

### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
1557	13 снизу	$\zeta_H(\gamma) = \cos \gamma a - \dots \cos \gamma a \times$ $\Phi_t = \frac{1 - x\gamma/k \ln[(1 \pm u)/2]}{8  \ln[(1 \pm u)/2] } \dots \times$	$\zeta_H(\gamma) = (\cos \gamma a - \dots \sqrt{1 - x^2}) \times$ $\Phi_t = \frac{1 - (x\gamma/k) \ln[(1 \pm u)/2]}{8  \ln[(1 \pm u)/2] } \dots \times$
1559	формула (20)	$\times \left[ u \pm \frac{1 + x\gamma/k \ln[(1 \pm u)/2]}{1 - x\gamma/k \ln[(1 \pm u)/2]} \right]^2 \dots \times$ $\times \left[ 1 \mp u \frac{1 + x\gamma/k \ln[(1 \pm u)/2]}{1 - x\gamma/k \ln[(1 \pm u)/2]} \right]^2 \right\},$	$\times \left[ u \pm \frac{1 + (x\gamma/k) \ln[(1 \pm u)/2]}{1 - (x\gamma/k) \ln[(1 \pm u)/2]} \right]^2 \dots \times$ $\times \left[ 1 \mp u \frac{1 + (x\gamma/k) \ln[(1 \pm u)/2]}{1 - (x\gamma/k) \ln[(1 \pm u)/2]} \right]^2 \right\},$
1559	11 снизу	... Для промежуточных значений $\pi a$	... Для промежуточных значений $\pi a$
1560	формула (25)	$l \left  \ln \frac{1+u}{2} \right  \left\{ 1 + \frac{(1-u)^2}{2 \ln[(1-u)/2]} \dots \right.$	$l \left  \ln \frac{1+u}{2} \right  \left\{ 1 + \frac{(1-u)^2}{2 \ln[(1+u)/2]} \dots \right.$
1561	17 снизу	$\dots \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(1-u)^2}{\ln[(1-u)/2]} \dots \right]$	$\dots \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(1+u)^2}{\ln[(1-u)/2]} \dots \right]$
1565	9 снизу	... а) вида [21]; б) вида [22].	... а) вида (21); б) вида (22).
1566	5 сверху	Из рис. 4 видно, ...	Из рис. 5 видно, ...
1566	14 сверху	$\frac{2}{2m+1} < \lambda \dots$	$\frac{2a}{2m+1} < \lambda \dots$
1566	12 снизу	рис. 4, существует ...	рис. 5, существует ...
1566	21 снизу	уменьшается (рис. 4) ...	уменьшается (рис. 5) ...

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Беликович В. В., Иткина М. А.</b> Использование показателя частотной зависимости поглощения радиоволн в $D$ -слое ионосферы для нахождения $N(h)$ -профиля . . . . .	1471
<b>Гинзбург Э. И., Ким В. Ф.</b> Уравнения диффузии ионных компонент плоскостной плазмы (ионосферы) . . . . .	1477
<b>Омельченко А. Я., Панченко В. И., Степанов К. Н.</b> О поглощении электромагнитных волн в линейном слое в области плазменного резонанса . . . . .	1484
<b>Плоткин В. В.</b> О распространении радиосигналов в нелинейной среде . . . . .	1488
<b>Бушивили Л. Л., Гиоргадзе Н. П.</b> Влияние фононного узкого горла в электронной спин-решеточной релаксации на насыщение магнитного резонанса . . . . .	1493
<b>Башкин А. С., Ораевский А. Н.</b> К проблеме создания пучкового стандарта частоты субмиллиметрового диапазона . . . . .	1506
<b>Беспалов В. И., Кубарев А. М., Пасманик Г. А.</b> Некоторые результаты спектральных исследований вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна и вынужденного температурного рассеяния света в жидкостях. . . . .	1514
<b>Ключан Е. Л., Ланда П. С.</b> Частотные характеристики кольцевого лазера с учетом естественных флуктуаций . . . . .	1518
<b>Сосулин Ю. Г.</b> К теории оптимального обнаружения произвольных сигналов на фоне произвольных помех . . . . .	1526
<b>Весницкий А. И.</b> Решение одномерного неоднородного волнового уравнения с условиями на подвижных границах . . . . .	1531
<b>Весницкий А. И.</b> Обратная задача для одномерного резонатора, изменяющего во времени свои размеры . . . . .	1538
<b>Петров Б. М., Чечетка В. В.</b> Дифракция на цилиндре с нестационарными граничными условиями . . . . .	1547
<b>Казанский В. Б., Литвиненко Л. Н., Шестопалов В. П.</b> Эквивалентные диэлектрические свойства бесконечной двумернопериодической ленточной структуры	1554
<b>Зятицкий В. А., Казанцев Ю. Н.</b> Задачи возбуждения волноводов класса «диэлектрический канал» . . . . .	1570
<b>Леонтьев Е. А.</b> Коротковолновая асимптотика решения задачи дифракции на выпуклом теле. I . . . . .	1574
<b>Леонтьев Е. А.</b> Коротковолновая асимптотика решения задачи дифракции на выпуклом теле. II . . . . .	1586
<b>Гал Л. К., Хижняк Н. А.</b> Рассеяние электромагнитных волн тонким бесконечно длинным металлическим стержнем эллиптического сечения . . . . .	1596
<b>Масунов Э. С.</b> О неустойчивости движения электронного пучка в периодическом волноводе . . . . .	1611
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
<b>Бондаренко А. Н., Кривошеков Г. В., Семибаламут В. М., Смирнов В. А., Ступак М. Ф.</b> Самосинхронизация мод в ОКГ на рубине в режиме свободной генерации . . . . .	1615
<b>Иошпе Д. М.</b> Управляемая магнитостатическая линия задержки СВЧ с перестройкой по частоте . . . . .	1617
<b>Пирогов Ю. А.</b> Влияние радиального распределения потенциала на детекторные характеристики виртуального катода . . . . .	1619

