплитуда которой модули-

руется изменением параметра. Следовательно, к этой системе применима теория амплитудной модуляции. Несущая частота (частота автоколебаний) выделяется полосовым фильтром, низкочастотный эквивалент которого имеет передаточную функцию

$$W_{\Phi}(j\Omega) = \frac{T_1 j\Omega + 1}{T_2 j\Omega + 1}. \quad (17)$$

Так как в контуре самонастройки действует частота изменения параметра, значительно отличающаяся от частоты сигнала, целесообразно обозначение  $\omega$  заменить  $\Omega$ .

Синусоидальный сигнал изменения параметра с частотой  $\Omega_0$ , проходя через полосовый фильтр, изменяет свою амплитуду и фазу, в результате на его выходе получается

$$\alpha_i'' = \alpha_{i0} \frac{(1 + T_1^2 \Omega_0^2)^{1/2}}{(1 + T_2^2 \Omega_0^2)^{1/2}} \sin(\Omega_0 t - \varphi), \quad (18)$$

где

$$\varphi = \arctg \Omega_0 T_1 - \arctg \Omega_0 T_2. \quad (19)$$

Теперь можно найти  $\alpha_i'$ :

$$\begin{aligned} \alpha_i' &= \alpha_i - \alpha_i'' = \alpha_{i0} \sin \Omega_0 t - \alpha_{i0} (1 + T_1^2 \Omega_0^2)^{1/2} \times \\ &\times (1 + T_2^2 \Omega_0^2)^{-1/2} \sin(\Omega_0 t - \varphi) = \alpha_{i0} [\sin \Omega_0 t - (1 + T_1^2 \Omega_0^2)^{1/2} \times \\ &\times (1 + T_2^2 \Omega_0^2)^{-1/2} \sin(\Omega_0 t - \varphi)], \end{aligned} \quad (20)$$

откуда для автоколебательной системы

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_k^2} &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0(j\omega) X(j\omega) \alpha_{i0} S_{p_i} \times \\ &\times [\sin \Omega_0 t - (1 + T_1^2 \Omega_0^2)^{1/2} (1 + T_2^2 \Omega_0^2)^{-1/2} \sin(\Omega_0 t - \varphi)]|^2 d\omega dt. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} 1/T \int_0^T \sin^2 \Omega t dt &= (1 + T_1^2 \Omega_0^2) (1 + T_2^2 \Omega_0^2)^{-1} 1/T \times \\ &\times \int_0^T \sin^2(\Omega_0 t - \varphi) dt = 1/2 - 1/2 (1 + T_1^2 \Omega_0^2) (1 + T_2^2 \Omega_0^2)^{-1} = \\ &= 1/2 \Omega_0^2 (T_2^2 - T_1^2) (1 + T_2^2 \Omega_0^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

то

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_k^2} &= \Omega_0^2 (T_2^2 - T_1^2) (1 + T_2^2 \Omega_0^2)^{-1} 1/4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(j\omega) X(j\omega) \alpha_{i0} S_{p_i}|^2 \times \\ &\times d\omega = \Omega_0^2 (T_2^2 - T_1^2) (1 + T_2^2 \Omega_0^2)^{-1} \overline{\varepsilon_0^2}. \end{aligned}$$

Сравнивая ошибки  $\varepsilon_k^2$  и  $\overline{\varepsilon_m^2}$  для двух схем (рис. 1 и 3), видим, что они отличаются только множителями при  $\overline{\varepsilon_0^2}$ . Найдем области, в которых имеет преимущество та или другая система, приравняв  $(1 + k_{\mu})^{-2}$  множителю  $\Omega_0^2 (T_2^2 - T_1^2) (1 + T_2^2 \Omega_0^2)^{-1}$ .

Уравнение для границы областей, в которых проявляются преимущества той или другой системы, имеет вид

$$(1 + k_m)^{-2} = \Omega_0^2 (T_2^2 - T_1^2) (1 + T_2^2 \Omega_0^2)^{-1}. \quad (22)$$

Из рис. 5 видно, что при медленных изменениях параметра следует отдавать предпочтение колебательным системам, имеющим большой коэффициент усиления, так как колебательные системы при этом имеют меньшую среднеквадратичную ошибку, чем системы, настраиваемые по моделям. По мере увеличения скорости изменения параметра (увеличения  $\Omega_0$ ) пересекается граница, которая соответствует равенству среднеквадратичных ошибок сравниваемых систем, при дальнейшем увеличении скорости изменения параметра преимущества имеет система с моделью, так как для нее при этих условиях получается меньшая среднеквадратичная ошибка. По мере компенсации инерционности контура самонастройки (увеличение коэффициента  $\alpha = T_1/T_2$ ) граница двух областей перемещается вправо, и область преимуществ колебательной системы расширяется. Указанные границы областей имеют две асимптоты, одну вдоль оси абсцисс, а другая асимптота, параллельная оси ординат, определяется уравнением

$$k_m = [1/(\sqrt{1 - \alpha^2})] - 1. \quad (23)$$

## 2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОШИБКИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ И ПРИ СЛУЧАЙНОМ СИГНАЛЕ НА ВХОДЕ

Предположим, что изменение параметра происходит случайным образом, и статистический процесс изменения параметров—эргодический. В этом случае выражение (13) для среднеквадратичной ошибки преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_k^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 1/2\pi |\Phi_0(j\omega) S_{p_i} X(j\omega)|^2 d\omega dt = \\ &= 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} G_p(\Omega_0) \int_{-\infty}^{+\infty} 1/2\pi |\Phi_0(j\omega) S_{p_i} X(j\omega)|^2 d\omega dt, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $G_p(\Omega)$  — спектральная плотность изменения параметра  $p_i$ ,  $\alpha^2$  — средний квадрат одной выборки случайного изменения параметра  $p_i$ ,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T \alpha^2 dt = G_p(\Omega).$$

Спектральная плотность изменения параметра может быть задана в виде

$$G_p(\Omega) = \alpha^2/(\Omega^2 + a^2). \quad (25)$$

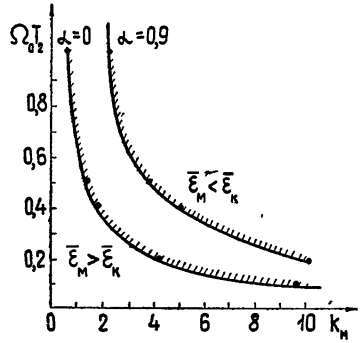


Рис. 5. Блок-схема настройки параметра.

В самом общем случае выходной сигнал также является случайной функцией времени, и если он принадлежит к типу стационарных случайных процессов, то его спектральная плотность не зависит от времени и может быть записана в виде  $G(\omega)$ .

Тогда

$$\overline{\varepsilon_k^2} = 1/4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G_p(\Omega_p) d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) |\Phi_0(j\omega) S_{p_i}|^2 d\omega. \quad (26)$$

Для сравнения вычислим среднеквадратичную ошибку для схем рис. 1 и рис. 3. По-прежнему предполагаем, что инерционность контура самонастройки характеризуется фильтром вида

$$W_\Phi(j\Omega) = (T_1 j\Omega + 1)(T_2 j\Omega + 1)^{-1}.$$

После прохождения через этот фильтр сигнал, соответствующий изменению параметра, преобразуется к виду

$$\begin{aligned} G_p''(\Omega) &= |W_\Phi(j\Omega)|^2 G_p(\Omega) = (T_1^2 \Omega^2 + 1)(T_2^2 \Omega^2 + 1)^{-1} G_p(\Omega), \\ G_p'(\Omega) &= G_p(\Omega) - G_p''(\Omega) = G_p(\Omega) - (T_1^2 \Omega^2 + 1)(T_2^2 \Omega^2 + 1)^{-1} G_p(\Omega) = \\ &= \Omega^2 (T_2^2 - T_1^2) (T_2^2 \Omega^2 + 1)^{-1} G_p(\Omega). \end{aligned} \quad (27)$$

Подставим значение  $G_p$  в выражение (26) и вычислим сначала интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega^2 (T_2^2 - T_1^2) a^2 d\Omega}{(T_2^2 \Omega^2 + 1)(\Omega^2 + a^2)} = \frac{1}{2} \frac{a^2 T_2 (1 - a^2)}{1 + a T_2}.$$

Интеграл (26) преобразуется к виду

$$\overline{\varepsilon_k^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2 T_2 (1 - a^2)}{1 + a T_2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0(j\omega) S_{p_i}|^2 G(\omega) d\omega$$

или

$$\overline{\varepsilon_k^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2 T_2 (1 - a^2)}{1 + a T_2} \overline{\varepsilon_0^2}. \quad (28)$$

Для самонастраивающейся системы с моделью среднеквадратичная ошибка при случайном изменении параметра определяется формулой

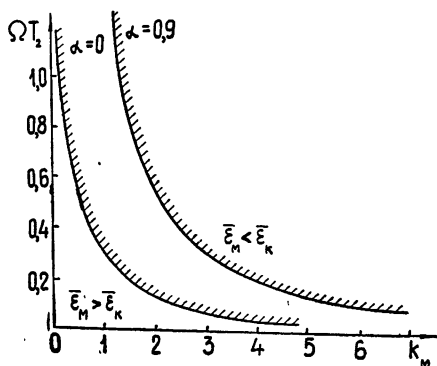
$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_m^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{\Omega^2 + a^2} d\Omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0(j\omega) S_{p_i}^*|^2 G(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \frac{a^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_0(j\omega) S_{p_i}^*|^2 G(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \frac{a}{(1 + k_m)^2} \overline{\varepsilon_0^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Граница областей, определяющих преимущества той или другой системы, описывается уравнением

$$\frac{a T_2 (1 - a^2)}{1 + a T_2} = \frac{1}{(1 + k_m)^2}. \quad (30)$$

График зависимости  $aT_2$  от  $k_m$  представлен на рис. 6. Из графика видно, что автоколебательные системы при случайном изменении параметра  $\rho_i$  выгодно применять при малых частотах изменения параметра, так как среднеквадратичная ошибка  $\varepsilon_k^2 < \varepsilon_m^2$ , а также при малой инерционности контура самонастройки. По мере компенсации инерционности контура самонастройки граница использования колебательной системы расширяется.

Рис. 6. Кривые равных среднеквадратичных ошибок двух типов самонастраивающихся систем при синусоидальном изменении параметра.



#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бодэ, Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью, ИЛ, М., 1948.
2. М. Л. Быховский, Основы динамической точности электрических и механических цепей, изд. АН СССР, М., 1958.
3. K. S. Miller, F. I. Murray, J. Mathemat, Phys., July 2—3, (1953).
4. П. П. Кокотович, Автоматика и телемеханика, № 12, 1670 (1964).
5. J. Al Aseitin, IRE Trans., AC-2, 102 (1958).
6. Синтез оптимальных систем автоматического управления, изд. Машиностроение, М., 1964.
7. И. И. Шубравый, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 11, 1708 (1970).

Всесоюзный заочный  
машиностроительный институт

Поступила в редакцию  
23 ноября 1970 г.

#### COMPARISON OF TWO SELF-ADAPTING SCHEMES BY STANDARD DEVIATION CRITERION

I. I. Shubray

The self-adaptivity efficiency of two types of self-adapting systems is estimated using the criterion of roots-mean-square error between the output values of a real self-adapting system and a perfectly adjusted self-adapting system. Regions are determined that present advantages to either an autooscillations self-adapting system or a self-adapting system with a reference model under both a sinusoidal and stochastic variation of parameters. In particular it is more reasonable to use an autooscillations self-adapting system when the controlled plant parameters vary slowly and a self-adapting system with a reference model when the parameters vary quickly or when the parameters variation frequency is high as compared to the self-adaptivity rate of an autooscillations system and relatively small value of parameters variation.



УДК 621.372

## К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССОВ В $RLC$ ЦЕПИ С ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГОЙ

Я. К. Любимцев

Исследуется устойчивость стационарных процессов в  $RLC$  цепи, в состав которой входит электрическая дуга. Динамическая характеристика дуги выбирается в соответствии с гипотезой О. Майра. В фазовом пространстве системы с помощью прямого метода Ляпунова выделена область притяжения особой точки, соответствующей стационарному режиму с негорящей дугой. Исследованы также «критические» по Ляпунову случаи. Функции Ляпунова выбираются нескольких видов.

В последнее время опубликован ряд работ [1–3], посвященных исследованию устойчивости в «большом» процессов в системах, в состав которых входит электрическая дуга. Динамическая характеристика дуги выбирается в соответствии с гипотезой Майра [4]\*.

В предлагаемой статье рассматривается  $RLC$  цепи постоянного тока с электрической дугой. Гипотеза Майра считается справедливой. В фазовом пространстве системы с помощью прямого метода Ляпунова выделена область притяжения особой точки, соответствующей стационарному режиму с негорящей дугой. Функции Ляпунова выбираются нескольких видов. Исследуются также «критические» по Ляпунову случаи.

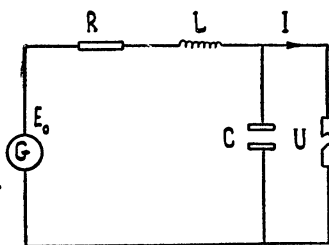


Рис. 1.

Рассмотрим  $RLC$  цепь, в которую включена электрическая дуга (рис. 1). Дифференциальные уравнения данной системы в предположении справедливости гипотезы Майра имеют вид [5]

$$LC \frac{d^2 U}{dt^2} + RC \frac{dU}{dt} + U + L \frac{dI}{dt} + RI = E_0, \quad (1)$$

$$Q_0 \left( \frac{1}{I} \frac{dI}{dt} - \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} \right) = UI - P_0, \quad (2)$$

где  $G$  — источник постоянного тока с ЭДС  $E_0 = \text{const}$ ,  $R$  — активное сопротивление,  $L$  — индуктивность,  $C$  — емкость,  $P_0$  — мощность теплоотвода, считаемая постоянной,  $Q_0$  — условное теплосодержание дуги,  $I$  — ток в дуге,  $U$  — напряжение на дуге. Область задания переменных:  $I \geq 0$ ,  $U > 0$ ,  $UI \geq 0$ . Вводя новые безразмерные переменные и время

$$x = \frac{E_0^2}{P_0} \frac{I}{U}, \quad y = \frac{U - E_0}{E_0}, \quad z = \frac{1}{E_0} \frac{dU}{d\tau}, \quad \tau = \frac{P_0}{Q_0} t,$$

перепишем систему (1), (2) следующим образом:

\* По вопросу о применимости гипотезы Майра см. [6].

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x[1 - x(1 + y)^2], \\ \dot{y} &= z, \\ \dot{z} &= -dcx(1 + y) - by - cz - dxz + dx(1 + y)[1 - x(1 + y)^2], \end{aligned} \quad (3)$$

где  $b = Q_0^2/P_0^2 LC$ ,  $c = RQ_0/LP_0$ ,  $d = Q_0/E_0^2 C$  — неотрицательные безразмерные параметры. Область задания правых частей системы (3)  $x \geq 0$ ,  $y > -1$ ,  $z$  — любое\*.

В зависимости от значений параметров система (3) имеет либо одну особую точку, либо несколько [6]. При  $b > 4dc$  ( $E_0^2 > 4P_0 R$ ) особых точек три:  $O_1$  с координатами  $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ , соответствующая стационарному процессу с негорящей дугой;  $O_2$  с координатами  $x_2 = 1/(1 + y_2)^2$ ,  $y_2 = [-b + \sqrt{b(b - 4dc)}]/2b$ ,  $z_2 = 0$ ;  $O_3$  с координатами  $x_3 = 1/(1 + y_3)^2$ ,  $y_3 = [-b - \sqrt{b(b - 4dc)}]/2b$ ,  $z_3 = 0$ .

При  $b = 4dc$  особая точка  $O_1$  сохраняется, точки  $O_2$  и  $O_3$  сливаются, образуя особую сложную точку с координатами  $x_{23} = 4$ ,  $y_{23} = -1/2$ ,  $z_{23} = 0$ . При  $b < 4dc$  сложная особая точка исчезает. Особая точка  $O_1$  остается.

При положительных значениях параметров точка  $O_1$  устойчива «в малом». Ее тип — пространственный узел или фокус. При  $e = 0$ ,  $b > 0$  и  $d > 0$ , а также при  $b = 0$ ,  $c > 0$  и  $d > 0$  имеем дело с «критическими» по Ляпунову случаями (если  $c = 0$ ,  $b$  и  $d$  положительные, характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет два чисто мнимых корня и один отрицательный корень, если  $b = 0$ ,  $c$  и  $d$  положительны, то один корень нулевой, а два других имеют отрицательную вещественную часть).

Точка  $O_2$  неустойчива, типа пространственного седла.

Точка  $O_3$  может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

Условия устойчивости имеют вид

$$c + dx_3 - 1 > 0, \quad [c + dx_3 - 1][b + (1 + c)dx_3 - c] - dcx_3 + b > 0. \quad (4)$$

При выполнении (4) ей соответствует стационарный процесс в системе с горящей электрической дугой.

При  $b = 4dc$  имеем сложную особую точку типа седло-фокус или седло-узел.

Наряду с вопросом об устойчивости «в малом» стационарных процессов нас интересуют размеры области притяжения особой точки  $O_1$ . Для нахождения этой области воспользуемся прямым методом Ляпунова. Функции Ляпунова возьмем двух типов:

$$2V_1(x, y, z) = Ax^2 + (Bc + Db)y^2 + 2Byz + Dz^2, \quad (5)$$

где  $A, B, D$  положительны. При  $B < Dc$  функция  $V_1$  знакоопределенно положительна во всем фазовом пространстве.

Производная  $\frac{dV_1}{d\tau}$ , найденная в силу (3), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x, y, z) &= -Ax^2 + Bd(1 - c)xy + Dd(1 - c)xz - Bby^2 - \\ &- (Dc - B)z^2 + x[Ax^2(1 + y)^2 + Bd(1 - c)y^2 + Dd(1 - c)yz - \\ &- Dz^2 - (By + Dz)dx(1 + y)^3], \end{aligned} \quad (6)$$

\* Отметим, что рассмотрение области  $x < 0$  с точки зрения математики интереса не представляет, так как изображающая точка из этой области обязательно приходит на плоскость  $x = 0$ . Плоскость  $x = 0$  является интегральной для системы (3).

$\dot{V}_1$  знакоопределенно отрицательна в некоторой области, содержащей точку  $O_1$  при  $A > \frac{B(Dc - B) + D^2B}{4b(Dc - B)} d^2(1 - c)^2$ , что всегда может

быть выполнено за счет соответствующего выбора  $A$  при  $Dc - B > 0$ .

Для выделения области притяжения особой точки  $O_1$  достаточно построить эллипсоид  $V_1 = C_0$ , где  $C_0$  находится из условия касания эллипсоида  $V_1 = C$  с поверхностью  $\dot{V}_1 = 0$ . Поверхность  $V_1 = C_0$  дает лишь достаточную границу области притяжения.

Рассмотрим еще одну функцию Ляпунова:

$$V_2(x, y, z) = Ax + x(1 + y)z + \frac{z^2}{2d} + \frac{b^2}{2d}y^2 + \frac{1}{2}dx^2(1 + y)^2, \quad (7)$$

где  $A$  — неотрицательное число.

На рис. 2 приведен вид поверхности  $V_2(x, y, z) = C$ . Функция  $V_2(x, y, z)$  знакоопределенно положительна в некоторой области  $G_1$ , содержащей точку  $O_1$ . Производная  $\dot{V}_2(x, y, z)$  запишется следующим образом:

$$\dot{V}_2(x, y, z) = -x \{ A [1 - x(1 + y)^2] + by(1 + y) \} - \frac{c}{d} [z + dx(1 + y)]^2. \quad (8)$$

Она знакопостоянно отрицательна в области  $G_2$ , также содержащей точку  $O_1$ . Из условия касания поверхностей  $V_2(x, y, z) = C$  и  $\dot{V}_2(x, y, z) = 0$  находим значение  $C = C^*$ :

$$C^* = \frac{9Abcy^2(1 + y)^3 - 2d[A(1 - 2c) + by(1 + y)]}{18Adc(1 + y)^2},$$

а  $y$  является корнем уравнения

$$18Abcy(1 + y)^3 + d[A(1 - 2c) + by(1 + y)][2A(1 - 2c) - b(1 + y)(3 + 4y)] = 0,$$

$C^*$  является функцией от  $A$ , и, следовательно, меняя  $A$ , можно подобрать такое  $C^*$ , при котором область, лежащая внутри поверхности  $V_2(x, y, z) = C^*$ , будет наибольшей. Отметим, что  $V_2 = C^*$  даст также лишь достаточную границу области притяжения.

Проведенное сравнение областей притяжения  $V_1 = C_0$  и  $V_2 = C^*$  (при конкретных значениях параметров) показало, что размеры второй области несколько больше.

Как уже отмечалось, случаи  $c = 0, b > 0, d > 0$  и  $b = 0, c > 0, d > 0$  являются «критическими» по Ляпунову, для исследования характера невозмущенного движения необходимо учитывать в уравнениях (3) нелинейные члены.

Рассмотрим «критические» случаи.

1) Пусть  $c = 0, b > 0$  и  $d > 0$  (соответствуют  $R = 0$ , т. е. в цепи отсутствует активное сопротивление). Воспользуемся функцией  $V_2(x, y, z)$ . Производная  $\dot{V}_2(x, y, z)$  примет вид

$$\dot{V}_2(x, y, z) = -x [A - Ax(1 + y)^2 + By(1 + y)].$$

Она знакопостоянно отрицательна. В свою очередь  $V_2(x, y, z)$ , как и

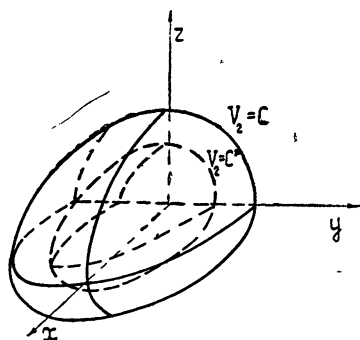


Рис. 2.

ранее, знакоопределенно положительна в окрестности точки  $O_1$ . Таким образом, невозмущенное движение, соответствующее точке  $O_1$ , устойчиво.

2) Пусть  $b = 0$ ,  $c$  и  $d$  положительны (случай имеет более теоретический интерес, нежели практический). Вновь рассмотрим функцию

$$V_2(x, y, z) = Ax + x(1+y)z + \frac{z^2}{2d} + \frac{1}{2} dx^2(1+y)^2.$$

Ее производная

$$\dot{V}_2 = -Ax[1 - x(1+y)^2] - \frac{c}{d} [z + dx(1+y)]^2.$$

Эти функции удовлетворяют условиям теоремы Ляпунова об устойчивости невозмущенного движения. При  $b = 0$  можно воспользоваться и другим методом исследования устойчивости. Для этой цели рассмотрим семейство поверхностей (рис. 3)

$$V_3(x, y, z) = z + dx(1+y) = C. \quad (9)$$

Поверхность  $V_3(x, y, z) = 0$  проходит через особую точку  $O_1$ .

Найдем производную  $\dot{V}_3(x, y, z)$  в соответствии с системой (3) при  $b=0$ ;

$$\dot{V}_3(x, y, z) = -c[z + dx(1+y)] = -cV_3(x, y, z), \quad (10)$$

откуда следует, что поверхности  $V_3(x, y, z) = C$  при  $C \neq 0$  являются поверхностями без контакта.

При движении изображающая точка обязательно приходит на поверхность  $V_3(x, y, z) = 0$ . На этой поверхности рассмотрим семейство кривых, получающихся в результате пересечения с цилиндрическими поверхностями:

$$V_4(x, y) = x(1+y)^2 = C \geq 0. \quad (11)$$

Запишем выражение

$$\dot{V}_4(x, y) = -x(1+y)^2[1 - x(1+y)^2 + 2dx]. \quad (12)$$

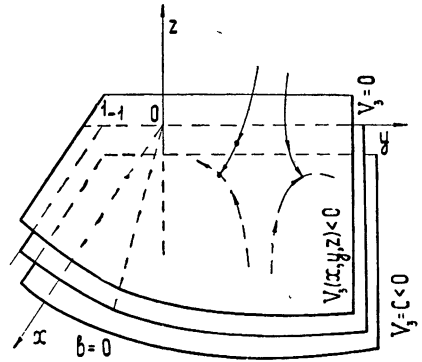


Рис. 3.

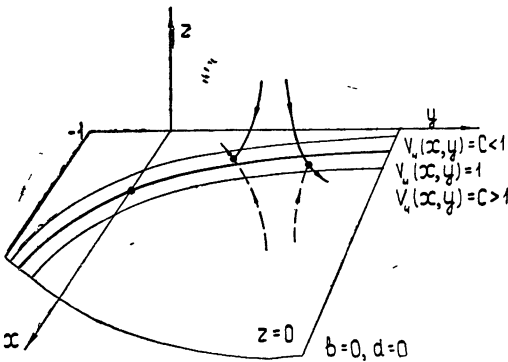


Рис. 4.

Из (11) и (12) следует, что на поверхности  $V_3(x, y, z) = 0$  существует область, где изображающая точка переходит с кривой  $V_4(x, y) = C$  с большим значением  $C$  на кривую с меньшим значением  $C$ . В состав этой области заведомо входят кривые с  $C \leq 1$ . В то же время существует область (при больших  $y$ ), где движение происходит в противоположную сторону. При  $d = 0$  поверхность  $V_3(x, y, z) = 0$  вырождается в плоскость  $z = 0$ , а кривой, разделяющей ука-

занные области, является кривая  $x(1+y)^2 = 1$ , (рис. 4) (случай  $b$  и  $d = 0$  соответствует бесконечно большому значению емкости).

Прямым методом Ляпунова удобно также воспользоваться для выделения достаточных границ области неустойчивости, соответствующей особой точке  $O_2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О. Я. Новиков, Сб. Основные тенденции в проектировании и строительстве новых энергетических машин и аппаратов. Доклады межвузовской научно-технической конференции, М., 1966.
2. О. Я. Новиков, В. М. Егоров, Третья Всесоюзная межвузовская конференция по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей и систем, Ташкент, 1967.
3. В. М. Егоров, О. Я. Новиков, Тр. второго семинара-симпозиума по применению метода функций Ляпунова в энергетике, Новосибирск, 1970.
4. О. Мајр, АФЕ, 12, 588 (1943).
5. А. М. Залесский, Электрическая дуга отключения, Госэнергоиздат, М., 1963.
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
29 декабря 1970 г.

#### ON STABILITY OF PROCESSES IN RLC-NETWORK WITH ELECTRIC ARC

*Ya. K. Lubimtsev*

Stability of steady processes in RLC-network with an electric arc is studied. The dynamic characteristic of the arc is chosen in accordance with the O. Majr hypothesis. In the system phase space by the use of the Liapunov direct method an attraction region is singled out for a singular point corresponding to a steady mode with an unburning arc. Investigation on cases, „critical“ by Liapunov, is also carried out. Liapunov functions are chosen to be of several types.

УДК 62 — 501.52 + 517.9

## МЕТОД Е. П. ПОПОВА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

*Р. Е. Гинзбург*

Рассматривается алгоритм построения приближенных решений квазилинейных систем с медленно меняющимися параметрами, близких к быстро затухающим решениям порождающей системы. В основе исследования лежит асимптотический метод Митропольского—Попова.

Е. П. Поповым в [1] предложен метод построения быстро затухающих колебательных процессов квазилинейных систем, основанный на обобщении асимптотического метода Крылова—Боголюбова [2]. В данной заметке результаты Попова переносятся на системы, содержащие медленно меняющиеся параметры.

### 1. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{v=1}^n a_{sv}(\tau)x_v + \mu F_s(x_1, \dots, x_n, \tau, \mu) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (1.1)$$

где  $F_s$  — нелинейные, достаточно гладкие, функции в некоторой области  $G$  изменения аргументов  $x_s, \tau, \mu$ ;  $a_{sv}$  — некоторые функции медленного времени  $\tau = \mu t$ ;  $\mu$  — малый параметр, характеризующий, во-первых, малость функций  $F_s(x_1, \dots, x_n, \tau, \mu)$ , во-вторых, медленность изменения коэффициентов  $a_{sv}$  во времени.

Системы вида (1.1) рассматривались в работах Митропольского, например, [2, 3], который дал эффективный метод построения решений, близких к гармоническим. Целью настоящей работы является объединение методов Ю. А. Митропольского и Е. П. Попова для приближенного построения быстро затухающих решений системы (1.1).

Следуя идеям Митропольского, рассмотрим порождающую систему

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{v=1}^n a_{sv}(\tau)x_v, \quad (1.2)$$

в которой  $\tau$  рассматривается не как  $\mu t$ , а как некоторый постоянный параметр. Предположим, что характеристическое уравнение системы (1.2) имеет все корни с отрицательной вещественной частью. Пусть, в частности, имеется  $L$  корней вида  $\lambda_i = -\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, L$ ) и  $2K$  корней вида  $\lambda_j = -\alpha_j \pm N_j \omega \sqrt{-1}$  ( $j = L + 1, \dots, L + K$ ), где  $N_j$  — целые числа. Величины  $\alpha_i, \alpha_j, \omega$  являются функциями параметра  $\tau$ . Будем предполагать, что корни  $\lambda$  простые, а функции  $\alpha_i, \alpha_j, \omega$  непрерывны и достаточно число раз дифференцируемы для любых  $\tau$  из интервала  $0 \leq \tau \leq T_0$  ( $[0, T_0/\mu]$  — интервал времени, на котором рассматривается искомый процесс).

Рассматриваемой группе корней будет соответствовать  $m + 1 = L + 2K$  экспоненциально-периодических решений системы (1.2), имеющих общий период  $2\pi/\omega$ . Обозначим эти решения через  $\exp(-\alpha_r t) \varphi_{sr}(\theta)$ , где  $\theta = \omega(\tau)t$ , а  $\varphi_{sr}(\theta)$  — периодические функции. Система, сопряженная с (1.2),

$$\frac{dy_s}{dt} = - \sum_{\nu=1}^n a_{\nu s}(\tau) y_{\nu} \quad (s = 1, \dots, n) \quad (1.3)$$

также имеет  $m + 1$  экспоненциально-периодических (того же периода  $2\pi/\omega$ ) решений, которые обозначим через  $\exp(\alpha_r t) \psi_{sr}(\theta)$ . Таким образом, рассматриваемой группе корней характеристического уравнения системы (1.2) при  $\tau = \text{const}$  соответствует семейство экспоненциально-периодических (периода  $2\pi/\omega$ ) решений, зависящих от  $m + 1$  произвольных постоянных  $M_{10}, \dots, M_{m+1,0}$ :

$$x_{s0} = \sum_{p=1}^{m+1} M_p \varphi_{sp}(\theta), \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} M_i &= M_{i0} \exp(-\alpha_i t) \quad (i = 1, \dots, \mathbf{A}), \\ M_j &= M_{j0} \exp(-\alpha_j t) \quad (j = L + 1, \dots, L + K), \\ M_{j+k} &= M_{j+k,0} \exp(-\alpha_j t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отметим свойства функций  $\varphi_{s\nu}$  и  $\psi_{s\sigma}$ , которые понадобятся нам в дальнейшем. Согласно [4] имеем

$$\sum_{s=1}^n x_{s\nu} y_{s\sigma} = \sum_{s=1}^n \exp(\alpha_{\sigma} - \alpha_{\nu}) \varphi_{s\nu} \psi_{s\sigma} = \text{const},$$

т. е.

$$\sum_{s=1}^n \varphi_{s\nu} \psi_{s\sigma} = d_{\nu\sigma} = \text{const} \quad (\nu = \sigma, \sigma + K); \quad (1.6)$$

аналогично

$$\sum_{s=1}^n \frac{d\varphi_{s\nu}}{d\theta} \psi_{s\sigma} = c_{\nu\sigma} = \text{const} \quad (\nu = \sigma, \sigma + K). \quad (1.7)$$

Легко проверяется, что

$$\begin{aligned} d_{\sigma\sigma} &= d_{\sigma+K, \sigma+K} = d_{\sigma}, & d_{\sigma, \sigma+K} &= -d_{\sigma+K, \sigma} = d_{\sigma}^*, \\ c_{\sigma\sigma} &= c_{\sigma+K, \sigma+K} = N_{\sigma} d_{\sigma}^*, & c_{\sigma+K, \sigma} &= -c_{\sigma, \sigma+K} = N_{\sigma} d_{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В частности,  $c_{iL} = 0$  ( $i = 1, \dots, L$ ). В дальнейшем положим  $M_{m+1,0} = 0$ .

2. Следуя идее асимптотического метода, ищем частное решение системы (1.1) в виде

$$x_s = \sum_{p=1}^m M_p \varphi_{sp}(\theta) + \sum_{i=1}^N \mu^i U_{si}(M_1, \dots, M_m, \theta, \tau), \quad (2.1)$$

причем

$$\frac{dM_p}{dt} = -\alpha_p(\tau) M_p + \sum_{i=1}^N \mu^i E_{pi}(M_1, \dots, M_m, \tau), \quad (2.2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(\tau) + \sum_{l=1}^N \mu^l E_l(M_1, \dots, M_m, \tau).$$

Здесь  $U_{sl}$  — периодические, периода  $2\pi$  по  $\theta$ , функции, подлежащие определению;  $N$  — какое-либо целое число, показывающее число взятых приближений;  $E_{pl}$ ,  $E_l$  — неизвестные функции, которые также необходимо определить.

Подставляя (2.1) в (1.1) с учетом (2.2) и зависимостей  $\alpha_p = \alpha_p(\tau)$ ,  $\tau = \mu t$ , получим последовательно после сравнения членов при одинаковых степенях  $\mu$

$$\omega(\tau) \frac{\partial U_{s1}}{\partial \theta} - \sum_{p=1}^m \alpha_p(\tau) M_p \frac{\partial U_{s1}}{\partial M_p} = \sum_{\nu=1}^n a_{s\nu}(\tau) U_{\nu 1} - \tag{2.3}$$

$$- \sum_{p=1}^m \left( E_{p1} \varphi_{sp} + M_p \frac{d\varphi_{sp}}{d\theta} E_1 + M_p \frac{d\varphi_{sp}}{d\tau} \right) + F_{s0},$$

$$\omega(\tau) \frac{\partial U_{sl}}{\partial \theta} - \sum_{p=1}^m \alpha_p(\tau) M_p \frac{\partial U_{sl}}{\partial M_p} = \sum_{\nu=1}^n a_{s\nu}(\tau) U_{s\nu l} - \tag{2.4}$$

$$- \sum_{p=1}^m \left( E_{pl} \varphi_{sp} + M_p \frac{d\varphi_{sp}}{d\theta} E_l \right) - \frac{\partial U_{s(l-1)}}{\partial \tau} + F_{sl}$$

$$(l = 2, 3, \dots, N).$$

Здесь

$$F_{s0} = F_s \sum_{p=1}^m \left( M_p \varphi_{1p}, \dots, \sum_{p=1}^m M_p \varphi_{np}, \tau, 0 \right),$$

$F_{sl}$  — известная функция величин, найденных из предыдущих  $l - 1$  уравнений.

В системах (2.3), (2.4)  $\tau$  играет роль параметра. Учитывая вид функций  $\varphi_{sp}$  [4]

$$\varphi_{si} = B_{si}(\tau),$$

$$\varphi_{sj} = B_{sj}(\tau) \cos(N_j \theta) + C_{sj}(\tau) \sin(N_j \theta), \tag{2.5}$$

$$\varphi_{sj+\kappa} = B_{sj}(\tau) \sin(N_j \theta) - C_{sj}(\tau) \cos(N_j \theta),$$

будем иметь

$$\frac{d\varphi_{si}}{d\tau} = \frac{dB_{si}}{d\tau} = \varphi_{si}^*,$$

$$\frac{d\varphi_{sj}}{d\tau} = \frac{dB_{sj}}{d\tau} \cos(N_j \theta) + \frac{dC_{sj}}{d\tau} \sin(N_j \theta) = \varphi_{sj}^*, \tag{2.6}$$

$$\frac{d\varphi_{sj+\kappa}}{d\tau} = \varphi_{sj+\kappa}^*.$$

Положим

$$\theta = \omega(\tau) t_1, \quad M_p = M_{p0} \exp(-\alpha_p t_1). \tag{2.7}$$

Системы (2.3), (2.4) переписутся в виде

$$\frac{dU_{s1}}{dt_1} = \sum_{\nu=1}^n a_{s\nu} U_{\nu 1} - \sum_{p=1}^m \left( E_{p1} \varphi_{sp} + M_p \frac{d\varphi_{sp}}{d\theta} E_1 + M_p \varphi_{sp}^* \right) + F_{s0}, \tag{2.8}$$



$$\frac{dU_{sl}}{dt_1} = \sum_{\nu=1}^n a_{s\nu} U_{\nu l} - \sum_{p=1}^m \left( E_{p1} \varphi_{sp} + M_p \frac{d\varphi_{sp}}{d\theta} E_l \right) - \frac{\partial U_{sl-1}}{\partial \tau} + F_{sl},$$

причем в правых частях при интегрировании систем следует учитывать замену (2.7) и считать  $\tau$  параметром. Рассмотрим первую группу уравнений системы (2.8). Для определения  $n + m + 1$  неизвестных функций  $U_{s1}$ ,  $E_{p1}$ ,  $E_1$  имеем  $n$  уравнений для  $U_{s1}$ . Недостающие  $m + 1$  уравнений получим из условия, что функции  $U_{s1}$  не содержат вековых членов по  $t_1$  (т. е. условия отсутствия резонанса в системе (2.8)). Аналогично тому, как это сделано в [5], можно показать, что для отсутствия резонанса в системе (2.8) достаточно выполнения соотношений

$$N_j \omega \sum_{s=1}^n \int_0^{2\pi} f_s \psi_{sr}(\theta) d\theta = P_r(f_s),$$

$$P_r(f_s) = \begin{cases} 0 & (r = i) \\ \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial f_s}{\partial t_1} + \alpha_j f_s \right) (\psi_{sj} \cos N_j \theta \sin N_j \theta + \\ + \psi_{sj+K} \sin^2 N_j \theta) d\theta & (r = j), \\ \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial f_s}{\partial t_1} + \alpha_j f_s \right) (\psi_{sj} \cos^2 N_j \theta + \psi_{sj+K} \cos N_j \theta \times \\ \times \sin N_j \theta) d\theta & (r = j + K), \end{cases} \quad (2.9)$$

где

$$f_s = F_{s0} - \sum_{p=1}^m \left( M_p \varphi_{sp}^* + E_{p1} \varphi_{sp} + M_p \frac{d\varphi_{sp}}{d\theta} E_1 \right), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t_1} = - \sum_{p=1}^m \frac{\partial f_s}{\partial M_p} \alpha_p M_p.$$

В соотношениях (2.9) величины  $M_p$ ,  $\tau$  играют роль параметров, интегрирование ведется лишь по угловой переменной  $\theta = \omega(\tau) t_1$ . В результате применения соотношений (2.9) с учетом равенств (1.8) получим уравнения для определения функций  $E_{p1}$ ,  $E_1$ :

$$E_{i1} 1/2\pi d_i \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^n F_{s0} \psi_{si} d\theta - M_i \bar{d}_i,$$

$$D_{1j} \frac{\partial E_1}{\partial t_1} + d_j^* \frac{\partial E_{j1}}{\partial t_1} + d_j \frac{\partial E_{j+K,1}}{\partial t_1} - 2N_j \omega [D_{2j} E_1 + d_j E_{j1} - d_j^* E_{j+K,1}] =$$

$$= 1/\pi \left[ -N_j \omega \left( \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^n F_{s0} \psi_{sj} d\theta - M_j \bar{d}_j + M_{j+K} \bar{d}_j^* \right) + P_j(F_{s0}) \right],$$

$$D_{2j} \frac{\partial E_1}{\partial t_1} + d_j \frac{\partial E_{j1}}{\partial t_1} - d_j^* \frac{\partial E_{j+K,1}}{\partial t_1} + 2N_j \omega [D_{1j} E_1 + d_j^* E_{j1} + d_j E_{j+K,1}] =$$

$$= 1/\pi \left[ N_j \omega \left( \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^n F_{s0} \psi_{sj+K} d\theta - M_j \bar{d}_j^* - M_{j+K} \bar{d}_j \right) + P_{j+K}(F_{s0}) \right], \quad (2.11)$$

где

$$D_{1j} = N_j (-M_j d_j + M_{j+\kappa} d_j^*),$$

$$D_{2j} = N_j (M_j d_j^* + M_{j+\kappa} d_j),$$

$$\bar{d}_v = \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^n \varphi_{sv}^* \psi_{sv} d\theta,$$

$$\bar{d}_v^* = \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^n \varphi_{sv}^* \psi_{sv+\kappa} d\theta.$$

Таким образом, для определения  $E_{p1}$ ,  $E_1$  мы получили систему алгебраических и линейных неоднородных дифференциальных уравнений, из которой нетрудно определить искомые функции  $E_{p1}(M_1, \dots, M_m, \tau)$ ,  $E_1(M_1, \dots, M_m, \tau)$  как частные решения системы (при решении следует учесть подстановку (2.7), а затем вернуться к аргументам  $M_p$ ).