УДК 621.371.25

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ РАДИОВОЛН В D -СЛОЕ ИОНОСФЕРЫ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ N(h) -ПРОФИЛЯ

*B. B. Беликович, M. A. Иткина*

Рассматривается задача определения  $N(h)$ -профиля в нижней ионосфере с использованием обобщенного показателя частотной зависимости поглощения  $n(\omega)$ . Для случая, когда  $n(\omega) = n_0 \cdot (m/2) \ln (\omega/\omega_0)$ , получено решение для  $N(h)$  в виде гауссовой кривой. Методика иллюстрируется примером восстановления  $N(h)$ -профиля, заданного в виде  $1/\text{ch}(z/2)$ .

В настоящее время проблему нахождения  $N(h)$ -профиля по частотной зависимости поглощения радиоволн в ионосфере с теоретической точки зрения можно считать решенной [1, 2]. Однако практическое применение метода связано с использованием ЭВМ, что при сравнительно низкой точности исходных данных кажется неоправданным. В связи с этим можно предложить простую методику нахождения  $N(h)$  с использованием показателя частотной зависимости. Эта методика является обобщением случая, рассмотренного в [3].

Частотную зависимость поглощения принято представлять степенной функцией

$$\Gamma(\omega) = \Gamma_* \left( \frac{\omega_*}{\omega} \right)^{-n}. \quad (1)$$

При определении показателя частотной зависимости  $n$  по измерениям поглощения на двух частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  предполагается, что  $n$  не зависит от частоты, и используется соотношение

$$n = \ln \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} / \ln \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (2)$$

В общем случае показатель частотной зависимости является функцией частоты и может быть определен следующим образом:

$$n(\omega) = - \frac{d \ln \Gamma(\omega)}{d \ln \omega} = - \frac{\omega}{\Gamma(\omega)} \frac{d \Gamma(\omega)}{d \omega}. \quad (3)$$

Разумеется, если функция  $n(\omega)$  известна, то  $\Gamma(\omega)$  с точностью до амплитудного множителя  $\Gamma_*$  восстанавливается соотношением

$$\Gamma(\omega) = \Gamma_* \exp \left[ - \int \frac{n(\omega)}{\omega} d\omega \right]. \quad (4)$$

Представление (1) с постоянным значением показателя  $n$  является простейшим частным случаем формулы (4). В работе [3] было показано, что степенной частотной зависимости поглощения с постоянным значе-

нием  $n$  соответствует экспоненциальный профиль электронной концентрации вида<sup>\*</sup>

$$N(z) = N_0 \exp [(n - 1)z], \quad (5)$$

где  $z = h/H$ ,  $H$  — приведенная высота атмосферы. Покажем, что можно найти второе несложное приближение для частотной зависимости поглощения и соответствующий ей  $N(h)$ -профиль.

Используя обозначение  $z_m = \ln(\nu_*/\omega)$ , разложим функцию  $\ln \Gamma(z_m)$  в степенной ряд в окрестности точки  $z_m = 0$ , т. е. при  $\omega = \nu_*$ <sup>\*\*</sup>:

$$\ln \Gamma(z_m) = \ln \Gamma(0) + \frac{d \ln \Gamma(z_m)}{dz_m} z_m + \frac{d^2 \ln \Gamma(z_m)}{dz_m^2} \frac{z_m^2}{2} + \dots \quad (6)$$

Введем обозначения для первой и второй производной в выражении (6):

$$\frac{d \ln \Gamma(z_m)}{dz_m} = n, \quad \frac{d^2 \ln \Gamma(z_m)}{dz_m^2} = -m.$$

Пренебрегая в (6) членами с более высокими производными, получим приближенное выражение для  $\Gamma(z_m)$ :

$$\Gamma(z_m) = \Gamma(0) \exp \left( nz_m - \frac{m}{2} z_m^2 \right), \quad (7)$$

или

$$\Gamma(\omega) = \Gamma(\nu_*) \left( \frac{\nu_*}{\omega} \right)^{n - \frac{m}{2} \ln \frac{\nu_*}{\omega}}. \quad (7a)$$

Используя спектральный метод, изложенный в работе [1], можно показать (см. Приложение 1), что профиль электронной концентрации, которому соответствует частотная зависимость (7), имеет вид

$$N(z) = \frac{\nu_* \Gamma(\nu_*)}{AH\pi} \exp \left[ \frac{m\pi^2}{8} + (n - 1)z - \frac{mz^2}{2} \right] \cos \frac{\pi}{2}(n - 1 - mz). \quad (8)$$

При  $m = 0$  соотношение (8) автоматически переходит в соответствующую формулу работы [3].

Рассматривая выражение (8), можно видеть, что профиль представлен произведением гауссовой функции на косинусоидальный множитель. Косинусоидальный множитель делает  $N(h)$ -профиль знакопеременным, чего с физической точки зрения не должно наблюдаться. Формально появление этого множителя связано с пренебрежением последующими членами в разложении (6). Эта же операция приводит к тому, что значения показателя частотной зависимости, определяемые из укороченной формулы (6),

$$n(\omega) = n - \frac{m}{2} \ln \frac{\nu_*}{\omega}, \text{ или } n(z_m) = n - \frac{m}{2} z_m, \quad (9)$$

могут выходить за пределы теоретического интервала  $[0, 2]$  при достаточно больших  $z_m$ .

\* При выводе формулы (5) предполагалось также, что частота соударений электронов с молекулами зависит от высоты по экспоненциальному закону  $\nu = \nu_0 \exp(-h/H)$ .

\*\* В данном случае значение  $\nu_*$  определяет частоту, относительно которой  $\Gamma(\omega)$  разлагается в ряд, а также высоту, вблизи которой профиль  $N(h)$  имеет достоверные значения.

Когда  $n \sim 1$  и  $m \ll 1$ , косинусоидальный множитель в (8) можно опустить, что приводит к представлению профиля  $N(z)$  в виде гауссовой кривой:

$$N(z) = \frac{v_* \Gamma(v_*)}{AH\pi} \exp \left[ \frac{(n-1)^2}{2m} - \frac{m\pi^2}{8} \right] \exp \left[ -\frac{m}{2} \left( z = \frac{n-1}{m} \right)^2 \right]. \quad (8a)$$

В этом случае профиль определяется тремя параметрами: амплитудой  $N_0 = \frac{v_* \Gamma(v_*)}{AH\pi} \exp \left[ \frac{(n-1)^2}{2m} + \frac{m\pi^2}{8} \right]$ , высотой расположения  $z_{\max} = \ln \frac{v_0}{v_*} + \frac{n-1}{m}$  и толщиной слоя, которая, если характеризовать ее шириной эквивалентного прямоугольника, составляет  $\Delta z = \sqrt{2\pi/m}$ . Таким образом, определяя параметры  $\Gamma(\omega)$ ,  $n$  и  $m$  по измерениям поглощения, можно найти соответствующие три параметра гауссова  $N(h)$ -профиля.