Подставляя найденные  $E_{p1}$ ,  $E_1$  в (2.2), находим функции  $M_p(t)$ . Совершенно аналогично определяются высшие приближения  $E_{pl}$ ,  $E_l$ , причем для их определения получается та же система (2.11), но с иной правой частью.

Следует отметить, что система (2.2), вообще говоря, не интегрируется в квадратурах. Однако поскольку правые части этой системы содержат множителем малый параметр  $\mu$ , то функции  $M(t)$ ,  $\theta(t)$  — плавно меняющиеся, что делает эффективным применение для их нахождения ЭЦВМ.

3. Рассмотрим теперь вопрос точности приближенного решения, полученного изложенным выше вариантом метода асимптотического интегрирования. Требуется показать, что при  $0 \leq \tau \leq T_0$  ( $T_0$  — заданное сколь угодно большое, но конечное число), разность между точным решением системы (1.1) и приближенным (2.1) является величиной порядка малости  $\mu^N$ .

Докажем это положение, придерживаясь схемы [3]. Будем предполагать, что а) нулевое решение системы (1.2) при  $\tau = \mu t$  экспоненциально устойчиво [5], б) при  $0 \leq \tau \leq T_0$

$$|E_{p1}(M_1, \dots, M_m, \tau)| \leq L_p \sum_{s=1}^m |M_s| + L_{p0}, \tag{3.1}$$

$$|E_{pl}| \leq L_{pl} \quad (l = 2, 3, \dots, N), \tag{3.2}$$

где  $L_p$ ,  $L_{p0}$ ,  $L_{pl}$  — постоянные.

Из предположения о достаточной гладкости функций  $F_s$  и непрерывности  $\alpha_p(\tau)$  вытекает, что при  $0 \leq \tau \leq T_0$  выполняются неравенства

$$|F_s(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \tau) - F_s(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \tau)| \leq \sum_{s=1}^n L_s^* |x_s^{(1)} - x_s^{(2)}|, \tag{3.3}$$

$$\alpha_0 \leq \alpha_p(\tau) \leq \alpha_0^*$$

$$(x_s^{(1)}, x_s^{(2)} \in G),$$

$L_s^*$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_0^*$  — постоянные.

*Лемма 1.* Для числа  $T_0$  можно подобрать число  $\mu_0$ , такое, что при  $0 \leq \mu \leq \mu_0$  на интервале  $0 \leq t \leq T_0/\mu$  решение (2.1) будет принадлежать области  $G$ .

Доказательство. Из системы (2.2) получаем

$$M_p(t) = M_p^* \exp\left(-\int_0^t \alpha_p dt\right) + \sum_{l=1}^N \int_0^t \mu^l E_{pl} \exp\left(\int_0^t \alpha_p dt\right) dt, \quad (3.4)$$

где  $M_p^* = M_p(0)$ . Функции (2.1) будут принадлежать области  $G$  при  $0 \leq t \leq T_0/\mu$ , если на этом интервале функции  $M_p(t)$  не выходят из области  $D$ :  $\sum_{p=1}^m |M_p| \leq H$ , где число  $H$  выбирается таким образом, чтобы  $x_s(t) \in G$ .

На основании (3.1) и (3.3) имеем оценку

$$\begin{aligned} \|M\| \leq & \exp(-\alpha_0 t) \|M^*\| + \mu L_1 \int_0^t \exp[-\alpha_0(t-\vartheta)] \|M\| d\vartheta + \\ & + \mu \int_0^t \exp[-\alpha_0(t-\vartheta)] (L_0 + \mu L_2) d\vartheta, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \|M\| = \sum_{p=1}^m |M_p|, \quad L_1 = \sum_{p=1}^m L_{p1}, \quad L_0 = \sum_{p=1}^m L_{p0}, \\ L_2 = \sum_{p=1}^m (L_{p2} + \mu L_{p3} + \dots + \mu^{N-2} L_{pN}). \end{aligned}$$

Полагая в (3.5)  $\|M\| \exp(\alpha_0 t) = \Delta$  и применяя к полученному неравенству лемму Репина [6], получим окончательно

$$\sum_{p=1}^m |M_p| \leq \sum_{p=1}^m |M_p^*| \exp(-\alpha^* t) + (1 - \exp(-\alpha^* t)) \times \mu (L_0 + \mu L_2) / \alpha^*,$$

где  $\alpha^* = \alpha_0 - \mu L_1$ . Отсюда видно, что выбором числа можно добиться, чтобы при  $0 \leq t \leq T_0/\mu$  было  $\sum_{p=1}^m |M_p| \leq H$ . Лемма доказана.

*Лемма 2.* Функции  $x_s(t)$  из (2.1) удовлетворяют на промежутке времени  $0 \leq t \leq T_0/\mu$  исходной системе (1.1) с точностью до величин порядка малости  $\mu^{N+1}$ .

Доказательство. Подставляя (2.1) в систему (1.1), получим

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{\nu=1}^n a_{s\nu}(\tau) x_\nu + \mu F_s(x_1, \dots, x_n, \tau, \mu) + \mu^{N+1} R_s. \quad (3.6)$$

Учитывая лемму 1, будем иметь при  $0 \leq t \leq T_0/\mu$

$$|R_s| \leq R_s^* = \text{const}. \quad (3.7)$$

*Теорема.* Числу  $T_0$  и постоянной  $L$  можно сопоставить числа  $\mu_0$  и  $k_N$ , такие, что для всех  $0 \leq \mu \leq \mu_0$  на интервале  $0 \leq t \leq T_0/\mu$  будут справедливы неравенства

$$|x_s - x_s^*| < k_N \mu^N, \quad (3.8)$$

в которых  $x_s^*$  — частные решения системы (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$|x_s(0) - x_s^*(0)| \leq \mu^N L. \quad (3.9)$$

Доказательство с учетом предположения а) и неравенств (3.2), (3.7), (3.9) производится путем оценки отклонений решений систем (1.1) и (3.6) друг от друга. Эта оценка производится совершенно аналогично оценке в работе [6], стр. 152, 182, в результате которой и получаются неравенства (3.8).

Тем самым доказано, что если начальные условия для точного и приближенного решений близки друг к другу, то будут близки и сами эти решения на промежутке  $0 \leq t \leq T_0/\mu$ , т. е. ряд (2.1) действительно является асимптотическим.

4. Рассмотрим иллюстративный пример:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{2n}{ml(\tau)} \dot{x} + \frac{g}{l(\tau)} x &= \mu f, \\ \mu f &= -\frac{2\mu}{l(\tau)} \frac{dl}{d\tau} \left( \dot{x} + \frac{n}{m} x \right) + \frac{g}{6l(\tau)} x^3. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) описывает колебания маятника с медленно изменяющейся длиной [2]. В отличие от [2] не будем считать коэффициент затухания  $n$  малым, следовательно, его нельзя вносить под малый параметр. Перепишем уравнение (4.1) в виде нормальной формы

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -c(\tau)x_1 - 2b(\tau)x_2 + \mu f,$$

где

$$c(\tau) = \frac{g}{l(\tau)}, \quad b(\tau) = \frac{n}{ml(\tau)},$$

$$\mu f = -2\mu \frac{dl}{d\tau} \left( b(\tau)x_1 + \frac{c(\tau)}{g} x_2 \right) + 1/6c(\tau) x_1^3.$$

Имеем

$$\varphi_{11} = \cos \theta, \quad \varphi_{21} = -(b \cos \theta + \omega \sin \theta),$$

$$\varphi_{12} = \sin \theta, \quad \varphi_{22} = \omega \cos \theta - b \sin \theta,$$

$$\psi_{11} = b \cos \theta + \omega \sin \theta, \quad \psi_{21} = \cos \theta,$$

$$\psi_{12} = q \sin \theta - \omega \cos \theta, \quad \psi_{22} = \sin \theta,$$

где

$$\omega^2 = c(\tau) - b^2(\tau),$$

отсюда

$$\alpha_1 = 0, \quad d_1^* = -\omega, \quad \bar{d}_1 = -\pi \frac{db}{d\tau}, \quad \bar{d}_1^* = -\pi \frac{d\omega}{d\tau}.$$

В первом приближении

$$x = x_1 = M \cos \theta,$$

$$\frac{dM}{dt} = -b(\tau)M + \mu E_{11}(M),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(\tau) + \mu E_1(M).$$

Для функций  $E_{11}$  и  $E_1$  получается система

$$-\omega \frac{\partial E_{11}}{\partial t_1} + 2\omega^2 M E_1 = -\frac{db}{d\tau} \omega M + 1/\pi \left( -\omega \int_0^{2\pi} f_0 \cos \theta d\theta + P_1(f_0) \right),$$

$$-M \omega \frac{\partial E_1}{\partial t_1} - 2\omega^2 E_{11} = \omega \frac{d\omega}{d\tau} M + 1/\pi \left( \omega \int_0^{2\pi} f_0 \sin \theta d\theta \pm P_2(f_0) \right)$$

или, учитывая, что

$$\mu f_0 = -2\mu \frac{dl}{d\tau} M \left[ b \cos \theta - \frac{c}{g} (b \cos \theta + \omega \sin \theta) \right] + 1/6c M^3 \cos^3 \theta,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t_1} = -bM \frac{\partial E}{\partial M},$$

система

$$b \frac{\partial E_{11}}{\partial M} + 2\omega E_1 = -1/8\mu c M^2 + 2 \frac{dl}{d\tau} b \left( 1 - \frac{c}{g} \right) - \frac{db}{d\tau},$$

$$bM^2 \frac{\partial E_1}{\partial M} - 2\omega E_{11} = -\frac{1}{4\omega\mu} bcM^3 + \left( 2 \frac{dl}{d\tau} \frac{c\omega}{g} + \frac{d\omega}{d\tau} \right) M.$$

Отсюда

$$\frac{dM}{dt} = - \left[ n + \frac{1}{4} \mu \frac{dl}{d\tau} \frac{1}{l} \left( 3 + \frac{b^2}{\omega^2} \right) \right] M + \frac{mgn}{n^2 + 2m^2gl} M^3,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(\tau) - \frac{1}{8} \frac{g}{l\omega} \frac{2n^2 + m^2gl}{n^2 + 2m^2gl} M^2. \quad (4.2)$$

Первое уравнение системы (4.2)—уравнение Бернулли; решая его, получим функцию  $M(t)$ , подставляя последнюю во второе уравнение, получим значение для частоты колебаний.

Отметим, что, если считать величину  $n$  малой, можно пренебречь выражениями  $n^2$  и  $nM^3$  (как величинами высшего порядка), и в результате (4.2) запишется в виде системы

$$\frac{dM}{dt} = - \left[ n + \frac{3}{4} \mu \frac{dl}{d\tau} \frac{1}{l} \right] M,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(\tau) - \frac{1}{16} \omega M^2,$$

которая совпадает с системой Митропольского [2], выведенной именно для случая малого затухания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е. П. Попов, ДАН СССР, 3, № 2, 308 (1956).
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
3. Ю. А. Митропольский, Проблемы нестационарной теории нелинейных колебаний, изд. Наука, М., 1964.

4. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
5. Р. Е. Гинзбург, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 187 (1969).
6. Е. А. Барбашин, Введение в теорию устойчивости, изд. Наука, М., 1967.

Поступила в редакцию  
14 декабря 1970 г.

E. P. POPOV METHOD FOR QUASI-LINEAR SYSTEMS WITH SLOWLY  
VARYING PARAMETERS

*R. E. Ginsburg*

An algorithm for the construction of approximate solutions for quasi-linear systems with slowly varying parameters is considered, the solutions being close to quickly damping solutions of a generation system. The study is based on the Mitropolsky-Popov asymptotic method.

---

УДК 531.391

## К ВОПРОСУ ОТЫСКАНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Л. В. Постников

Исследуется слабонелинейная динамическая система с произвольным числом степеней свободы, содержащая конечное число дискретных нелинейностей. Формулируются условия, при которых в системе возможны колебания, представляющие собой суперпозицию квазигармонических составляющих. Предлагается алгоритм, позволяющий получить систему укороченных уравнений в многочастотном приближении.

Гармонические и, асимптотически примыкающие к ним, квазигармонические процессы представляют собой довольно узкий класс колебательных явлений. Однако на протяжении всей истории развития физики они занимали особое место. Особая роль этого класса определяется, с одной стороны, сравнительной простотой теоретического исследования, с другой, актуальностью задач прикладного характера. Нелинейная теория колебаний начала свое существование с изучения простейшей квазигармонической системы [1].

Современные математические методы [2] позволяют в принципе исследовать любую динамическую систему, обладающую резонансными свойствами. Однако практическое применение этих методов к исследованию системы, с многими степенями свободы часто встречает целый ряд почти непреодолимых трудностей.

В данной работе предлагается некоторая вариация известного [2] метода. Суть ее заключается в том, что исходная система представляется как  $N$  комплексных «нормальных» [3] подсистем, взаимодействующих друг с другом через нелинейность. Для каждой из них при определенных условиях можно получить укороченное уравнение, пользуясь или методом Ван-дер-Поля [4], или методом Боголюбова—Митропольского [2]. Система укороченных уравнений получается из исходной системы легко и естественно и имеет ясный физический смысл.

Данная работа является обобщением работы [5] и на тот случай, когда система содержит не одну, а  $K$  нелинейностей.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. СИСТЕМА УКОРЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_i a_{ij} x_j = -\mu b_i f_i(x_i), \quad (1)$$

где  $a_{ij}$  и  $b_i$  — функции оператора  $p = \frac{d}{dt}$ , не имеющие полюсов при конечных значениях аргумента;  $f_i(x_i)$  — нелинейные функции, предста-

вимые степенным рядом, начинающимся с квадратичного члена\*;  $\mu$  — безразмерный параметр, много меньший единицы. Будем считать, также, что система (1) имеет единственное состояние равновесия  $x_j = 0$ .

Обозначим детерминант, составленный из коэффициентов  $a_{ij}$ , через  $\Delta$  и его алгебраические дополнения (адьюнкты) через  $\Delta_{m_1}^n, \Delta_{m_1, m_2}^{n, n_2}, \dots$  и т. д. Поскольку по условию функции  $f_i$  не содержат линейных составляющих, уравнение

$$\Delta(p) = 0 \quad (2)$$

является характеристическим, его корни определяют тип состояния равновесия.

Умножим уравнение (1) на  $\Delta_k^i$  и просуммируем по всем  $i$ . Тогда, согласно формуле

$$\sum_i a_{ij} \Delta_k^i = \delta_{jk} \Delta,$$

где  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера, получим

$$x_k = -\mu \frac{\sum_i b_i \Delta_k^i f_i}{\Delta}, \quad (3)$$

Пусть характеристическое уравнение (2) имеет только простые корни  $p_\nu$ , отличающиеся друг от друга больше чем на величину порядка  $\mu$ . И пусть, кроме того,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{b_i(p) \Delta_k^i(p)}{\Delta(p)} = 0.$$

В этом случае выражение

$$\frac{b_i(p) \Delta_k^i(p)}{\Delta(p)}$$

можно разложить на простейшие дроби и тем самым записать уравнение (3) в виде

$$x_k = -\mu \sum_\nu \frac{\sum_i b_i(p_\nu) \Delta_k^i(p_\nu) f_i}{\Delta'(p_\nu) (p - p_\nu)}.$$

Обозначая

$$-\mu \frac{\sum_i b_i(p_\nu) \Delta_k^i(p_\nu) f_i}{\Delta'(p_\nu) (p - p_\nu)} = x_k^\nu$$

и учитывая, что  $p = \frac{d}{dt}$ , получим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k^\nu - p_\nu x_k^\nu = -\mu \frac{\sum_i b_i(p_\nu) \Delta_k^i(p_\nu) f_i(x_i)}{\Delta'(p_\nu)}, \quad (4)$$

\* Эти замечания несколько не ограничивают круг рассматриваемых задач. Действительно, если  $a_{ij}$  или  $b_i$  имеют полюс кратности  $k$  при  $p = p_0$ , то  $i$ -е уравнение системы (1) следует умножить на  $(p - p_0)^k$ . Если  $f_i$  имеет линейную составляющую, то ее нужно перенести в левую часть системы.



где  $x_i = \sum_{\nu} x_k^{\nu}$ , записанную в нормальных комплексных координатах.

Пусть характеристическое уравнение (2) имеет  $N$  корней  $p_{\nu}$ , тогда система уравнений (4) является системой  $N$ -го порядка, содержащей  $NK$  ( $K$ —число дискретных нелинейностей) уравнений и столько же переменных  $x_k^{\nu}$ . Следовательно, она в неявном виде содержит  $NK$ — $N$  алгебраических связей между переменными  $x_k^{\nu}$ .

Выберем эти связи линейными вида

$$\Delta_l^i(p_{\nu}) x_k^{\nu} = \Delta_k^i(p_{\nu}) x_l^{\nu}, \quad (5)$$

тогда уравнения

$$x_k^{\nu} - p_{\nu} x_k^{\nu} = -\mu \frac{\sum_i b_i(p_{\nu}) \Delta_k^i(p_{\nu}) f_i}{\Delta'(p_{\nu})} \quad (6a)$$

и

$$x_l^{\nu} - p_{\nu} x_l^{\nu} = -\mu \frac{\sum_i b_i(p_{\nu}) \Delta_l^i(p_{\nu}) f_i}{\Delta'(p_{\nu})} \quad (6b)$$

будут тождественными.

Действительно, производя почленное вычитание из уравнения (6 а), умноженного на  $\Delta_l^i(p_{\nu})$ , уравнение (6 б), умноженное на  $\Delta_k^i(p_{\nu})$ , получим в левой части тождественный нуль согласно уравнению (5), в правой части—тождественный нуль согласно формуле

$$\begin{vmatrix} \Delta_k^i(p_{\nu}) & \Delta_l^i(p_{\nu}) \\ \Delta_l^i(p_{\nu}) & \Delta_k^i(p_{\nu}) \end{vmatrix} = \Delta(p_{\nu}) \Delta_{kl}^{ii}(p_{\nu})$$

и уравнению (2). Из предыдущего следует, что с помощью соотношений (5) мы можем выразить все переменные  $x_k^{\nu}$  с различными нижними индексами через какую-либо одну переменную с определенным нижним индексом. Для этого необходимо только, чтобы соответствующий член  $\Delta_l^i(p_{\nu})$  был отличен от нуля. Пусть этим индексом будет  $k=0$ . Обозначив  $x_0^{\nu} = y_{\nu}$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_{\nu} - p_{\nu} y_{\nu} &= -\mu \sum_i B_{i\nu} f_i(x_i), \\ x_i &= \sum_{\nu} h_{i\nu} y_{\nu}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$B_{i\nu} = \frac{b_i(p_{\nu}) \Delta_0^i(p_{\nu})}{\Delta'(p_{\nu})}, \quad h_{i\nu} = \frac{\Delta_l^i(p_{\nu})}{\Delta_0^i(p_{\nu})}.$$

В выражении для  $h_{i\nu}$  индекс  $j$  тоже выбирается определенным, например,  $j=0$ , если

$$\Delta_0^0(p_{\nu}) \neq 0.$$

Нетрудно усмотреть, что  $h_{0\nu} = 1$  при любых  $\nu$ .

На систему (7) можно смотреть как на  $N$  подсистем. В линейном приближении эти подсистемы не связаны друг с другом. Из-за наличия нелинейностей на каждую из подсистем воздействует внешняя сила, зависящая как от состояния самой подсистемы, так и от состояния всех

других подсистем. Если какой-либо из корней характеристического уравнения имеет достаточно малую действительную часть, то соответствующая ему подсистема обладает резонансными свойствами, и ее колебание будет квазигармоническим. При этом внешнее воздействие будет оказывать существенное влияние на ее поведение только в том случае, если оно содержит квазигармоническую составляющую с частотой, близкой к собственной частоте подсистемы.

Пусть, как и в работе [5], характеристическое уравнение (2) имеет  $2N_0 \ll N$  попарно комплексно-сопряженных корней с достаточно малой (порядка  $\mu$ ) действительной частью:

$$p_\nu = \mu\sigma_\nu + j\Omega_\nu. \quad (8)$$

Будем считать, что остальные корни имеют немалую по абсолютной величине отрицательную действительную часть. Тогда величинами  $y_\nu$ , соответствующими этим корням, можно пренебречь.

Решение же оставшейся системы можно искать в виде

$$y_\nu = z_\nu \exp(j\omega_\nu t), \quad (9)$$

где  $z_\nu$  — комплексная амплитуда квазигармонического колебания, являющаяся функцией аргумента  $\mu t$ ,  $\omega_\nu$  — собственные частоты нелинейной системы, связанные с собственными частотами ее линейного приближения  $\Omega_\nu$  соотношением

$$\Omega_\nu = \omega_\nu + \mu\xi_\nu. \quad (10)$$

Подставляя решение (9) в систему (7), после усреднения получим систему укороченных уравнений

$$\dot{z}_\nu = (\sigma_\nu + j\xi_\nu) z_\nu - x_\nu, \quad (11a)$$

где

$$x_\nu = \sum_l B_{l\nu} \overline{f_l} \left[ \sum_k h_{lk} z_k \exp(i\omega_k t) \right] \exp(-j\omega_\nu t), \quad (11б)$$

(черта означает усреднение по времени на периоде).

## 2. СТРУКТУРА НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Величины  $x_\nu$  в системе уравнений (11 а) характеризуют нелинейное взаимодействие между квазигармоническими колебаниями и, следовательно, определяют поведение исходной системы.

Чтобы найти выражение для  $x_\nu$  в явном виде, вычислим комплексную амплитуду гармонической составляющей  $\exp(j\omega_\nu t)$  для функции  $f_l$ .

Пусть функция  $f_l(x_l)$  может быть представлена рядом

$$f_l(x_l) = \sum_n \frac{C_n^l x_l^n}{n!}. \quad (12)$$

Обозначим

$$h_{i\nu} y_i + h_{i\nu}^* y_i^* = v_{i\nu}, \quad (13)$$

тогда

$$x_i = \sum_\nu v_{i\nu}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (12), после преобразования получим

$$f_i = \sum_{n_k=0}^{\infty} \frac{C_{\Sigma n_k}^i \prod_k v_{i k}^{n_k}}{\prod_k (n_k!)}. \quad (15)$$

Здесь суммирование проводится по всем  $n_k$ , как по независимым индексам

Подставляя в последнюю формулу выражение (13), и используя формулу бинома Ньютона, преобразуем сумму (15) к виду

$$f_i = \sum_{n_k=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}_k=0}^{n_k} \frac{C_{\Sigma n_k}^i \prod_k [h_{i k}^{\bar{n}_k} h_{i k}^{*n_k - \bar{n}_k} y_k^{\bar{n}_k} y_k^{*n_k - \bar{n}_k}]}{\prod_k [\bar{n}_k! (n_k - \bar{n}_k)!]}.$$

Меняя порядок суммирования по  $n_k$  и  $\bar{n}_k$  (при учете, что  $\bar{n}_k \leq n_k$ ), заменяя индекс  $n_k$  на индекс  $n_k + \bar{n}_k$  и подставляя в полученное выражение решение (9), получим разложение функции  $f_i$  на квазигармонические составляющие:

$$f_i = \sum_{n_k \bar{n}_k=0}^{\infty} \frac{C_{\Sigma (n_k + \bar{n}_k)}^i \prod_k [h_{i k}^{\bar{n}_k} h_{i k}^{*n_k} z_k^{\bar{n}_k} z_k^{*n_k}] \exp [j \sum_k \omega_k (\bar{n}_k - n_k) t]}{[\prod_k \bar{n}_k! n_k!]}, \quad (16)$$

Чтобы в этом разложении существовала искомая составляющая, необходимо, чтобы индексы  $n_k$  и  $\bar{n}_k$  удовлетворяли соотношению

$$\sum_k \omega_k (\bar{n}_k - n_k - \delta_{\nu k}) = 0, \quad (17a)$$

где  $\delta_{\nu k}$  — символ Кронекера. Это соотношение показывает, что нелинейное взаимодействие между квазигармоническими колебаниями будет иметь место в том случае, если собственные частоты нелинейной системы удовлетворяют некоторому «условию кратности»\*.

Пусть таким условием будет

$$\sum_{k_1} \alpha_{k_1} \omega_{k_1} - \sum_{k_2} \beta_{k_2} \omega_{k_2} = 0, \quad (17b)$$

где  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — целые неотрицательные числа, не имеющие общего множителя, а  $k_1$  и  $k_2$  — элементы множества  $k = 1, 2, \dots, N_0$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{n}_{k_1} &= n_{k_1} + \delta_{\nu k_1} + m\alpha_{k_1}, \\ \bar{n}_{k_2} &= n_{k_2} + \delta_{\nu k_2} - m\beta_{k_2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $m$  — целые числа.

С учетом соотношений (18) выражение (16) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n_{k_1} n_{k_2}} C_1^i B_{i\nu} \prod_{k_1, k_2} [(h_{\nu k_1} z_{k_1})^{n_{k_1} + \delta_{\nu k_1} + m\alpha_{k_1}} (h_{i k_1}^* z_{k_1}^*)^{n_{k_1}}] \times \\ & [(h_{i k_2} z_{k_2})^{n_{k_2} + \delta_{\nu k_2} - m\beta_{k_2}} (h_{i k_2}^* z_{k_2}^*)^{n_{k_2}}] \{ \prod_{k_1, k_2} [(n_{k_1} + \delta_{\nu k_1} + m\alpha_{k_1})! \times \\ & \times n_{k_1}! (n_{k_2} + \delta_{\nu k_2} - m\beta_{k_2})! n_{k_2}!] \}^{-1}, \end{aligned} \quad (19a)$$

\* Для собственных частот линейного приближения, согласно соотношению (10), это условие будет выполняться приближенно.

где

$$\gamma = \sum_{k_1} (2n_{k_1} + \delta_{\nu k_1} + m\alpha_{k_1}) + \sum_{k_2} (2n_{k_2} + \delta_{\nu k_2} - m\beta_{k_2}), \quad (19\text{а})$$

а суммирование по  $n_{k_1}$  и  $n_{k_2}$  проводится с учетом неравенств

$$\begin{aligned} n_{k_1} + \delta_{\nu k_1} + m\alpha_{k_1} &\geq 0, \\ n_{k_2} + \delta_{\nu k_2} - m\beta_{k_2} &\geq 0. \end{aligned} \quad (19\text{в})$$

Чтобы учесть эти неравенства непосредственно в выражении (19 а), разобьем сумму по  $m$  на три члена. Первый член будет соответствовать  $m = 0$ , второй  $m > 0$ , третий  $m < 0$ . В третьем члене, представляющем собой сумму по  $m$  от  $-\infty$  до  $-1$ , заменим  $m$  на  $-m$ . После этого, согласно неравенствам (19 в), заменим во втором члене  $n_{k_2}$  на  $n_{k_2} + m\beta_{k_2} - \delta_{\nu k_2}$  и в третьем  $n_{k_1}$  на  $n_{k_1} + m\alpha_{k_1} - \delta_{\nu k_1}$ .

Тогда получим

$$x_\nu = z_\nu [F_{0\nu} + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{F}_{m\nu} + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{F}_{m\nu}], \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} F_{0\nu} &= \sum_{n_k=0}^{\infty} \sum_i \frac{C_{1+2\nu n_k}^i h_{i\nu} B_{i\nu} \prod_k (H_{ik} r)^{2n_k}}{\prod_k [n_k! (n_k + \delta_{\nu k})!]}, \\ \bar{F}_{m\nu} &= \prod_{k_1, k_2} (z_{k_1}^{m\alpha_{k_1}} z_{k_2}^{*m\beta_{k_2}}) \sum_{n_{k_1}, n_{k_2}} \times \\ &\times \frac{C_{\gamma}^i h_{i\nu} B_{i\nu} \prod_{k_1, k_2} [h_{i k_1}^{m\alpha_{k_1}} h_{i k_2}^{*m\beta_{k_2}} (H_{i k_1} r_{k_1})^{2n_{k_1}} (H_{i k_2} r_{k_2})^{2(n_{k_2} - \delta_{\nu k_2})}]}{\prod_{k_1, k_2} [n_{k_1}! n_{k_2}! (n_{k_1} + m\alpha_{k_1} + \delta_{\nu k_1})! (n_{k_2} + m\beta_{k_2} - \delta_{\nu k_2})!]}, \end{aligned} \quad (21\text{а})$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{m\nu} &= \prod_{k_1, k_2} (z_{k_1}^{*m\alpha_{k_1}} z_{k_2}^{m\beta_{k_2}}) \sum_{n_{k_1}, n_{k_2}} \times \\ &\times \frac{C_{\gamma}^i h_{i\nu} B_{i\nu} \prod_{k_1, k_2} [h_{i k_1}^{*m\alpha_{k_1}} h_{i k_2}^{m\beta_{k_2}} (H_{i k_1} r_{k_1})^{2(n_{k_1} - \delta_{\nu k_1})} (H_{i k_2} r_{k_2})^{2n_{k_2}}]}{\prod_{k_1, k_2} [n_{k_1}! n_{k_2}! (n_{k_1} + m\alpha_{k_1} - \delta_{\nu k_1})! (n_{k_2} + m\beta_{k_2} + \delta_{\nu k_2})!]}, \end{aligned}$$

где

$$\bar{\gamma} = \sum_{k_1} (2n_{k_1} + m\alpha_{k_1} + \delta_{\nu k_1}) + \sum_{k_2} (2n_{k_2} + m\beta_{k_2} - \delta_{\nu k_2}), \quad (21\text{б})$$

$$\tilde{\gamma} = \sum_{k_1} (2n_{k_1} + m\alpha_{k_1} - \delta_{\nu k_1}) + \sum_{k_2} (2n_{k_2} + m\beta_{k_2} + \delta_{\nu k_2}),$$

$$r_k = |z_k|, \quad H_{ik} = |h_{ik}|. \quad (21\text{в})$$

Как и в случае слабонелинейной системы с одной нелинейностью [5],  $x_\nu^0$  определяет асинхронное взаимодействие колебаний. Оно существует даже тогда, когда условие кратности (17 б) выполняется только при  $\alpha_{k_1} = \beta_{k_2} = 0$ . Остальные члены выражения (20) определяют синхронное взаимодействие колебаний.

Выражения (21 а) справедливы для произвольных нелинейностей.

Если нелинейность такова, что ее можно аппроксимировать полиномом, эти выражения значительно упрощаются.

Будем, например, считать, что  $C_\gamma^i \gg C_{\gamma+1}^i$  для любых  $i$  и  $\gamma$ , тогда, учитывая только члены с минимально возможными  $\gamma$ , получим

$$F_{0v} = \sum_{ik} \frac{C_3^i h_{iv} B_{iv} H_{ik}^2 r_k^2}{1 + \delta_{v,k}},$$

$$\bar{F}_{m\nu} = \bar{F}_{1\nu} = \frac{\prod_{k_1, k_2} (z_{k_1}^{\alpha_{k_1}} z_{k_2}^{\beta_{k_2}})}{\prod_{k_2} (H_{ik_2} r_{k_2})^{2\delta_{\nu k_2}}} \sum_i \frac{C_\gamma^i h_{iv} B_{iv} \prod_{k_1, k_2} (h_{ik_1}^{\alpha_{k_1}} h_{ik_2}^{\beta_{k_2}})}{\prod_{k_1, k_2} [(\alpha_{k_1} + \delta_{\nu k_1})! (\beta_{k_2} - \delta_{\nu k_2})!]}, \quad (22a)$$

$$\tilde{F}_{m\nu} = \tilde{F}_{1\nu} = \frac{\prod_{k_1, k_2} (z_{k_1}^{*\alpha_{k_1}} z_{k_2}^{\beta_{k_2}})}{\prod_{k_1} (H_{ik_1} r_{k_1})^{2\delta_{\nu k_1}}} \sum_i \frac{C_\gamma^i h_{iv} B_{iv} \prod_{k_1, k_2} (h_{ik_1}^{*\alpha_{k_1}} h_{ik_2}^{\beta_{k_2}})}{\prod_{k_1, k_2} [(\alpha_{k_1} - \delta_{\nu k_1})! (\beta_{k_2} + \delta_{\nu k_2})!]},$$

где

$$\bar{\gamma} = \sum_{k_1} (\alpha_{k_1} + \delta_{\nu k_1}) + \sum_{k_2} (\beta_{k_2} - \delta_{\nu k_2}), \quad (22б)$$

$$^*\bar{\gamma} = \sum_{k_1} (\alpha_{k_1} - \delta_{\nu k_1}) + \sum_{k_2} (\beta_{k_2} + \delta_{\nu k_2}).$$

Из выражений (22 а) и (22 б) видно, что при не очень больших  $r_k$  и  $\nu = \nu_1$  можно пренебречь величиной  $\bar{F}_{1\nu}$  по сравнению с  $\tilde{F}_{1\nu}$ , а при  $\nu = \nu_2$  величиной  $\tilde{F}_{1\nu}$  по сравнению с  $\bar{F}_{1\nu}$ .

При этих пренебрежениях система укороченных уравнений будет иметь вид

$$\dot{z}_{\nu_1} = z_{\nu_1} \left[ \sigma_{\nu_1} + j\xi_{\nu_1} - \sum_k \frac{\eta_{\nu_1, k} r_k^2}{1 + \delta_{\nu_2 k}} - \vartheta_{\nu_1} \frac{\prod_{k_1, k_2} (z_{k_1}^{\alpha_{k_1}} z_{k_2}^{\beta_{k_2}})}{r_{\nu_1}^2} \right], \quad (23a)$$

$$\dot{z}_{\nu_2} = z_{\nu_2} \left[ \sigma_{\nu_2} + j\xi_{\nu_2} - \sum_k \frac{\eta_{\nu_2, k} r_k^2}{1 + \delta_{\nu_2 k}} - \vartheta_{\nu_2} \frac{\prod_{k_1, k_2} (z_{k_1}^{*\alpha_{k_1}} z_{k_2}^{\beta_{k_2}})}{r_{\nu_2}^2} \right],$$

где

$$\eta_{\nu, k} = \sum_i C_3^i h_{iv} B_{iv} H_{ik}^2,$$

$$\vartheta_{\nu_1} = \sum_i \frac{C_\gamma^i B_{iv_1} \prod_{k_1, k_2} (h_{ik_1}^{*\alpha_{k_1}} h_{ik_2}^{\beta_{k_2}})}{h_{iv_1, k_1, k_2}^* \prod_{k_1, k_2} [(\alpha_{k_1} - \delta_{\nu_1, k_1})! (\beta_{k_2})!]}, \quad (23б)$$

$$\vartheta_{\nu_2} = \sum_i \frac{C_\gamma^i B_{iv_2} \prod_{k_1, k_2} (h_{ik_1}^{\alpha_{k_1}} h_{ik_2}^{*\beta_{k_2}})}{h_{iv_2, k_1, k_2}^* \prod_{k_1, k_2} [(\alpha_{k_1})! (\beta_{k_2} - \delta_{\nu_2, k_2})!]},$$

$$\gamma = \sum_{k_1} \alpha_{k_1} + \sum_{k_2} \beta_{k_2} - 1.$$

Если  $C_1^i \ll C_3^i$  и  $\alpha_{k_1}, \beta_{k_2} > 1$ , то синхронным взаимодействием можно пренебречь. В этом случае система укороченных уравнений (23 а) будет иметь вид

$$\dot{\rho}_v = 2\rho_v \left[ \sigma_v - \sum_k \frac{\bar{\eta}_{vk} \rho_k}{1 + \delta_{vk}} \right], \quad (24)$$

где

$$\rho_v = r_v^2, \quad \bar{\eta}_{vk} = \operatorname{Re} \eta_{vk} = \sum_i C_3^i H_{ik}^2 \operatorname{Re} (h_{iv} B_{iv}).$$

В отличие от системы с одной нелинейностью, рассмотренной в работе [5], здесь воздействие на  $v$ -е колебание со стороны всех других колебаний будет, вообще говоря, не одинаковым. Это обстоятельство может привести к тому, что в системе будут возможны не только одночастотные, но и многочастотные режимы.

Представляется интересным выяснить, как связано максимально возможное количество одновременно существующих устойчивых квазигармонических колебаний с числом дискретных нелинейностей системы. Этот вопрос выходит за рамки данной работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Van der Pol B., *Radio Review*, 1, 701 (1920).
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, М., 1963
3. Л. И. Мандельштам, *Полное собрание трудов*, изд. АН СССР, М., 4, 1955, стр. 234.
4. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, Физматгиз, М., 1959, стр. 650.
5. Л. В. Постников, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, 14, № 3, 414 (1971).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
12 октября 1970 г.

#### ON EXISTENCE AND ANALYSIS OF QUASI-HARMONIC OSCILLATIONS IN WEAKLY NONLINEAR SYSTEMS

L. V. Postnikov

A weakly nonlinear dynamic system having an arbitrary number of freedom degrees and containing a finite number of discrete nonlinearities is studied. Conditions are formulated under which the system permits of oscillations representing a superposition of quasi-harmonic components. An algorithm to obtain a system of shortened equations in a multifrequency approximation is proposed.

УДК 62 — 506

## К ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

К. К. Седова

Исследуется динамика одноканальной экстремальной системы, в которой управление объектом происходит по непрерывно вычисляемой первой разности выхода объекта.

1. Наиболее простыми автоматическими оптимизаторами являются, по-видимому, оптимизаторы автоколебательного типа, работающие на основе анализа знаков первых производных от входа и выхода объекта управления [1]. Детальный анализ систем с устойчивыми объектами, управляемыми такими оптимизаторами, показал наличие глобально устойчивых стационарных движений в таких системах [2, 3]. При этом было обнаружено, что их фазовые пространства содержат области той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненные траекториями режимов скольжения [2, 4]. Наличие таких областей служит причиной, определяющей весьма сложный характер движений инерционных систем (порядок инерционности которых не менее двух) в стационарных режимах с неудовлетворительным качеством работы [4, 5].

Указанная особенность и необходимость дифференцирования сигнала, снимаемого с выхода управляемого объекта, снижают помехоустойчивость экстремальных систем автоколебательного типа. Стремление к увеличению помехоустойчивости экстремальных систем является одной из причин, заставляющих заниматься разработкой автоматических оптимизаторов иных типов. Дискретными аналогами (в определенной степени) указанных выше оптимизаторов являются оптимизаторы импульсного действия или шаговые оптимизаторы [1, 6]. Характерной их особенностью является то, что управление, осуществляемое ими, квантовано по времени. Изучение импульсных экстремальных систем, в которых управляющие сигналы представляют собой последовательности импульсов постоянной высоты и длительности, показало, что при отсутствии возмущений в таких системах существуют континуальные множества стационарных движений [7, 8]. Установлено также существование в фазовых пространствах этих систем областей той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненных траекториями, аналогичными, в определенном смысле, траекториям режимов скольжения в автоколебательных системах. Все эти особенности поведения экстремальных систем существенным образом влияют на качество работы этих систем.

Импульсные системы используют в качестве информации о поведении управляемого объекта не производные или их комбинации от выхода объекта (как это имеет место в автоколебательных системах), а их дискретные аналоги, вычисляемые в фиксированные моменты времени.

Наряду с квантованными по времени импульсными экстремальными системами представляет интерес исследование экстремальной системы, в которой управление объектом происходит по непрерывно вычисляемой первой разности объекта. Такая система выгодно отличается от автоколебательных тем, что входом оптимизатора является не производная, а первая разность выхода объекта. В отличие от импульсных экстремаль-

ных систем, в которых управление квантовано по времени, в рассматриваемой системе управление непрерывное. В настоящей работе исследуется общий характер поведения такой системы с объектом управления, представленным в виде нелинейного безынерционного звена и включенного на его выходе инерционного звена первого порядка (рис. 1). Уравнения движения такой системы могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} + \varphi &= -u^2, \quad \dot{u}(t) = \eta(t - \theta) = \\ &= \begin{cases} 1 \text{ } ((\sigma + \Delta) \dot{u}(t - \theta) > 0) \\ -1 \text{ } ((\sigma + \Delta) \dot{u}(t - \theta) \leq 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

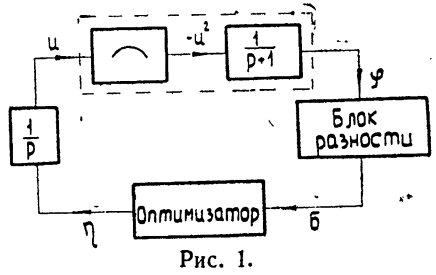


Рис. 1.