Заметим, что с теоретической точки зрения не представляет большого труда учесть в разложении (6) более высокие производные и найти приближенное решение с помощью ряда, полученного в [4]; однако с практической точки зрения в этом пока нет необходимости. Определение параметра  $m$  требует высокой точности определения  $n(\omega)$ , в то время как в настоящее время величина  $n$  определяется с ошибкой  $\sim 0,1 \div 0,2$ , и погрешность определения  $m$  будет весьма существенной.

Проиллюстрируем точность метода на примере. Допустим, что профиль электронной концентрации задан функцией

$$N(z) = 1/\operatorname{ch} \frac{z}{2}. \quad (10)$$

Соответствующие этому профилю функция  $G(z_m) = \omega \Gamma(\omega)$ , а также параметры  $n(z_m)$  и  $m(z_m)$  могут быть вычислены точно. В Приложении 2 показано, что они имеют следующий вид:

$$G(z_m) = 2\pi AH \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch}(z_m/2) - 1}{\operatorname{ch} z_m}; \quad (11)$$

$$n(z_m) = 1 + \frac{\sqrt{2} \operatorname{sh}(z_m/2)}{2\sqrt{2} \operatorname{ch}(z_m/2) - 1} - \operatorname{th} z_m; \quad (12)$$

$$m(z_m) = \operatorname{sch}^2 z_m - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch}(z_m/2)}{[\sqrt{2} \operatorname{ch}(z_m/2) - 1]^2}. \quad (13)$$

На основании формул (11)–(13) были рассчитаны в точках  $z_m = 0, -1, -2, -3, -4$  величины  $n$  и  $m$ , а также параметры функции (8а), приближенно восстановливающей  $N(h)$ -профиль (10): амплитуда  $N_0$ , фактор сдвига по высоте  $(n-1)/m$  и эффективная ширина слоя  $\Delta z = \sqrt{2\pi/m}$ . Результаты расчета представлены в табл. 1.

Таблица 1

$z_m$	$N_0$	$(n-1)/m$	$n$	$m$	$\Delta z$
0	0,99	0	1	0,140	6,7
-1	0,975	1,03	1,132	0,128	7,0
-2	1,0	2,5	1,256	0,102	7,8
-3	1,16	4,85	1,345	0,072	9,35
-4	2,08	8,9	1,409	0,046	14,8

Из таблицы видно, что при  $z_m = 0, -1, -2$  амплитуда профиля восстанавливается очень точно, высота максимума — с ошибкой не более 0,5, а параметр, характеризующий ширину профиля, меняется незначительно. Более наглядно восстановленный профиль можно сравнить с исходным на рис. 1, где кривой 1 обозначен исходный профиль  $N(h)$ ,

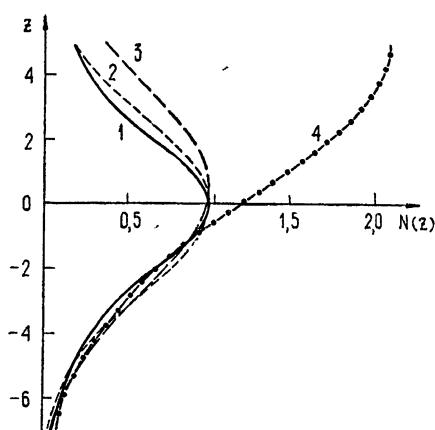


Рис. 1.

а кривыми 2, 3, 4 — восстановленные профили при  $z_m = 0, -2$  и  $-4$ . Рисунок так же, как и таблица, показывает, что в случаях, когда точка разложения отстоит от максимума слоя менее чем на 2 единицы, восстановленный профиль хорошо аппроксимирует исходный. Если же точка разложения находится далеко от максимума слоя (например, при  $z_m = 4$ ), то аппроксимирующий профиль в целом существенно отличается от исходного, однако вблизи точки разложения (в интервале  $\pm 3$ ) даже в этом случае восстановленный  $N(h)$ -профиль удовлетворительно аппроксимирует исходный.

В заключение заметим, что изложенный метод совместно с частным случаем  $n(\omega) = \text{const}$  позволяет без применения ЭВМ решать задачу о нахождении  $N(h)$  по частотной зависимости. Высотный интервал, в котором находится  $N(h)$ -профиль, составляет  $\pm 3H$ , где  $H$  — приведенная высота атмосферы. Еще раз напомним, что этим методом получается сглаженный  $N(h)$ -профиль  $D$ -области.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**Нахождение  $N(h)$ -профиля, соответствующего частотной зависимости вида**  $\Gamma(z_m) = \Gamma_0 \exp\left(nz_m - \frac{m}{2}z_m^2\right)$

Для решения поставленной задачи используем метод фурье-преобразований, изложенный в [1]. Функция  $G(z_m) = \omega\Gamma(\omega)$  для частотной зависимости (7) имеет вид

$$G(z_m) = G(0) \exp\left[(n-1)z_m - \frac{m}{2}z_m^2\right],$$

где  $G(0) = \nu_*\Gamma(\nu_*)$ . Спектр этой функции (см. [3])

$$g(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z_m) \exp(-iz_m\Omega) dz_m = G(0) \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \exp\left[\frac{(n-1-i\Omega)^2}{2m}\right]. \quad (14)$$

В соответствии с [1] функцию  $n(\Omega)$  найдем по формуле

$$n(\Omega) = \frac{1}{AH\pi} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}\Omega\right) g(\Omega). \quad (15)$$

и затем с помощью обратного преобразования Фурье получим  $N(z)$ :

$$N(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n(\Omega) e^{i\Omega z} d\Omega = \frac{G(0)}{AH\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{(n-1-i\Omega)^2}{2m}\right] + \\ + i\Omega z \left[ \operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\Omega d\Omega \right]. \quad (16)$$

Запишем  $\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \Omega$  в виде полусуммы экспонент. Тогда интеграл (16) представится как сумма двух интегралов:

$$\begin{aligned} N(z) &= \frac{G(0) \exp[(n-1)^2/2m]}{2AH\pi\sqrt{2\pi m}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\Omega^2}{2\pi} + \left[ i \left( z - \frac{n-1}{m} \right) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{\pi}{2} \right] \Omega \right\} d\Omega + \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\Omega^2}{2\pi} + \left[ i \left( z - \frac{n-1}{m} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \Omega \right\} d\Omega \right\} = \\ &= \frac{G(0) \exp[(n-1)^2/2m]}{2AH\pi} \left\{ \exp \frac{i[z-(n-1)/m]+\pi/2)^2 m}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \exp \frac{i[z-(n-1)/m]-\pi/2)^2 m}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

После несложных алгебраических преобразований формула (17) приводится к виду

$$N(z) = \frac{G(0)}{AH\pi} \exp \left[ \frac{m\pi^2}{8} + (n-1)z - \frac{mz^2}{2} \right] \cos \frac{\pi}{2}(n-1-mz). \quad (18)$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

**Нахождение частотной зависимости поглощения для профиля**

$$N(z) = 1/\operatorname{ch} \frac{z}{2}$$

Для определения функции  $G(z_m) = \omega \Gamma(\omega)$  также будем пользоваться методом, изложенным в работе [1]. Спектр  $n(\Omega)$  для функции  $N(z) = 1/\operatorname{ch} \frac{z}{2}$  имеет вид

$$n(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} N(z) e^{-iz\Omega} dz = \frac{2\pi}{\operatorname{ch} \Omega \pi}.$$

Далее определим соответствующий спектр  $g(\Omega) = k(\Omega) n(\Omega)$ :

$$g(\Omega) = \frac{AH\pi}{\operatorname{ch}(\pi/2)\Omega} n(\Omega) = \frac{2AH\pi^2}{\operatorname{ch}(\pi/2)\Omega \operatorname{ch} \pi\Omega}.$$

Обратное преобразование Фурье для спектра  $g(\Omega)$  дает возможность получить искомую функцию  $G(z_m)$ :

$$G(z_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Omega) \exp(i\Omega z_m) d\Omega = 2AH\pi \int_0^{\infty} \frac{\cos \Omega z_m}{\operatorname{ch}(\pi/2)\Omega \operatorname{ch} \pi\Omega} d\Omega. \quad (19)$$

Знаменатель подынтегральной функции можно преобразовать:

$$\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \Omega \operatorname{ch} \pi\Omega = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \Omega \left( 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{2} \Omega - 1 \right),$$

и, введя обозначение  $y = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \Omega$ , разложить на элементарные дроби функцию

$$\frac{1}{y(2y^2 - 1)} = \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{y} + \frac{1}{y + 1/\sqrt{2}} + \frac{1}{y - 1/\sqrt{2}} \right).$$