где  $\sigma(t) = \varphi(t) - \varphi(t - \tau)$ ;  $\tau, \Delta$  — положительные параметры системы,  $\theta$  — временное запаздывание в оптимизаторе, которое при изучении системы (1) будем считать исчезающе малым, т. е.  $\theta = 0$  [2, 4].

В работе установлено, что система (1) имеет недостатки, присущие автоколебательным системам с инерционностью объекта второго порядка и выше, а именно, в системе (1) существуют сложные режимы работы, обусловленные наличием в фазовом пространстве системы (1) областей той же размерности, что и само фазовое пространство, заполненных траекториями режимов скольжения; в результате система (1) имеет низкую помехоустойчивость и неудовлетворительное качество работы.

Исправление оптимизатора предложенным в [5] способом устраняет сложные режимы; в системе устанавливается единственный периодический режим работы, для которого вычисляется ошибка слежения за экстремумом выхода объекта.

2. Уравнения движения (1) являются дифференциально-разностными; движение системы при  $t > t_0$  не определяется однозначно заданием  $u, \varphi$  в момент времени  $t_0$ , а требует для своего полного и однозначного определения кроме задания  $u(t_0), \varphi(t_0)$  задания функции  $\varphi(t)$  на интервале времени  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ . Соответственно фазовым пространством системы является функциональное пространство [9, 11]. Обозначим через  $K_0$  множество состояний системы, удовлетворяющих условию сохранения

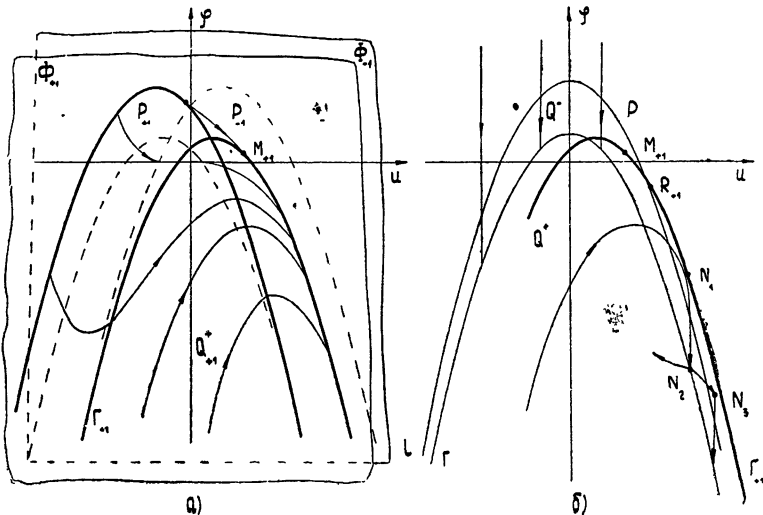


Рис. 2,



знака функции  $\sigma(t) + \Delta$  на интервале времени  $t_0 < t \leq t_0 + \tau$ , и будем рассматривать только те движения системы, которые начинаются из этих состояний. Тогда фазовое пространство системы (1) представляет собой двулистную плоскость  $\Phi(u, \varphi)$ , на одном листе которой  $\Phi_+$ , величина  $\eta = +1$ , на другом листе  $\Phi_-$   $\eta = -1$ . Пространство состояний  $K_0$  состоит из трех плоских областей:  $P_\eta$  (т. е.  $P_{+1}$  и  $P_{-1}$ ), в которых  $\sigma > -\Delta$ , и области  $P$ , в которой  $\sigma < -\Delta$ . Начав движение в области  $P_\eta$ , фазовая точка движется вдоль траектории (2):

$$u = u_0 + \eta t, \quad (2)$$

$$\varphi = [\varphi_0 + u_0^2 + 2(1 - \eta u_0)] e^{-t} - t^2 + 2(1 - \eta u_0)t - u_0^2 - 2(1 - \eta u_0)$$

до тех пор, пока неравенство  $\sigma > -\Delta$  не нарушится. Это произойдет на границе  $\Gamma_\eta$ , уравнение которой имеет вид

$$\varphi = - \left[ u - \eta \left( 1 - \frac{\tau \lambda}{1 - \lambda} \right) \right]^2 - 1 + \frac{\tau^2 \lambda}{(1 - \lambda)^2} + \frac{\Delta \lambda}{1 - \lambda}, \quad (3)$$

где  $\lambda = e^{-\tau}$ , и которая является отображением точек границы области  $P_\eta$  по траекториям (2) через  $\tau$  единиц времени. Линия  $\Gamma_\eta$  делит плоскость  $\Phi_\eta$  на область  $Q_\eta^+$ , где  $\sigma > -\Delta$ , и область  $Q_\eta^-$ , где  $\sigma < -\Delta$ .

Таким образом, начав движение в  $P_\eta$ , фазовая точка движется по «гладкой» траектории (2) в области  $\Pi_\eta$ , состоящей из областей  $P_\eta$ ,  $Q_\eta^+$  и части  $\Phi_\eta$ , ограниченной сверху фазовой траекторией, касающейся  $\Gamma_\eta$  в точке  $M_\eta$ .

В области  $P$  состояний  $K_0$  имеет место неравенство  $\sigma < -\Delta$  как для  $\eta = +1$ , так и для  $\eta = -1$ , и фазовая точка, начав движение в этой области, беспрестанно переходит с траектории листа  $\Phi_\eta$  на траектории листа  $\Phi_{-\eta}$  и обратно; иными словами, фазовая точка движется по траектории режима скольжения. При этом происходят бесконечно быстрые перемены знака величины  $\eta$ . Движение фазовой точки в режиме скольжения происходит согласно уравнениям [4] (4):

$$\dot{\varphi} + \varphi = -u^2, \quad \dot{u} = 0, \quad (4)$$

т. е. вдоль траектории (5)

$$u = u_0, \quad \varphi = (\varphi_0 + u_0^2) e^{-t} - u_0^2 \quad (5)$$

до тех пор, пока неравенство  $\sigma < -\Delta$  не нарушится. Уравнение границы  $\Gamma$ , на которой  $\sigma(t)$  становится равной  $-\Delta$  при движении фазовой точки в режиме скольжения, имеет вид

$$\varphi = -u^2 + \frac{\Delta \lambda}{1 - \lambda}. \quad (6)$$

Линия  $\Gamma$  делит плоскость  $\Phi_\eta$  на область  $Q^-$ , расположенную над параболой  $\Gamma$ , где  $\sigma < -\Delta$ , и область  $Q^+$ , где  $\sigma > -\Delta$ , и является отображением точек границы области  $P$  по траекториям режима скольжения (5) через  $\tau$  единиц времени. Скользящее движение, начатое в  $P$ , происходит в области  $Q^-$  до границы  $\Gamma$ .

Таким образом, в каждой точке границы  $\Gamma$  и в точках границы  $\Gamma_\eta$ , для которых  $\eta u > \eta u_{M_\eta}$ , где  $u_{M_\eta}$  — абсцисса точки контакта  $M_\eta$ , функция  $\sigma + \Delta$  меняет знак, и фазовая точка переходит на границе  $\Gamma_\eta$  с траектории (2) плоскости  $\Phi_\eta$  на соответствующую траекторию режима скольжения, а на границе  $\Gamma$  — с траектории скользющего движения либо на траекторию плоскости  $\Phi_{+1}$ , либо на траекторию плоскости  $\Phi_{-1}$ . Эта неоднозначность перехода фазовой точки из области  $Q^-$  в область

$\Pi_\eta$  «гладких» движений приводит к существованию в системе сложных режимов работы с большой ошибкой слежения за экстремумом выхода объекта и является причиной низкой помехоустойчивости экстремальной системы.

Можно рассматривать условия сшивания траекторий, которые встречаются всякий раз, когда функция  $\sigma + \Delta$  меняет знак, как новые начальные состояния. Выясним, принадлежат ли условия сшивания, рассматриваемые как начальные состояния, множеству  $K_0$ .

3. Пусть фазовая точка, движение которой происходило в области  $\Pi_\eta$ , в некоторый момент времени  $t_1$  достигает границы  $\Gamma_\eta$  в точке  $N_1(u_1, \varphi_1)$  и переходит на траекторию режима скольжения. Теперь  $\sigma(t)$  представляет собой разность значений  $\varphi$ , вычисленных не только в разные моменты времени  $t$  и  $t - \tau$ , но и соответствующих разным траекториям:

$$\begin{aligned} \sigma(t) = \varphi_{\text{скол}}(t) - \varphi_{\text{глад}}(t - \tau) = -2\eta u_1 [1 - e^{-(t-t_1)} - \tau e^{-(t-t_1)}] + \\ + 2[1 - e^{-(t-t_1)} - \tau e^{-(t-t_1)}] - \tau^2 e^{-(t-t_1)} - \Delta e^{-(t-t_1)} + (t-t_1-\tau)^2 - \\ - 2(t-t_1-\tau) + 2\eta u_1(t-t_1-\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая, что  $\eta u_1 > \eta u_{M_\eta} = \Delta/2\tau + \tau/2$ , нетрудно показать, что функция  $f(t) = \sigma(t) + \Delta$  при  $t \geq t_1$  имеет вид, изображенный на рис. 3 а. Обозначим точку пересечения границы  $L$  области  $P$  и линии  $\Gamma_\eta$  через  $R_\eta$ . Абсцисса точки  $R_\eta$  равна

$$\eta u_{R_\eta} = 1 + \frac{\Delta(1-\lambda) - \tau^2\lambda}{2(1-\lambda-\tau\lambda)}. \quad (8)$$

При  $t = t_1 + \tau$   $f(t) > 0$ , если  $\eta u_1 < \eta u_{R_\eta}$ , и  $f(t) < 0$ , если  $\eta u_1 > \eta u_{R_\eta}$ . Таким образом, при  $\eta u_1 < \eta u_{R_\eta}$  функция  $f(t)$  не сохраняет знак в течение времени от  $t_1$  до  $t_1 + \tau$ , и, следовательно, точка  $N_1$ , рассматриваемая как начальное состояние, не принадлежит классу  $K_0$ . Так как в этом случае возможны многократные переходы фазовой точки с одной траектории на другую в течение  $\tau$  единиц времени, аналитическое исследование провести не удается. При  $\eta u_{M_\eta} \geq \eta u_{R_\eta}$  этот случай не имеет места, так как  $\eta u_1 \geq \eta u_{M_\eta} \geq \eta u_{R_\eta}$ . Условие  $\eta u_{M_\eta} \geq \eta u_{R_\eta}$  приводит к неравенству

$$\Delta \leq \frac{\tau(1+\lambda)}{\tau+\lambda-1} \left( \tau - 2 \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right). \quad (9)$$

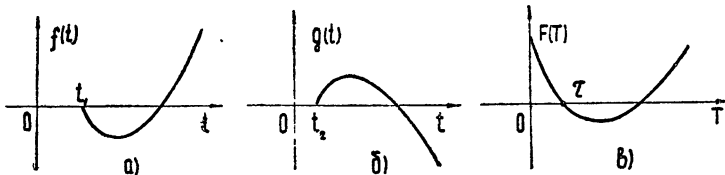


Рис. 3.

Если  $\eta u_1 \geq \eta u_{R_\eta}$ , то  $f(t) \leq 0$  в течение времени от  $t_1$  до  $t_1 + \tau$ . Точка  $N_1$ , рассматриваемая как начальное состояние, принадлежит области  $P$  состояний  $K_0$ , и движение фазовой точки в режиме скольжения, начатое в точке  $N_1$ , продолжается до границы  $\Gamma$ .

Пусть фазовая точка, движение которой происходило в режиме

скольжения в области  $Q^-$ , в момент времени  $t_2$  достигает границы  $\Gamma$  в точке  $N_2(u_2, \varphi_2)$ . Дальнейшее движение фазовой точки может происходить либо по траектории плоскости  $\Phi_{+1}$ , либо по траектории плоскости  $\Phi_{-1}$ . Функция

$$g(t) = \sigma(t) + \Delta = \varphi_{\text{глад}}(t) - \varphi_{\text{скол}}(t - \tau) + \Delta = \\ = -2\eta u_2 [(t - t_2) + e^{-(t-t_2)} - 1] + 2[(t - t_2) + e^{-(t-t_2)} - 1] + \Delta [1 - e^{-(t-t_2)}] - (t - t_2)^2 \quad (10)$$

при  $t \geq t_2$  имеет вид, изображенный на рис. 3б, независимо от знака  $\eta$ . При  $t = t_2 + \tau$   $g(t) > 0$ , если

$$\eta u_2 < \eta u_{S_\eta} = 1 + \frac{\Delta(1 - \lambda) - \tau^2}{2(\tau + \lambda - 1)}, \quad (11)$$

и  $g(t) < 0$ , если  $\eta u_2 > \eta u_{S_\eta}$ , где  $u_{S_\eta}$  — абсцисса точки  $S_\eta$  пересечения границы области  $P_\eta$  и линии  $\Gamma$ .

Таким образом, при  $\eta u_2 < \eta u_{S_\eta}$  функция  $g(t)$  сохраняет знак в течение времени от  $t_2$  до  $t_2 + \tau$ , точка  $N_2$ , рассматриваемая как начальное состояние, принадлежит области  $P_\eta$  состояний  $K_0$ , и движение фазовой точки по траектории (2) в области  $\Pi_\eta$  продолжается до границы  $\Gamma_\eta$ . При  $\eta u_2 > \eta u_{S_\eta}$  функция  $g(t)$  не сохраняет знак в течение времени от  $t_2$  до  $t_2 + \tau$ , и точка  $N_2$  не принадлежит к классу  $K_0$ . Следовательно, в момент времени  $t_3 < t_2 + \tau$  в точке  $N_3(u_3, \varphi_3)$ , когда  $\sigma$  становится равным  $-\Delta$ , фазовая точка снова переходит на траекторию режима скольжения. Взяв за параметр интервал времени  $T = t_3 - t_2$ , найдем параметрические уравнения для определения геометрического места точек  $N_3$ :

$$u_3 = u_2 + \eta T, \\ \varphi_3 = \frac{\Delta}{1 - \lambda} e^{-T} - \Delta - u_2^2, \quad (12) \\ \eta u_2 = 1 + \frac{\Delta(1 - e^{-T}) - T^2}{2(T + e^{-T} - 1)},$$

где  $T \leq \tau$ , причем при  $T = \tau$   $\eta u_2 = \eta u_{S_\eta}$ .

Можно показать, что при  $\eta u_{S_\eta} \geq \eta u_{K_\eta}$ , где  $\eta u_{K_\eta} = \frac{\Delta \lambda}{2(1 - \lambda)}$  — абсцисса точки  $K_\eta$  контакта линии  $\Gamma$  и траектории (2) листа  $\Phi_\eta$ , и при  $\tau \geq \Delta$  все точки  $N_3(T)$  расположены выше параболы  $L$ , т. е. что функция  $F(T) = \varphi_3 + u_3^2 - \frac{\Delta}{1 - \lambda} \geq 0$  на всем интервале изменения  $T$  от 0 до  $\tau$ .

Функция

$$F(T) = T \left( 1 - \frac{1 - e^{-T} - T e^{-T}}{T + e^{-T} - 1} \right) + \Delta \left( \frac{1 - e^{-T} - T e^{-T}}{T + e^{-T} - 1} - \frac{1 - e^{-T}}{1 - \lambda} \right) \quad (13)$$

имеет вид, изображенный на рис. 3в, причем при  $T = \tau \geq \Delta$   $F(T) \geq 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial T} \leq 0$ , так как  $\eta u_{S_\eta} \geq \eta u_{K_\eta}$ .

Покажем, что состояния системы  $N_3$ , рассматриваемые как новые начальные условия, принадлежат области  $P$  состояний  $K_0$ .

Действительно, в течение времени  $t_3 \leq t \leq t_4 = t_3 + \tau - T$  фазо-

вые точки  $\{u(t), \varphi(t)\}$  и  $\{u(t-\tau), \varphi(t-\tau)\}$  движутся по траекториям режима скольжения, причем, как нетрудно видеть на рис. 2 б,  $\varphi(t) < \varphi(t-\tau)$ , т. е.  $\sigma < 0$ . Затем в  $t \geq t_4$  фазовая точка  $\{u(t-\tau), \varphi(t-\tau)\}$  переходит на траекторию «гладкого» движения и в  $t = t_4 + T = t_3 + \tau$  достигает точки  $N_3$ , при этом  $\sigma(t)$  еще продолжает оставаться меньше  $-\Delta$ :

$$\sigma(t_3 + \tau) = -(1 - \lambda)(\varphi_3 + u_3^2) < -\Delta, \quad (14)$$

так как  $\varphi_3 + u_3^2 > \frac{\Delta}{1 - \lambda}$ . Движение фазовой точки в режиме скольжения, начатое в точке  $N_3$ , продолжается до границы  $\Gamma$ . Затем фазовая точка переходит либо на траекторию области  $\Pi_\eta$ , либо на траекторию области  $\Pi_{-\eta}$  и т. д.

Таким образом, движения системы (1) в фазовом пространстве  $\Phi_\eta$  могут быть представлены чередующимися кусками фазовых траекторий (2) и (5), причем фазовая точка с траектории (2) переходит на траекторию (5) однозначным образом, а с траектории (5) фазовая точка может перейти как на траекторию (2) плоскости  $\Phi_{+1}$ , так и на траекторию (2) плоскости  $\Phi_{-1}$ , т. е. неоднозначным образом. Структура фазового пространства оказывается достаточно сложной, поэтому не удастся выяснить вопрос о существовании периодических режимов работы системы, их числе и устойчивости.

Существование сложных режимов работы системы в процессе слежения, ее низкая помехоустойчивость, большая ошибка слежения за экстремумом выхода объекта делают данную экстремальную систему непригодной для практического применения. Существует несколько способов устранения указанных недостатков. Самым простым является способ, предложенный в [5], который предусматривает изменение оптимизатора таким образом, чтобы устранить режимы скольжения в системе. Это достигается в том случае, если в области  $\sigma < -\Delta$  величина  $\eta = 0$ . Кроме того, оптимизатор должен следить за тем, чтобы фазовая точка, которая попадает в область  $\sigma < -\Delta$  по траектории пространства  $\Phi_\eta$ , должна выходить из области  $\sigma < -\Delta$  по траектории пространства  $\Phi_{-\eta}$ . В результате применения такого оптимизатора в системе устанавливается простейший периодический режим работы с двумя прямолинейными отрезками, одним слева от оси  $\varphi$ , другим—справа. В таком режиме система имеет наименьшую (по сравнению со сложными режимами) ошибку слежения.

4. Для отыскания простейших периодических режимов применим метод точечных отображений. Так как траектории плоскости  $\Phi_\eta$  симметричны относительно оси  $\varphi$  траекториям плоскости  $\Phi_{-\eta}$ , достаточно рассмотреть точечное преобразование вида  $\Pi = \Pi_2\Pi_1$ , где  $\Pi_1$  — преобразование, переводящее точки линии  $\Gamma$ , для которых

$$-\infty < u < \frac{\Delta\lambda}{2(1-\lambda)}, \quad (15)$$

по траекториям плоскости  $\Phi_{+1}$  в точки линии  $\Gamma_{+1}$ , затем по траекториям (5) (при  $\eta = 0$ ) в точки линии  $\Gamma$ , для которых  $u > u_{M+1}$ , а  $\Pi_2$  — преобразование симметрии относительно оси  $\varphi$ , переводящее точку  $(u, \varphi)$  в точку  $(-u, \varphi)$ . Пусть при  $t = 0$   $u(0) = -x$ ,  $\varphi(0) = -x^2 + \frac{\Delta\lambda}{1-\lambda}$ . Через  $t_1$  единиц времени фазовая точка приходит на линию  $\Gamma_{+1}$  и имеет следующие координаты:

$$u(t_1) = y, \varphi(t_1) = - \left[ y - \left( 1 - \frac{\tau\lambda}{1-\lambda} \right) \right]^2 - 1 + \frac{\tau^2\lambda}{(1-\lambda)^2} + \frac{\Delta\lambda}{1-\lambda}. \quad (16)$$

Для преобразования  $\Pi_1$  получаем

$$\left[ \frac{\Delta\lambda}{1-\lambda} + 2 + 2x \right] e^{-x} = \left[ \frac{\Delta\lambda}{1-\lambda} + \frac{2\tau\lambda + \tau^2\lambda}{1-\lambda} - 2 \frac{\tau\lambda}{1-\lambda} y \right] e^y, \quad (17)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-(x+y)} \frac{\Delta\lambda + 2x(1-\lambda)}{2\tau\lambda y - \Delta\lambda - \tau^2\lambda} > 0,$$

так как  $y > u_{M+1} = \frac{\Delta}{2\tau} + \frac{\tau}{2}$ . Неподвижную точку преобразования  $\Pi$  найдем, положив в (17)  $x = y = u^*$  при условии  $u^* \geq \max \{ u_{M+1}, u_{R+1} \}$ :

$$2u^* = \ln \frac{\Delta\lambda + 2(1-\lambda)(u^* + 1)}{\Delta\lambda - 2\tau\lambda(u^* - 1) + \tau^2\lambda}. \quad (18)$$

Монотонно возрастающая функция  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  имеет асимптоту  $y = \frac{\Delta}{2\tau} + \frac{\tau}{2} + 1$ . Очевидно, что  $y = f\left(-\frac{\Delta\lambda}{2(1-\lambda)}\right) > \frac{\Delta}{2\tau} + \frac{\tau}{2}$ . Следовательно, преобразование  $\Pi$  имеет единственную неподвижную точку  $u^*$ , устойчивую в большом. Неподвижной точке  $u^*$  отображения  $\Pi$  соответствует периодический режим работы системы (1) с периодом  $T = 4u^* + 2T_0$ , где

$$T_0 = \ln \frac{2(1-\lambda-\tau\lambda)u^* - 2(1-\lambda) + 2\tau\lambda + \tau^2\lambda + \Delta\lambda}{\Delta\lambda}. \quad (19)$$

Средняя за период ошибка слежения за экстремумом выхода объекта в этом случае определяется следующим образом:

$$\delta_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \left| \int_0^{2u^*} \varphi_{\text{глад}}(t) dt + \int_0^{T_0} \varphi(t) dt \right| = \frac{(u^*)^2}{2u^* + T_0} \left( \frac{2}{3} u^* + T_0 \right), \quad (20)$$

где  $\varphi(t)$  находится по формуле (5). На рис. 4 изображена зависимость  $\delta_{\text{ср}}$  от  $\tau$  при  $\Delta = 0,25$  и  $\Delta = 0,5$ .

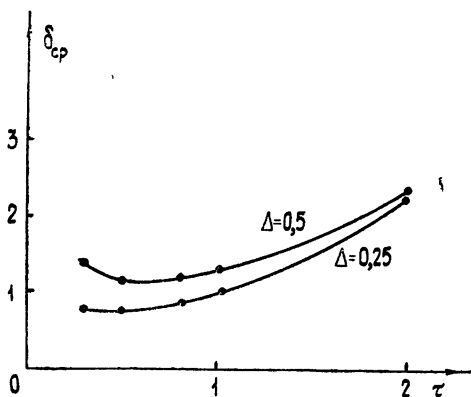


Рис. 4.

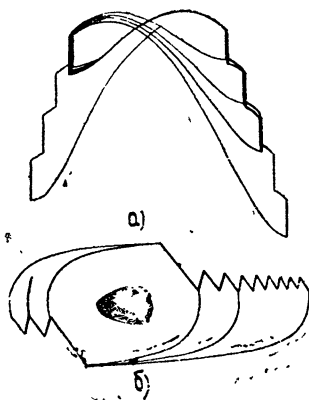


Рис. 5.

5. На аналоговой машине МНБ-1 было проведено экспериментальное исследование режимов работы экстремальных систем двух типов: 1) с объектом управления, в котором нелинейное безынерционное звено

предшествует инерционному звену первого порядка, 2) экстремальной системы с объектом, в котором нелинейное звено расположено после инерционного. Движения изображающей точки на фазовой плоскости фотографировались с экрана осциллографа И-4М. На рис. 5 приведены полученные осциллограммы сложных режимов работы: 5 а) — системы первого типа, 5 б) — системы второго типа. Моделирование подтвердило содержащиеся в данной работе теоретические выводы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Ивахненко, Самонастраивающиеся системы автоматического регулирования, изд. АН УССР, Киев, 1957.
2. Г. А. Новинская, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, 566 (1961).
3. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, 393 (1967).
4. Н. Н. Леонов, Ученые записки, Прикладная математика и кибернетика, Горький, 1967, стр. 28.
5. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, 799 (1966).
6. Л. Н. Фицнер, Тр. конференции, М., 1960, стр. 480.
7. Н. Н. Леонов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, 958 (1964).
8. Н. Н. Леонов, К. К. Седова, И. С. Балтовский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, 341 (1969).
9. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
10. А. С. Алексеев, Тр. ГИФТИ и радиофизич. факультета ГГУ, Ученые записки, 35, серия физическая, 1957.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
5 октября 1970 г.

## ON EXTREMAL CONTROL THEORY

*K. K. Sedova*

Dynamics of a one-channel extremal system with a plant controlled by a continuously computed first difference of the plant output is investigated.

---

УДК 531.391

## РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В КОНТУРЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

В. И. Королев

Рассматриваются резонансные явления в нелинейных системах для случая малой расстройки. Рассмотрение проводится методом медленно меняющихся амплитуд. Характеристика нелинейного элемента произвольна, но представлена степенным рядом

Резонансные явления в нелинейных колебательных системах рассматривались многими авторами [1-4]. При этом характеристика нелинейного элемента аппроксимировалась, как правило, полиномом третьей степени. Представляется целесообразным провести рассмотрение этого вопроса для произвольной нелинейности, представленной степенным рядом.

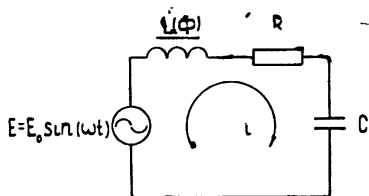


Рис. 1.

Схема нелинейного контура, на который действует внешняя синусоидальная ЭДС, приведена на рис. 1.

Будем считать, что нелинейная зависимость тока, протекающего в контуре, от магнитного потока в катушке произвольна, но может быть представлена степенным рядом и отличается от линейной функции на величину порядка  $\mu$ , где  $0 < \mu \ll 1$ .

### 1. УКРОЧЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Уравнения, описывающие поведение схемы рис. 1, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} + Ri + v &= E \sin(\bar{\omega}t), \\ v &= 1/C \int idt, \\ i &= 1/L [\Phi + \mu f(\Phi)], \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Phi$  — потокосцепление катушки,  $i$  — ток, протекающий в катушке. Физический смысл остальных величин ясен из рис. 1.

После исключения из уравнений (1) переменных  $i$  и  $v$  перехода к новому времени  $\tau = t(LC)^{-1/2}$  система будет описываться одним уравнением второго порядка

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2} + \delta \frac{d\Phi}{d\tau} + \Phi = -\mu \left[ \delta \frac{d}{d\tau} f(\Phi) - f(\Phi) - 2\varepsilon \omega \cos(\omega\tau) \right], \quad (2)$$

где  $\delta = \mu\delta_0 = R\sqrt{C/L}$ ,  $2\varepsilon = E\omega_0^{-1}$ ,  $\omega = \bar{\omega}\omega_0^{-1}$ ,  $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$ ,  $f(\Phi)$  — нелинейная составляющая зависимость тока от потокосцепления.

Будем считать, что частота внешней силы  $\bar{\omega}$  мало отличается от частоты собственных колебаний  $\omega_0$ , т. е.  $\omega = 1 + \mu\xi^*$ .

Пользуясь методом Боголюбова и Митропольского [5], будем искать решение уравнения (2) в виде

$$\Phi = z(\mu\tau) e^{-j\omega\tau} + z^*(\mu\tau) e^{j\omega\tau} + \mu W(\tau), \quad (3)$$

где  $z(\mu\tau)$ ,  $z^*(\mu\tau)$  — медленно меняющиеся комплексно-сопряженные функции времени,  $W(\tau)$  — ограниченная функция

После подстановки решения (3) в уравнение (2) и пренебрежения членами порядка  $\mu^2$  получим уравнение для  $W$  в виде

$$\mu(\ddot{W} + W) = H(\tau), \quad (4)$$

где

$$H(\tau) = 2j\mu\omega(z\dot{e}^{-j\omega\tau} + \dot{z}^*e^{j\omega\tau}) + (\omega^2 - 1)(ze^{-j\omega\tau} + z^*e^{j\omega\tau}) + j\delta\omega(ze^{-j\omega\tau} + z^*e^{j\omega\tau}) - \mu f(ze^{-j\omega\tau} + z^*e^{j\omega\tau}) + \varepsilon\omega(e^{-j\omega\tau} + e^{j\omega\tau}).$$

Для того, чтобы поправка  $W$  к решению (3) была конечна и членом  $\mu W$  можно было пренебречь, необходимо, чтобы правая часть уравнения (4) не содержала гармонической составляющей частоты  $\omega$ . Для этого должно выполняться условие

$$\omega/2\pi \int_0^{2\pi/\omega} H(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = 0, \quad (5)$$

из которого следует укороченное уравнение

$$2j\dot{z} + \xi z + j\delta z - \kappa(z, z^*) + \varepsilon = 0, \quad (6)$$

где

$$\kappa(z, z^*) = \omega/2\pi \int_0^{2\pi/\omega} f(\Phi) e^{j\omega\tau} d\tau, \quad \omega^2 - 1 = 2\mu\xi.$$

Пусть функция  $f(\Phi)$  представлена степенным рядом, начинающимся с квадратичного члена

$$f(\Phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m!} \Phi^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m!} (ze^{-j\omega\tau} + z^*e^{j\omega\tau})^m, \quad (7)$$

где

$$a_m = f_{(0)}^{(m)}.$$

С помощью формулы бинома Ньютона и замены индексов выражение (7) преобразуется к виду

$$f(\Phi) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{a_{m+n}}{n! m!} z^n z^{*m} e^{j(m-n)\tau}. \quad (8)$$

Из формулы (8) следует, что величина  $\kappa(z, z^*)$  будет отлична от нуля, если выполняется условие

$$n = m + 1. \quad (9)$$

В этом случае

$$f(\Phi) = zF(zz^*) e^{-j\omega\tau}, \quad (10)$$

\* Случай, когда расстройка  $\xi$  не является малой величиной и  $\omega$  не близка к единице, будет рассмотрен во второй части работы.



где

$$F(zz^*) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{2m+1}}{m!(m+1)!} (zz^*)^m, \quad (10a)$$

а укороченное уравнение (6) примет вид\*

$$2jz + \xi z + j\delta z - zF(zz^*) + \varepsilon = 0, \quad (11)$$

или, после перехода от комплексных амплитуд к действительным амплитудам и фазам  $\rho$  и  $\varphi$  согласно формулам  $z = \rho e^{j\varphi}$  и  $z^* = \rho e^{-j\varphi}$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\delta\rho + \varepsilon \sin \varphi = \psi_1(\rho, \varphi, \xi), \\ \rho\dot{\varphi} &= \xi\rho - \rho F(\rho^2) + \varepsilon \cos \varphi = \psi_2(\rho, \varphi, \xi), \end{aligned} \quad (12)$$

где дифференцирование проведено по новому времени  $\tau_1 = \tau/2$ .

Состояния равновесия системы (12) находятся из алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \delta\rho_0 - \varepsilon \sin \varphi_0 &= 0, \\ -\xi\rho_0 + \rho_0 F(\rho_0^2) - \varepsilon \cos \varphi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Если из системы (13) исключить фазу  $\varphi_0$ , то получим уравнение амплитудно-частотных характеристик в разрешенном относительно расстройки  $\xi$  виде

$$\xi = F(\rho_0^2) \pm \left( \frac{\varepsilon^2}{\rho_0^2} - \delta^2 \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой зависимость собственной частоты нелинейной системы от амплитуды колебаний, а второе определяет ограничение амплитуды колебаний из-за потерь. Из выражения для производной

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{2\rho_0(F - \xi)}{\delta^2 + (F - \xi)(F + 2\rho_0^2 F' - \xi)} \quad (15)$$

следует, что геометрическим местом горизонтальных касательных к амплитудно-частотным характеристикам является кривая

$$F - \xi = 0, \quad (16)$$

а геометрическим местом вертикальных касательных—кривая

$$\delta^2 + (F - \xi)(F + 2\rho_0^2 F' - \xi) = 0. \quad (17)$$

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Тип и устойчивость состояний равновесия определяется корнями характеристического уравнения системы (12), линеаризованной в окрестности состояний равновесия. Это уравнение имеет вид

$$p^2 + 2\delta p + \delta^2 + (F - \xi)(F + 2KF' - \xi) = 0, \quad (18)$$

где  $K = \rho^2$ . Из уравнения (18) следует, что при  $\delta > 0$  состояния равновесия системы (12) могут быть только типа устойчивых узлов и фокусов и неустойчивых—седел.

\* Уравнение, комплексно-сопряженное уравнению (II), опущено.

Область плоскости  $\xi K$ , точкам которой соответствуют состояния равновесия типа седла, определяется неравенством

$$\delta^2 + (F - \xi)(F + 2KF' - \xi) < 0. \quad (19)$$

Уравнение границы седла получается из (19) путем замены знака неравенства знаком равенства. Эта граница многозначна по переменной  $\xi$  и пересекает амплитудно-частотные характеристики в точках, где касательные к ним вертикальны, т. е. в точках, где

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \infty, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \infty.$$

Действительно, из уравнений (13) следует

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\rho}\right)\frac{d\rho}{d\xi} + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\varphi}\right)\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\xi} &= 0, \\ \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\rho}\right)\frac{d\rho}{d\xi} + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial\varphi}\right)\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда имеем

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \delta^2 + (F - \xi)(F + 2KF' - \xi), \\ \Delta_1 &= \rho(F - \xi), \quad \Delta_2 = \delta\rho, \end{aligned}$$

значит, уравнение границы области седла совпадает с уравнением области неоднозначности для амплитудно-частотных характеристик.

Состояния равновесия будут типа устойчивого узла, если выполняется неравенство

$$(F - \xi)(F + 2KF' - \xi) < 0, \quad (21)$$

и типа устойчивого фокуса, если выполняется неравенство, обратное неравенству (21). Граница узлов-фокусов также многозначна по переменной  $\xi$ .

Рассмотрим зависимость амплитуды вынужденных колебаний от амплитуды внешней силы. Из уравнения (14) имеем

$$\varepsilon^2 = K[(F - \xi)^2 + \delta^2]. \quad (22)$$

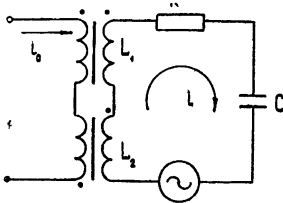
Нетрудно показать, что на графике зависимости  $\rho = \rho(\varepsilon)$  устойчивые состояния равновесия будут лежать на той части кривой, для которой выполняется условие  $\frac{d\rho}{d\varepsilon} > 0$ . Дифференцируя (22) по  $\varepsilon$ , получаем выражение полной производной

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = \frac{\rho(F - \xi) + \delta^2}{\varepsilon[\delta^2 + (F - \xi)(F + 2KF' - \xi)]}. \quad (23)$$

Из (23) следует, что в плоскости  $\varepsilon\rho$  состояния равновесия будут устойчивыми, если  $\frac{d\rho}{d\varepsilon} > 0$ , и неустойчивыми при  $\frac{d\rho}{d\varepsilon} < 0$ , а устойчивость состояний равновесия меняется в точках, где касательная к кривой  $\rho = \rho(\varepsilon)$  вертикальна.

В качестве примера рассмотрим резонансные явления в электрической схеме, представленной на рис. 2. Будем считать, что катушки

$L_1$  и  $L_2$  имеют одинаковые числа витков и намотаны на отдельных идентичных ферритовых кольцах. Направление витков выбрано так, что магнитные потоки  $i$  и  $i_0$  в одной из катушек складываются, а в другой вычитаются.



$$E = E_0 \sin(\omega t)$$

Рис. 2.

В предположении, что  $i_0 \ll i$  и что зависимость тока в обмотке каждого трансформатора от магнитного потока можно представить кубической параболой, функция  $f(\Phi)$  определяется выражением [9]

$$Li = f(\Phi_0, Li_0) = \mu \Phi^3 + \mu (Li_0)^2 \frac{3\Phi}{(1 + 3\Phi^2)^2}. \quad (24)$$

Если в (24) последнее слагаемое разложить в степенной ряд и ограничиться членом в пятой степени, то формула (24) примет вид

$$f(\Phi_0, Li_0) = \mu a_1 \Phi^3 + \mu a_3 \Phi^5, \quad (25)$$

где

$$a_1 = (1 - 36 L^2 i_0^2), \quad a_3 = 162 L^2 i_0^2.$$

Выражению  $F(\rho^2)$  в укороченных уравнениях (12) будет соответствовать нелинейная функция вида

$$F(\rho^2) = 3a_1 \rho^2 + 5a_3 \rho^4.$$

Уравнения амплитудно-частотных характеристик, границы седел и границы узлов-фокусов имеют вид

$$\xi = 3a_1 K + 5a_3 K^2 \pm (\varepsilon^2/K - \delta^2)^{1/2}, \quad (26)$$

$$\delta^2 + (3a_1 K + 5a_3 K^2 - \xi)(9a_1 K + 25a_3 K^2 - \xi) = 0, \quad (27)$$

$$(3a_1 K + 5a_3 K^2 - \xi)(9a_1 K + 25a_3 K^2 - \xi) = 0. \quad (28)$$

На рис. 3а проведено разбиение плоскости  $\xi K$  на области с различными типами состояний равновесия, а также нанесены амплитудно-частотные характеристики для случая  $a_1 > 0$ ; на рис. 3б проведено ана-

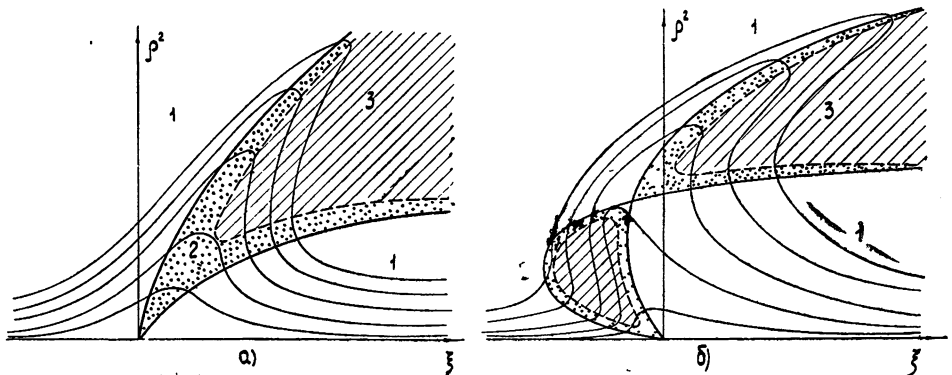


Рис. 3.

логичное разбиение плоскости  $\xi K$  для случая  $a_1 < 0$  (1—устойчивые фокусы, 2—устойчивые узлы, 3—седла).

В заключение автор выражает признательность Л. В. Постникову за внимание и ценные замечания при обсуждении данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Шемплинска-Ступницка, Механика, Периодический сборник переводов иностранных статей, № 6, 11 (1968).
2. Р Шалеа, Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, качественные методы теории нелинейных колебаний, 2, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр 458.
3. Дж Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, М., 1952.
4. Т Хаяси, Нелинейные колебания в физических системах изд. Мир, М., 1968
5. Н. Н. Боголюбов, Ю А Митропольский, Асимптотические методы нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963
6. Л В Постников, А С Тарантович, Изв. высш. уч зав — Радиофизика, 11, № 3, 424 (1968).

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
14 сентября 1970 г

## RESONANCE EFFECTS IN LOOP WITH NONLINEAR INDUCTIVITY

*V. I. Korolev*

Resonance effects in nonlinear systems are considered for the case of small de-cuning. The slow varying amplitudes method is used. The nonlinear-element characteristic is arbitrary but is represented by a power series.

---

УДК 621.373.421

**О синхронизации лампового генератора с запаздывающей обратной связью в случае  $MS \gg RC$**

*М. И. Букатарь, Е. Ф. Царьков*

Изучаются вопросы синхронизации лампового генератора с запаздывающей обратной связью в случае  $MS \gg RC$  на частотах, далеких от собственных частот контура.

Данная работа является продолжением работы [1], в которой описан метод исследования ограниченных решений в квазилинейных системах с запаздыванием.