Теперь нетрудно видеть, что интеграл (19) представляется в виде суммы трех интегралов:

$$G(z_m) = AH\pi \left\{ - \int_0^\infty \frac{2 \cos \Omega z_m d\Omega}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}\Omega} + \int_0^\infty \frac{\cos \Omega z_m d\Omega}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}\Omega + \cos \frac{\pi}{4}} + \int_0^\infty \frac{\cos \Omega z_m d\Omega}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2}\Omega + \cos \frac{3\pi}{4}} \right\}.$$

Каждый из этих интегралов может быть найден:

$$J_1 = -\frac{2}{\operatorname{ch} z_m}, \quad J_2 = 2\sqrt{2} \frac{\operatorname{sh}(z_m/2)}{\operatorname{sh} 2z_m}, \quad J_3 = 2\sqrt{2} \frac{\operatorname{sh}(3z_m/2)}{\operatorname{sh} 2z_m}.$$

После суммирования окончательно получаем

$$G(z_m) = 2AH\pi \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch}(z_m/2) - 1}{\operatorname{ch} z_m}. \quad (20)$$

Параметры  $n(z_m)$  и  $m(z_m)$  для определения показателя частотной зависимости можно найти по следующим формулам:

$$n(z_m) = 1 + \frac{d \ln G(z_m)}{dz_m} = 1 + \frac{1}{G(z_m)} \frac{dG(z_m)}{dz_m} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\operatorname{sh}(z_m/2)}{\sqrt{2} \operatorname{ch}(z_m/2) - 1} - \operatorname{th} z_m; \quad (21)$$

$$m(z_m) = -\frac{dn(z_m)}{dz_m} = \operatorname{sch}^2 z_m - \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\sqrt{2} - \operatorname{ch}(z_m/2)}{[\sqrt{2} \operatorname{ch}(z_m/2) - 1]^2}. \quad (22)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Геомагнетизм и аэрономия, 8, № 3, 476 (1968).
2. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 6, 873 (1970).
3. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, М. А. Иткина, Геомагнетизм и аэрономия, 10, № 5, 912 (1970).
4. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Л. В. Родыгин, Геомагнетизм и аэрономия, 4, № 4, 788 (1964).
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
23 марта 1971 г.

#### THE USE OF THE COEFFICIENT OF THE FREQUENCY DEPENDENCE OF RADIOWAVE ABSORPTION IN IONOSPHERIC D-LAYER TO FIND $N(h)$ -PROFILE

V. V. Belikovich, M. A. Itkina

Using the generalized index of the frequency dependence of the absorption  $n(\omega)$  the problem is formulated to find  $N(h)$ -profile. The solution for  $N(h)$  is obtained in the form of Gaussian curve for the case when  $n(\omega) = n_0 + (m/2) \ln (\omega/\omega_*)$ . The method is illustrated by the example of restoration of  $N(h)$ -profile given in the form of  $1/\operatorname{ch}(z/2)$ .

УДК 551.510.535

## УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ИОННЫХ КОМПОНЕНТ ПЛОСКОСЛОИСТОЙ ПЛАЗМЫ (ИОНОСФЕРЫ)

*Э. И. Гинзбург, В. Ф. Ким*

В работе получены уравнения диффузии для ионных компонент двухионной плоскослоистой магнитоактивной плазмы (ионосферы). Показано, что ионная примесь испытывает сильное увлечение со стороны основной ионной компоненты со скоростью порядка скорости амбиполярной диффузии. В частном случае одноионной плазмы в уравнении диффузии учтено влияние ветра и наличие высотного распределения температур.

В настоящее время является общепринятым мнение о важной роли диффузии в распределении ионизации в области  $F$  ионосферы. Учет диффузационных процессов основан, как правило, на уравнении, предложенном Ферраро [1], или на некоторых модификациях этого уравнения (см. обзор [2]).

Определяющей характерной особенностью расплывания неоднородной плазмы является сохранение ее квазинейтральности с течением времени (амбиполярная диффузия). Условие сохранения квазинейтральности можно записать в виде [3]

$$\operatorname{div} NV_e = \operatorname{div} NV_i, \quad (1)$$

где  $V_e$ ,  $V_i$ ,  $N$  — соответственно направленная скорость электронов и ионов и электронная концентрация. В работе [1] используется более сильное предположение  $V_e = V_i$ , справедливое только для изотропной плазмы. Квазинейтральность плазмы при диффузационных процессах поддерживается внутренним электрическим полем  $E$ , которое можно считать потенциальным [4]. Уравнение (1) позволяет, в принципе, определить это поле  $E$ .