Уравнение для величины, пропорциональной силе тока в контуре лампового генератора с запаздывающей обратной связью в случае  $MS \gg RC$ , имеет вид

$$\ddot{x}(t) + 2q_1 \dot{x}(t - \Delta_1) + \omega^2 x(t) = \varepsilon [a_1 \dot{x}(t) - a_3 \dot{x}^3(t - \Delta_1)] + \varepsilon h \cos(\nu t). \quad (1)$$

Чтобы изучить вопрос о синхронизации на частотах, не близких к собственным частотам генератора, необходимо потребовать выполнение соотношений

$$-\nu^2 + 2\nu q_1 \sin(\Delta_1 \nu) + \omega^2 \approx 0, \quad \cos(\Delta_1 \nu) \approx 0.$$

Поэтому будем считать, что в левой части уравнения (1) сделаны следующие изменения

а) Параметр  $\Delta$  выбран так, чтобы  $\cos(\Delta \nu) = 0$ , т. е. в левую часть уравнения (1) добавим слагаемое  $\varepsilon a_0 [\dot{x}(t - \Delta_1) - \dot{x}(t - \Delta)]$ , причем  $\Delta - \Delta_1 = \varepsilon \delta$ .

б) Параметр  $q$  выбран так, чтобы выполнялось соотношение

$$-\nu^2 + 2q \nu \sin(\Delta \nu) + \omega^2 = 0,$$

а слагаемое вида  $\varepsilon a_2 \dot{x}(t - \Delta)$  добавлено в правую часть (1).

в) Уравнение

$$W(\lambda) \equiv \lambda^2 + 2q \lambda e^{-\lambda \Delta} + \omega^2 = 0$$

имеет только одну пару чисто мнимых простых корней  $\pm i \nu$ , а остальные корни расположены в полуплоскости  $\text{Re } \lambda \leq -\rho < 0$ .

Эти предположения соответствуют тому, что система при  $\varepsilon = 0$  находится на границе областей  $D_0$  и  $D_2$  (см. рис. 1 работы [1]).

Используя методику работы [1], от уравнения (1) перейдем к системе уравнений

$$\frac{du_1}{dt} = u_2 + 2p_0 \varepsilon [f_1(u_{2f}(\theta)) + f_2(\dot{u}_{2f}(\theta)) + h \cos(\nu t)], \quad (2)$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\nu^2 u_1 - 2\nu q_0 \varepsilon [f_1(u_{2f}(\theta)) + f_2(\dot{u}_{2f}(\theta)) + h \cos(\nu t)],$$

где

$$p_0 = \operatorname{Re} \{ [W'(i\nu)]^{-1} \}, \quad q_0 = \operatorname{Im} \{ [W'(i\nu)]^{-1} \},$$

$$f_1(u_2(\theta)) = a_1 u_2(t) + a_2 u_2(t - \Delta) - a_3 u_2^3(t - \Delta),$$

$$f_2(\dot{u}_2(\theta)) = \frac{a_0}{\varepsilon} \int_{-\Delta}^{-\Delta_1} \dot{u}_2(t + \theta) d\theta.$$

Выделение параметра  $\varepsilon$  в функционале  $f_2$  обосновано тем, что  $|f_2(\varphi(\theta))| \leq a_0 \delta \|\varphi\|$ , т. е.  $\|f_2\|$  ограничена константой, не зависящей от  $\varepsilon$ . Сделав в системе (2) замену переменных

$$u = e^{At} v,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

приходим к уравнению вида

$$\frac{dv}{dt} + \varepsilon \Phi(t, v_t(\theta)) = \varepsilon \Psi(t, v_t(\theta)), \quad (3)$$

где  $\Phi(t, \cdot)$ ,  $\Psi(t, \cdot)$  — некоторые функционалы, ограниченные константой, не зависящей от  $\varepsilon$ , и можно считать, что они удовлетворяют глобальному условию Липшица (так как мы изучаем ограниченные решения).

*Теорема.* Если  $\Phi(t, \cdot)$ ,  $\Psi(t, \cdot)$  — линейные непрерывные функционалы (по обоим переменным), то при достаточно малом  $\varepsilon$  из асимптотической устойчивости тривиального решения системы

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon \Psi(t, \omega_t(\theta)) \quad (4)$$

с показателем, пропорциональным  $\varepsilon$ , следует асимптотическая устойчивость (3).

*Доказательство.* Рассмотрим пространство  $C[0, T]$  и уравнение

$$x(t) + \varepsilon \Phi(t, x_t(\theta)) = f(t),$$

где  $\Phi(t, \cdot)$  принадлежит пространству  $C^*[-h, 0]$ . В рассматриваемом случае легко показать, что

$$x(t) = f(t) + \varepsilon F(t, f_t(\theta)),$$

где  $F(t, \cdot) \in C^*[-t, 0]$  и  $\|F(t, \cdot)\| \leq M$ .

С помощью замены  $\varepsilon t = s$  перейдем от уравнения (3) к уравнению

$$\frac{dz}{ds} + \varepsilon \Phi\left(\frac{s}{\varepsilon}, z_s(\varepsilon\theta)\right) = \Psi\left(\frac{s}{\varepsilon}, z_s(\varepsilon\theta)\right).$$

Легко заметить, что теорема будет доказана, если мы покажем, что из асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения

$$\frac{dz}{ds} = \Psi(s, z_s(\theta))$$

с показателем  $\rho < 0$  будет следовать асимптотическая устойчивость тривиального решения уравнения

$$\frac{dz}{ds} + \varepsilon \Phi(s, \dot{z}_s(\theta)) = \Psi(s, z_s(\theta))$$

или, следуя предыдущим замечаниям,

$$\frac{dz}{ds} = \Psi(s, z_s(\theta)) + \varepsilon F(s, \Psi(s+\theta, z_{s+\theta}(\theta_1))). \quad (5)$$

Используя тот факт, что фундаментальное решение  $H(t, \tau)$  уравнения (5) при  $\varepsilon = 0$  допускает оценку

$$|H(t, \tau)| \leq K e^{-\rho(t-\tau)},$$

можно получить утверждение теоремы при достаточно малом  $\varepsilon$ .

Итак, для изучения системы (2) при достаточно малом  $\varepsilon$  можно сначала использовать приведенную выше теорему, затем перейти к координатам  $R$  и  $\varphi$  с помощью замены переменных

$$u_1 = R \cos(\nu t + \varphi), \quad u_2 = -R \nu \sin(\nu t + \varphi)$$

и, усреднив по явно входящему времени [2], получить систему

$$\frac{dR}{ds} = \left[ a_2 \nu - \frac{3}{4} a_3 \nu^3 R^2 \right] R \sin(\pi \nu) \sin \beta - [a_1 \nu + \alpha \nu^2 \sin(\pi \nu)] R \cos \beta + h \sin(\varphi + \beta), \quad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left[ a_2 \nu - \frac{3}{4} a_3 \nu^3 R^2 \right] \sin(\pi \nu) \cos \beta + [a_1 \nu + \alpha \nu^2 \sin(\pi \nu)] \sin \beta + \frac{h}{R} \cos(\varphi + \beta),$$

где

$$\sin \beta = \frac{-q \sin(\pi \nu)}{2\{q^2 + \nu^2[1 + \pi q \sin(\pi \nu)]^2\}^{1/2}},$$

$$\cos \beta = \frac{-\nu[1 + \pi q \sin(\pi \nu)]}{2\{q^2 + \nu^2[1 + \pi q \sin(\pi \nu)]^2\}^{1/2}},$$

$$s = \{q^2 + \nu^2[1 + \pi q \sin(\pi \nu)]^2\}^{1/2} t,$$

$$\alpha = 2q\delta, \quad \sin(\pi \nu) = \pm 1.$$

Здесь и далее считаем  $\Delta = \pi$ . Остальные случаи можно получить заменой независимой переменной.

Приравняв к нулю правые части системы (6), для определения стационарной амплитуды имеем уравнение

$$\left[ a_2 \nu - \frac{3}{4} a_3 \nu^3 R^2 \right] R^2 = h^2 - [a_1 \nu + \alpha \nu^2 \sin(\pi \nu)]^2 R^2, \quad (7)$$

а стационарная фаза определяется из соотношения

$$h \sin \varphi = [a_1 \nu + \alpha \nu^2 \sin(\pi \nu)] R. \quad (8)$$

Естественно различать два случая:  $a_2 a_3 < 0$  и  $a_2 a_3 > 0$ . В первом случае уравнение (7) имеет только один корень  $R_1$ , которому соответствуют два корня уравнения (8). Во втором случае уравнение (7) имеет три корня:  $R_2, R_3, R_4$  (рис. 1). Как в первом, так и во втором случае максимального значения  $R_{\max}$  амплитуда синхронизированных колебаний достигает при

$$a_1 \nu + \alpha \nu^2 \sin(\pi \nu) = 0.$$

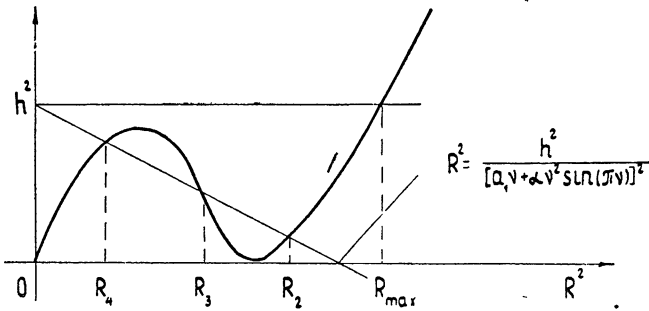


Рис. 1.

Эти колебания изучим подробнее. Из (8) имеем  $h \sin \varphi = 0$ . Отсюда, как и в обычном генераторе, получим «синфазный» режим ( $\varphi = 0$ ) и «антифазный» режим ( $\varphi = \pi$ ). Условия существования корней уравнения (7) и их количество приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\sin(\pi \nu)$	$a_2 a_3 > 0$	$a_2 a_3 < 0$	Режим
1	Один корень	Один корень	синфазный
	либо нет, либо два	нет	антифазный
-1	либо нет, либо два	нет	синфазный
	один корень	один корень	антифазный

Для исследования устойчивости возможных режимов колебаний перепишем систему (6) в виде уравнений в вариациях. При  $\varphi = 0$

$$\frac{dx}{ds} = - \left[ \frac{h}{R_0} + \frac{3}{2} a_3 v^3 R_0^2 \sin(\pi \nu) \right] \sin \beta x + h \cos \beta y, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{ds} = - \left[ \frac{h}{R_0^2} + \frac{3}{2} a_3 v^3 R_0 \sin(\pi \nu) \right] \cos \beta x - \frac{h}{R_0} \sin \beta y,$$

а при  $\varphi = \pi$  имеем

$$\frac{dx}{ds} = \left[ \frac{h}{R_0} - \frac{3}{2} a_3 v^3 R_0^2 \sin(\pi \nu) \right] \sin \beta x + h \cos \beta y, \tag{10}$$

$$\frac{dy}{ds} = \left[ \frac{h}{R_0^2} - \frac{3}{2} a_3 v^3 R_0 \sin(\pi \nu) \right] \cos \beta x + \frac{h}{R_0} \sin \beta y.$$

В обоих случаях характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - p \lambda + \Delta = 0,$$



где

$$\Delta_1 = \frac{h^2}{R_0^2} + \frac{3}{2} a_3 v^3 R_0 h \sin(\pi v),$$

$$p_1 = - \left[ \frac{2h}{R_0} + \frac{3}{2} a_3 v^3 R_0^2 \sin(\pi v) \right] \sin \beta,$$

$$\Delta_2 = \frac{h^2}{R_0^2} - \frac{3}{2} a_3 v^3 R_0 h \sin(\pi v),$$

$$p_2 = \left[ \frac{2h}{R_0} - \frac{3}{2} a_3 v^3 R_0^2 \sin(\pi v) \right] \sin \beta.$$

Анализ особых точек (9) и (10) приведен соответственно на рис. 2 и 3 (где  $\gamma = (3/2)a_3 v^3 R_0^3 \sin(\pi v)$ ). Из рисунков видно, что как в правой, так и в левой полуплоскости могут существовать либо синфазный, либо антифазный режимы. Для анализа режимов работы в окрестности границ областей  $D_0$  и  $D_2$  следует иметь в виду, что из физических соображений  $a_3$  имеет знак, противоположный знаку  $q$ , а знак  $\sin \beta$  определяется  $-q \sin(\pi v)$ .

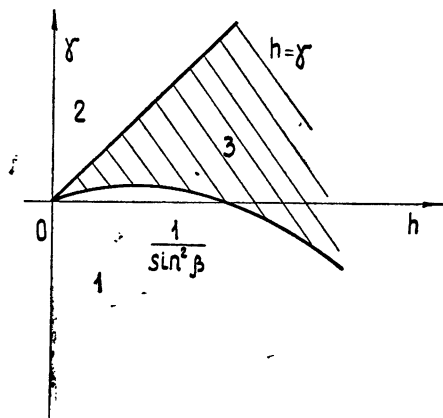


Рис. 2. 1—фокусы, 2—седла, 3—узлы;  
 $\sin \beta < 0$  — неустойчивые,  
 $\sin \beta > 0$  — устойчивые.

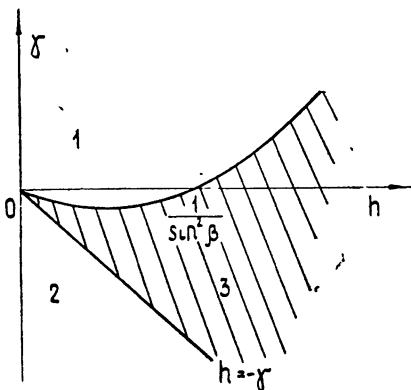


Рис. 3.  $\sin \beta < 0$  — устойчивые,  
 $\sin \beta > 0$  — неустойчивые.

Приведенная таблица и рис. 2, 3 позволяют анализировать схематически режимы работы лампового генератора на развертке фазового цилиндра. Некоторые результаты такого анализа приведены на рис. 4, 5.

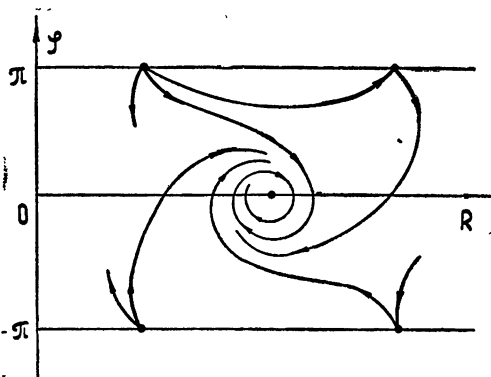


Рис. 4.  $a_2 a_3 > 0$ ,  $\sin(\pi v) = 1$ ,  $q > 0$ .

Если выражение  $a_1 v + a v^2 \sin(\pi v)$  недостаточно мало, то уже в первом приближении будет наблюдаться сдвиг синхронизированной фазы.

Этот анализ занимает гораздо больше места, но выводы об устойчивости или неустойчивости различных режимов колебаний совпадают с вышеприведенными. К сожалению, авторам пока не удалось получить достаточно обзримые выражения для анализа режимов колебаний в окрестности точечной границы областей  $D_0$  и  $D_4$ . Этот случай представляет по крайней мере теоретический интерес с точки зрения существования синхронизированных двухчастотных режимов в одноконтурном генераторе, как предполагает автор работы [3].

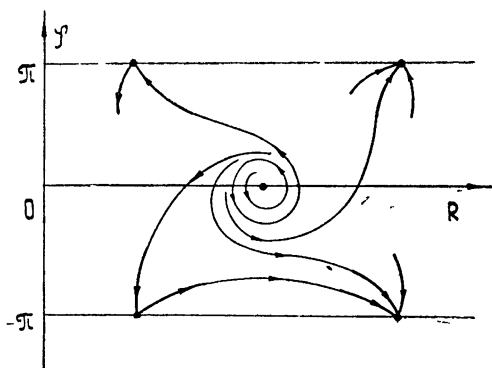


Рис. 5.  $a_2 a_3 > 0$ ,  $\sin(\pi\nu) = 1$ ,  $q < 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Букатарь, Е. Ф. Царьков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 8, 1117 (1970).
2. J. K. Hale, J. Differential Equations, 2, № 1, 57 (1966).
3. В. П. Рубаник, Колебания квазилинейных систем с запаздыванием, изд. Наука, М., 1969.

Черновицкий государственный  
университет

Поступила в редакцию  
11 ноября 1970 г.

#### ON SYNCHRONIZATION OF VALVE GENERATOR WITH DELAYED FEEDBACK IN THE CASE OF $MS \gg RC$

*M. I. Bukatar, E. F. Tsarkov*

Synchronization of a valve generator with a delayed feedback in the case of  $MS \gg RC$  at frequencies close to the loop's natural frequencies is studied.

УДК 517.9 + 621.396.078.6

## К ТЕОРИИ СИСТЕМ СИНХРОНИЗАЦИИ С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СВЯЗЯМИ

*В. П. Пономаренко*

Исследуется динамика бесфильтровой совместной системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) и слежения за задержкой (ССЗ) псевдошумового сигнала при аппроксимации дискриминационной характеристики ССЗ и автокорреляционной функции видеопоследовательности гладкими периодическими функциями. Задача сводится к изучению нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка с тороидальной фазовой поверхностью. Установлены возможные режимы работы системы синхронизации и их зависимость от параметров и начальных условий.

1. Задача построения оптимального устройства для совместного определения параметров радиосигналов приводит к структурным схемам, состоящим из нескольких следящих систем с перекрестными связями [1, 2]. Сложность этих структурных схем зависит от характера принимаемого сигнала и от числа параметров, подлежащих определению.

Для определения параметров псевдошумового радиосигнала один из вариантов оптимальной системы фильтрации предложен в [1]. В этой системе оптимальное определение параметров принимаемого сигнала обеспечивается путем синхронизации генератора опорного сигнала. Синхронизация осуществляется двумя следящими системами: системой фазовой автоподстройки частоты (ФАП) и схемой слежения за задержкой принимаемого сигнала (ССЗ), связанными перекрестными связями. В результате взаимодействия этих следящих систем происходит преобразование принимаемого псевдошумового сигнала на входе системы ФАП в гармонический сигнал, а на входе ССЗ—в видеопоследовательность. Преобразованные сигналы отслеживаются соответствующими следящими системами.

Уравнения совместной системы ФАП и ССЗ в операторной форме имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} p\varphi + k_1 F_1(p) R(x) \sin \varphi &= p\varphi_0, \\ px + k_2 F_2(p) D(x) \cos \varphi &= px_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi$ —разность между истинным  $\varphi_0$  и оценочным  $\hat{\varphi}$  значениями фазы сигнала;  $x = \tau/\Delta$ ,  $\tau$ —разность между истинным  $\tau_0$  и оценочным  $\hat{\tau}$  значениями задержки сигнала,  $\Delta$ —длительность одного элемента видеопоследовательности;  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  ( $p \equiv \frac{d}{dt}$ )—коэффициенты передачи фильтров нижних частот в цепи ФАП и ССЗ соответственно;  $k_1$  и  $k_2$ —параметры, характеризующие усиление в цепи ФАП и ССЗ;  $R(x)$ —автокорреляционная функция видеопоследовательности;  $D(x)$ —дискриминационная характеристика ССЗ ( $D(x)$  нормирована так, что ее максимальное значение равно единице).

Исследование динамики совместной системы ФАП и ССЗ при наличии фильтров нижних частот в цепях управления является сложным в силу высокого порядка системы дифференциальных уравнений, соответствующих (1), и наличия четырех нелинейных зависимостей от координат. Как известно [1-3], типы фильтров нижних частот в цепях ФАП и ССЗ определяются характером априорных данных о законах изменения параметров принимаемого сигнала, подлежащих определению. В случае, когда случайные колебания фазы и задержки сигнала являются процессами с независимыми приращениями [4], оптимальной является бесфильтровая ( $F_1(p) = F_2(p) = 1$ ) совместная система ФАП и ССЗ [1, 3].

Изучение динамики такой системы проведено в [5] с помощью качественного исследования нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка, соответствующей (1). Исследование проводилось на одном периоде характеристик  $R(x)$  и  $D(x)$ , т. е. периодичность  $R(x)$  и  $D(x)$  по  $x$  не учитывалась. Такое рассмотрение справедливо в случае, когда период псевдошумового сигнала является достаточно большим ( $\mu = 1/M \ll 1$ , где  $M$  — число элементов видеопоследовательности) и требуется обеспечить вхождение в синхронизм на первом периоде характеристик  $R(x)$  и  $D(x)$  [6]. В случае, когда период псевдошумового сигнала является конечной величиной (т. е. когда  $\mu$  не мало), необходимо учитывать периодичность характеристик  $R(x)$  и  $D(x)$ . Для изучения свойств бесфильтровой ( $F_1(p) = F_2(p) = 1$ ) совместной системы синхронизации, связанных с периодичностью характеристик  $R(x)$  и  $D(x)$ , в настоящей работе уравнения (1) исследуются при замене характеристик  $R(x)$  и  $D(x)$  гладкими периодическими функциями  $R(x) = \cos x$ ,  $D(x) = \sin x$ :

$$\begin{aligned} p\varphi + k_1 \cos x \sin \varphi &= p\varphi_0, \\ px + k_2 \sin x \cos \varphi &= px_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Такая замена в уравнениях (1) соответствует замене в совместной системе синхронизации кольца слежения за задержкой кольцом ФАП, следящим за фазой модулирующего сигнала; т. е. уравнения (2) описывают динамику бесфильтровой двухпетлевой системы ФАП с перекрестными связями [7], изучение которой представляет самостоятельный интерес. Исследование уравнений (2), проводимое в настоящей работе, позволяет сделать и некоторые качественные выводы о влиянии периодичности характеристик  $R(x)$  и  $D(x)$  на динамику совместной системы ФАП и ССЗ.

Для исследования применяются методы качественной теории дифференциальных уравнений, являющиеся здесь наиболее адекватными и общими, благодаря которым устанавливаются возможные режимы работы рассматриваемой системы и переходные процессы.

После введения безразмерного времени  $t' = k_1 t$ , параметров  $\gamma = p\varphi_0/k_1$ ,  $\beta = px_0/k_1$ ,  $b = k_2/k_1$  вместо уравнений (1) получим систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt'} &= \gamma - \cos x \sin \varphi = P(\varphi, x), \\ \frac{dx}{dt'} &= \beta - b \sin x \cos \varphi = Q(\varphi, x), \end{aligned} \quad (3)$$

интегральные кривые которой определяются уравнением

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\beta - b \sin x \cos \varphi}{\gamma - \cos x \sin \varphi}. \quad (4)$$

Правые части системы (3) являются  $2\pi$ -периодическими функциями  $\varphi, x$ , следовательно, фазовым пространством рассматриваемой системы является поверхность тора с осью  $\varphi$  на меридиане тора и осью  $x$  на его параллели. Поверхность тора будем рассматривать развернутой на плоскость.

Входящий в систему (3) параметр  $b$  по физическому смыслу является положительным. В силу того, что уравнение (4) не изменяется при замене переменных  $\varphi$  на  $x$ ,  $x$  на  $\varphi$  и параметров  $b$  на  $1/b$ ,  $\beta$  на  $\gamma/b$ ,  $\gamma$  на  $\beta/b$ , достаточно рассмотреть значения параметра  $b$  в интервале  $0 \leq b \leq 1$ . Что касается параметров  $\gamma, \beta$ , то достаточно рассмотреть только их положительные значения, так как случай  $\gamma < 0, \beta < 0$  сводится к случаю  $\gamma > 0, \beta > 0$  заменой  $\varphi, x$  на  $-\varphi, -x$ .

Качественную структуру разбиения фазовой плоскости на траектории определяют [8, 9] особые траектории: состояния равновесия, сепаратрисы седел и предельные циклы. Что касается предельных циклов, то в отличие от плоскости на тороидальной фазовой поверхности, кроме циклов, охватывающих состояния равновесия (циклов I рода), могут существовать предельные циклы II рода, не охватывающие состояния равновесия, а охватывающие тор в направлении параллели или меридиана. Кроме того [10, 11], на торе могут существовать устойчивые по Пуассону незамкнутые траектории. Качественная структура разбиения на траектории системы (3) в области  $-\pi \leq \varphi \leq \pi, -\pi \leq x \leq \pi$ , в силу приведенных ниже замечаний, может быть получена в результате установления разбиения на траектории ее части  $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq x \leq \pi$ .

*Замечание 1.* Уравнение (4) не изменяется при замене переменных  $\varphi, x$  на  $-\varphi, \pi - x$ . Отсюда следует, что фазовые траектории в квадрате  $-\pi \leq \varphi \leq 0, 0 \leq x \leq \pi$  могут быть получены с помощью зеркального отображения траекторий в квадрате  $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq x \leq \pi$  относительно прямой  $\varphi = 0$ , сдвига полученных траекторий по  $x$  на величину  $-\pi$  и зеркального отображения сдвинутых траекторий относительно прямой  $x = 0$ .

*Замечание 2.* Уравнение (4) не изменяется при замене переменных  $\varphi, x$  на  $\varphi - \pi, x - \pi$ . Отсюда следует, что фазовые траектории в области  $-\pi \leq x \leq 0, -\pi \leq \varphi \leq \pi$  могут быть получены путем сдвига траекторий в прямоугольнике  $0 \leq x \leq \pi, -\pi \leq \varphi \leq \pi$  по  $\varphi$  и по  $x$  на величину  $-\pi$ .

Изучение системы (3) проводится в зависимости от параметра  $b$  отдельно для случаев  $b = 1$  и  $b < 1$ .

2. *Случай 1:  $b = 1$ .* При  $b = 1$  исследование системы (3) достаточно провести для значений  $\beta \leq \gamma$ , так как при значениях  $\beta > \gamma$  система (3) заменой  $\beta$  на  $\gamma, \gamma$  на  $\beta, x$  на  $\varphi, \varphi$  на  $x$  сводится к случаю  $\beta < \gamma$ .

Для значений параметров  $\gamma$  и  $\beta$ , удовлетворяющих неравенству  $\beta < 1 - \gamma$ , система (3) имеет на поверхности тора  $(\varphi, x)$  восемь состояний равновесия:

$$M_1(\varphi_1, x_1), M_2(\pi - \varphi_1, -x_1), M_3(\pi/2 - x_1, \pi/2 - \varphi_1), \\ M_4(\pi/2 + x_1, -\pi/2 + \varphi_1), M'_1(-\pi + \varphi_1, -\pi + x_1), \quad (5)$$

$$M'_2(-\varphi_1, \pi - x_1), M'_3(-\pi/2 - x_1, -\pi/2 - \varphi_1), M'_4(-\pi/2 + x_1, \pi/2 + \varphi_1).$$

Координаты  $\varphi_1$  и  $x_1$  определяются равенствами

$$\varphi_1 = 1/2 [\arcsin(\gamma + \beta) + \arcsin(\gamma - \beta)], \\ x_1 = 1/2 [\arcsin(\gamma + \beta) - \arcsin(\gamma - \beta)]. \quad (6)$$

Состояния равновесия  $M_1$  и  $M'_1$  являются устойчивыми узлами,  $M_2$  и  $M'_2$  — неустойчивыми узлами, состояния равновесия  $M_3, M_4, M'_3, M'_4$  —

—седлами. При  $\beta = 1 - \gamma$  состояния равновесия  $M_1$  и  $M_3$ ,  $M_2$  и  $M_4$ ,  $M'_1$  и  $M'_3$ ,  $M'_2$  и  $M'_4$  сливаются, образуя четыре сложные особые точки типа седло-узел. При  $\beta > 1 - \gamma$  состояний равновесия нет. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что прямые

$$\begin{aligned} x &= \varphi - \arcsin(\gamma - \beta) \pmod{2\pi}, \\ x &= \varphi - \pi + \arcsin(\gamma - \beta) \pmod{2\pi}, \\ x &= -\varphi + \arcsin(\gamma + \beta) \pmod{2\pi}, \\ x &= -\varphi + \pi - \arcsin(\gamma + \beta) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

проходящие через состояния равновесия, удовлетворяют уравнению (4) и, следовательно, являются уравнениями сепаратрис седел. Для значений  $\beta < 1 - \gamma$  расположение фазовых траекторий представлено на рис. 1 а. Для значений  $\beta = 1 - \gamma$  на фазовой поверхности существует

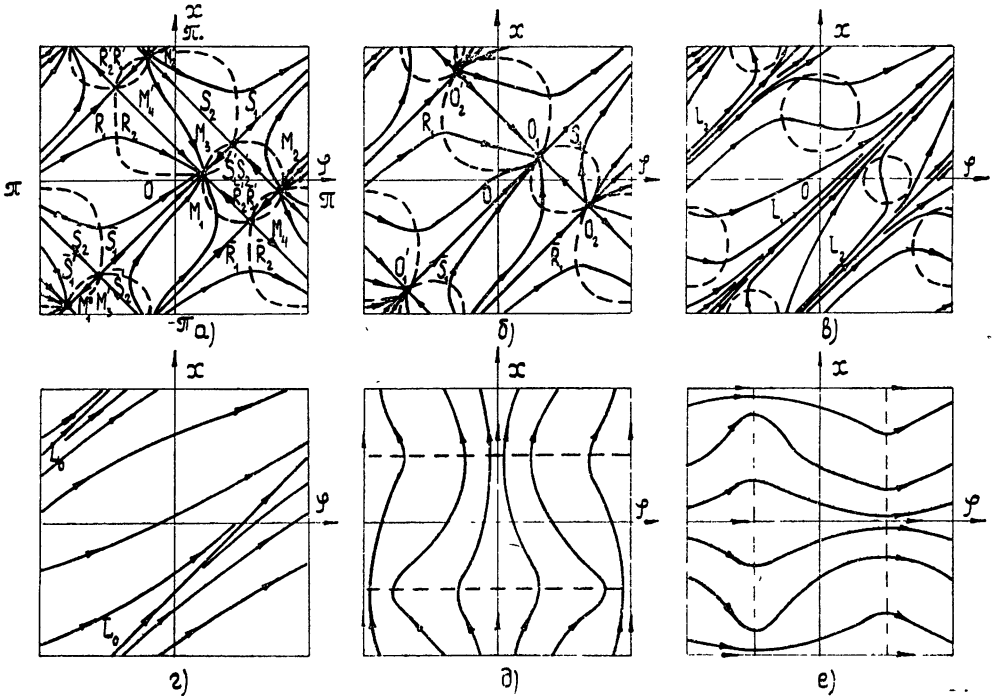


Рис. 1.

четыре седло-узла  $O_1, O'_1, O_2, O'_2$ . Сепаратрисы  $S_1$  и  $\bar{S}_1$  седло-узлов  $O_1$  и  $O'_1$  и сепаратрисы  $R_1$  и  $\bar{R}_1$  седло-узлов  $O_2$  и  $O'_2$  образуют на фазовой поверхности два замкнутых контура, охватывающие тор и в направлении  $\varphi$ , и в направлении  $x$  по одному разу (рис. 1 б). Определяя знаки седловых величин  $\sigma_i = P'_\varphi(\varphi_i, x_i) + Q'_x(\varphi_i, x_i)$  в седло-узлах  $O_1, O'_1, O_2, O'_2$ , устанавливаем, что для седло-узлов  $O_1$  и  $O'_1$  седловые величины отрицательны, а для  $O_2$  и  $O'_2$  — положительны. Отсюда следует [8, 9], что замкнутый контур, составленный из сепаратрис  $S_1$  и  $\bar{S}_1$  седло-узлов  $O_1$  и  $O'_1$ , устойчив; замкнутый контур, составленный из сепаратрис  $R_1$  и  $\bar{R}_1$  седло-узлов  $O_2$  и  $O'_2$ , неустойчив. При переходе от значений параметров, удовлетворяющих неравенству

$\beta < 1 - \gamma$ , к значениям параметров, удовлетворяющих неравенству  $\beta > 1 - \gamma$ , из замкнутого контура, состоящего из сепаратрис  $S_1$  и  $\bar{S}_1$ , появляется устойчивый предельный цикл II рода  $L_1: x = \varphi - \arcsin(\gamma - \beta) \pmod{2\pi}$ , а из замкнутого контура, состоящего из сепаратрис  $R_1$  и  $\bar{R}_1$ , появляется неустойчивый предельный цикл II рода  $L_2: x = \varphi - \pi + \arcsin(\gamma - \beta) \pmod{2\pi}$  (рис. 1 в). Все остальные интегральные кривые являются незамкнутыми. Это следует из того, что прямые  $x = \varphi + C \{ C \neq -\arcsin(\gamma - \beta), -\pi + \arcsin(\gamma - \beta) \}$  являются циклами без контакта для интегральных кривых уравнения (4) при  $b = 1$ . Число вращения  $[^{10, 12}]$  уравнения (3) определяется предельными циклами  $L_1$  и  $L_2$  и равно единице.

При значениях  $\beta = \gamma - 1$  устойчивый  $L_1$  и неустойчивый  $L_2$  циклы сливаются, образуя на торе двойной предельный цикл II рода  $L_0: x = \varphi + \pi/2 \pmod{2\pi}$  (рис. 1 г). Число вращения дифференциального уравнения (4) определяется этим циклом  $L_0$  и равно единице.

При значениях параметров, удовлетворяющих неравенству  $\beta < \gamma - 1$ , двойной предельный цикл  $L_0$  исчезает, и структура разбиения тора на траектории зависит от числа вращения  $[^{10, 12, 13}]$  уравнения (4). Переходя в уравнении (4) к переменным  $u = \varphi - x - \pi/2$ ,  $v = \varphi + x - \pi/2$  и параметрам  $\Delta_1 = \gamma - \beta$ ,  $\Delta_2 = \gamma + \beta$  [7], получим вместо (4) уравнение

$$\frac{du}{dv} = \frac{\Delta_1 - \cos u}{\Delta_2 - \cos v}. \quad (7)$$

Интегрируя уравнение (7) при значениях  $\Delta_1 > 1$ ,  $\Delta_2 > 1$  (т. е. при  $0 < \beta < \gamma - 1$ ), получим

$$u = 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left\{ \frac{\sqrt{\Delta_1^2 - 1}}{\Delta_1 + 1} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{\Delta_1^2 - 1}}{\sqrt{\Delta_2^2 - 1}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{(\Delta_2 + 1) \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{\sqrt{\Delta_2^2 - 1}} + C \right] \right\}, \quad (8)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Число вращения уравнения (7), согласно  $[^{12, 13}]$ , равно

$$\alpha = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \left\{ \frac{\sqrt{\Delta_1^2 - 1}}{\Delta_1 + 1} \operatorname{tg} \left[ \frac{\sqrt{\Delta_1^2 - 1}}{\sqrt{\Delta_2^2 - 1}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{(\Delta_2 + 1) \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{\sqrt{\Delta_2^2 - 1}} + C \right] \right\}}{v} = \frac{\sqrt{\Delta_1^2 - 1}}{\sqrt{\Delta_2^2 - 1}}. \quad (9)$$

Из (9) устанавливаем, что число вращения  $\alpha$  в области  $1 < \Delta_1 < \Delta_2$  ( $0 < \beta < \gamma - 1$ ) неустойчиво. Следовательно, для значений параметров  $\beta < \gamma - 1$  интегральные кривые уравнения (4) будут или все замкнутые, или все незамкнутые в зависимости от рациональности или иррациональности числа вращения.

Таким образом, в результате исследования системы (3) при  $b = 1$  установлено, что пространство параметров  $(\gamma, \beta)$  системы разделяется прямыми  $\beta = 1 - \gamma$ ,  $\beta = \gamma - 1$ ,  $\beta = \gamma + 1$  на области  $G_1, G_2, G_3, G_4$  (рис. 2). Для точек области  $G_1$  система (3) имеет на тороидальной фазовой поверхности восемь состояний равновесия и не имеет предельных циклов. Для точек области  $G_2$  состояний равновесия нет, существует два предельных цикла II рода, устойчивый и неустойчивый; остальные интегральные кривые незамкнутые. Для точек областей  $G_3$  и  $G_4$  система (3) не имеет состояний равновесия; для расположения интегральных кривых в зависимости от числа вращения осуществляются возможности,

указанные выше. Для точек прямой  $\beta = 1 - \gamma$  система (3) имеет бифуркацию, связанную со слиянием состояний равновесия; для точек прямых  $\beta = \gamma - 1$  и  $\beta = \gamma + 1$  система имеет бифуркацию, связанную с образованием двойного предельного цикла. Для точек прямой  $\gamma = 0, \beta > 1$  все фазовые траектории являются замкнутыми, охватывающими тор в направлении  $x$  (рис. 1 д); для точек прямой  $\beta = 0, \gamma > 1$  все фазовые траектории являются замкнутыми, охватывающими тор в направлении  $\varphi$  (рис. 1 е).

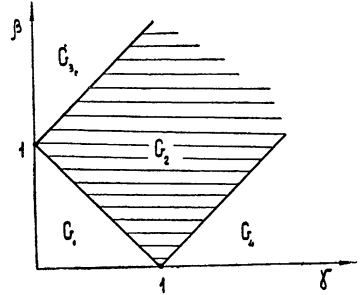


Рис. 2.

*Случай 2:*  $0 \leq b < 1$ . Исследование системы (3) проведем отдельно для значений параметра  $\beta = 0$  и  $\beta > 0$ .

А)  $\beta = 0$ . Фазовые траектории системы (3) зеркально симметричны относительно оси  $x = 0$  и прямых  $\varphi = \pm \pi/2$ . Уравнение интегральных кривых имеет вид

$$b \sin \varphi (\sin x)^{-1/b} + \gamma \int (\sin x)^{-(1+b)/b} dx = C.$$

Главными изоклинами уравнения (4) являются: изоклинами горизонтальных наклонов—интегральные прямые  $x = 0, x = \pm \pi$  и прямые  $\varphi = \pm \pi/2$ ; изоклиной вертикальных наклонов—кривая  $\gamma - \cos x \sin \varphi = 0$ . При  $\gamma < 1$  система (3) имеет на торе восемь состояний равновесия (5); здесь значения  $\varphi_1$  и  $x_1$  определяются равенствами  $\varphi_1 = \arcsin \gamma, x_1 = 0$ . Состояния равновесия  $M_1$  и  $M'_1$  есть устойчивые узлы,  $M_2$  и  $M'_2$ —неустойчивые узлы,  $M_3, M_4, M'_3, M'_4$ —седла, критические направления сепаратрис в которых равны  $k_{1,2} = \pm \sqrt{b}$ . При  $\gamma = 1$  четыре состояния равновесия  $M_1, M_2, M_3, M_4$ , а также  $M'_1, M'_2, M'_3, M'_4$  сливаются, образуя соответственно две сложные особые точки; при  $\gamma > 1$  состояний равновесия нет.

Определим возможное расположение сепаратрис седел в прямоугольнике  $-\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq x \leq \pi$ . Зафиксируем параметр  $\gamma$  ( $\gamma < 1$ ) и будем изменять параметр  $b$  в интервале  $0 \leq b \leq 1$ .

Исследуя поворот векторного поля уравнения (4) при возрастании параметра  $b$  ( $b_2 > b_1$ ), устанавливаем, что поворот поля происходит по часовой стрелке в области фазовой поверхности, определенной неравенствами  $\gamma - \cos x \sin \varphi > 0, -\pi/2 < \varphi < \pi/2$ ;  $\gamma - \cos x \sin \varphi < 0, \varphi > \pi/2, \varphi < -\pi/2$ , и против часовой стрелки в областях, определенных неравенствами  $\gamma - \cos x \sin \varphi > 0, -\pi < \varphi < -\pi/2, \pi/2 < \varphi < \pi$ ;  $\gamma - \cos x \sin \varphi < 0, \varphi < \pi/2, \varphi > -\pi/2$ .

При  $b = 0$  прямые  $x = C$  являются решениями уравнения (4); все точки кривой  $\gamma - \cos x \sin \varphi = 0$  являются состояниями равновесия (рис. 3 а). Учитывая установленный выше характер состояний равновесия при  $0 < b < 1$ , расположение интегральных кривых при  $b = 0$  и принимая во внимание свойство векторного поля с возрастанием параметра  $b$  от  $b = 0$  и изменение критических направлений сепаратрис седел, устанавливаем расположение сепаратрис седел при значениях  $b \neq 0$ , но достаточно малых (рис. 3 б). Сепаратриса  $S'_{10}$ , выходящая из седла  $M_3$  с положительным наклоном, близким к нулю, при возрастании времени  $t'$  стремится к устойчивому узлу  $M_1$ ; сепаратриса  $S'_{20}$  при  $t' \rightarrow -\infty$  выходит из неустойчивого узла  $M_2$  и при  $t' \rightarrow +\infty$  входит в седло  $M_3$ , имея наклон, близкий к нулю; сепаратрисы  $S_{10}$  и  $S_{20}$  образуют петлю, охватывающую тор в направлении  $\varphi$ . Рассматривая



векторное поле уравнения (4) на кривой  $\gamma - \cos x \sin \varphi = 0$  и прямых  $M_1M_3$  ( $x = \varphi - \arcsin \gamma$  при  $\arcsin \gamma \leq \varphi \leq \pi/2$ ),  $M_2M_3$  ( $x = -\varphi + \pi - \arcsin \gamma$  при  $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi - \arcsin \gamma$ ), устанавливаем, что при значениях  $b < 1$  сепаратриса  $S'_{10}$  располагается в области, ограниченной частью  $M_1M_3$  кривой  $\gamma - \cos x \sin \varphi = 0$  и прямой  $M_1M_3$ , а сепаратриса  $S'_{20}$  — в области, ограниченной частью  $M_3M_2$  кривой  $\gamma - \cos x \sin \varphi = 0$  и

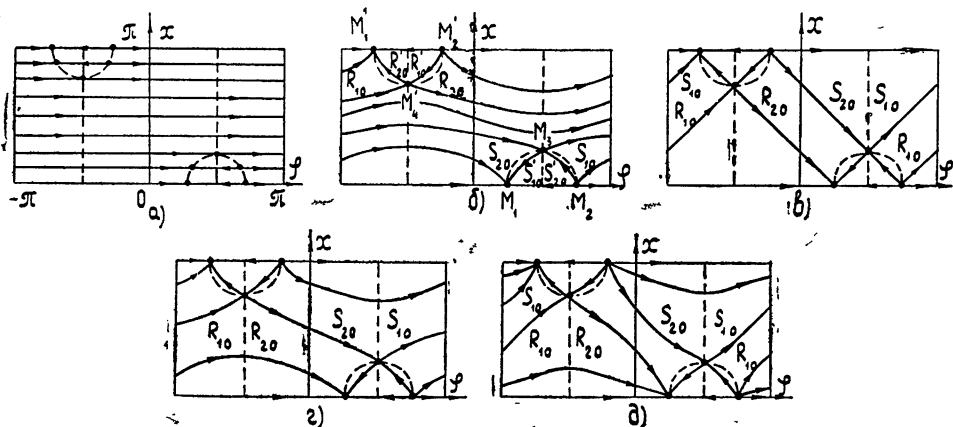


Рис. 3.

прямой  $M_2M_3$ . Исходя из расположения сепаратрис седла  $M_3$ , пользуясь замечанием 2, устанавливаем при  $0 < b < 1$  расположение сепаратрис  $R'_{10}$  и  $R'_{20}$  седла  $M'_4$ . Сепаратриса  $R'_{10}$  при  $t' \rightarrow -\infty$  выходит из неустойчивого узла  $M'_2$ , располагаясь в области, ограниченной частью  $M'_2M'_4$  кривой  $\gamma - \cos x \sin \varphi = 0$  и прямой  $M'_2M'_4$  ( $x = \varphi + \pi + \arcsin \gamma$  при  $-\pi/2 \leq \varphi \leq -\arcsin \gamma$ ), сепаратриса  $R'_{20}$  с ростом времени  $t'$  приближается к устойчивому узлу  $M'_1$ , находясь в области, ограниченной частью  $M'_1M'_4$  кривой  $\gamma - \cos x \sin \varphi = 0$  и прямой  $M'_1M'_4$  ( $x = -\varphi + \arcsin \gamma$  при  $-\pi + \arcsin \gamma \leq \varphi \leq \pi/2$ ). При значениях  $b \neq 0$ , но достаточно малых, сепаратрисы  $R_{10}$  и  $R_{20}$  образуют петлю, охватывающую тор в направлении  $\varphi$ . Все траектории, проходящие в области, ограниченной сепаратрисами  $S_{10}, S_{20}, R_{10}, R_{20}$ , являются замкнутыми на торе в направлении  $\varphi$  (рис. 3 б).

При  $b = 1$ , как установлено выше, сепаратрисы  $S_{10}$  и  $S'_{10}$  совпадают с прямой  $M_1M_3$   $M'_1$ , сепаратрисы  $S_{20}$  и  $S'_{20}$  — с прямой  $M_2M_3$   $M'_2$ , сепаратрисы  $R_{10}$  и  $R'_{10}$  совпадают с прямой  $M'_2M'_4$   $M_2$ , сепаратрисы  $R_{20}$  и  $R'_{20}$  — с прямой  $M'_1M'_4$   $M_1$  (рис. 3 в). Таким образом, при  $b \neq 0$ , но достаточно малых, сепаратриса  $S_{10}$  ( $S_{20}$ ) седла  $M_3$  пересекает прямую  $\varphi = \pm \pi$  ( $\varphi = 0$ ) ниже, чем сепаратриса  $R_{10}$  ( $R_{20}$ ) седла  $M'_4$  (рис. 3 б), а при  $b = 1$  сепаратриса  $S_{10}$  ( $S_{20}$ ) пересекает прямую  $\varphi = \pm \pi$  ( $\varphi = 0$ ) выше, чем сепаратриса  $R_{10}$  ( $R_{20}$ ) (рис. 3 в). Пользуясь свойством поворота векторного поля системы (3) с ростом  $b$ , устанавливаем, что при непрерывном увеличении параметра  $b$  от  $b = 0$  до  $b = 1$  система (3) обязательно и притом единственный раз проходит через бифуркационное значение  $0 < b = b^* < 1$ , при котором сепаратрисы  $S_{10}$  и  $R_{10}$ ,  $S_{20}$  и  $R_{20}$  совпадают, образуя петлю, охватывающую тор в направлении  $\varphi$  (рис. 3 г). Бифуркационное значение параметра  $b = b^*$  определено приближенно с помощью построения численными методами на ЭВМ сепаратрис близких грубых систем [14, 15]. Бифурка-

ционная кривая  $\gamma = \gamma^*(b)$  представлена на рис. 4\*. Расположение фазовых траекторий для значений  $\gamma > \gamma^*(b)$  и  $\gamma < \gamma^*(b)$  представлено на рис. 3 б, д. При  $\gamma > 1$  все траектории являются замкнутыми, охватывающими тор в направлении  $\varphi$  (рис. 1 е).

Б)  $\beta > 0$ . Состояния равновесия. Пересечения кривых

$$\beta - b \sin x \cos \varphi = 0, \quad \gamma - \cos x \sin \varphi = 0, \quad (10)$$

являющихся соответственно изоклинами горизонтальных и вертикальных наклонов системы (3), определяют на торе при значениях  $\beta < b(1 - \gamma)$  восемь состояний равновесия (5). Здесь  $\varphi_1$  и  $x_1$  определяются равенствами

$$\varphi_1 = 1/2 [\arcsin(\gamma + \beta/b) + \arcsin(\gamma - \beta/b)], \quad (11)$$

$$x_1 = 1/2 [\arcsin(\gamma + \beta/b) - \arcsin(\gamma - \beta/b)].$$

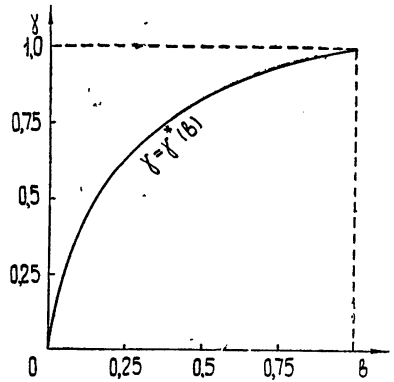


Рис. 4.

Состояния равновесия  $M_1$  и  $M'_4$  — устойчивые узлы,  $M_2$  и  $M'_2$  — неустойчивые узлы, остальные состояния равновесия являются седлами. При  $\beta = b(1 - \gamma)$  от слияния состояний равновесия  $M_1$  и  $M_3$ ,  $M_2$  и  $M_4$ ,  $M'_1$  и  $M'_3$ ,  $M'_2$  и  $M'_4$  образуются четыре сложных состояния равновесия типа седло-узел. При  $\beta > b(1 - \gamma)$  состояний равновесия нет.

Сепаратрисы седел и их бифуркации. Направления  $k_{1,2}$  касательных к сепаратрисам в седлах ( $\varphi_i, x_i$ ) определяются равенствами

$$k_{1,2} = \frac{1 - b}{2} \operatorname{ctg} \varphi_i \operatorname{ctg} x_i \pm \sqrt{\frac{(1 - b)^2}{4} \operatorname{ctg}^2 \varphi_i \operatorname{ctg}^2 x_i + b}. \quad (12)$$

С ростом параметра  $\beta$  (остальные параметры фиксированы) касательные к сепаратрисам в седлах при  $b < 1$  поворачиваются против часовой стрелки. Изменение направления векторного поля уравнения (4) с увеличением параметра ( $\beta_2 > \beta_1$ ) определяется знаком выражения

$$R = \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)_{\beta=\beta_1} - \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)_{\beta=\beta_2} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\gamma - \cos x \sin \varphi}. \quad (13)$$

В области фазовой поверхности, определенной неравенством  $\gamma - \cos x \sin \varphi > 0$ , поворот векторного поля с ростом  $\beta$  происходит против часовой стрелки ( $R > 0$ ), в области, определенной неравенством  $\gamma - \cos x \sin \varphi < 0$ , — по часовой стрелке ( $R < 0$ ).

Расположение сепаратрис седел системы (3) при  $\beta > 0$  устанавливаем, пользуясь полученными сведениями о характере расположения интегральных кривых при  $\beta = 0$ , свойствами (12) и (13) векторного поля и характером расположения главных изоклин. При возрастании параметра  $\beta$  седла  $M_3(\varphi_3, x_3)$  и  $M'_4(\varphi'_4, x'_4)$  смещаются так, что их координаты удовлетворяют неравенствам  $\varphi_3 < \pi/2$ ,  $x_3 < \arcsin \cos \gamma$ ;  $\varphi'_4 > -\pi/2$ ,  $x'_4 > \pi - \arcsin \cos \gamma$ . Выясним расположение сепаратрис седел  $M_3$  и  $M'_4$  отдельно в случаях  $\gamma > \gamma^*(b)$  и  $\gamma < \gamma^*(b)$  ( $\gamma = \gamma^*(b)$  определено выше (рис. 4)).

а)  $\gamma > \gamma^*(b)$ . Сепаратриса  $S'_1$  седла  $M_3$  с ростом времени  $t'$  при-

\* Здесь и далее счет по приближенному построению сепаратрис спрограммирован и проведен К. Г. Кивелевой на ЭВМ БЭСМ-3М.

ближается к устойчивому узлу  $M_1$ , не выходя за пределы области, ограниченной частями  $M_1M_3$  главных изоклин (10) (рис. 5 а). Сепаратриса  $S_2$  седла  $M_3$  при  $t' \rightarrow -\infty$  выходит из неустойчивого узла  $M_2$ ,

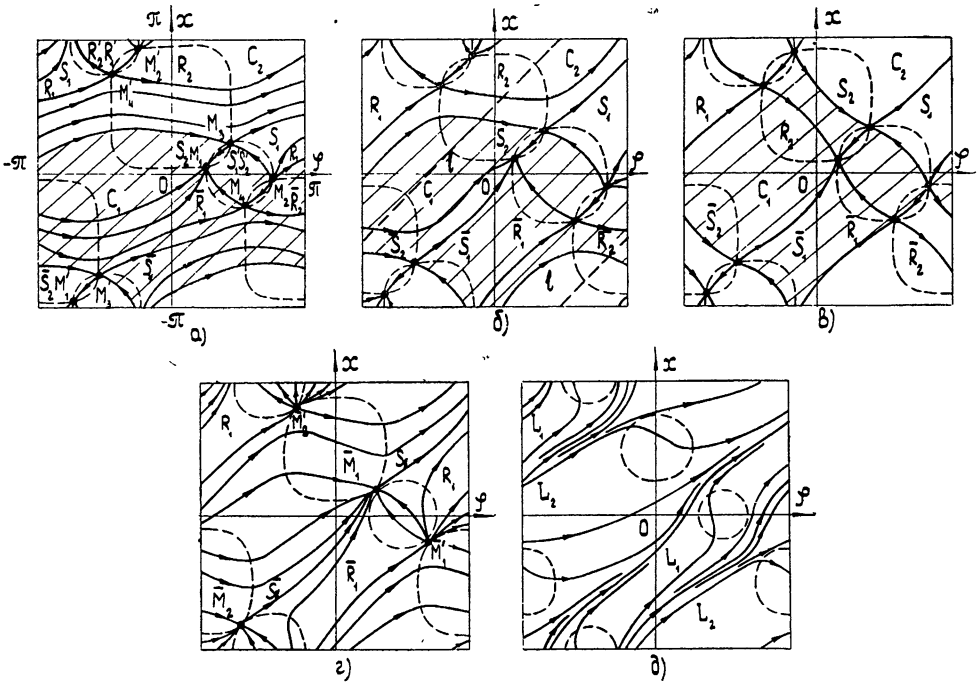


Рис. 5.

располагаясь целиком в области, ограниченной частью  $M_2M_3$  кривой  $\gamma - \cos x \sin \varphi = 0$  и прямой  $M_2M_3$ . Сепаратриса  $R_1'$  седла  $M_4'$  при  $t' \rightarrow -\infty$  выходит из неустойчивого узла  $M_2'$ , оставаясь в области, ограниченной частями  $M_2'M_4'$  главных изоклин (10). Сепаратриса  $R_2'$  при возрастании  $t'$  приближается к устойчивому узлу  $M_1'$ , не выходя за пределы области, ограниченной частью  $M_1'M_4'$  кривой  $\gamma - \cos x \sin \varphi = 0$  и прямой  $M_1'M_4'$ . Сепаратриса  $S_2$  седла  $M_3$  проходит ниже сепаратрисы  $S_{20}$  седла  $M_3$  при  $\beta = 0$ , а сепаратриса  $R_2$  седла  $M_4'$  проходит выше сепаратрисы  $R_{20}$  седла  $M_4'$  при  $\beta = 0$ .

Рассматривая вспомогательную прямую  $l: x = \varphi + \pi/2 \pmod{2\pi}$  и находя на ней знак разности направлений, определяемых уравнением (4), и наклона этой прямой, устанавливаем, что сепаратриса  $S_2$  при убывании  $t'$  после пересечения с изоклиной горизонтальных наклонов проходит выше прямой  $l$  и при  $t' \rightarrow +\infty$  выходит из неустойчивого узла  $M_2$ . Учитывая расположение сепаратрисы  $S_2$  седла  $M_3$ , заключаем на основании замечания 1, что сепаратриса  $R_2$  седла  $M_4'$  при возрастании времени  $t'$  после пересечения с изоклиной горизонтальных касательных проходит ниже прямой  $l$  и при  $t' \rightarrow \infty$  стремится к устойчивому узлу  $M_1'$  (рис. 5 б).

Для сепаратрис  $S_1$  и  $R_1$  седел  $M_3$  и  $M_4'$  осуществляется одна из следующих возможностей: 1) сепаратриса  $S_1(R_1)$  при возрастании (убывании) времени  $t'$  приближается к устойчивому состоянию равновесия  $M_1'$  (выходит из неустойчивого состояния равновесия  $M_2$ ); 2) сепаратриса  $S_1$  совпадает с сепаратрисой  $R_1$ , охватывая тор

один или большее число раз в направлении  $\varphi$ ; 3) сепаратриса  $S_1$  совпадает с сепаратрисой  $R_1$ , не охватывая тор (из замечания 1 следует, что в этом случае сепаратрисы  $S_1$  и  $R_1$  пересекают линию  $\varphi = \pm \pi$  при  $x = \pi/2$ ). На рис. 5 а представлено расположение сепаратрис  $S_1$  и  $R_1$ , соответствующее возможности 1).

С помощью численных методов, исходя из приближенного построения особых траекторий близких грубых систем на ЭВМ [14, 15], определены значения параметров системы, близкие к бифуркационным значениям, соответствующим возможности 3) расположения сепаратрис  $S_1$  и  $R_1$  седла  $M_3$  и  $M_4'$ . Бифуркационные кривые  $\beta = \beta^*(\gamma, b)$  представлены на рис. 6 в параметрах  $\gamma, \beta/b$  при различных фиксированных значениях параметра  $b$ . Другие возможные при  $\beta < \beta^*(\gamma, b)$  бифуркационные кривые, соответствующие возможности 2) расположения сепаратрис  $S_1$  и  $R_1$ , здесь не приводятся. Разбиение на траектории поверхности тора для  $\beta < \beta^*(\gamma, b)$  и  $\beta > \beta^*(\gamma, b)$  изображено на рис. 5 а, б соответственно.

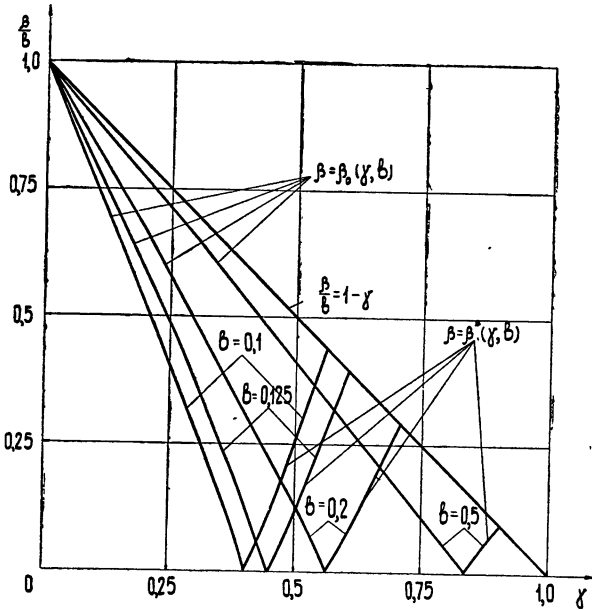


Рис. 6.

б)  $\gamma < \gamma^*(b)$ . Характер расположения сепаратрис  $S_1', S_2', R_1', R_2'$  седла  $M_3$  и  $M_4'$  таков же, как и при  $\gamma > \gamma^*(b)$ . Сепаратриса  $S_1$  седла  $M_3$  проходит выше сепаратрисы  $S_{10}$  седла  $M_3$  при  $\beta = 0$ ; при возрастании времени  $t'$  сепаратриса  $S_1$  стремится к устойчивому узлу  $M_1'$  (рис. 5 в). Сепаратриса  $R_1$  седла  $M_4'$  проходит ниже сепаратрисы  $R_{10}$  седла  $M_4'$  при  $\beta = 0$  и при  $t' \rightarrow -\infty$  выходит из неустойчивого узла  $M_2$  (рис. 5 в). Взаимное расположение сепаратрис  $S_2$  и  $R_2$  седла  $M_3$  и  $M_4'$  в зависимости от параметров устанавливается численными методами с помощью приближенного построения сепаратрис на ЭВМ. Для фиксированных значений параметров  $b = b_0, \gamma = \gamma_0 < \gamma^*(b)$  устанавливается существование значения параметра  $\beta = \beta_1$ , при котором сепаратриса  $S_2$  пересекает прямую  $\varphi = 0$  выше, чем сепаратриса  $R_2$  (рис. 5 в), и значения параметра  $\beta = \beta_2$ , при котором сепаратриса  $S_2$  пересекает прямую  $\varphi = 0$  ниже, чем сепаратриса  $R_2$  (рис. 5 б). Пользуясь свойством (13) векторного поля уравнения (4) с изменением параметра  $\beta$ , устанавливаем, что при переходе от значения  $\beta = \beta_1$  к зна-

чению  $\beta = \beta_2$  при значениях параметров  $b = b_0$  и  $\gamma = \gamma_0 < \gamma^*(b)$  существует значение  $\beta = \beta_0$ , при котором сепаратрисы  $S_2$  и  $R_2$  седел  $M_3$  и  $M'_4$  совпадают. Бифуркационные значения параметра  $\beta = \beta_0(\gamma, b)$  определялись, как и выше, численными методами на ЭВМ. Полученные бифуркационные кривые, соответствующие совпадению сепаратрис  $S_2$  и  $R_2$  седел  $M_3$  и  $M'_4$ , представлены на рис. 6 в координатах  $\gamma, \beta/b$  при различных фиксированных значениях параметра  $b$ .

В силу замечания 2 при значениях параметров  $\beta = \beta^*(\gamma, b)$  и  $\beta = \beta_0(\gamma, b)$  сепаратрисы  $\bar{S}_1$  и  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{S}_2$  и  $\bar{R}_2$  седел  $M'_3$  и  $M_4$  совпадают. Таким образом, для этих значений параметров система (3) является негрубой, степени выше первой [9, 11], сепаратрисы седел идут из одного седла в другое седло.

Расположение фазовых траекторий для значений параметра  $b < 1$  при  $\beta < \beta_0(\gamma, b)$  и  $\beta > \beta_0(\gamma, b)$  представлено на рис. 5в и б соответственно.

Для значений  $\beta = b(1 - \gamma)$  на фазовой поверхности существует два замкнутых контура, охватывающих тор как в направлении  $\varphi$ , так и в направлении  $x$ : контур  $L_1$ , составленный из сепаратрис  $S_1$  и  $\bar{S}_1$  седло-узлов  $\bar{M}_1(\bar{\varphi}_1, \bar{x}_1)$ ,  $\bar{M}_2(-\pi + \bar{\varphi}_1, -\pi + \bar{x}_1)$  и  $L_2$ , составленный из сепаратрис  $R_1$  и  $\bar{R}_1$  седло-узлов  $\bar{M}'_1(\pi - \bar{\varphi}_1, -\bar{x}_1)$  и  $\bar{M}'_2(-\bar{\varphi}_1, \pi - \bar{x}_1)$  ( $\bar{\varphi}_1 = 1/2 \arccos(2\beta/b - 1)$ ,  $\bar{x}_1 = 1/2 \arccos(1 - 2\beta/b)$ ) (рис. 5г). Определяя знаки седловых величин в седло-узлах  $\bar{M}_1, \bar{M}'_1, \bar{M}_2, \bar{M}'_2$ , устанавливаем, что замкнутый контур  $L_1$  является устойчивым, а  $L_2$  — неустойчивым. Следовательно, [9] при переходе от значений  $\beta < b(1 - \gamma)$  к значениям  $\beta > b(1 - \gamma)$  состояния равновесия исчезают, и из контура  $L_1$  рождается устойчивый предельный цикл II рода, а из контура  $L_2$  — неустойчивый предельный цикл II рода (рис. 5д). Циклы  $\tilde{L}_1$  и  $\tilde{L}_2$  определяют число вращения [10, 12]  $\alpha$  уравнения (4). Изучение поведения предельных циклов  $\tilde{L}_1$  и  $\tilde{L}_2$  в зависимости от параметров, а также оценки бифуркационных поверхностей  $\beta = \tilde{\beta}_1(\gamma, b)$  и  $\beta = \tilde{\beta}_2(\gamma, b)$ , для точек которых устойчивый  $\tilde{L}_1$  и неустойчивый  $\tilde{L}_2$  циклы сливаются, образуя полуустойчивый предельный цикл II рода, могут быть проведены с помощью численных методов на ЭВМ. Сечения  $b = 1$  этих поверхностей (см. п. 2, случай 1) представляют собой прямые  $\beta = \gamma - 1$  и  $\beta = \gamma + 1$  (рис. 2). Поскольку область значений параметров  $\beta > b(1 - \gamma)$  в силу отсутствия для нее состояний равновесия системы (3) не является рабочей, детальное расположение бифуркационных поверхностей  $\beta = \tilde{\beta}_1(\gamma, b)$  и  $\beta = \tilde{\beta}_2(\gamma, b)$ , а также поведение траекторий в областях  $0 < \beta < \tilde{\beta}_1(\gamma, b)$  и  $\beta > \tilde{\beta}_2(\gamma, b)$ , зависящее от числа вращения уравнения (4), в настоящей работе не устанавливается.

Область  $0 < \beta < b(1 - \gamma)$  пространства параметров  $\gamma, b, \beta$ , для точек которой существуют состояния равновесия системы (2), является практически наиболее интересной. Эта область для значений  $b < 1$  разделяется поверхностью  $\beta = b(1 - \gamma)$ , соответствующей бифуркации состояний равновесия, и поверхностями  $\beta = \beta^*(\gamma, b)$  и  $\beta = \beta_0(\gamma, b)$ , соответствующими бифуркациям сепаратрис седел системы (3), на области  $E_1, E_2, E_3$  с различными структурами разбиения поверхности тора на траектории (рис. 7). Область  $E_1$  заключена между плоскостями  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$  и поверхностью  $\beta = \beta_0(\gamma, b)$ ; разбиение на траектории для точек этой области приведено на рис. 5в. Область  $E_2$  ограничена

частью поверхности  $\beta = b(1 - \gamma)$  и поверхностями  $\beta = \beta^*(\gamma, b)$  и  $\beta = \beta_0(\gamma, b)$ , соответствующий ей фазовый портрет представлен на рис. 5 б. Область  $E_3$  ограничена частью поверхности  $\beta = b(1 - \gamma)$ , частью плоскости  $\beta = 0$  и поверхностью  $\beta = \beta^*(\gamma, b)$ ; одно из возможных разбиений тора на траектории для точек этой области приведено на рис. 5 а. Для точек всех этих областей  $E_1, E_2, E_3$  система (3) имеет восемь состояний равновесия и не имеет предельных циклов; в зависимости от начальных условий траектории стремятся к устойчивым состояниям равновесия  $M_1(\varphi_1, x_1)$  или  $M'_1(-\pi + \varphi_1, -\pi + x_1)$ . Выбор значений параметров, принадлежащих той или иной из областей  $E_1, E_2, E_3$  осуществляется в зависимости от реализуемых начальных условий по  $\varphi$  и  $x$ .

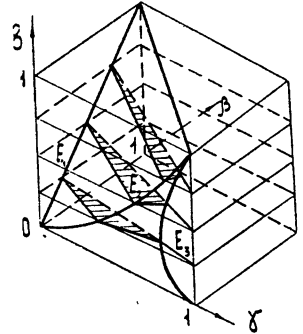


Рис. 7.

3. Проведенное качественное исследование системы уравнений (3) позволяет сделать выводы о возможных режимах работы двухпетлевой системы ФАП, описываемой уравнениями (2), и о влиянии периодичности характеристик  $R(x)$  и  $D(x)$  на динамику совместной системы ФАП и ССЗ.

1) Стационарные режимы синхронизма изучаемых систем определяются устойчивыми состояниями равновесия системы (3). При значениях параметров, удовлетворяющих неравенству  $\beta < b(1 - \gamma)$ , всегда существуют два устойчивых состояния равновесия  $M_1(\varphi_1, x_1)$  и  $M'_1(-\pi + \varphi_1, -\pi + x_1)$  системы (3) с координатами, удовлетворяющими уравнениям (11), т. е. в рассматриваемых системах в отличие от [5] при  $\beta < b(1 - \gamma)$  всегда существует два различных стационарных режима синхронизма (аналогично [9] назовем их режим I и режим II). Эта неоднозначность стационарных режимов приводит к неоднозначности в определении параметров  $\varphi_0$  и  $x_0$  принимаемого сигнала. При значениях  $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$  и в режиме синхронизма I, и в режиме II всегда есть остаточные значения  $\varphi$  и  $x$  ( $\varphi_{\text{ост}} = \varphi_1, x_{\text{ост}} = x_1$  в режиме I;  $\varphi_{\text{ост}} = -\pi + \varphi_1, x_{\text{ост}} = -\pi + x_1$  в режиме II). Наименьшие остаточные значения  $\varphi$  и  $x$  обеспечиваются при работе системы в режиме синхронизма I, следовательно, в этом режиме обеспечивается наибольшая точность в определении параметров  $\varphi_0$  и  $x_0$  принимаемого сигнала. При увеличении параметра  $b$  остаточные значения  $\varphi$  и  $x$  уменьшаются, что приводит к возрастанию точности в определении параметров сигнала.

При значениях параметров, удовлетворяющих неравенству  $\beta > b(1 - \gamma)$ , система (3) не имеет состояний равновесия; определение параметров принимаемого сигнала в совместной системе невозможно. Существование при этих значениях параметров устойчивого предельного цикла II рода свидетельствует о возможности в системе стационарного режима биений II рода, при котором разность фаз  $\varphi$  и разность задержек  $x$  неограниченно нарастают во времени.

2) Переходные процессы к состоянию синхронизма определяются на фазовой поверхности системы (3) траекториями, расположенными в областях притяжения соответствующего устойчивого состояния равновесия системы (3) (областях  $S_1$  и  $S_2$  на рис. 5 а, б, в). Границами этих областей являются сепаратрисы седел  $M_3, M_4, M'_3, M'_4$  системы (3). Взаимное расположение сепаратрис седел определяет области начальных значений, начиная с которых в системе устанавливается

режим синхронизма I или режим синхронизма II. Бифуркации сепаратрис седел приводят к изменению формы областей притяжения устойчивых состояний равновесия  $M_1$  и  $M'_1$  (областей  $C_1$  и  $C_2$  на рис. 5 а, б, в).

3) Из сопоставления результатов, полученных в настоящей работе при исследовании уравнений (2), и результатов, полученных в [5] при исследовании уравнений бесфильтровой совместной системы ФАП и ССЗ в случае непериодических характеристик  $R(x)$  и  $D(x)$ , становится ясно, что области невыхода в синхронизм, установленные в системе [5], не будут существовать в системе ФАП и ССЗ и в случае периодических с периодом  $L = M\Delta$  кусочно-линейных характеристик  $R(x)$  и  $D(x)$ . При любых начальных условиях в зависимости от параметров в системе устанавливается либо режим синхронизма I, либо режим синхронизма II, либо режим биений II рода.

Автор благодарен Л. Н. Белюстиной за руководство и помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Алексеев, А. Г. Шереметьев, Г. И. Тузов, Б. И. Глазов, Теория и применение псевдослучайных сигналов, изд. Наука, М., 1969.
2. А. Н. Детинев, Радиотехника и электроника, № 3, 455 (1968).
3. Г. И. Тузов, В. А. Котов, Радиотехника и электроника, № 5, 765 (1971).
4. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1967.
5. В. П. Пономаренко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 7, 1043, 1055 (1971).
6. Дж. Спрингет, Сб. Статистическая теория связи и ее приложение, под ред. А. В. Балакришнана, изд. Мир, М., 1967, стр. 95.
7. В. В. Шахгильдян, Ю. И. Савватеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 7, (1971).
8. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
9. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, изд. Наука, М., 1967.
10. А. Г. Майер, Уч. зап. ГГУ, вып. 12, 215 (1939).
11. С. Х. Арансон, ДАН СССР, 164, № 5, 959 (1965).
12. В. А. Плисс, Нелокальные проблемы теории колебаний, изд. Наука, М., 1967.
13. С. Х. Арансон, Тр. проектно-технологического и научно-исследовательского института Волго-Вятского совнархоза, вып. 2 (19), 81 (1965).
14. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 4, 638 (1959).
15. Е. А. Андропова-Леонтович, Л. Н. Белюстина, Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, изд. АН УССР, Киев, 1963.

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
25 января 1971 г.

#### ON THEORY OF SYNCHRONIZATION SYSTEMS WITH CROSS COUPLING

V. P. Ponomarenko

Dynamics of a phase-locking and delay-following filter-free joint system for a pseudonoise signal is studied under approximation of a discrimination characteristic for delay-following and an autocorrelation function for videosequence by smoothly varying periodic functions. The problem reduces to studying a nonlinear system of second order differential equations with toroidal phase surface. Possible operational modes of the system and their dependence on the parameters and initial conditions are determined.

УДК 531.391

## К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМОГО УДАРНОГО ВИБРОГАСИТЕЛЯ

*Г. В. Сысоева*

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях нелинейной системы виброгашения, между двумя массами которой происходят управляемые взаимодействия типа абсолютно неупругого удара. Для случаев конечного времени прихватки между массами и наличия упругой связи между ними найдены области устойчивости периодического режима, изучено влияние ряда параметров на амплитуду вынужденных колебаний.

Различным методам динамического гашения колебаний, основанным на использовании управляемых виброгасителей, посвящен ряд работ [1-4]. В работе [2] предложен метод демпфирования колебаний с помощью управляемых взаимодействий ударного типа между главной и демпфирующей массами, для простейшей модели системы (отсутствует трение, взаимодействие мгновенное) показана высокая эффективность виброгашения в широком интервале частот. Однако в реальных системах существует трение между взаимодействующими массами, и время сцепления масс (время прихватки) отлично от нуля. Поэтому представляет интерес исследование влияния этих технических параметров на устойчивость режима виброгашения. Кроме того, поиски повышения эффективности демпфирования привели к задаче исследования аналогичной модели управляемого виброгасителя, но с наличием упругой связи между массами.

В настоящей работе для моделей управляемых виброгасителей указанного типа найдены области устойчивости периодического двухударного движения системы, изучено влияние трения, упругой связи и времени прихватки на амплитуду вынужденных колебаний.

Результаты получены посредством аналитического исследования методом точечных преобразований и посредством электронного моделирования. Необходимые вычисления по построению областей устойчивости рассматриваемого режима выполнены с помощью ЭВМ.

Исследования показали, что специальное введение вязкого и сухого трения между массами может лишь увеличить амплитуду вынужденных колебаний системы. Время прихватки также понижает эффективность демпфирования в узком интервале частот вблизи резонанса и несколько уменьшает область устойчивого двухударного режима системы. Введением же упругой связи между массами можно значительно повысить эффективность демпфирования при соответствующем выборе значений жесткости.

### 1. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Рассматриваемая модель системы приведена на рис. 1. Она включает главную массу  $M$ , на которую действует сила  $F \cos(\Omega t)$ , и демпфирующую массу  $m$ , связанную с главной упругой связью. Учитываются силы трения между массами. В момент прохождения массой  $M$  ну-



левого положения  $\xi = 0$ , которое определяется недеформированным состоянием упругого закрепления 1, между массами происходит взаимодействие типа абсолютно неупругого удара, после чего обе массы некоторое время  $\Delta^*$  сцеплены и движутся в кинематической связи. Для такой модели уравнения движения системы в промежутках между ударными взаимодействиями масс, когда нет сцепления, запишутся в виде

$$M\ddot{\xi} + c(\dot{\xi} - \dot{\eta}) + F_{\text{тр}} + (k_1 + k_2)\xi - k_2\eta = F \cos(\Omega t), \quad (1)$$

$$m\ddot{\eta} - c(\dot{\xi} - \dot{\eta}) - F_{\text{тр}} + k_2(\eta - \xi) = 0.$$

Соотношения доударных и послеударных скоростей масс в моменты  $t_i$ , определяемые условием  $\xi(t_i) = 0$  в соответствии с уравнением (1), будут вида

$$\xi^+ = \eta^+ = \frac{M\xi^- + m\eta^-}{M + m}. \quad (2)$$

Совместное же движение масс после их ударного взаимодействия в течение времени прихватки  $\Delta^*$  запишется уравнением

$$(M + m)\ddot{\xi} + k_1\xi = F \cos(\Omega t) \quad (3)$$

$$(t_i < t < t_i + \Delta^*).$$

Здесь  $c$  — коэффициент вязкости,  $F_{\text{тр}}$  — сила сухого трения,  $k_1$  и  $k_2$  — коэффициенты жесткости пружин,  $\xi^-$ ,  $\eta^-$  и  $\xi^+$ ,  $\eta^+$  — скорости непосредственно перед ударным взаимодействием масс и после их взаимодействия.

Приведенная к безразмерной форме система уравнений (1)–(3) примет вид

$$\ddot{x} + x(\dot{x} - \dot{y}) + f_{\text{тр}} + (1 + \alpha)x - \alpha y = \cos(\omega\tau), \quad (4)$$

$$\mu\ddot{y} - x(\dot{x} - \dot{y}) - f_{\text{тр}} + \alpha(y - x) = 0,$$

$$\dot{x}^+ = \dot{y}^+ = \frac{\dot{x}^- + \mu\dot{y}^-}{1 + \mu} \quad (5)$$

в моменты  $\tau_i$ , определяемые  $x(\tau_i) = 0$ ,

$$(1 + \mu)\ddot{x} + x = \cos(\omega\tau) \quad (6)$$

$$(\tau_i < \tau < \tau_i + \Delta),$$

где

$$x = \xi k_1 / F, \quad y = \eta k_1 / F, \quad \tau = t \sqrt{k_1 / M},$$

$$\mu = m / M, \quad \omega = \Omega \sqrt{M / k_1}, \quad \alpha = k_2 / k_1,$$

$$x = c / \sqrt{M k_1}, \quad f_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} / F.$$

Здесь и далее точки над безразмерными переменными означают дифференцирование по безразмерному времени.

Для исследования влияния технических параметров на устойчивость периодического двухударного движения системы удобнее представить математическую модель (4)–(6) в виде нескольких самостоя-

тельных моделей, каждая из которых при определенных упрощениях учитывает один из рассматриваемых параметров. Для каждой модели рассматривается точечное отображение поверхности взаимодействия масс  $x = 0$  самое в себя. Отыскивается симметричное периодическое движение с двумя ударами за период и исследуется устойчивость этого движения.

## 2. ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ ПРИХВАТКИ

Уравнения исследуемой модели получаются из (4) — (6), если положить

$$x = 0, \quad \dot{f}_{\text{тр}} = 0, \quad \alpha = 0. \quad (7)$$

Исходная точка отображения  $M_0(x_0 = 0, \dot{x}_0 = \dot{y}_0, \tau_0)$  соответствует моменту времени непосредственно после удара, преобразованная точка  $M_1(x_1 = 0, \dot{x}_1 = \dot{y}_1, \tau_1)$  соответствует моменту времени непосредственно после следующего удара. Уравнения, связывающие координаты  $M_0$  и  $M_1$ , получаются при решении системы (4) — (6) с учетом условия (7). Из этих уравнений (не приводятся ввиду их громоздкости) известным методом [5], полагая для искомого периодического движения  $x_1^+ = 0, \dot{x}_1^+ = -\dot{x}_0^+, \tau_1 - \tau_0 = \pi/\omega$ , находят выражения для координат неподвижной точки отображения. После соответствующих преобразований они записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A [a \operatorname{ctg} (a \pi/2\omega) \cos (\omega\tau_0) - \omega \sin (\omega\tau_0)], \\ (1 + \mu) \dot{x}_0 + A \{ a (\mu + \cos \gamma) [\sin (a \Delta) + \cos (a \Delta) \operatorname{ctg} (a \pi/2\omega)] + \\ &+ [\cos (a \Delta) - \sin (a \Delta) \operatorname{ctg} (a \pi/2\omega)] \sin \gamma \} \cos (\omega\tau_0) - \\ - A \mu \omega \sin \beta + A' \omega \sin (\omega\tau_0) - (A - A') (\sin \gamma \cos \beta + \omega \cos \gamma \sin \beta) &= 0, \end{aligned} \quad (7a)$$

где

$$A = 1/[1 - (1 + \mu)\omega^2], \quad A' = 1/(1 - \omega^2),$$

$$\gamma = \frac{\pi}{\omega} - \Delta, \quad \beta = \omega(\tau_0 + \Delta),$$

$a$  — собственная частота системы.

Для исследования устойчивости найденных неподвижных точек отображения используется известный метод [5] варьирования уравнений точечных преобразований в окрестности этих точек. Полагая  $\delta\tau_1 = z\delta\tau_0, \delta x_1 = -z\delta x_0, \delta y_1 = -z\delta y_0$ , после необходимых преобразований получается характеристическое уравнение вида

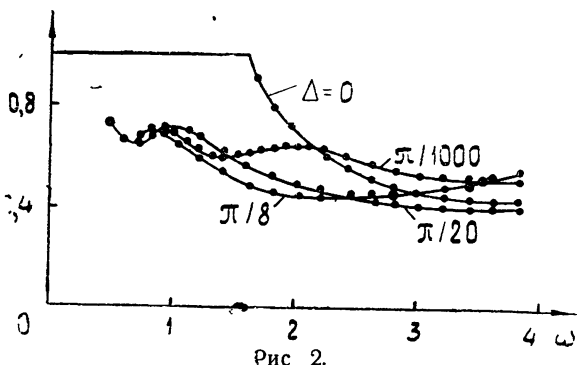
$$\begin{aligned} z^2(L + P) + z \{ \{ N - L + P \cos (a \pi/\omega) + a [L \sin (a \gamma) - \sin (a \Delta)] \times \\ \times \sin \gamma + R(L + P) \cos (a \Delta) + a \mu \omega^2 A' \{ \cos \gamma \cos [\omega(\tau_0 + \Delta)] - \\ - \omega \sin \gamma \sin [\omega(\tau_0 + \Delta)] \} \sin (a \pi/\omega) - a \omega^2 (1 - \mu \omega^2 A') \times \\ \times \sin (a \pi/\omega) \cos (\omega\tau_0) + a \omega^2 (1 + \mu) \sin (a \pi/\omega) \cos (\omega\tau_0) \} \} - \\ - N - a(L - P) \sin (a \gamma) \sin \gamma - R [L \cos (a \Delta) - P \cos (a \gamma)] - \\ - a \mu \omega^2 (\cos \gamma - 1) \cos \beta \sin (a \pi/\omega) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} L &= a \operatorname{ctg} (a \pi/2 \omega) \cos (\omega\tau_0), \quad P = \omega \sin (\omega\tau_0), \\ N &= a [\sin (a \Delta) - \sin (a \gamma)] \cos \gamma \cos (\omega\tau_0), \\ R &= a^2 (\mu + \cos \gamma). \end{aligned}$$

Рассматриваемый периодический режим устойчив при значениях параметров системы, для которых корни уравнения (8)  $|z| < 1$ . Анализ корней характеристического уравнения проведен на ЭЦВМ.

Некоторые результаты расчетов по определению областей устойчивости в плоскости параметров  $\lambda = \mu/(1 + \mu)$  и  $\omega$  в соответствии с уравнением (8) представлены на рис. 2. Кривые семейства  $\Delta = \text{const}$  ограничивают область устойчивости двухударного симметричного периодического режима с двумя ударами за период ( $0 \leq \Delta \leq \pi/8$ ). Здесь



же для оценки влияния времени прихватки на устойчивость рассматриваемого режима приведена граница области значений параметров  $\lambda$  и  $\omega$  при  $\Delta = 0$ , полученная аналитически в работе [2]\*.

Результаты показывают, что область устойчивости периодического двухударного режима несколько уменьшается при введении времени прихватки  $\Delta = \pi/1000$  по сравнению с областью этого режима, если  $\Delta = 0$ . Дальнейшее увеличение  $\Delta$  до значения  $\pi/8$  мало меняет полученную область. Следовательно, рассматриваемый режим сохраняется в широком интервале частот для значений относительной массы  $\mu < 0,66$  ( $\lambda < 0,4$ ).

### 3. ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С УПРУГОЙ СВЯЗЬЮ

В рассматриваемом случае система ударного виброгашения является нелинейной с двумя степенями свободы. Уравнения модели получаются из (4), (5), если положить

$$x = 0, \quad \dot{f}_{\text{тр}} = 0, \quad \Delta = 0. \quad (9)$$

Движения, определяемые этими уравнениями, происходят в пятимерном фазовом пространстве  $x, y, \dot{x}, \dot{y}, \tau$ .

Так же как и в предыдущем случае, для исследования периодических движений этой модели рассматривается точечное отображение

\* Нарушение исследуемого двухударного периодического движения в рассматриваемой модели возможно при дополнительных соударениях масс. Границы  $S_c$  этого нарушения соответствуют выполнению условий

$$x(\tau^*) = 0, \quad \dot{x}(\tau^*) = 0,$$

где

$$\tau_0 + \Delta < \tau^* < \tau_0 + \pi/\omega.$$

В настоящей работе анализ этих условий выполнялся с помощью электронного моделирования. Оказалось, что во всех практически важных областях параметров  $\lambda, \omega$  (рис. 2) реализован лишь исследуемый двухударный периодический режим.

поверхности взаимодействия  $x = 0$  самое в себя. Обозначим координаты исходной точки отображения —  $M_0$  ( $x_0 = 0, y_0, \dot{x}_0 = \dot{y}_0, \tau_0$ ), преобразованной —  $M_1$  ( $x_1 = 0, y_1, \dot{x}_1 = \dot{y}_1, \tau_1$ ). Для искомого периодического движения

$$x_1^+ = 0, \quad \dot{x}_1^+ = -\dot{x}_0^+, \quad y_0^+ = -y_1^+, \quad \tau_1 = \tau_0 + \pi/\omega. \quad (10)$$

Тогда из уравнений (4), (5), (9) и (10) получим следующие выражения для координат неподвижной точки отображения:

$$\begin{aligned} y_0 &= \mu A/\alpha [b^3(\omega^2 - a^2) \cos(\omega\tau_0) \operatorname{ctg}(b\pi/2\omega) - \\ &- a^3(\omega^2 - b^2) \cos(\omega\tau_0) \operatorname{ctg}(a\pi/2\omega) + a^2\omega(\omega^2 - b^2) \sin(\omega\tau_0)] \times \\ &\quad \times (b^2 n \operatorname{ctg}(b\pi/2\omega) - a^2 m \operatorname{ctg}(a\pi/2\omega))^{-1}, \\ \dot{x}_0 &= A [-ab(a^2 - b^2)(1 - \mu\omega^2/\alpha) \cos(\omega\tau_0) \times \\ &\quad \times \operatorname{ctg}(a\pi/2\omega) \operatorname{ctg}(b\pi/2\omega) - m\omega(\omega^2 - a^2) \times \\ &\quad \times \sin(\omega\tau_0) \operatorname{ctg}(a\pi/2\omega) + n\omega(\omega^2 - b^2) \sin(\omega\tau_0) \times \\ &\quad \times \operatorname{ctg}(b\pi/2\omega)] (b^2 n \operatorname{ctg}(b\pi/2\omega) - a^2 m \operatorname{ctg}(a\pi/2\omega))^{-1}, \quad (10a) \\ &- ab(a^2 - b^2)(1 - \mu\omega^2/\alpha)(1 + \mu)(a^2 - b^2 + 1) \cos(\omega\tau_0) \operatorname{ctg}(a\pi/2\omega) \times \\ &\quad \times \operatorname{ctg}(b\pi/2\omega) + \{a^2\omega(\omega^2 - b^2)(bp \sin(b\pi/\omega) - ad \sin(a\pi/\omega)) + \\ &\quad + \omega^3(a^2 - b^2)(bp \cos(b\pi/\omega) \operatorname{ctg}(b\pi/2\omega) - ad \cos(a\pi/\omega) \operatorname{ctg}(a\pi/2\omega)) + \\ &\quad + n\omega(a^2 - b^2)[(1 + \mu)(\omega^2 - b^2) + b^2(1 - \mu\omega^2/\alpha + \mu)] \operatorname{ctg}(b\pi/2\omega) - \\ &\quad - m\omega(a^2 - b^2)[(1 + \mu)(\omega^2 - a^2) + a^2(1 - \mu\omega^2/\alpha + \mu)] \times \\ &\quad \times \operatorname{ctg}(a\pi/2\omega)\} \sin(\omega\tau_0) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{\mu}{\alpha} \omega^4 - \frac{\alpha + \mu + \alpha\mu}{\alpha} \omega^2 + 1 \right)^{-1}, \\ a &= \left( \frac{\left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} + \mu \right) - \sqrt{\left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} + \mu \right)^2 - 4 \frac{\mu}{\alpha}}}{2 \frac{\mu}{\alpha}} \right)^{1/2}, \\ b &= \left( \frac{\left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} + \mu \right) + \sqrt{\left( 1 + \frac{\mu}{\alpha} + \mu \right)^2 - 4 \frac{\mu}{\alpha}}}{2 \frac{\mu}{\alpha}} \right)^{1/2}, \\ p &= \left( 1 - \frac{\mu}{\alpha} b^2 + \mu \right) n, \quad d = \left( 1 - \frac{\mu}{\alpha} a^2 + \mu \right) m, \\ m &= a \left( 1 - \frac{\mu}{\alpha} b^2 \right), \quad n = b \left( 1 - \frac{\mu}{\alpha} a^2 \right). \end{aligned}$$

Исследуем далее устойчивость найденного периодического движения. Для этого варьлируем уравнения точечных преобразований в окрестности неподвижных точек отображения и полагаем  $\delta\tau_1 = z\delta\tau_0$ ,  $\delta\dot{x}_1 = -z\delta\dot{x}_0$ ,  $\delta y_1 = -z\delta y_0$ . После необходимых преобразований характеристическое уравнение может быть записано в виде

$$A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3 = 0. \quad (11)$$

Из-за громоздкости общий вид зависимости выражений  $A_0, A_1, A_2$  и  $A_3$  от параметров динамической системы не приводится.

Ограничимся исследованием поведения системы на частоте колебаний, равной первой резонансной, а именно, найдем области устойчивости изучаемого движения в плоскости параметров  $\mu$  и  $\alpha$  для частного случая  $\omega = a$ , где  $a$  — первая резонансная частота системы.

Характеристическое уравнение (11) для рассматриваемого случая будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{\mu^2}{\alpha^2} (z-1)^2 (a^2 - b^2) (a^2 - 1) [zh - (a^2 - b^2) (a^2 + b^2 - 1) g] y_0 \sin \frac{b\pi}{a} + \\ & + \frac{\mu^3}{\alpha^3} (z-1) a^2 b (a^2 - b^2) \left\{ (z-1) (a^2 - 1) b^2 \left( f + g \cos \frac{b\pi}{a} \right) + \right. \\ & + z (z-1) l \cos \frac{b\pi}{a} + [zh + b^2 (b^2 - 1) g] \left( z + \cos \frac{b\pi}{a} \right) + \\ & \left. + b^2 f (b^2 - 1) \left( 1 + z \cos \frac{b\pi}{a} \right) \right\} \dot{x}_0 - \frac{\mu^3}{\alpha^3} (z-1) \times \quad (12) \\ & \times (zb^3 - b^2 + a^2) [zl + b^2 (a^2 - 1) g] \sin \frac{b\pi}{a} + \frac{\mu^3}{\alpha^3} z \times \\ & \times \frac{ab\pi}{2} (a^2 - b^2) (b^2 - 1) \left\{ \left( z + \cos \frac{b\pi}{a} \right) [z(f-g) + g] + \right. \\ & \left. + \left( 1 + z \cos \frac{b\pi}{a} \right) f \right\} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\dot{x}_0 = \pm \frac{\pi}{8} \frac{(1+\mu)(a^2 + b^2 - 1) - 2}{ab^2 f},$$

$$y_0 = \pm \frac{\mu}{\alpha} \frac{8b^3 f \left( 1 + \cos \frac{b\pi}{a} \right) - a\pi(a^2 - b^2)[(1+\mu)(a^2 + b^2 - 1) - 2] \sin \frac{b\pi}{a}}{8bf(a^2 - b^2)(b^2 - 1) \left( 1 + \cos \frac{b\pi}{a} \right)},$$

$$f = a^2(1+\mu) - 1, \quad g = b^2(1+\mu) - 1,$$

$$h = b^2(a^2 - b^2)(1+\mu)(b^2 - 1), \quad l = b^2(a^2 - b^2)(1+\mu)(a^2 - 1).$$

Значения параметров  $\mu$  и  $\alpha$ , которым соответствуют корни характеристического уравнения  $|z| < 1$ , найдены, как и в предыдущем случае, с помощью ЭЦВМ.

Область существования и устойчивости двухударного режима (рис. 3) оказалась наиболее широкой для  $\mu \leq 0,12$ . Это весьма существенно, так как именно такие массы демпфера наиболее часто используются в технике виброгашения.

Полученные аналитические результаты позволяют, используя идею продолжения по параметру [5], определить характер режимов движе-

ния вблизи первой резонансной частоты и выяснить влияние величины упругости на величину вынужденных колебаний.

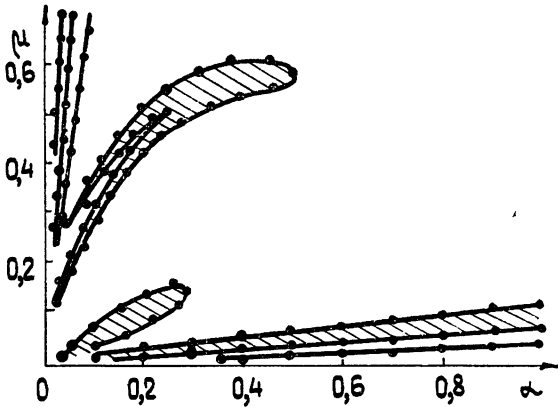


Рис. 3.

#### 4. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДЕМПИРОВАНИЯ

Для оценки эффективности демпфирования различных моделей управляемых ударных виброгасителей рассматриваются резонансные кривые  $X(\omega)$ , полученные посредством электронного моделирования (рис. 4). Оказалось, что в области резонансных частот наиболее эффективным из рассматриваемых виброгасителей является ударный демпфер с упругой связью между массами. При этом для каждого значения параметра  $\mu$  можно искать оптимальное значение  $\alpha$ , определяющее резонансную кривую с одинаковыми амплитудами в точках  $\omega = a$  и  $\omega = b$ . Например, для  $\mu = 0,1$  оптимальное значение  $\alpha$  приблизительно равно 0,05. Для такой модели наибольшая из двух резонансных амплитуд колебаний системы примерно в два раза меньше амплитуды этой системы, снабженной виброгасителем без пружины (кривая 1).

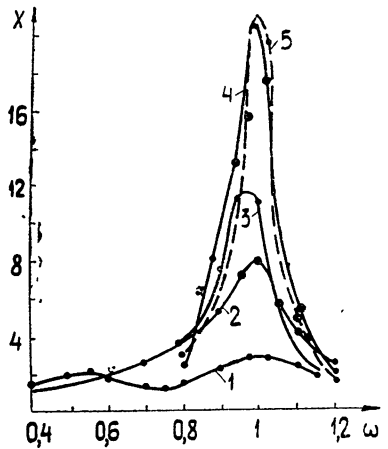


Рис. 4.

Введение вязкого и сухого трения в систему ударного демпфирования отрицательно сказывается на ее эффективности. Наименьшее достижимое значение резонансной амплитуды для ударной модели с сухим трением ( $X = 20,5$ ) значительно превышает резонансную амплитуду аналогичной модели с вязким трением ( $X = 11,7$ , кривая 3) и модели без трения ( $X = 8$ , кривая 2).

Для оценки точности результатов моделирования на рис. 4 приведена расчетная кривая 5 вязкого демпфера Ланчестера и эта же кривая, полученная на модели (кривая 4).

Приведенные на рис. 5 зависимости характеризуют влияние времени прихватки на эффективность демпфирования: для систем с относительной массой  $\mu < 0,3$  амплитуда в резонансе растет незначительно, а для  $\mu > 0,3$  она даже несколько уменьшается при изменении  $\Delta$  от нуля до  $\pi/4$ .

Изложенные результаты указывают на целесообразность применения управляемых ударных виброгасителей без специально вводимого трения и с наличием упругой связи между массами.

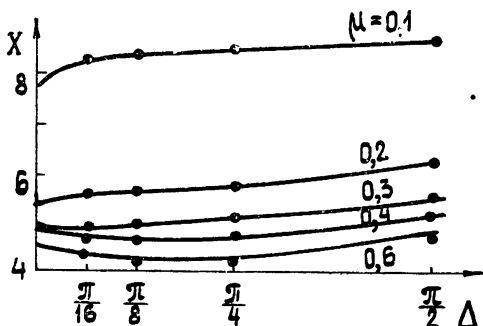


Рис. 5.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Алексеев, А. К. Сборовский, Судовые виброгасители, Судпромгиз, М., 1962.
2. М. И. Фейгин, ПММ, 31, вып. 1, 154 (1967).
3. В. И. Бабицкий, А. Б. Кобринский, Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 3, 81 (1962).
4. К. В. Фролов, Машиноведение, № 3, 38 (1965).
5. Л. В. Беспалов, Ю. И. Неймарк, М. И. Фейгин, МТТ, № 1, 151 (1966).

Горьковский институт инженеров  
водного транспорта

Поступила в редакцию  
25 сентября 1970 г.

ON INVESTIGATION INTO DYNAMICS OF CONTROLLED  
SHOCKING VIBRATION-DAMPER

G. V. Sisoyeva

The article considers a problem in forced oscillations of a vibration-damping nonlinear system with controlled interactions of the absolute nonelastic shock-type between its two masses. Periodic mode stability regions are found and influence of a number of parameters on forced oscillation amplitude is studied for the cases of finite time of the strap between the masses and presence of elastic coupling between them.

УДК 517.9 + 621.396.078.6

**ОБ УРАВНЕНИЯХ СИСТЕМ ФАП С НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПЬЮ УПРАВЛЕНИЯ**

*В. Н. Белых*

Исследуется система двух дифференциальных уравнений на цилиндре, описывающая динамику системы ФАП при общих предположениях относительно характеристик нелинейной цепи управления. Рассмотрены вопросы о возможных бифуркационных кривых в области двух параметров и о структуре области абсолютной устойчивости.

1. В системе ФАП нелинейная цепь управления используется в целях разрешения существующего противоречия между требованиями большой фильтрующей способности и большой полосы захвата.

Нелинейная цепь управления может быть реализована при помощи введения нелинейных фильтров [1-3] или изменения структурной схемы ФАП (например, введения частотного кольца подстройки), приводящего к нелинейному затуханию в системе [4].

Задача исследования системы ФАП с нелинейным интегрирующим фильтром в цепи управления и с нелинейным затуханием приводит [1-5] к рассмотрению дифференциального уравнения вида

$$\Phi(G^{-1}(x, \alpha, \beta)\dot{x}) + \alpha f(x, \dot{x}) + F(x) = \beta, \tag{1}$$

где  $2\pi$  — периодическая функция  $F(x)$  есть характеристика фазового детектора,  $\Phi$  и  $G^{-1}$  характеристики нелинейного сопротивления и емкости в фильтре низких частот [1-2], а функция  $f$  определяет нелинейное затухание [4].

Уравнение (1) при  $\Phi(z) = z$ ,  $G = 1$  хорошо известно и при различных видах функции  $f$  изучалось в ряде работ [6-13] и др.

В [1-5] уравнение (1) рассмотрено при конкретных видах функций в (1):

$$f = y, \quad f = \sum_{k=1}^n a_k |y|^k; \quad G = 1 + H_c^{-2}(\beta - \alpha y)^2,$$

$$G^{-1} = \begin{cases} 1 & (|\beta - \alpha y| < H_c) \\ \mu & (|\beta - \alpha y| > H_c) \end{cases},$$

$$\Phi(z) = \begin{cases} z & (|z| \leq H_R) \\ H_R \operatorname{sgn} z + \mu(z - H_R \operatorname{sgn} z) & (|z| > H_R) \end{cases}, \tag{2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 2/\pi x & (|x| \leq \pi/2) \\ 2 - 2/\pi x & (\pi/2 < x < 3\pi/2) \end{cases}, \quad F(x) = \sin x.$$

Разбиение области параметров  $D: \alpha \geq 0, \beta \geq 0$  уравнения (1) при условиях (2) совпадает (сохраняется в смысле грубости пространства параметров [13], с разбиением  $D$  уравнения

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + F(x) = \beta. \tag{3}$$



(уравнения (1) при  $\Phi = z$ ,  $G = 1$ ,  $f = y$ ), описывающего динамику системы ФАП с линейным интегрирующим фильтром. Разбиение плоскости параметров  $(\alpha, \beta)$  уравнения (3) определяется кривой  $\alpha = \alpha^*(\beta)$ , соответствующей петле сепаратрисы седла II рода и полупрямой  $\beta = 1$ ,  $\alpha > \alpha^*(1)$ , соответствующей петле сепаратрисы седла-узла II рода. Область параметров  $\Omega$ :  $\alpha > \alpha^*(\beta)$ ,  $0 \leq \beta < 1$  (полоса захвата), для точек которой уравнение (1) при условиях (2) имеет на цилиндре  $S: x \pmod{2\pi}$ ,  $y = \dot{x}$ , устойчивое в целом состояние равновесия, больше, чем область  $\Omega$  уравнения (3).

В системе ФАП с нелинейной цепью управления могут реализовываться такие характеристики, при которых функции в (1) удовлетворяют более общим, чем функции в (2), условиям:

$$f(x, y), F(x), \Phi(z), G(y, \alpha, \beta) \in C^1 \quad x \neq x_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n_1),$$

$$y \neq y_j \quad (j = 1, 2, \dots, n_2), \quad z \neq z_k \quad (k = 1, 2, \dots, n_3);$$

$$f(x_i, y_j), F(x_i), \Phi(z_k), G(y_j, \alpha, \beta) \in Lip;$$

$$f(x, y) = f(x + 2\pi, y), \quad f(x, y) y^{-1} > 0;$$

$$F(x) = F(x + 2\pi), \quad F'_x > 0 \quad (x \in (\bar{x}_0, x_0)), \quad F(\bar{x}_0) = -1, \quad (4)$$

$$F(x_0) = 1, \quad F'_x < 0 \quad (x \in (x_0, \bar{x}_0 + 2\pi)), \quad \int_0^{2\pi} F(x) dx = 0;$$

$$u = \Phi(z) = -\Phi(-z), \quad \Phi'_z(z) > 0, \quad z = \Phi^{-1}(u) = Q(u),$$

$$\int_0^{2\pi} Q(F(x)) dx = 0; \quad G(y, \alpha, \beta) > 0,$$

где производные  $f'_x, f'_y, F'_x, \Phi'_z, G'_y$  при  $x = x_i, y = y_j, z = z_k$  принимают некоторые значения, лежащие между пределами справа и слева\*.

В связи с этим возникают следующие вопросы: будет ли разбиение области параметров  $D$  уравнения (1) при условиях (4) совпадать с разбиением  $D$  уравнения (3); какова структура области  $\Omega$ .

В настоящей работе рассматривается уравнение (1) при условиях (4). Установлено, что при условиях (4) и следующих дополнительных условиях на функции  $G$  и  $f$ :  $G = G(y) > 0, f'_y > 0$  разбиение области  $D$  совпадает с разбиением  $D$  уравнения (3). Появление зависимости функции  $G$ , удовлетворяющей (4), от параметров,  $G = G(y, \alpha, \beta)$ , может приводить к неоднозначности функции  $\alpha = \alpha^*(\beta)$ , определяющей существование петли сепаратрисы II рода, при этом область  $\Omega$  может стать неоднозначной; нарушение монотонности функции  $f$ , удовлетворяющей (4), — к существованию  $n$  ( $n > 1$ ) предельных циклов II рода, при этом  $\Omega$  может существовать и, кроме бифуркации петли сепаратрисы II рода, определяться бифуркациями двойных предельных циклов II рода, либо вообще не существовать.

Более подробно вопрос об областях  $\Omega$  уравнения (1) при условиях (4) и дополнительных условиях на функции  $f, G, \Phi$  рассматривается отдельно.

\* Очевидно, функция  $Q(u)$ , обратная функции  $\Phi(z)$ , удовлетворяет тем же свойствам, что и  $\Phi(z)$ .

2. Уравнение (1) представим в виде системы

$$\dot{x} = y, \dot{y} = G(y, \alpha, \beta) Q(\beta - \alpha f - F), \tag{5}$$

эквивалентной уравнению

$$\Phi \left( G^{-1} y \frac{dy}{dx} \right) = \beta - \alpha f - F. \tag{6}$$

Проведем исследование особых траекторий системы (5): состояний равновесия, сепаратрис седел и предельных циклов I и II рода, определяющих качественную структуру разбиения цилиндра  $C$  на траектории [6], и рассмотрим вопросы о возможных бифуркационных кривых в области параметров  $D$  и о структуре области  $\Omega$ .

*Состояния равновесия.* При  $\beta < 1$  состояния равновесия системы (5)  $O_1(x_1(\beta), y_1)$  — устойчивый фокус (узел) при

$$\delta = \alpha^2 f'_y(x_1(\beta), 0) G(0, \alpha, \beta) - 4 \Phi'_2(0) F'_x(x_1(\beta)) < 0 (> 0);$$

$O_2(x_2(\beta), y_2)$  — седло, где  $x_1(\beta)$  и  $x_2(\beta)$  — корни уравнения  $F(x) = \beta$  на интервалах  $(x_0, x_0)$  и  $(x_0, x_0 + 2\pi)$ ,  $y_1 = y_2 = 0$ . При  $\beta = 1$  из  $O_1$  и  $O_2$  образуется сложное состояние равновесия  $O_{1,2}(x_0, 0)$  типа седло-узел. При  $\beta > 1$  состояний равновесия нет.

*Сепаратрисы седел и предельные циклы.* Обозначим  $\omega$  — сепаратрису седла  $O_2$  системы (5) при  $y > 0$  через  $S^+$ , а при  $y < 0$  через  $\bar{S}^+$ ;  $\alpha$  — сепаратрису седла  $O_2$  при  $y > 0$  через  $S^-$ , а при  $y < 0$  через  $\bar{S}^-$ . Так как  $Q(\beta - F) < 0$  при  $x \in (x_1(\beta), x_2(\beta))$ ,  $Q(\beta - F) > 0$  при  $x \in (x_2(\beta), x_1(\beta) + 2\pi)$ , сепаратрисы  $S^+$  и  $\bar{S}^+$  ( $S^-$  и  $\bar{S}^-$ ) при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) либо стремятся к состоянию равновесия  $O_1$ , либо пересекают прямую  $x = x_1(\beta)$ . Обозначим точки первого пересечения сепаратрис  $S^+$ ,  $\bar{S}^+$ ,  $S^-$ ,  $\bar{S}^-$  с прямой  $x = x_1(\beta)$  через  $N^+$ ,  $\bar{N}^+$ ,  $N^-$ ,  $\bar{N}^-$  (рис. 1) и будем определять расположение сепаратрис седла  $O_2$  взаимным расположением точек  $N^+$ ,  $\bar{N}^+$ ,  $N^-$ ,  $\bar{N}^-$ . Будем называть *структурой K* однозначную качественную структуру разбиения цилиндра  $C$  на траектории системы (5), при которой система не имеет предельных циклов, сепаратрисы расположены так, что точки их пересечения с прямой  $x = x_1(\beta)$  удовлетворяют следующим условиям:  $N^+$  лежит выше  $N^-$ , а  $\bar{N}^+$  лежит ниже  $\bar{N}^-$ . Структура  $K$  соответствует состоянию равновесия  $O_1$ , устойчивому на всем цилиндре  $C$ , за исключением сепаратрис  $S^+$ ,  $\bar{S}^+$  и седла  $O_2$  (множества меры нуль) (рис. 2 а). Приведем ряд теорем о предельных циклах и сепаратрисах седла системы (5).

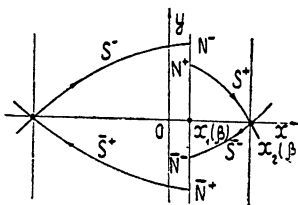


Рис. 1.

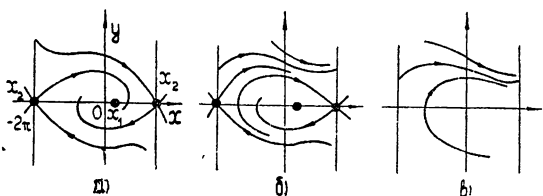


Рис. 2.

*Теорема 1.* а) Система (5) не имеет предельных циклов I рода.  
 б) При  $\beta = 0$  система (5) имеет структуру  $K$ .

Доказательство. а) При  $\beta \geq 1$  предельные циклы I рода отсутствуют, так как система (5) при  $\beta \geq 1$  не имеет простых состояний равновесия.

При  $0 \leq \beta < 1$  рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V(x, y) = g(y, \alpha, \beta) - q(x, \beta) + h_1(\beta), \quad (7)$$

где

$$g = \int_0^y yG^{-1} dy, \quad q = \int_0^x Q(\beta - F) dx, \quad h_1(\beta) = q(x_1(\beta), \beta),$$

определенную в области

$$V(x, y) \leq h_1(\beta) + h_2(\beta), \quad x \leq x_2(\beta) \quad (h_2(\beta) = -q(x_2(\beta), \beta)).$$

Производная  $\dot{V}$  в силу системы (5) имеет вид

$$\dot{V} = y [Q(\beta - \alpha f - F) - Q(\beta - F)]$$

и согласно (4) удовлетворяет неравенству  $\dot{V} \leq 0$ . Следовательно, в силу теоремы ([12], стр. 35) система (5) не имеет предельных циклов I рода при  $\beta < 1$ .

б) При  $\beta = 0$  функция (7) в силу (4) становится периодической функцией Ляпунова на всем цилиндре, и неравенство  $\dot{V} \leq 0$  устанавливает асимптотическую устойчивость состояния равновесия  $O_1$  на всем цилиндре  $S$ , за исключением множества меры нуль  $S^y = S^+ \cup S^+ \cup O_2$ . Следовательно, при  $\beta = 0$  система (5) имеет структуру  $K$ .

*Теорема 2.* В области  $y < 0$  система (5) не имеет предельных циклов II рода, а сепаратрисы  $S^+$  и  $S^-$  расположены так, что точка  $N^+$  лежит ниже  $N^-$ .

Для доказательства теоремы достаточно показать, что уравнение (6) при  $y < 0$  не имеет интегральных кривых, удовлетворяющих условию

$$y_0(x) \leq y_0(x + 2\pi). \quad (8)$$

Предположим противное: уравнение (6) при  $y < 0$  имеет интегральную кривую  $y = y_0(x)$ , удовлетворяющую (8). Тогда, интегрируя (6) по кривой  $y = y_0(x)$  и учитывая, что в силу (4)  $f(x, y_0(x)) < 0$ , получаем неравенство

$$I = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} \Phi(y_0(x)) G^{-1} y_0'(x) (dx = \int_{x_0}^{x_0+2\pi} [\beta - \alpha f(x, y_0(x))] dx) > 0.$$

С другой стороны, так как согласно (4) функция  $\Phi(z)$  представима в виде  $\Phi(z) = A(z)z$ ,  $A(z) > 0$ , интеграл  $I$  имеет вид

$$I = \int_{y_0(x_0)}^{y_0(x_0+2\pi)} A(y_0, y_0') yG^{-1} dy$$

и при использовании теоремы о среднем преобразуется к выражению

$$I = A(y_0(\bar{x}), y_0'(\bar{x})) [g(y_0(x_0 + 2\pi)) - g(y_0(x_0))], \quad (9)$$

где  $\bar{x} \in [x_0, x_0 + 2\pi)$ . Так как при  $y < 0$   $g'_y < 0$ , из (9) в силу (8) получаем противоречащее установленному неравенство  $I \leq 0$ .

*Теорема 3.* а) Для каждого  $\beta \in (0, 1]$  существует значение параметра  $\alpha = \alpha^*(\beta)$ ,  $\alpha^*(0) = 0$ , определяющее существование петли сепаратрисы.

ратрисы II рода седла  $O_2$  системы (5) при  $y > 0$ . б) Если функция  $G$ , удовлетворяющая (4), не зависит от параметров,  $G = \bar{G}(y)$ , функция  $\alpha = \alpha^*(\beta)$  однозначна.

Доказательство. а) При  $\alpha = 0$  система (5) имеет интеграл

$$g(y, 0, \beta) - q(x, \beta) = h \quad (10)$$

при  $h = h_-(\beta)$ , при  $\beta > 0$  определяющий в области  $y > 0$ , сепаратрисы  $S^+$  и  $S^-$  седла  $O_2$ , расположенные так, что точка  $N^+$  лежит ниже  $N^-$ . Тогда при  $\beta \in (0, 1]$  существуют достаточно малые  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ , при которых точка  $N^+$  также расположена ниже точки  $N^-$ . С другой стороны, согласно (4) можно выбрать достаточно малое значение  $y = \bar{y} > 0$ , такое, что при  $\alpha > \bar{\alpha} = \frac{\beta + 1}{\min_x f(x, \bar{y})}$  выполняется неравенство  $Q|_{y=\bar{y}} < 0$ . В силу

ограниченности сверху отрицательного коэффициента углового наклона сепаратрисы  $S^+$  в седле  $O_2$  сепаратриса  $S^+$  при этом пересекает окружность  $y = \bar{y}$  и, следовательно, пересекает прямую  $x = x_1(\beta)$  в точке  $N^+$ , расположенной выше точки  $N^-$ . Стало быть, при  $\beta \in (0, 1]$  существует хотя бы одно значение  $\alpha^*(\beta)$ ,  $\alpha^*(\beta) \in (\bar{\alpha}, \bar{\alpha})$ , при котором сепаратрисы  $S^+$  и  $S^-$  образуют петлю сепаратрисы II рода. Равенство  $\alpha^*(0) = 0$  следует из расположения точек  $N^+$  и  $N^-$  при  $\beta = 0$  (теорема 1) и при  $\alpha = 0$  (интеграл (10)). б) При  $G = \bar{G}(y)$  имеет место неравенство

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ y^{-1} \bar{G}(y) Q(\beta - \alpha f - F) \right] < 0. \quad (11)$$

Согласно (11), векторное поле системы (5) при  $G = \bar{G}(y)$  с ростом  $\alpha$  поворачивается по часовой стрелке. Следовательно, для системы (5) при дополнительном условии  $G = \bar{G}(y)$  значениям  $\alpha^*(\beta)$  при  $\beta \in (0, 1)$  соответствует однозначная функция  $\alpha = \alpha^*(\beta)$ . Теорема доказана.

Если функция  $G$ , удовлетворяющая (4), зависит от параметров, некоторым  $\beta \in (0, 1)$  может соответствовать несколько значений  $\alpha^*(\beta)$ , т. е. определяющая эти значения функция  $\alpha = \alpha^*(\beta)$  может быть неоднозначной. На это указывает пример 1 (см. Приложение).

Приведенные ниже теоремы 4, 5 выделяют дополнительные к (4) условия на функции  $G$  и  $f$ , выполнение которых гарантирует однозначность разбиения области  $D$ .

**Теорема 4.** Пусть функция  $f(x, y)$ , кроме (4), удовлетворяет условию

$$f'_y(x, y) > 0 \quad (y > 0), \quad (12)$$

тогда система (5) в области  $y > 0$  имеет единственный устойчивый предельный цикл II рода, если сепаратрисы  $S^+$  и  $S^-$  расположены так, что точка  $N^+$  лежит ниже  $N^-$ , и не имеет предельных циклов, если  $N^+$  лежит выше  $N^-$ .

Доказательство. В силу (4), (12) уравнение  $\beta + 1 = \alpha f(x, y)$  имеет единственное ограниченное решение  $y = \bar{y}_0(x) > 0$ . Тогда, так как в области  $y \geq \bar{y}_0(x)$  выполняется неравенство  $Q(\beta - \alpha f - F) < 0$ , получаем, что траектории системы (5) из области  $y \geq \bar{y}_0(x)$  попадают в область  $y < \bar{y}_0(x)$ . Следовательно, область  $y \geq \bar{y}_0(x)$  не содержит предельных циклов системы (5) и существует траектория  $y = \bar{y}^+(x)$ , удовлетворяющая неравенству

$$y^+(x) > y^+(x + 2\pi). \quad (13)$$

Стало быть, если точка  $N^+$  расположена ниже точки  $N^-$ , согласно (13), система (5) в области  $0 < y < \bar{y}_0(x)$  имеет хотя бы один предельный цикл II рода. Покажем, что этот цикл единственный. Для этого применим критерий Бендиксона — Дюлака [14] с функцией  $B = G^{-1}$ .

Так как в силу (4), (12) выполняется неравенство

$$\frac{\partial}{\partial x} (By) + \frac{\partial}{\partial y} (BGQ) = -\alpha Q'_u f'_y < 0, \quad (14)$$

предельный цикл II рода, существующий в области  $0 < y < \bar{y}_0(x)$ , является единственным. Этот предельный цикл устойчив, так как его характеристический показатель [14, 2] отрицателен:

$$h = \int_0^T Q'_u f'_y dt' < 0 \quad (t' = tG). \quad (15)$$

Если сепаратрисы  $S^+$  и  $S^-$  расположены так, что точка  $N^+$  расположена выше  $N^-$ , из (14), (15) следует отсутствие предельных циклов II рода системы (5) в области  $y > 0$ . При этом система (5) обладает структурой  $K$  (рис. 2 а).

Из теорем 1—4 вытекает теорема.

**Теорема 5.** Система уравнений (5) при дополнительных  $k$  (4) условиях  $G = \bar{G}(y)$  и (12) имеет однозначное разбиение области  $D$ , совпадающее с разбиением области  $D$  уравнения (3); а) При  $0 \leq \beta < 1$ ,  $\alpha > \alpha^*(\beta)$  система (5) имеет структуру  $K$  (рис. 2 а); б) При  $0 < \beta < 1$ ,  $\alpha < \alpha^*(\beta)$  система (5) имеет единственный устойчивый предельный цикл II рода в области  $y > 0$ , точка  $N^+$  расположена ниже  $N^-$ , точка  $\bar{N}^+$  расположена ниже  $\bar{N}^-$  (рис. 2 б). в) При  $\beta > 1$  система (5) имеет единственный предельный цикл II рода в области  $y > 0$ , устойчивый на всем цилиндре  $S$  (рис. 2 в).

При нарушении свойства монотонности функции  $f$  возможно существование у системы (5)  $n$  ( $n > 1$ ) грубых предельных циклов II рода, а в области  $D$  — бифуркационных кривых  $\alpha = \alpha^{(2)}(\beta)$ , соответствующих двойным предельным циклам II рода. На это указывает пример 2 (см. Приложение).

**Область параметров  $\Omega$ .** В связи с определением режима захвата системы ФАП с нелинейной цепью управления представляет особый интерес область  $\Omega$  — область параметров, для точек которой система (5) имеет структуру  $K$  (рис. 2 а).

Из теоремы 1 следует, что полупрямая  $\beta = 0$ ,  $\alpha > 0$  принадлежит области  $\Omega$  системы (5).

Из теоремы (5) следует, что область  $\Omega_1$  системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \bar{G}(y) Q(\beta - \alpha f(x, y) - F(x)) \quad (16)$$

при условиях (4), (12) определяется бифуркацией петли сепаратрисы II рода в области  $y > 0$  и имеет вид  $\Omega_1$ :  $0 \leq \beta < 1$ ,  $\alpha > \alpha^*(\beta)$ .

Область  $\Omega_2$  системы (5) при условиях (4), (12) также существует, но в силу возможной неоднозначности функции  $\alpha^*(\beta)$  может быть не односвязной.

При нарушении условия монотонности (12) функции  $f$  область  $\Omega$  системы (16) при  $\beta > 0$  может не существовать (пример 3, Приложение), а если существует, то может определяться бифуркацией петли сепаратрисы (пример 4) или бифуркацией линейных предельных циклов (пример 5).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

**Пример 1.** При  $f = y$ ,  $F(x) = \sin x$ ,  $Q = u$ ,  $G = P^2(\alpha, \beta)$  система (5) имеет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = P^2(\alpha, \beta) (\beta - \alpha y - \sin x). \quad (\text{П.1})$$

При помощи замены  $y = P\tilde{y}$ ,  $t = P^{-1}\tau$ ,  $\tilde{\alpha} = \alpha P$  система (П.1) преобразуется к виду

$$\dot{x} = \tilde{y}, \quad \dot{\tilde{y}} = \beta - \tilde{\alpha}\tilde{y} - \sin x. \quad (\text{П.2})$$

Известно, что существование петли сепаратрисы II рода системы (П.2) в области  $\tilde{y} > 0$  соответствует однозначная функция  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0(\beta)$ . Тогда значения  $\alpha^*(\beta)$  для системы (П.1) определяются корнями уравнения  $\alpha P(\alpha, \beta) - \tilde{\alpha}_0(\beta) = 0$ . В силу произвольности  $P(\alpha, \beta) > 0$  это уравнение может быть представлено, например, в виде  $[\alpha - \tilde{\alpha}_0(\beta)] \times \times [\alpha - \tilde{\alpha}_1(\beta)] [\alpha - \tilde{\alpha}_2(\beta)] \dots = 0$  и, следовательно, иметь любое число положительных корней, определяющих неоднозначную функцию  $\alpha^*(\beta)$  системы (П.1).

**Пример 2.** а) Пусть существуют периодические функции  $y = y_i(x)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ),  $y_i(x) < y_{i+1}(x)$ ,  $y_0(x) > 0$ , такие, что функция  $f$  удовлетворяет условиям

$$f'_y > 0 \quad (y_{2k} < y < y_{2k+1}), \quad f'_y < 0 \quad (y_{2r+1} < y < y_{2k+2}), \quad (\text{П.3})$$

$$f(x, y_{2k+1}(x)) > a, \quad f(x, y_{2k}(x)) < b \quad (a > b > 0). \quad (\text{П.4})$$

Тогда существуют такие  $a > 0$ ,  $\beta > 1$ , что система (5) в области  $y_0(x) < < y < y_n(x)$  имеет  $n$  грубых предельных циклов II рода.

б) Пусть имеют место неравенства (П.3), а неравенства (П.4) выполняются соответственно в областях

$$y_i(x) + \Delta_i(x)/2 > y > y_i(x) - \Delta_i(x)/2, \quad (\text{П.5})$$

$$\min_x \Delta_i(x) > \tilde{g}(h_i^0 + h_1(0)) - \tilde{g}(h_i^0 - h_2(0)),$$

где  $y = \tilde{g}(v)$  при  $y > 0$  есть функция, обратная  $v = g(y, 0, 0)$ . Тогда найдутся такие  $0 < \alpha \ll 1$ ,  $0 < \beta \ll 1$ , при которых система (5) в области  $y_0(x) + \Delta_0/2 < y < y_n(x) - \Delta_n/2$  имеет  $n$  грубых предельных циклов II рода.

в) Пусть функция  $f$  удовлетворяет условиям (П.3)—(П.5), а функция  $G$  не зависит от параметров,  $G = \bar{G}(y)$ . Тогда существует по крайней мере  $n-1$  бифуркационных кривых  $\alpha = \alpha^{(2)}(\beta)$ , соответствующих существованию двойных предельных циклов II рода системы (16) в области  $y > 0$ .

**Доказательство.** а) Выберем значения  $\alpha$  и  $\beta$  такими, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{\beta + 1}{a} \leq \alpha \leq \frac{\beta - 1}{b}, \quad \beta \geq \frac{a + b}{a - b}. \quad (\text{П.6})$$

Тогда в силу (П.4) на кривых  $y = y_i(x)$  имеют место неравенства

$$Q(\beta - \alpha f(x, y_{2k}(x)) - F) > 0, \quad Q(\beta - \alpha f(x, y_{2k+1}(x)) - F) < 0,$$

Поэтому кривые  $y = y_i(x)$  на цилиндре  $S$  являются циклами без контакта. Следовательно, в каждой из областей  $y_i(x) < y < y_{i+1}(x)$  согласно (П.3) существует предельный цикл  $l_{i+1}$ , единственный в силу критерия Бендиксона (14).

б) Систему (5) представим в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y G(y, 0, 0)^{-1} + p(y, \mu, \lambda), \\ \dot{y} &= Q(-F(x)) + [Q(\mu(1 - \lambda f) - F) + Q(F)], \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

где  $\mu = \beta \ll 1$ ,  $\lambda = \alpha/\beta = \text{const}$ ,  $p = y [G^{-1}(y, \alpha, \beta) - G^{-1}(y, 0, 0)]$ . При  $\mu = 0$  система (П.7) консервативна и имеет интеграл (10) при  $\alpha = \beta = 0$ , определяющий при  $h \geq h_2(0)$  семейство замкнутых кривых, охватывающих цилиндр. Уравнение, корни которого определяют кривую консервативной системы, от которой происходит рождение предельных циклов [15], имеет вид

$$\Psi(h) = \int_0^{2\pi} Q'_u(F(x)) [1 - \lambda f(x, \tilde{g}(h + q(x, 0)))] dx = 0. \quad (\text{П.8})$$

Согласно (П.5) существуют такие  $h_i^0$ , при которых функция  $f$  в (П.8) удовлетворяет неравенствам (П.4). Тогда, выбирая  $\lambda^{-1} \in [a, b]$ , получаем неравенства  $\Psi(h_{i^*}^0) > 0$ ,  $\Psi(h_{2i+1}^0) < 0$ . Следовательно, в силу непрерывности и согласно (П.3) монотонности на интервалах  $(h_i^0, h_{i+1}^0)$  функция  $\Psi(h)$  имеет  $n$  простых корней, определяющих  $n$  грубых предельных циклов II рода системы (5) в области параметров

$$0 < \alpha \ll 1, \quad 0 < \beta \ll 1, \quad a \geq \beta/\alpha \geq b. \quad (\text{П.9})$$

в) Из пунктов а), б) следует, что при значениях параметров из областей (П.6), (П.9) система (16) имеет  $n$  предельных циклов  $l_{i+1}$  с чередующейся устойчивостью, причем нижний из них  $l_1$  устойчив. Пусть  $n$  нечетно. Тогда цикл  $l_n$  также устойчив. С другой стороны, при  $\beta = 0$  в силу теоремы (1) система (16) имеет структуру  $K$  и, следовательно, не имеет циклов, а при  $\alpha = 0$ ,  $\beta > 0$  система (16) имеет интеграл (10), определяющий семейство траекторий при  $h > h_*(\beta)$ , уходящих в бесконечность при  $t \rightarrow +\infty$ . Так как имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \beta} [\bar{G}(y) y^{-1} Q] = \bar{G} Q'_u y^{-1},$$

векторное поле системы (16) в области  $y > 0$  с уменьшением  $\beta$  поворачивается по часовой стрелке, а в силу (11) с уменьшением  $\alpha$  — против часовой стрелки. Тогда получаем, что с уменьшением  $\beta$  от значений  $\beta$ , удовлетворяющих неравенствам (П.6), (П.9), до нуля  $n-1$  верхних предельных циклов попарно исчезают через бифуркацию двойных предельных циклов. Следовательно, при всех  $\alpha$ , удовлетворяющих (П.6), (П.9), существует  $m = (n-1)/2$  значений  $\beta = \beta_m(\alpha)$ , определяющих бифуркацию двойных предельных циклов II рода. С уменьшением  $\alpha$  от значений  $\bar{\alpha}$  до нуля  $n-1$  нижних предельных циклов, существующих при  $\alpha = \bar{\alpha}$ , попарно исчезают при  $\alpha = \alpha_m(\beta)$ ,  $\beta = \bar{\beta}$  через бифуркацию двойных предельных циклов. Следовательно, система (16) при этом действительно имеет по крайней мере  $n-1$  бифуркационных кривых  $\alpha = \bar{\alpha}^{(n)}(\beta)$ . При четных  $n$  доказательство пункта в) аналогично проведенному.

**Пример 3.** Пусть функция  $f$ , кроме (4), удовлетворяет условию  $\lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$ . Тогда при любом  $\beta > 0$  найдется такое  $y_1$ , что для траекторий системы (5)  $y = y_0(x)$ , таких, что  $y_0(x) > \bar{y}_1$ , в силу (9) выполняется неравенство (8). Следовательно, система (5) при  $\beta > 0$  области  $\Omega$  не имеет.

**Пример 4.** Пусть функция  $f$ , кроме (4), удовлетворяет условиям

$$f > \lambda^*(h_2(0))^{-1} \quad (y > y^* > 0), \quad (\text{П.10})$$

$$f'_y > 0 \quad (0 < y < \tilde{g}(h_{01} + h_1(0)), h_{01} > h_2(0) + g(y^*)), \quad (\text{П.11})$$

где

$$\lambda^*(h) = \int_0^{2\pi} Q'_u(F) dx \left\{ \int_0^{2\pi} Q'_u(F) f(x, \tilde{g}(h + q(x, 0))) dx \right\}^{-1}.$$

Тогда область  $\Omega$  системы (16) при  $0 < \beta \ll 1$  определяется бифуркацией петли сепаратрисы II рода в области  $y > 0$ . Действительно, при  $0 < \alpha \ll 1$ ,  $0 < \beta \ll 1$  система (16) преобразуется к виду (П.7). Рассмотрим функцию

$$R(h) = \int_0^{2\pi} Q'_u [f(x, \tilde{g}(h + q(x, 0))) - \lambda^*(h_2(0))^{-1}] dx. \quad (\text{П.12})$$

В силу (П.10), (П.11) функция  $R(h)$  монотонно возрастает при  $h \in [h_2(0), h_{01}]$  и удовлетворяет условиям  $R(h_2(0)) = 0$ ,  $R(h) > 0$  при  $h > h_2(0)$ . Откуда, учитывая, что (П.12) представима в виде

$$R(h) = \int_0^{2\pi} Q'_u [\lambda^*(h)^{-1} - \lambda^*(h_2(0))^{-1}] dx,$$

устанавливаем, что при любых  $h > h_2(0)$  имеет место неравенство  $\lambda^*(h) < \lambda^*(h_2(0))$ . Следовательно, при  $\lambda > \lambda^*(h_2(0))$  и  $\lambda = \lambda^*(h_2(0))$  имеют место соответственно соотношения  $\Psi(h) < 0$  при  $h > h_2(0)$  и  $\Psi(h_2(0)) = 0$ , которые в силу (11) означают, что область  $\Omega$  системы (16) при условиях (4), (П.10), (П.11) при  $0 < \beta \ll 1$  определяется бифуркацией петли сепаратрисы II рода.

**Пример 5.** Пусть функция  $f$ , кроме (4), удовлетворяет неравенству (П.11) и условиям

$$f > \lambda^*(h_2(0))^{-1} \quad (y^* < y < \tilde{g}(h_{01} + h_1(0))),$$

$$f < \lambda^*(h_2(0))^{-1} \quad (\tilde{g}(h_{02} - h_2(0)) < y < \tilde{g}(h_{02} + h_1(0))), \quad (\text{П.13})$$

$$f > \lambda^*(h_2(0))^{-1} \quad (y > \tilde{g}(h_{03} - h_2(0)) > \tilde{g}(h_{02} + h_1(0))),$$

$$\tilde{g}(h_{01} + h_1(0)) < \tilde{g}(h_{02} - h_2(0)).$$

Тогда область  $\Omega$  системы (16) при  $0 < \beta \ll 1$  определяется бифуркацией двойного предельного цикла II рода. Действительно, в силу (П.11) — (П.13) функция  $R(h)$  удовлетворяет неравенствам  $R(h) \geq 0$  при  $h \in [h_2(0), h_{01}]$ ,  $R(h_{02}) < 0$ ,  $R(h) > 0$  при  $h \geq h_{03}$ . Следовательно, непрерывная функция  $R(h)$  принимает минимальное значение при некотором  $h = h^*$ ,  $h^* \in (h_{01}, h_{03})$ , причем  $R(h^*) \leq R(h_{02})$ . Откуда получаем, что при всех  $h \geq h_2(0)$ ,  $h \neq h^*$  выполняется неравенство  $\lambda^*(h^*) \geq$



$> \lambda^*(h)$ . Следовательно, при  $\lambda > \lambda^*(h^*)$  и  $\lambda = \lambda^*(h^*)$  выполняются соответственно условия  $\Psi(h) < 0$  при  $h \geq h_2(0)$ ,  $h \neq h^*$ ;  $\Psi(h^*) = 0$ , в силу (11) означающие, что область  $\Omega$  системы (16) при условиях (4), (П.11), (П.13) при  $0 < \beta \ll 1$  определяется бифуркацией двойного цикла II рода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Капранов, В. И. Иванов, Н. Н. Иванова, Радиотехника и электроника, 5, № 11, 1774 (1960)
2. В. Н. Белых, В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 3, 407 (1968).
3. В. Н. Белых, В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 11, 1756 (1958).
4. М. В. Капранов, Т. И. Наянова, Докл. научн. техн. конфер, по итогам НИР за 1966—1967 гг., секция радиотехническая, подсекция теории колебаний, МЭИ, 1967.
5. В. Н. Белых, В. Д. Шалфеев, Радиотехника и электроника, 14, № 11, 1967 (1969).
6. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959
7. М. В. Капранов, Радиотехника, 11, № 12, 37 (1956).
8. Л. Н. Белюстина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 4, 638 (1959).
9. Л. Н. Белюстина, В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 3, 383 (1968).
10. Л. Н. Белюстина, Р. А. Чеснокова, Ученые записки НИИ ПМК (материалы к Всесоюзному межвузовскому симпозиуму по прикладной математике и кибернетике), Горький, 1967.
11. В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 7, 1037 (1969).
12. Е. А. Барбашин, В. А. Табуева, Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством, изд. Наука, М., 1969.
13. Н. Н. Баутин, ПММ, 33, вып. 6, 969 (1969).
14. В. Н. Белых, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 11, 1760 (1968).
15. Л. С. Понтрягин, ЖЭТФ, 4, 9 (1934).

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
25 января 1971 г.

ON EQUATIONS FOR PHASE-LOCKED SYSTEMS WITH  
CONTROL NONLINEAR CIRCUIT

V. N. Belykh

A system of two differential equations on a cylinder that describes dynamics of a phase-locked system under general assumptions on characteristics of control nonlinear circuit is analyzed. Questions on possible bifurcation curves in a two-parameter region and on an absolute stability region structure are considered.

УДК 517.9 + 621.396.078.6

**ОБ ОЦЕНКАХ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ФАП  
С НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПЬЮ УПРАВЛЕНИЯ**

*В. Н. Белых*

Исследуется система двух дифференциальных уравнений на цилиндре, описывающая динамику систем ФАП с нелинейной цепью управления. Получены оценки областей устойчивости в большом при некоторых условиях на характеристики нелинейной цепи управления.

**ВВЕДЕНИЕ**

Рассматриваются система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \bar{G}(y)Q(\beta - \alpha f(x, y) - F(x)) \tag{1}$$

и система вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = G(y, \alpha, \beta)Q(\beta - \alpha \bar{f}(y) - F(x)) \tag{2}$$

при следующих предположениях: функции  $Q, G, \bar{G}, f, \bar{f}, F$  непрерывны, а их производные терпят конечные скачки в конечном числе точек:  $z = Q(u)$  — нечетная монотонно возрастающая функция ( $Q^{-1} = \Phi(z)$ );  $G > 0, \bar{G} > 0; f, \bar{f}, F$   $2\pi$ -периодичны по  $x; fy^{-1} > 0, \bar{f}_y > 0, \bar{f}(0) = 0, F'_x > 0$  при  $x \in (\bar{x}_0, x_0); F(x_0) = 1, F(\bar{x}_0) = -1, F'_x < 0$  при  $x \in (x_0, \bar{x}_0 + 2\pi); \int_0^{2\pi} F(x) dx = 0, \int_0^{2\pi} Q(F(x)) dx = 0; \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$

В статье используются результаты работы [1] и принятые там обозначения:  $O_1(x_1(\beta), 0)$  — устойчивое состояние равновесия типа фокус или узел,  $O_2(x_2(\beta), 0)$  — седло;  $S^+$  —  $\omega$ -сепаратриса седла  $O_2$  в области  $y > 0, S^-$  —  $\alpha$ -сепаратриса в области  $y > 0; D, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$  — область параметров систем (1), (2);  $\Omega$  — область параметров, для точек которой состояние равновесия  $O_1$  асимптотически устойчиво на всем фазовом цилиндре  $S : x \pmod{2\pi}, y.$

В работе даются оценки области  $\Omega$  систем (1) и (2) при дополнительных условиях на функции  $f, G$  и  $Q.$  Из установленных неравенств для функций в области  $D,$  определяющих область  $\Omega$  систем (1) и (2), следует, что 1) качественный вопрос об увеличении или уменьшении области  $\Omega$  (полосы захвата) при введении нелинейных характеристик в цепи управления ФАП при определенных условиях на функции  $f, G$  и  $Q$  может решаться по виду описывающих уравнений; 2) для увеличения области  $\Omega$  необходимо увеличивать функции  $|f|, G$  и  $|Q|.$  Приведенные примеры указывают на возможность эффективного использования полученных результатов.

**1. ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ  $\Omega_1$  СИСТЕМЫ (1) ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ФУНКЦИЮ  $f(x, y)$**

Введем в рассмотрение вспомогательные системы уравнений вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \bar{G}(y)Q(\beta - \alpha f^+(x, y) - F(x)), \tag{3}$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \bar{G}(y)Q(\beta - \alpha f^-(x, y) - F(x)), \tag{4}$$

где функции  $f^+$  и  $f^-$  удовлетворяют условиям

$$(f^+)'_y > 0, \quad (f^-)'_y > 0 \quad (y > 0). \quad (5)$$

Согласно [1], области  $\Omega$  систем (3) и (4) ( $\Omega_1^+$  и  $\Omega_1^-$ ) определяются однозначными функциями  $\alpha = \alpha_1^+(\beta)$  и  $\alpha = \alpha_1^-(\beta)$ , соответствующими существованию петли сепаратрисы II рода систем (3) и (4) в области  $y > 0$ , так что

$$\Omega_1^+ : \alpha > \alpha_1^+(\beta), \quad \Omega_1^- : \alpha > \alpha_1^-(\beta).$$

*Теорема 1.* Если функция  $f(x, y)$  системы (1) удовлетворяет неравенствам

$$f^+ > f(x, y) > f^- \quad (y > 0), \quad (6)$$

то при всех  $\beta \in (0, 1)$  существует функция  $\alpha = \gamma_1(\beta)$ , определяющая область  $\Omega$  системы (1),  $\Omega_1 : \alpha > \gamma_1(\beta)$ , удовлетворяющая условию

$$\alpha_1^+(\beta) < \gamma_1(\beta) < \alpha_1^-(\beta). \quad (7)$$

*Доказательство.* Сравнивая наклоны векторных полей системы (1) и систем (3), (4), в силу (6) получаем

$$R_1^+ = \bar{G}(y) y^{-1} [Q(\beta - \alpha f - F) - Q(\beta - \alpha f^+ - F)] > 0, \quad (8)$$

$$R_1^- = \bar{G}(y) y^{-1} [Q(\beta - \alpha f - F) - Q(\beta - \alpha f^- - F)] < 0. \quad (9)$$

Из неравенства (9) и расположения траекторий системы (4) при  $\alpha \geq \alpha_1^-(\beta)$  следует, что система (1) в области  $y > 0$  при  $\alpha \geq \alpha_1^-(\beta)$  не имеет ни одной траектории  $y = y_1(x)$ , удовлетворяющей неравенству  $y_1(x) \leq y_1(x + 2\pi)$ . Стало быть, при  $\alpha \geq \alpha_1^-(\beta)$  система (1) в области  $y > 0$  не имеет предельных циклов II рода, а  $\omega$ -сепаратриса  $S_1^+$  пересекает прямую  $x = x_1(\beta)$  в точке  $N_1^+$ , расположенной выше пересечения  $\alpha$ -сепаратрисы  $S_1^-$  с прямой  $x = x_1(\beta)$  в точке  $N_1^-$ . Следовательно, имеют место соотношения

$$\Omega_1^- \subset \Omega_1, \quad \alpha_1^-(\beta) \subset \Omega_1. \quad (10)$$

Из неравенства (8) и расположения траекторий системы (3) при  $\alpha = \alpha_1^+(\beta)$  следует, что сепаратрисы  $S_1^+$  и  $S_1^-$  системы (1) при  $\alpha = \alpha_1^+(\beta)$  проходят так, что точка  $N_1^+$  лежит ниже точки  $N_1^-$ , и, следовательно, имеет место соотношение

$$\alpha_1^+(\beta) \bar{\subset} \Omega_1. \quad (11)$$

Тогда, учитывая, что векторное поле системы (1) с увеличением  $\alpha$  поворачивается по часовой стрелке [1], в силу (10) и (11) устанавливаем существование кривой  $\alpha = \gamma_1(\beta)$ , удовлетворяющей неравенствам (7). Теорема доказана.

Если функция  $f$  системы (1) удовлетворяет условию  $f'_y > 0$ , то, согласно [1], траектории системы (1) из области  $y \geq \underline{y}_1(x)$ , где  $\underline{y}_1(x)$  — решение уравнения  $\beta + 1 - \alpha f(x, y) = 0$ , попадают в область  $0 < y < \underline{y}_1(x)$ . Поэтому в случае, когда  $f'_y > 0$ , для доказательства (7) достаточно потребовать выполнение неравенств (6) при  $0 < y < \underline{y}_1(x)$ .

### 3. ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ $\Omega_2$ СИСТЕМЫ (2) ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ФУНКЦИЮ $G(y, \alpha, \beta)$

Из [1] следует, что область  $\Omega_2$  системы (2) определяется функцией  $\alpha = \gamma_2(\beta)$ , соответствующей существованию у системы (2) петли сепаратрисы II рода в области  $y > 0$ . Поэтому оценка области  $\Omega_2$  сводится к оценке функции  $\alpha = \gamma_2(\beta)$ .

Введем в рассмотрение системы уравнений вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = G^+(y)Q(\beta - \alpha\bar{f}(y) - F), \quad (12)$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = G^-(y)Q(\beta - \alpha\bar{f}(y) - F), \quad (13)$$

где  $G^+(y) > 0$ ,  $G^-(y) > 0$ .

Так как функции  $G^+$  и  $G^-$  не зависят от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , то согласно [1] области  $\Omega$  систем (12) и (13),  $\Omega_2^+$  и  $\Omega_2^-$  определяются однозначными функциями  $\alpha = \alpha_2^+(\beta)$  и  $\alpha = \alpha_2^-(\beta)$  так, что  $\Omega_2^+ : \alpha > \alpha_2^+(\beta)$ ,  $\Omega_2^- : \alpha > \alpha_2^-(\beta)$ .

Пусть  $y = y_2(x)$  — уравнение интегральной кривой, составленной из сепаратрис  $S_2^+$  и  $S_2^-$  седла  $O_2$  системы (2), а  $y = y_2^+(x)$  и  $y = y_2^-(x)$  — соответственно систем (12) и (13) при  $x \in [\bar{x}, \bar{x} + 2\pi)$ , где  $\bar{x}$  — координата точки пересечения  $\omega$ -сепаратрисы  $S_2^+$  седла  $O_2$  системы (2) с кривой  $\bar{u} = \beta - \alpha\bar{f}(y) - F = 0$ .

**Теорема 2.** Если функция  $G(y, \alpha, \beta)$  в системе (2) удовлетворяет неравенствам

$$G^+ > G(y, \alpha, \beta) > G^- \quad (0 < y < M), \quad (14)$$

где  $M$  — решение уравнения  $\beta + 1 = \alpha\bar{f}(y)$  относительно  $y$ , то функция  $\alpha = \gamma_2(\beta)$  удовлетворяет неравенству

$$\alpha_2^+(\beta) < \gamma_2(\beta) < \alpha_2^-(\beta). \quad (15)$$

**Доказательство.** Сравнивая наклоны векторных полей системы (2) и систем (12), (13), получаем  $R_2^{+(-)} = (G^-G^{+(-)}, y^{-1}Q(\bar{u}))$ , откуда в силу (14) устанавливаем неравенства

$$R_2^+ \bar{u} < 0, \quad R_2^- \bar{u} > 0 \quad (0 < y < M). \quad (16)$$

Покажем, что при  $\alpha \geq \alpha_2^-(\beta)$  сепаратрисы  $S_2^+$  и  $S_2^-$  седла  $O_2$  системы (2) проходят так, что точка  $N_2^+$  расположена выше точки  $N_2^-$ .

Предположим противное, что точка  $N_2^+$  расположена выше точки  $N_2^-$ . Тогда, интегрируя эквивалентное системе (2) уравнение  $\Phi\left(G^{-1}y \frac{dy}{dx}\right) = \beta - \alpha\bar{f} - F$  по кривой  $y = y_2(x)$ , в силу предположения получаем неравенство (см. (9) работы [1])

$$I = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+2\pi} \Phi(y_2(x)G^{-1}y_2'(x)) dx = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+2\pi} [\beta - \alpha\bar{f}(y_2(x))] dx \geq 0. \quad (17)$$

С другой стороны, учитывая, что, согласно (16), выполняются неравенства  $y_2^-(x) < y_2(x) < M$ , получаем

$$I < \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+2\pi} [\beta - \alpha\bar{f}(y_2^-(x))] dx < 0,$$

что противоречит (17). Следовательно, при  $\alpha \geq \alpha_2^-(\beta)$  точка  $N_2^+$  расположена выше точки  $N_2^-$  и имеют место соотношения

$$\Omega_2^- \subset \Omega_2, \quad \alpha_2^-(\beta) \subset \Omega_2. \quad (18)$$

Аналогично (18) устанавливаем, что при  $\alpha_2^+(\beta) \geq \alpha > 0$  сепаратрисы  $S_2^+$  и  $S_2^-$  седла  $O_2$  системы (2) проходят так, что точка  $N_2^+$  расположена ниже точки  $N_2^-$  и, следовательно, область  $\bar{\Omega}_2^+ : \alpha_2^+(\beta) \geq \alpha > 0$  обладает свойством.

$$\bar{\Omega}_2^+ \subset \Omega_2. \quad (19)$$

Тогда из соотношений (18), (19) следует, что функция  $\alpha = \gamma_2(\beta)$ , определяющая существование петли сепаратрисы II рода седла  $O_2$  системы (2), удовлетворяет неравенствам (15).

В силу возможной неоднозначности функция  $\gamma_2(\beta)$  при  $\beta = \text{const}$  может принимать несколько значений  $\gamma_{21}(\beta) \geq \gamma_{22}(\beta) \geq \dots$ . При этом неравенства (15) переписываются в виде

$$\alpha_2^+(\beta) < \dots \leq \gamma_{22}(\beta) \leq \gamma_{21}(\beta) < \alpha_2^-(\beta).$$

#### 4. ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ $\Omega_3$ СИСТЕМЫ (2) ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ НА ФУНКЦИЮ $Q$

Так же, как в разделе 3, будем проводить оценки функции  $\sigma = \gamma_3(\beta)$ , соответствующей существованию петли сепаратрисы седла  $O_2$  системы (2) в области  $y > 0$ , определяющей область  $\Omega_3$ .

Рассмотрим системы уравнений вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = G(y, \alpha, \beta) Q^+(\beta - \alpha \bar{f}(y) - F), \quad (20)$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = G(y, \alpha, \beta) Q^-(\beta - \alpha \bar{f}(y) - F), \quad (21)$$

где функции  $Q^+$  и  $Q^-$ , как и функция  $Q$ , нечетные и монотонно возрастающие.

Из [1] следует, что области  $\Omega$  систем (20) и (21),  $\Omega_3^+$  и  $\Omega_3^-$ , определяются функциями  $\alpha = \gamma_3^+(\beta)$  и  $\alpha = \gamma_3^-(\beta)$  так, что области  $\bar{\Omega}_3^- : \alpha > \gamma_3^-(\beta)$  и  $\bar{\Omega}_3^+ : 0 < \alpha \leq \gamma_3^+(\beta)$  обладают свойствами  $\bar{\Omega}_3^- \subset \Omega_3^-$ ,  $\bar{\Omega}_3^+ \subset \Omega_3^+$ , где  $\bar{\gamma}_3^-$  и  $\bar{\gamma}_3^+$  совпадают с функциями  $\gamma_3^-(\beta)$  и  $\gamma_3^+(\beta)$ , если  $\gamma_3^-$  и  $\gamma_3^+$  однозначны, и являются при  $\beta = \text{const}$  наибольшим и наименьшим значениями функций  $\gamma_3^-$  и  $\gamma_3^+$  соответственно, если  $\gamma_3^-$  и  $\gamma_3^+$  неоднозначны.

Пусть  $y = y_3^+(x)$  и  $y = y_3^-(x)$  — уравнения интегральных кривых, составленных из сепаратрис  $S_3^+$  и  $S_3^-$  седла  $O_2$  систем (20) и (21) соответственно при  $x \in [\bar{x}, \bar{x} + 2\pi)$ .

**Теорема 3.** Если функция  $Q(u)$  в системе (2) удовлетворяет неравенствам

$$(Q(u) - Q^-)u > 0, \quad (Q(u) - Q^+)u < 0 \quad (|u| < 2), \quad (22)$$

то функция  $\alpha = \gamma_3(\beta)$  удовлетворяет неравенству

$$\bar{\gamma}_3^+(\beta) < \gamma_3(\beta) < \bar{\gamma}_3^-(\beta). \quad (23)$$

Сравнивая наклоны векторных полей системы (2) и систем (20), (21), устанавливаем в силу (22) аналогичные (16) неравенства

$$R_3^+ \bar{u} < 0, \quad R_3^- \bar{u} > 0 \quad (0 < y < M). \quad (24)$$

Покажем, что при  $0 < \alpha \leq \bar{\gamma}_3^+(\beta)$  сепаратрисы  $S_2^+$  и  $S_2^-$  седла  $O_2$  системы (2) проходят так, что точка  $N_2^+$  расположена ниже точки  $N_2^-$ . Предположим противное, что точка  $N_2^+$  расположена не ниже точки  $N_2^-$ . Тогда аналогично (17) устанавливаем неравенство

$$I = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+2\pi} \Phi(G^{-1} y_2(x) y_2^+(x)) dx \leq 0. \quad (25)$$

С другой стороны, так как согласно (24) имеет место соотношение  $y_2(x) < y_2^+(x) < M$ , получаем неравенство

$$I = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+2\pi} [\beta - \alpha \bar{f}(y_2(x))] dx > \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+2\pi} [\beta - \alpha \bar{f}(y_2^+(x))] dx > 0,$$

противоречащее (25). Следовательно, при  $0 < \alpha \leq \bar{\gamma}_3^+(\beta)$  точка  $N_2^+$  расположена ниже точки  $N_2^-$  и выполняется условие

$$\bar{\Omega}_3^+ \subset \Omega_3. \quad (26)$$

Аналогично (18) и (26) устанавливаем, что при  $\alpha \geq \bar{\gamma}_3^-(\beta)$  сепаратрисы  $S_2^+$  и  $S_2^-$  седла  $O_2$  системы (2) проходят так, что точка  $N_2^+$  расположена выше точки  $N_2^-$  и, следовательно, имеют место условия

$$\bar{\Omega}_3^- \subset \Omega_3, \quad \bar{\gamma}_3^-(\beta) \subset \Omega_3. \quad (27)$$

Из соотношений (26), (27) следует неравенство (23).

## 5. ПРИМЕРЫ

Проиллюстрируем использование полученных результатов при качественном решении вопроса об увеличении области  $\Omega$  (полосы захвата) на примере систем уравнений вида (1) и (2), описывающих динамику систем ФАП. Эти системы уравнений при конкретных видах функций  $f$ ,  $G$  и  $Q$  рассматривались в [2-6], где вопрос об увеличении полосы захвата при помощи численного интегрирования и приближенных методов решен количественно.

а) Рассмотрим систему уравнений, к которой приводит задача исследования динамики системы ЧФАП с одинаковыми интегрирующими фильтрами в фазовой и частотной цепях [2] вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \beta - F(x) - \alpha y - bh(k\alpha y), \quad (28)$$

где  $F(x)$  и  $h(k\alpha y)$  — характеристики фазового и частотного детекторов. Система (28) является частным случаем системы (1) при  $\bar{G} = 1$ ,  $Q = u$ ,  $f = y + b_1 h(k_1 y)$ , где  $b_1 = b\alpha^{-1} = \text{const}$ ,  $k_1 = k\alpha = \text{const}$ . Так как нечетная функция  $h(k_1 y)$  при  $y > 0$  удовлетворяет неравенству  $h_0 \geq h(k_1 y) > 0$  [2], функция  $f$  при  $y > 0$  удовлетворяет условию

$$y < y + b_1 h(k_1 y) < r_1 y \quad (r_1 > 1). \quad (29)$$

Поэтому в качестве систем сравнения (3) и (4) можно выбрать системы вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \beta - ar_1 y - F(x), \quad (30)$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \beta - \alpha y - F(x). \quad (31)$$

Функция  $\alpha = \alpha_1^-(\beta)$  системы (31),  $\alpha = \alpha^*(\beta)$ , при  $F = \sin x$  с достаточной точностью численно построена в [7], а при кусочно-линейных  $F$  может быть получена аналитически, как это сделано, например, в [8, 9]. Функция  $\alpha = \alpha_1^+(\beta)$  системы (30), очевидно, равна  $\alpha_1^+(\beta) = r_1^{-1} \alpha^*(\beta)$ . Тогда функция  $\alpha = \bar{\gamma}_1(\beta)$ , определяющая область  $\Omega$  системы (28), согласно теореме 1 удовлетворяет неравенствам

$$r_1^{-1} \alpha^*(\beta) < \bar{\gamma}_1(\beta) < \alpha^*(\beta). \quad (32)$$

Из (32) следует, что введение указанного частотного кольца в систему ФАП с интегрирующим фильтром увеличивает полосу захвата.

б) Рассмотрим систему уравнений, описывающую динамику системы ФАП с нелинейным затуханием [3], вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \beta - F(x) - \alpha f_n(y), \quad (33)$$

где  $f_n = \sum_{k=1}^n a_k |y|^k \operatorname{sgn} y$ ,  $a_k > 0$ . Так как имеют место неравенства  $f_n > f_{n-1}$  при  $y > 0$ , согласно теореме 1 при последовательном увеличении  $n$  от 1 полоса захвата соответствующей системы ФАП увеличивается.

в) Рассмотрим систему уравнений, описывающую динамику системы ФАП с нелинейной емкостью в фильтре низких частот [4], вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = G(\beta - \alpha y) [\beta - \alpha y - F]. \quad (34)$$

Так как функция  $G(\beta - \alpha y)$  при  $|y| < (\beta + 1)/\alpha$  удовлетворяет неравенству  $r_2 > G > 1$  [4], уравнения сравнения (12) и (13) в случае системы (34) имеют вид соответственно (30) при  $r_1 = r_2^{1/2}$  и (31). Тогда функция  $\alpha = \bar{\gamma}_2(\beta)$ , определяющая область  $\Omega$  системы (34), согласно теореме 2 удовлетворяет неравенствам

$$r_1^{-1/2} \alpha^*(\beta) < \bar{\gamma}_2(\beta) < \alpha^*(\beta). \quad (35)$$

Из (35) следует, что введение указанной нелинейной емкости в фильтр низких частот системы ФАП увеличивает полосу захвата.

г) Рассмотрим систему уравнений, описывающую динамику системы ФАП с нелинейным сопротивлением в фильтре низких частот [5, 6], вида

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = Q(\beta - \alpha y - F(x)). \quad (36)$$

Так как нечетная функция  $Q(u)$  при  $0 < u < 2$  удовлетворяет неравенствам  $r_3 u > Q(u) > u$  [5, 6], уравнения сравнения (20) и (21) для системы (36) имеют вид соответственно (30) при  $r_1 = r_3^{1/2}$  и (31). Тогда функция  $\alpha = \bar{\gamma}_3(\beta)$ , определяющая область  $\Omega$  системы (36), согласно теореме 3, удовлетворяет неравенствам

$$r_3^{-1/2} \alpha^*(\beta) < \bar{\gamma}_3(\beta) < \alpha^*(\beta). \quad (37)$$

Из неравенств (37) следует, что введение указанного нелинейного сопротивления в фильтр низких частот системы ФАП увеличивает полосу захвата.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Белых, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 11 (1971).
2. В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 7, 1037 (1969).
3. М. В. Капранов, Т. И. Наянова, Докл. науч. техн. конф. по итогам НИР за 1966—1967 гг., секция радиотехническая, подсекция теории колебаний, МЭИ, 1967.
4. В. Н. Белых, В. Д. Шалфеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 3, 407 (1968).
5. М. В. Капранов, В. А. Иванов, Н. Н. Иванова, Радиотехника и электроника, 5, № 11, 1774 (1960).
6. В. Н. Белых, В. Д. Шалфеев, Радиотехника и электроника, № 11, 1968 (1969).
7. A. Giger, Zs. fangewandte Math. und Phys., 7, 121 (1956).
8. М. В. Капранов, Радиотехника, 11, № 12, 37 (1956).
9. Н. А. Губарь, ПММ, 25, № 6, 1011 (1961).

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
25 января 1971 г.

ON ESTIMATIONS FOR STABILITY REGIONS OF PHASE-LOCKED  
SYSTEMS WITH CONTROL NONLINEAR CIRCUIT

*V. N. Belykh*

A system of two differential equations on a cylinder that describes dynamics of phase-locked systems with a control nonlinear circuit is analyzed. Estimations for regions of global stability are obtained under some conditions on characteristics of control nonlinear circuit.

---



УДК 621.391.193

## ЗАДАЧА ВЫБОРА МЕТОДА ЛЕЧЕНИЯ

*Ю. И. Неймарк, Э. С. Баталова, И. М. Иванова, Г. И. Морина,  
М. С. Бубель, Р. Ф. Федоровская*

Задача выбора метода лечения сводится к задаче оптимизации функции многих переменных, заданной в конечном числе точек. Рассмотрены две конкретные задачи клинической медицины.

Выбор метода лечения и режима больного является одной из наиболее сложных и ответственных задач клинической медицины. Обычно эта задача решается врачами на основании многолетнего опыта и наблюдений и часто зависит от знаний врача, его интуиции, наблюдательности и других причин. При назначении лечебных мероприятий врач сталкивается с задачей прогнозирования состояния больного. При этом он должен учесть различные объективные и анамнестические данные, результаты лабораторных исследований, рентгенологические данные и другие показатели. Число этих показателей довольно велико, и бывает трудно их проанализировать и оценить, чтобы назначить лечение и режим, при которых возможен благоприятный исход.

В последние годы для объективной диагностики заболеваний или прогнозирования течения болезни широко используются методы теории распознавания образов, которые позволяют повысить надежность диагностики сердечно-сосудистых заболеваний [1-6], злокачественных опухолей [7-8] и других заболеваний [9-13].

В настоящей работе решение задачи выбора наилучшей тактики лечения, как и задач диагностики заболеваний, основывается на статистическом материале. Кроме показателей, характеризующих состояние больного, используются данные о проводимых лечебных мероприятиях. В отличие от задач диагностики, где каждое заболевание обычно кодируется дискретной величиной, оценка состояния больного (исход лечения) имеет непрерывный монотонный характер, причем граничные значения интервала ее изменения соответствуют хорошему и плохому исходам лечения, а все внутренние значения — промежуточным состояниям от хорошего до плохого. Задача заключается в выборе такого набора параметров, характеризующих лечебные мероприятия, при которых исход был бы близок к хорошему. Математически эта задача сводится к поиску условного экстремума функции многих переменных, заданной в конечном числе точек.

Рассматриваются две конкретные задачи. Первая состояла в выборе такого режима и лечения больного после перенесенного инфаркта миокарда, которые позволили бы улучшить прогноз состояния больного в отдаленном периоде болезни. Вторая задача заключалась в выборе лечения кожного заболевания псориаз. В результате решения этих задач оказалось, что некоторым больным с плохим исходом можно назначить такой комплекс лечебных мероприятий, который улучшает их состояние.

1. Пусть состояние больного характеризуется  $n$  признаками  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . В качестве признаков могут быть взяты объективные и анамнестические данные, результаты лабораторных исследований, данные рентгеноскопии и другие показатели\*. Метод лечения характеризуется  $m$  признаками  $y_1, y_2, \dots, y_m$ . Под методом лечения будем понимать не только комплекс тех или иных лечебных мероприятий, но и определенный режим жизни больного, например, соблюдение диеты, занятия лечебной физкультурой, курение и др. Каждому больному с признаками  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$  ставится в соответствие параметр  $\pi$ , указывающий оценку его состояния при данном методе лечения (исход лечения). Допустим, что параметр  $\pi$  изменяется в интервале  $[\alpha, \beta]$ , причём значение  $\pi = \alpha$  соответствует плохому исходу, а  $\pi = \beta$  хорошему. Например,  $\pi = \beta$  может означать клиническое излечение, а  $\pi = \alpha$  летальный исход. Изменение величины  $\pi$  от  $\alpha$  до  $\beta$  соответствует изменению состояния больного от плохого до хорошего.

Пусть  $\{\pi_i, x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, y_1^i, y_2^i, \dots, y_m^i\}$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) — исходный статистический материал (показатели состояния и лечения  $N$  больных). Задача выбора метода лечения для больного  $x$  с признаками  $x_1, x_2, \dots, x_n$  состоит в отыскании такого набора  $y$  значений параметров  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , для которого величина  $\pi$  была бы наибольшей. Наилучшим набором  $y_1, y_2, \dots, y_m$  будет тот, при котором величина  $\pi$  равна  $\beta$  (хороший исход). Ясно, что в зависимости от значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  может быть один или несколько таких наборов, либо может не существовать ни одного набора.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию этой задачи. Признаки  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$  будем трактовать как координаты точек  $z$  в  $(n+m)$ -мерном пространстве  $R_{n+m}$ . В пространстве  $R_{n+m}$  определена некоторая непрерывная функция  $\pi(z)$ , заданная таблично в  $N$  точках

$$\pi_i = \pi(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i, y_1^i, y_2^i, \dots, y_m^i) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

(обучающая последовательность точек).

Требуется найти наибольшее значение функции  $\pi(z)$  при условии, что первые  $n$  переменных принимают заданные значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Как видно, мы имеем дело с задачей оптимизации функции многих переменных, с задачей поиска условного экстремума функции, осложненной тем, что оптимизируемая функция задана только в некотором конечном числе точек.

2. В настоящем разделе дается описание алгоритма и результатов решения двух конкретных задач клинической медицины. Первая задача состояла в выборе лечения и режима больного после перенесенного инфаркта миокарда. Каждый больной характеризовался 28 признаками, отражавшими его состояние в доинфарктном периоде, течение инфаркта и состояние сердечно-сосудистой системы в постинфарктном периоде. Признаки имели от двух до семи градаций, которые кодировались целыми числами с учетом монотонного изменения степени выраженности признака (некоторые из признаков и их кодировка приведены в табл. 6 работы [9]).

Для описания основных средств лечения были взяты 7 признаков: коронарорасширяющие средства, сердечные гликозиды, противосклеротические средства и др. С помощью градаций учитывался характер их применения (не назначались, назначались курсами, длительно, непрерывно). Режим больного описывался шестью признаками: соблюдение

\* Здесь не рассматриваются вопросы выбора и кодирования признаков. Обсуждение этих вопросов и примеры можно найти в [9].

диеты, лечебная гимнастика, курение и др. Все 13 признаков, их градации и кодировка приведены в Приложении 1.

Параметр  $\pi$  в данной задаче означает прогноз состояния больного на последующие три года по данным первого года после инфаркта миокарда при данном режиме и методе лечения. Интервал изменения, этого параметра [0, 4] условно разбит на пять градаций 0,1 ..., 4, причем значение  $\pi = 0$  соответствует плохому состоянию больного или летальному исходу вследствие коронарной сердечной недостаточности или повторного инфаркта миокарда,  $\pi = 4$  соответствует хорошему состоянию, все промежуточные значения  $\pi$  соответствуют изменению состояния больного от плохого до хорошего.

Задача выбора метода лечения для каждого больного, состояние которого характеризуется 28 признаками (по данным первого года), состоит в назначении таких средств лечения и режима в последующие три года, при которых величина  $\pi$  для него имеет наибольшее значение.

Обучающую последовательность для решения этой задачи составили 289 историй болезни больных, перенесших инфаркт миокарда и наблюдавшихся не менее трех лет. В первую группу с плохим прогнозом ( $\pi = 0$ ) были отнесены 19 больных, умерших от основного заболевания или его осложнений, и тяжелые инвалиды. Вторую группу с хорошим прогнозом ( $\pi = 4$ ) составили 108 больных без выраженной сердечной и коронарной недостаточности, с высокой степенью физической и умственной активности, трудоспособные. Остальные больные (с  $\pi = 1$  было 28 больных, с  $\pi = 2$  — 80, с  $\pi = 3$  — 54) были с умеренно выраженной сердечной и коронарной недостаточностью, занимающие промежуточное положение между этими двумя группами.

Чтобы выяснить вопрос, какова достоверность получаемых ответов на данном статистическом материале, поочередно для каждой точки обучающей последовательности на основе оставшихся 288 точек определялась величина  $\pi$ . Отыскание величины  $\pi$  производилось с помощью алгоритма распознавания по общей близости признаков [9] при учете 41 признака, из которых 28 характеризовали состояние больного и 13 признаков — лечение и режим, фактически соблюдавшиеся больным. Ответы оценивались как верные, если оценка  $\pi$  состояния больного, данная врачом, и полученная оценка  $\pi^*$ , различались не более чем на одну градацию, т. е., если  $|\pi - \pi^*| \leq 1$ , частичные несовпадения — при выполнении неравенства  $1 < |\pi - \pi^*| \leq 1,5$ , несовпадения — при  $1,5 < |\pi - \pi^*| \leq 2$ , грубые ошибки — при различии оценок более чем на две градации  $|\pi - \pi^*| > 2$ . Результаты распознавания всех 289 точек представлены в табл. 1.

Таблица 1

Классы	Верные ответы	Частичные несовпадения	Несовпадения	Грубые ошибки	Всего больных
$\pi = 0$	14	1	4	—	19
$\pi = 1$	26	1	1	—	28
$\pi = 2$	73	2	5	—	80
$\pi = 3$	51	1	2	—	54
$\pi = 4$	108	—	—	—	108
Всего	272	5	12		289

Как видно, достоверность прогноза на данном методе лечения уменьшается вместе с уменьшением  $\pi$ . В классе больных с хорошим прогнозом ( $\pi = 3,4$ ) она составляет 0,98, в классе больных со средним прогнозом ( $\pi = 2$ ) она равна 0,91, с плохим — 0,85. Как показал анализ

историй болезни, случаи несовпадений большей частью обусловлены внезапной смертью больного или повторными инфарктами. По-видимому, используемые признаки не содержат достаточно полной информации, раскрывающей угрозу развития повторного инфаркта миокарда и наступления внезапной смерти.

Выбор метода лечения сводится к отысканию всех максимумов функции  $\pi(z)$  (по переменным  $y_1, y_2, \dots, y_m$ ) и выбору из них того максимума, который дает наибольшее значение  $\pi$ .

Для определения точек максимума использовалось обобщение метода Кифера—Вольфовица [14], позволяющее приближенно находить экстремум функции нескольких переменных при наличии некоторого числа случайных ошибок в статистическом материале\*, а для вычисления значения  $\pi$  в любой точке  $z(x, y)$  пространства  $R_{n+m}$  — алгоритм распознавания по общей близости признаков [9]. Поиск максимума функции  $\pi(x, y)$  по набору переменных  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  осуществлялся по формулам, которые, согласно процедуре Кифера—Вольфовица, имеют вид

$$y_j^{l+1} = y_j^l + \frac{a_l}{2c_l} (\pi_{-j}^l - \pi_{+j}^l) \quad (1)$$

$$(j = 1, 2, \dots, m; l = 0, 1, 2, \dots).$$

Здесь  $a_l$  — некоторый член последовательности положительных чисел, определяющих длину шага,  $c_l$  — расстояние между двумя предыдущими наблюдениями. Величины  $a_l$  и  $c_l$  выбираются так, чтобы выполнялись условия

$$\lim_{l \rightarrow \infty} a_l = 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} c_l = 0, \quad \sum_{l=0}^{\infty} a_l = \infty, \quad \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{a_l}{c_l} \right)^2 < \infty$$

(при решении задачи они были взяты равными  $a_l = 1/(l+1)$ ,  $c_l = 1/2(l+1)^{1/3}$ ). Величины  $\pi_{-j}^l$  и  $\pi_{+j}^l$  есть значения функции  $\pi(z)$  в точках

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^l, y_2^l, \dots, y_j^l - c_l, y_{j+1}^l, \dots, y_m^l) \text{ и}$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1^l, y_2^l, \dots, y_j^l + c_l, y_{j+1}^l, \dots, y_m^l)$  соответственно.

Для выбора начального приближения  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_{13}^0$  использовались 162 точки обучающей последовательности с  $\pi = 3; 4$  (хороший исход). Среди этих точек находилась точка  $x^l$ , наиболее близко расположенная к заданной точке  $x$ , в пространстве  $R_{28}$ . В качестве начальных значений принимались переменные  $y_1^l, y_2^l, \dots, y_{13}^l$ . Процесс отыскания набора  $y$  заканчивался, если значение  $\pi(x, y^l)$  мало отличалось от  $\pi = 4$  (хороший исход). В случае, когда  $\pi(x, y^l)$  было меньше трех и не увеличивалось в течение  $L$  шагов, для выбора начального приближения использовался метод случайного поиска.

Этот способ был применен для поиска лечения и режима каждому из 127 больных с оценкой  $\pi = 0; 1; 2$ . Для 118 больных был найден другой метод лечения, отличающийся от фактического теми или иными средствами лечения или режимом. Для 58 больных прогноз при новом методе лечения улучшился, для 60 больных прогноз не изменился. В строчках табл. 2 указано число больных, для которых значение  $\pi$

\* Заметим, что в случае, когда число возможных существенно различных вариантов метода лечения невелико, выбор метода лечения может быть осуществлен путем прямого перебора [9, 15].

при новом методе лечения увеличилось на некоторую величину  $\Delta\pi$ . Как видно из таблицы, для больных с плохим прогнозом ( $\pi = 0$ ) не удалось подобрать лечение так, чтобы прогноз улучшился до хорошего, хотя для шести из них прогноз приблизился к среднему. По-видимому, состояние этих больных настолько тяжелое, что вылечить их практически невозможно. Для 9 больных, имеющих средний прогноз ( $\pi = 2$ ), на новом методе лечения получен хороший прогноз.

Таблица 2

Класс	Приращение					всего больных
	$\Delta\pi=2$	$1<\Delta\pi<2$	$\Delta\pi=1$	$0<\Delta\pi<1$	$\Delta\pi=0$	
$\pi = 0$	3	3	5	2	6	19
$\pi = 1$	2	2	6	6	12	28
$\pi = 2$	4	5	9	11	42	71
Всего	9	10	20	19	60	118

В дополнение к данным таблицы отметим, что всем 47 больным с плохим прогнозом был назначен режим, исключающий употребление алкоголя, и 44 больным—курение. У трех больных с оценкой  $\pi = 1$  отказ от курения не улучшает прогноз. Улучшение прогноза не происходит также при отказе от курения и употребления алкоголя у 10 больных со средним прогнозом. Остальным 70 больным со средним прогнозом рекомендован режим, исключающий курение и алкоголь.

Для ряда больных необязательно строгое соблюдение диеты, достаточно соблюдать ее частично. Только трем больным со средним прогнозом рекомендовано превышение физической активности, предписанной врачом, восьми больным—физическая активность, менее рекомендованной. Во многих случаях имеются расхождения по вопросу о восстановлении трудоспособности. Это видно из табл. 3, в диагональных клетках которой указано число совпадений рекомендованного и соблюдавшегося фактически восстановления трудоспособности, в недиагональных—число несовпадений.

Таблица 3

Соблюдавшийся режим	Рекомендуемый режим			всего
	не работает после инфаркта	работать постепенно начинать	работать сразу начинать	
Не работал после инфаркта	24	38	—	62
Работал, постепенно начиная	7	19	2	28
Работал, сразу начиная	1	21	6	28
Всего	32	78	8	118

Для 78 больных рекомендуется постепенное восстановление трудоспособности и лишь 8 больным—недозированное восстановление трудоспособности. Восемью работающим больным для улучшения состояния рекомендовано не работать. У 36 из 38 больных, не приступивших к работе после инфаркта миокарда, но получивших рекомендацию постепенного восстановления трудоспособности, физическая активность была достаточной для выполнения домашней работы.

В ряде случаев рекомендуемое лечение отличается от назначенного врачом теми или иными средствами лечения, а также длительностью

их применения (курсами, длительно или непрерывно). В табл. 4 представлены данные о применении коронарорасширяющих средств.

Всем больным после инфаркта миокарда рекомендуется назначать коронарорасширяющие средства, в основном курсами. Больным с плохим прогнозом чаще рекомендуется назначать их непрерывно (18 больных из 25 имеют значение  $\pi=0$ ; 1), больным со средним прогнозом — длительно (18 из 20). Мочегонные средства и сердечные гликозиды рекомендуется назначать курсами; противосклеротические средства — курсами и длительно. В редких случаях рекомендуется назначать гипотензивные средства (примерно в 25% случаев) и еще реже — непрямые антикоагулянты.

Таблица 4

Назначение врача	Рекомендации				всего
	не назначать	назначать курсами	назначать длительно	назначать непрерывно	
Не назначались	—	1	—	—	1
Назначались курсами	—	36	7	11	54
Назначались длительно	—	32	13	12	57
Назначались непрерывно	—	4	—	2	6
Всего	—	73	20	25	118

Вторая задача состояла в выборе лечения больных чешуйчатым лишаем (псориаз). Каждый больной описывался 45 признаками, характеризующими его состояние. Лечение описывалось 30 признаками, указывающими на применение различных витаминов, гормональных препаратов, липолитических средств, различных мазей и т. д. Величина  $\pi$  здесь означает клинический эффект данного лечения. Интервал ее изменения разбит на 5 градаций (0, 1, ..., 4). Значение  $\pi=4$  соответствует клиническому излечению больного в срок менее двух месяцев,  $\pi=3$  — в срок более двух месяцев, значение  $\pi=2$  соответствует улучшению состояния больного за период менее двух месяцев,  $\pi=1$  — за срок свыше двух месяцев,  $\pi=0$  соответствует случаям, когда проведенный курс не дает эффекта. Статистический материал составили 410 историй болезни: 204 больных с  $\pi=4$ , 26 — с  $\pi=3$ , 122 — с  $\pi=2$ , 22 — с  $\pi=1$  и 6 больных с  $\pi=0$ .

Для шести больных, лечение которых не дало эффекта, определялся новый комплекс лечебных мероприятий, который позволил бы улучшить состояние больного. Во всех случаях оказалось возможным рекомендовать лечение, при котором величина  $\pi$  принимает значение от 4 до 3 (клиническое излечение).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

	Признак	Градация	Кодировка
1	Соблюдение диеты	полностью	0
		частично	1
		не соблюдал	3
2	Дозированная физическая активность	менее рекомендованной	0
		в соответствии с рекомендованной	2
		превышала рекомендованную	4
3	Лечебная физкультура	делает регулярно	0
		не регулярно	1
		не делает	3

	Признак	Г р а д а ц и я	Коди- ровка
4	Восстановление трудоспособности	не работает после инфаркта	0
		дозированное восстановление тру- доспособности (неполный рабо- чий день)	1
		недозированное восстановление трудоспособности (полный ра- бочий день)	3
5	Медикаментозное лечение (по по- казаниям)	систематически	0
		периодически	1
		не регулярно не лечился	3
6	Коронарорасширяющие средства	не назначались	0
		назначались курсами	1
		длительно	2
		непрерывно	3
7	Сердечные гликозиды	не назначались	0
		назначались курсами	1
		длительно	2
		непрерывно	3
8	Мочегонные средства	не назначались	0
		назначались курсами	1
		длительно	2
		непрерывно	3
9	Противосклеротические средства	не назначались	0
		назначались курсами	1
		длительно	2
		непрерывно	3
10	Гипотензивные средства	не назначались	0
		назначались курсами	1
		длительно	2
		непрерывно	3
11	Непрямые антикоагулянты	не назначались	0
		назначались курсами	1
		длительно	2
		непрерывно	3
12	Курение	не курит	0
		после инфаркта перерыв в куре- нии, затем курение	1
		курит непрерывно	4
13	Употребление алкоголя	нет	0
		умеренное	2
		употребляет часто и (или) помногу	4

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Вишневский, М. Л. Быховский, Б. М. Костюченко, А. Н. Мелик-Пашаев, Экспериментальная хирургия и анестезиология, № 5, 19, (1967)
2. Ю. И. Неймарк, З. С. Баталова, М. В. Введенская, Д. А. Рогова, Т. Н. Архангельская, Н. В. Мамонова, А. Ф. Ходова, сб. Вопросы кардиологии, Волго-Вятское книжное изд., 1966.
3. А. Л. Шерман, Изв. высш. уч. зав — Электромеханика, № 11, 1269 (1967).
4. Т. Б. Корневская, Л. А. Савченко, Кардиология, № 1, 108 (1969).
5. Ю. И. Неймарк, З. С. Баталова, Н. Д. Образцова, Я. Г. Любавин, В. И. Кочкин, Вопросы охраны материнства и детства, № 3, 9 (1968).
6. Н. К. Бианки, А. Л. Шерман, Ф. Х. Сафаров, А. М. Широв, Кардиология, № 12, 37 (1969).
7. Ю. Г. Щадошников, Экспериментальная хирургия и анестезиология, № 2, 76 (1967).

8. П. Е. Кунин, В. А. Бояджян, И. М. Таксар, С. Я. Мarmorштейн, Вестник АМН СССР, № 5, 52 (1968).
9. Ю. И. Неймарк, Э. С. Баталова, Уч. зап. НИИ ПМК и факультета ВМК ГГУ, Горький, 293, 1967.
10. Вгуан J. K., Нуque M. F., Liu G. C., Кото J. J., Teble D. L., 21-st Annual Southwest IEEE Conf. and Exhibit, San Antonio, Texas, 1969. New York, N. Y., 1969 (3A/1—3A/7).
11. К. И. Мышкин, Л. А. Франкфурт, М. В. Кольцов, Клиническая медицина, № 1, 66 (1970).
12. Л. Б. Розин, К. В. Гублер, Экспериментальная хирургия и анестезиология, № 3, 3 (1970).
13. А. А. Вишневский, С. Н. Брайнес, В. Л. Браиловский, Экспериментальная хирургия и анестезиология, № 4, 3 (1970).
14. Д. Дж. Уайлд, Методы поиска экстремума, изд. Наука, 1967.
15. Ginsberg Allen S., Offensend Fred L., IEEE Trans. Syst. Sci. and Cybernet., v. 4, № 3, 355 (1968).

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
26 октября 1970 г.

### TREATMENT CHOICE PROBLEM

*Yu. I. Neimark, Z. S. Batalova, I. M. Ivanova, G. I. Morina,  
M. S. Boobel, R. F. Fedorovskaya*

A treatment choice problem is reduced to the optimization problem for a polyvariable function given in a finite number of points. Two particular clinical problems are considered.

---



**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 517.11 + 62 — 50

**АДДИТИВНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ СИСТЕМЫ, ПРОБЛЕМА ПЕРЕВОДА**

Д. И. Коган

Рассматривается проблема осуществимости перевода из стартового в заданное состояние для нескольких классов аддитивных векторных систем (в терминах [1, 2]. — управляемых векторных систем). Исследование проводится для двух постановок задачи — дискретной и непрерывной. Полученные результаты показывают, что явление алгоритмической неразрешимости в дискретном варианте имеет место для более простых (в сравнении с непрерывным случаем) систем

1. Пусть  $N, J, R$  и  $D$  обозначают множества всех натуральных, целых, рациональных и действительных чисел. Формулы вида а)  $\sum_{i=1}^n a_i x_i < b$  или б)  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  — целые числа, будем называть элементарными. Формулы вида а) будем называть также  $s$ -элементарными;  $A$ -формулами назовем конъюнкции конечного числа элементарных формул.  $A$ -формулу назовем  $sA$ -формулой, если все формулы, входящие в нее,  $s$ -элементарны

Множество  $X, X \subseteq D$ , назовем выпуклым многогранным, если оно задается посредством некоторой  $A$ -формулы. Связное множество  $X, X \subseteq D^n$ , назовем многогранным, если оно задается посредством дизъюнкции конечного числа  $A$ -формул. Многогранное множество назовем незамкнутым, если  $A$ -формулы, его задающие, являются  $sA$ -формулами

Аддитивной векторной системой (АВС) назовем совокупность

$$\Omega = \langle n, Z, E_1, E_2, \dots, E_m, P_1, P_2, \dots, P_m \rangle,$$

где  $n \in N \setminus \{0\}$  (размерность системы);  $Z$  — незамкнутое многогранное подмножество  $D^n$  (множество позиций системы);  $E_1, E_2, \dots, E_m$  — многогранные множества, разбиение множества позиций на области одинаковых управлений;  $P_1, P_2, \dots, P_m$  — конечные подмножества  $I^n$  (множества операционных векторов системы).

Аддитивную векторную систему  $\Omega$  назовем безграничной, если  $Z = D^n$ , и однородной, если  $m = 1$ .

Последовательность позиций (элементов  $Z$ )  $S_1, S_2, \dots, S_t$  назовем траекторией АВС  $\Omega$ , если 1) из того, что  $S_{d-1} \in E_i$ , следует существование  $\alpha > 0$ , такого, что  $\alpha S_{d-1} \vec{S}_d \in P_i$  ( $d = 2, 3, \dots, t$ ), и 2) из  $(S_{d-1} \in E_i) \wedge (S_d \in E_j) \wedge (\vec{S}_{d-1} \vec{S}_d = \vec{\beta e})$  ( $e \in P_j$ ) следует, что в результате прибавления к позиции  $S_{d-1}$  вектора  $\gamma e$  ( $0 \leq \gamma < \beta$ ) получаем позицию из  $E_i$ . Последовательность позиций  $S_1, S_2, \dots, S_t$  назовем дискретной трассой, если из  $S_{d-1} \in E_i$  следует, что  $\vec{S}_{d-1} \vec{S}_d \in P_i$  ( $d = 2, 3, \dots, t$ ). Позицию  $X$  назовем достижимой ( $d$  — достижимой) из позиции  $A$ , если существует траектория (дискретная трасса) АВС  $\Omega$ , имеющая  $A$  начальной, а  $X$  конечной позицией.

2. Пусть  $K$  — класс всех АВС,  $K_1$  — класс однородных АВС,  $K_2$  — подкласс  $K_1$ , включающий АВС с выпуклым  $Z$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\Omega$  — АВС из  $K_2$  или  $K_1$ . Существует алгоритм определения по любой паре ее позиций  $X$  и  $Y$ , является ли  $Y$  достижимой из  $X$  позицией.

Для систем из  $K_2$  алгоритм состоит в проверке существования неотрицательного решения системы линейных уравнений  $X + \alpha_1 \vec{p}_1 + \alpha_2 \vec{p}_2 + \dots + \alpha_k \vec{p}_k = Y$  ( $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_k$  — операционные векторы системы  $\Omega$ ). Если  $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0)$  — решение, то траектория строится следующим образом. На каждом этапе поочередно добавляются векторы

$\frac{\alpha_1^0}{l} \rightarrow \frac{\alpha_2^0}{l} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{\alpha_k^0}{l} \rightarrow$ ; всего этапов  $l$  В результате каждого этапа получаем позицию

лежащую на отрезке, соединяющем  $X$  и  $Y$ . Расстояние  $l$  выбирается достаточно большим, чтобы при построении траектории не выйти из  $Z$ . Если  $ABC \Omega$  принадлежит  $K_1$ , то существуют гиперплоскости, разбивающие  $Z$  на конечное число выпуклых многогранных областей. Легко показать, что траекторию из  $X$  в  $Y$  можно искать в классе траекторий, входящих в каждую из выпуклых областей не более одного раза. Список выпуклых областей (в порядке их посещения траекторией) без повторений назовем протоколом траектории. Легко составляется система линейных уравнений, разрешимость которой означает существование траектории с данным протоколом. В виде промежуточных неизвестных фигурируют точки гиперплоскостей. Эффективность процедуры следует из конечности числа различных протоколов.

**Теорема 2** Существуют  $ABC \Omega$  из  $K$  и ее позиция  $\Pi$ , такие, что неразрешима проблема достижимости из  $X$  позиции  $\Pi$ .

Пусть  $A$  — автономный двухсчетчиковый автомат (определения даны в [1, 2]),, состояния которого  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Тройки вида  $(q_i, S_1, S_2)$ , где  $q_i$  — состояние автомата, а  $S_1, S_2$  — содержимые первого и второго счетчиков, будем называть конфигурациями  $A$ . Полагая  $A$  таким, что неразрешима проблема определения по начальной конфигурации  $(q_1, x, 0)$ , окажется ли  $A$  в некоторый момент в позиции  $(q_n, 0, 0)$  [3]. Считаем также, что 1) в результате каждого такта работы изменяется состояние  $A$ , 2) если автомат при некоторой ситуации на счетчиках переходит за один такт из состояния  $q_i$  в  $q_j$ , то ни в какой ситуации он не переходит из  $q_j$  в  $q_i$ , 3) по состоянию в момент  $\tau+1$  можно видеть, какой из счетчиков был пуст в момент  $\tau$ . Мы построим  $(n+2)$ -мерную  $ABC \Omega$ , моделирующую  $A$ . Автомату в конфигурации  $(q_i, \sigma_1, \sigma_2)$  (следующая конфигурация  $(q_j, \sigma_1, \sigma_2)$ ) соответствует область одноканальных управлений  $x_t = 0$  ( $t \in [1, 2, \dots, n]$ ,  $t \neq i$ ,  $t \neq j$ ),  $x_i > 0$ ,  $x_j > 0$ ;  $x_{n+1} > 0$  при  $\sigma_1 \geq 1$ ,  $0 \leq x_{n+1} < 1$  при  $\sigma_1 = 0$ ; аналогично определяется  $x_{n+2}$  в зависимости от  $\sigma_2$ . Колом конфигурации  $L = (q_i, S_1, S_2)$  назовем вектор  $\Phi(L) = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in}, S_1, S_2)$ . Здесь  $\delta_{ij} = 1$ , если  $i = j$ , и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Качественно конфигурации  $L$  называем  $F(L) = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{in}, \text{sg } S_1, \text{sg } S_2)$ ,  $\text{sg } x = 1$  при  $x > 0$  и  $\text{sg } x = 0$  при  $x = 0$ . У конфигураций автомата  $A$   $4n$  качеств, и, как видно, каждому соответствует одна введенная область одноканальных управлений. Если в некоторый момент конфигурация  $L$  заменяется на  $L^1$ , то  $\Phi(L^1) - \Phi(L)$  есть функция от  $\Phi(L)$ ; обозначим ее  $\varphi(i)$  ( $i$  — порядковый номер качества,  $i = 1, 2, \dots, 4n$ ). Области, соответствующей качеству номера  $i$ , припишем операционный вектор  $\varphi(i)$ . Дополним совокупность областей так, чтобы  $\Omega$  оказалась безграничной  $ABC$ . Способ задания операционных векторов в новых областях безразличен. Для  $\Omega$  неразрешима проблема достижимости из  $(1, 0, 0, \dots, 0, x, 0)$  позиции  $(0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0)$ .

**Теорема 3.** Существуют  $ABC \Omega$  из  $K_1$  и ее позиция  $\Pi$ , такие, что неразрешима проблема  $d$  — достижимости из  $X$  позиции  $\Pi$ .

Доказательство теоремы также может основываться на моделировании автомата  $A$ . Несколько иное доказательство приводится в [4]. Отметим как открытую проблему  $d$  — достижимости для  $K_2$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Гаврилова, Д. И. Коган, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 4, 534 (1970).
2. А. А. Бедина, Д. И. Коган, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 3, 441 (1971).
3. М. Minsky, Ann. Math., 74, 437.
4. Д. И. Коган, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, (в печати).

Научно-исследовательский институт  
прикладной математики и кибернетики  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
11 февраля 1971 г.

УДК 62 — 504

## О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ ОТ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ К НЕПРЕРЫВНОЙ

А. С. Алексеев

В обширной литературе по исследованию динамики импульсных систем [1] справедливо считается, что полученные результаты могут быть использованы для приближенного исследования соответствующих непрерывных нелинейных динамических си-

стем. Ниже необходимый предельный переход проведен с помощью метода точечных преобразований.

Нелинейная непрерывная система в  $n$ -мерном фазовом пространстве

$$\dot{x} = f(x) = Ax + g(x), \quad (1)$$

где матрица  $A$  считается неособой, может быть при достаточно малом  $\tau$  приближенно представлена импульсной системой

$$\dot{x} = \sum_{j=0}^{\infty} \tau f(x(j\tau)) \delta(t - j\tau), \quad (2)$$

решение которой имеет вид

$$\dot{x} = x^0 + \tau \sum_{j=0}^{\infty} f(x(j\tau)) 1(t - j\tau). \quad (3)$$

В обозначениях  $x^j = x(j\tau - 0)$  выражение (3) позволяет построить точечное преобразование сечений (при  $t = j\tau$ ) фазового пространства системы (3) друг в друга в виде

$$x^j = x^{j-1} + \tau f(x^{j-1}) \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (4)$$

порождаемое функцией соответствия

$$\bar{x} = x + \tau f(x) \equiv \psi(\tau, x). \quad (5)$$

Заметим, что к тому же точечному преобразованию приводит переходящее в пределе в (1) разностное уравнение  $\frac{\Delta x}{\tau} = f(x)$ , так как  $\Delta x = \bar{x} - x = \tau f(x)$  и  $\bar{x} = x + \tau f(x)$ .

Если рассмотреть  $m$ -кратное преобразование (5)

$$x^m = \psi^m(\tau, x) \equiv \underbrace{\psi(\tau, \psi(\tau, \dots, \psi(\tau, x) \dots))}_{m \text{ раз}}, \quad (6)$$

то следует ожидать, что при достаточно больших  $m$  и малых  $\tau$  его инвариантные точки будут близки к точкам, определяющим стационарные и периодические движения системы (1), по крайней мере в достаточно простых случаях нелинейностей  $f(x)$ . Точное соответствие можно ожидать лишь от бесконечно-кратного преобразования (6) (при  $m \rightarrow \infty, \tau \rightarrow 0$ ).

Примеры представления преобразований (5, 6) для частных случаев изложены в [2]. Покажем теперь, что в двух простейших случаях с помощью преобразования (6) при  $m \rightarrow \infty$  и  $\tau \rightarrow 0$  может быть получено решение системы (1).

а) Для линейной системы (1), т. е.  $f(x) = Ax$  или  $g(x) \equiv 0$ , получим преобразование (6) в виде

$$x^m = (E + \tau A)^m x^0 = \sum_{j=0}^m C_m^j \tau^j A^j x^0. \quad (7)$$

При проведении указанного предельного перехода так, чтобы  $m\tau = t$ , получим точное решение уравнения (1). Действительно,

$$x^\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{m! \tau^j A^j}{(m-j)! j!} x^0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^m \frac{P_j^1(m)}{P_j^0(m)} \frac{A^j t^j}{j!} x^0, \quad (8)$$

где  $P_j^0(m)$  и  $P_j^1(m)$  — полиномы степени  $j$ , имеющие соответственно только нулевые  $j$  корней и  $j$  корней, равных  $0, 1, 2, \dots, j-1$ , а остальная часть ряда исчезает при предельном переходе. Учитывая, что при  $m \rightarrow \infty$  отношение

$$\frac{P_j^1(m)}{P_j^0(m)} = m^{-1} m(m-1)(m-2) \dots (m-j+1) \rightarrow 1, \quad (9)$$

для предела выражения (8) получим

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^j}{j!} x^0 = e^{At} x^0. \quad (10)$$

б) В случае системы (1) при  $g(x) = b \varphi(\mu)$ , где скалярная функция  $\varphi(\mu) \in C^1$ ,  $\mu = c^T x$ , а  $b$  и  $c$  — матрицы-столбцы констант размерности  $(n \times 1)$ , преобразование (6), как показано в [2], может быть представлено в виде

$$x^m = e^{mA\tau} x^0 + (e^{A\tau} - E) A^{-1} \sum_{j=1}^m \varphi(\mu^j) e^{(m-j)A\tau} b, \quad (11)$$

где  $\mu^j = \mu(j\tau - 0) = c^T x^{j-1}$ . Если выбрать  $\bar{\mu}^{k-1}$  в интервале  $\Delta\mu^k$  ( $\mu^{k-1} \leq \bar{\mu}^{k-1} < \mu^k$ ),  $k = 1, 2, \dots$ , то возможно представление

$$\varphi_j \equiv \varphi(\mu^j) = \varphi_1 + \sum_{k=1}^{j-1} \varphi'(\bar{\mu}^k) \Delta\mu^{k+1} \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Используя (12) и обозначая  $\varphi'(\bar{\mu}^k) \equiv \bar{\varphi}'_k$ , для преобразования (11) нетрудно получить выражение

$$x^m = e^{mA\tau} x^0 + A^{-1} (e^{mA\tau} - E) b \varphi_1 + \\ + (e^{A\tau} - E) A^{-1} \sum_{j=2}^m e^{(m-j)A\tau} b \sum_{k=1}^{j-1} \bar{\varphi}'_k \Delta\mu^{k+1}, \quad (13)$$

в последнем слагаемом которого удобно сменить порядок суммирования и получить (13) в виде

$$x^m = e^{mA\tau} x^0 + A^{-1} (e^{mA\tau} - E) \varphi_1 b + A^{-1} \sum_{k=1}^{m-1} \bar{\varphi}'_k \Delta\mu^{k+1} \times \\ \times (e^{(m-k)A\tau} - E) b. \quad (14)$$

Переходя в выражении (14) к пределу при  $m \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow 0$ ,  $m\tau \rightarrow t$ , заметим, что в процессе этого перехода  $\sum_{k=1}^{m-1} \Delta\mu^{k+1} \rightarrow \mu(t) - \mu_1$ ,  $k\tau \rightarrow s$ , где  $0 \leq s \leq t$ , а интегральные суммы

$$A^{-1} b \sum_{k=1}^{m-1} \bar{\varphi}'_k \Delta\mu^{k+1} \rightarrow A^{-1} b \int_{\mu_0}^{\mu} \varphi'(\mu) d\mu = A^{-1} b (\varphi(\mu) - \varphi(c^T x^0)), \quad (15)$$

$$A^{-1} \sum_{k=1}^{m-1} e^{(m-k)A\tau} b \bar{\varphi}'_k \Delta\mu^{k+1} \rightarrow A^{-1} \int_0^t \frac{d\varphi(\mu(s))}{ds} e^{A(t-s)} ds b, \quad (16)$$

так как  $\Delta\mu^{k+1} \rightarrow \frac{d\mu(s)}{ds} ds$ . Предельные выражения первых двух слагаемых в выражении (14) очевидны.

В результате, проводя еще в (16) интегрирование по частям и замечая, что  $\varphi(\mu(t)) = \varphi(\mu)$ ,  $\varphi(\mu(0)) = \varphi(c^T x^0)$ , получим

$$x^\infty = x(t) = e^{At} x^0 + \int_0^t e^{A(t-s)} b \varphi(\mu(s)) ds, \quad (17)$$

т. е. решение уравнения (1) в рассматриваемом случае.

Проведение аналогичного предельного перехода в случае распределенной импульсной системы даже в простейшем случае [3] встречает затруднения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин, Теория линейных импульсных систем, ГИФМЛ, М., 1963; Л. Т. Кузин, Расчет и проектирование дискретных систем управления, Государственное

- научно-техническое издательство машиностроительной литературы, М., 1962; В. А. Рубцов, Автоматика и телемеханика, 19, № 10, 945 (1958).
2. А. С. Алексеев, ДАН СССР, 184, № 2, 307 (1969); А. С. Алексеев, Т. Б. Макарова, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 11, 1664 (1968).
3. А. С. Алексеев, С. В. Макаров, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 11, 1690 (1969).

Научно-исследовательский  
физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
7 мая 1970 г.

УДК 536.423.16

## ДИНАМИКА МАСС В ИСПАРИТЕЛЕ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

Б. А. Анаев, С. А. Пиковский, Ф. В. Урьяш

В работе анализируется динамический процесс испарения двухкомпонентного металлического расплава при непрерывном восполнении утечки веществ.

Учитывая перспективность практической реализации испарителей такого типа [1], рассматриваются их различные конструктивные варианты.

1. Испаритель с постоянной поверхностью испарения (реализуется в виде цилиндрического тигля). Скорость поступления первого и второго компонентов обозначим через  $q_1$  и  $q_2$ , а скорости утечки за счет испарения для чистых компонентов через  $p_1$  и  $p_2$ .

Динамика масс расплава в тигле с учетом зависимости скорости утечки от относительной концентрации каждого компонента описывается дифференциальными уравнениями

$$(x_1 + x_2) \frac{dx_1}{dt} = (x_1 + x_2) q_1 - x_1 p_1, \quad (1)$$

$$(x_1 + x_2) \frac{dx_2}{dt} = (x_1 + x_2) q_2 - x_2 p_2,$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — массы обоих компонентов.

Поделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \gamma \frac{1 - \alpha_2 \frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1} - \alpha_1}, \quad (2)$$

где введены безразмерные коэффициенты

$$\gamma = \frac{q_2}{q_1}, \quad \alpha_1 = \frac{p_1 - q_1}{p_1}, \quad \alpha_2 = \frac{p_2 - q_2}{q_2}. \quad (3)$$

Данное дифференциальное уравнение 1-го порядка относится к типу однородных и допускает выполнение полного интегрирования [2]. Однако получаемое при этом выражение представляется труднообозримой неявной функцией.

Более простое и наглядное представление о характере решений может быть получено при исследовании уравнения методом изоклин [3]. Нетрудно видеть, что изоклинами уравнения (2) являются прямые, проходящие из начала координат в первом квадранте фазовой плоскости:

$$x_2 = kx_1. \quad (4)$$

Интегральные кривые пересекают изоклину с  $k_1 = \alpha_1$  горизонтально, а изоклину  $k_2 = \alpha_2^{-1}$  вертикально. В секторе между этими двумя изоклинами значение углового коэффициента касательных к интегральным кривым положительное, а в остальной области отрицательное.

Изоклина с угловым коэффициентом

$$k_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 \gamma}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha_1 - \alpha_2 \gamma)^2}{4} + \gamma} \quad (5)$$

характеризуется тем, что интегральные кривые при подходе к ней имеют тот же угловой коэффициент касательных, т. е. стягиваются к ней.

Вышеизложенный анализ дает возможность построить фазовый портрет исследуемого уравнения. Для случая

$$\alpha_1 \alpha_2 < 1 \quad (6)$$

расположение фазовых траекторий приведено на рис. 1 а, а случаю

$$\alpha_1 \alpha_2 > 1 \quad (7)$$

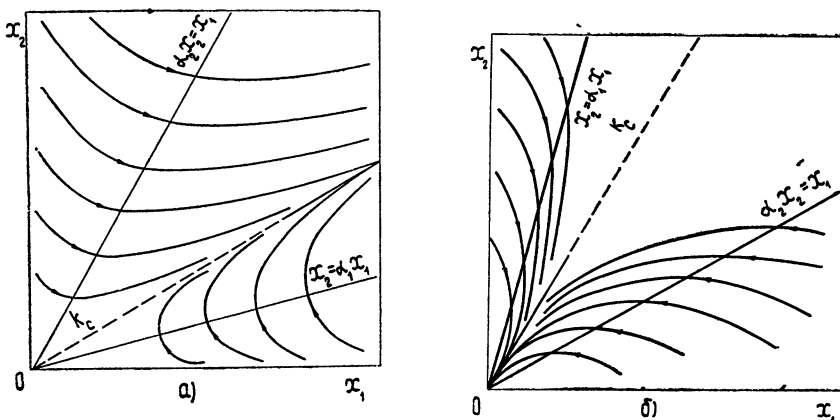


Рис. 1.

соответствует рис. 1 б. В обоих случаях мы имеем дело с «грубой» [3] моделью рассматриваемого процесса. «Негрубая» модель реализуется при условии

$$\alpha_1 \alpha_2 = 1 \quad (8)$$

В этом случае интегральные кривые на фазовой плоскости представляются параллельными прямыми, по которым изображающие точки движутся к изоклине с угловым коэффициентом  $k_3$ , являющейся геометрическим местом точек состояний равновесия.

Таким образом, рассматриваемая конструкция испарителя в реальных условиях не обеспечивает стационарности массы расплава в процессе испарения.

2. Испаритель с изменяющейся площадью поверхности испарения (реализуется в виде расширяющегося сверху конусного тигля или при испарении из вислящей капли [1]). Полагая скорости испарения каждого компонента пропорциональными площади поверхности и имея в виду

$$S = b (x_1 + x_2)^{2/3}, \quad (9)$$

можем записать

$$p_1 = r_1 (x_1 + x_2)^{2/3}, \quad p_2 = r_2 (x_1 + x_2)^{2/3}. \quad (10)$$

Динамика масс расплава для данной модели описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= q_1 - \frac{x_1}{(x_1 + x_2)^{1/3}} r_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= q_2 - \frac{x_2}{(x_1 + x_2)^{1/3}} r_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Поделив второе уравнение на первое, имеем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \gamma \frac{(x_1 + x_2)^{1/3} - \beta_2 x_2}{(x_1 + x_2)^{1/3} - \beta_1 x_1}, \quad (12)$$

где

$$\beta_1 = r_1/q_1, \quad \beta_2 = r_2/q_2.$$

Изоклины

$$x_1 = (\beta_2^3 x_2^3 - 1) x_2, \quad (13)$$

$$x_2 = (\beta_1^3 x_1^3 - 1) x_1. \quad (14)$$

пересекаются интегральными кривыми соответственно в горизонтальном и вертикальном направлениях. Между данными изоклинами угловые коэффициенты касательных к интегральным кривым положительны, а в остальной области первого квадранта отрицательны. Расположение интегральных кривых приведено на рис. 2.

Координаты точки устойчивости

$$x_{1c} = 1/\beta_1 \sqrt{1/\beta_1 + 1/\beta_2}, \quad (15)$$

$$x_{2c} = 1/\beta_2 \sqrt{1/\beta_1 + 1/\beta_2}$$

соответствуют режиму стационарного состояния процесса, которое не зависит от начальных условий, а является функцией лишь параметров процесса.

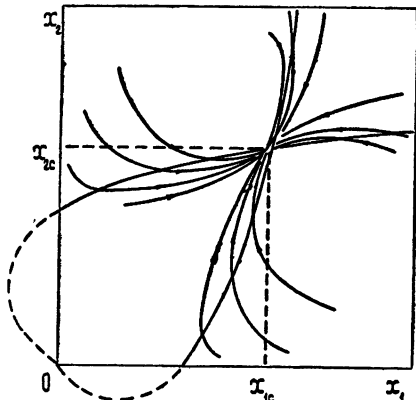


Рис. 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. В. Урьяш, Электронная техника, сер. 10, вып. 6 (31), 10 (1969).
2. Э. Маделунг, Математический аппарат физики, Физматгиз, М., 1960.
3. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.

Научно-исследовательский  
физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
24 декабря 1970 г.