В настоящей работе мы попытаемся получить систему уравнений, описывающих расплывание ионных компонент в неоднородной магнитоактивной плазме. При этом ограничимся рассмотрением уравнений диффузии ионных компонент в плоскослоистой плазме, поскольку внутреннее поле  $E$  существенно зависит от формы неоднородности и его определение в общем случае связано с большими математическими трудностями [5]. Плазму будем считать состоящей из двух сортов однократно ионизированных положительных ионов (здесь и ниже индексы  $i, j = 2, 3$  относятся к ионам, индекс 1 к электрону).

Пространственное распределение ионизированной компоненты в ионосферных условиях определяется не только диффузионными, но и локальными ионизационно-рекомбинационными процессами, что учитывается добавлением в правые части уравнений непрерывности соответствующих членов. Однако в случае необходимости, указанные процессы можно учесть только в конечных диффузионных уравнениях, поскольку ионизационно-рекомбинационные члены не меняют соотношения (1).

Запишем квазигидродинамические уравнения движения и непрерывности, пренебрегая инерционными и вязкими членами, в виде

$$N_a V_a = \sum_{b+a} \alpha_{ab} \frac{N_a}{N_b} (N_b V_b) + q_a [N_a V_a \tau] + \alpha_{an} N_a u - D_a (\nabla N_a - N_a / H_a g_0) + \mu_a N_a E; \quad (2a)$$

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \operatorname{div} N_a V_a = 0. \quad (2b)$$

Здесь  $N_a$  — средние концентрации заряженных частиц, латинские буквы  $a, b, c, \dots$  здесь и ниже принимают значения 1, 2, 3,  $n$  — индекс нейтральной компоненты,  $\beta = 1, 2, 3, n$ ,

$$\left. \begin{aligned} \nu_{a\beta} &= v_{a\beta} / v_a, & v_a &= \sum_{\beta \neq a} \nu_{a\beta}, \\ D_a &= \kappa T_a / m_a v_a, & \mu_a &= e_a / m_a v_a, & q_a &= \omega_{aH} / v_a, \\ \omega_{aH} &= e_a H_0 / m_a c, & H_a &= \kappa T_a / m_a g \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

$v_{a\beta}$  — частота соударений сорта  $a$  с частицами  $\beta$  ( $\beta \neq a$ ),  $m_\beta$ ,  $T_\beta$ ,  $e_\beta$  — масса, температура и заряд соответствующих частиц ( $e_1 = -e$ ,  $e_2 = e_3 = e$ ,  $e_n = 0$ ,  $e$  — абсолютная величина заряда электрона),  $\kappa$  — постоянная Больцмана,  $H_0$  — магнитное поле Земли,  $V_a$  и  $H_a$  — скорость и приведенная высота соответствующего сорта заряженных частиц,  $u$  — скорость нейтральной компоненты (ветер),  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\tau = H_0 / H_0$ ,  $g_0 = g/g$ .

Частоты соударений разных частиц связаны законом сохранения импульса

$$N_a m_a v_{ab} = N_b m_b v_{ba}. \quad (4)$$

Разрешая уравнения (2a) относительно плотностей потоков  $N_a V_a$ , получаем

$$N_a V_a = \frac{N_a}{N_b} \{ \beta_{ab} B_b + \mu_{ab} [B_b \tau] + \gamma_{ab} (B_b \tau) \tau \}; \quad (5)$$

$$B_b = \alpha_{bn} N_b u - D_b \left( \nabla N_b - \frac{N_b}{H_b} g_0 \right) + \mu_b N_b E. \quad (6)$$

Здесь и ниже по немым индексам производится суммирование (если не оговорено противное).

Матрицы  $\beta_{ab}$ ,  $\mu_{ab}$ ,  $\gamma_{ab}$  задаются выражениями

$$\begin{aligned} \beta_{aa} \Delta_1 \Delta_2 &= \epsilon_{aa} \Delta_1 + q_b^2 \epsilon_{bb} + q_c^2 \epsilon_{cc} + q_b^2 q_c^2 + q_b q_c \times \\ &\times (2 \alpha_{bc} \alpha_{cb} + \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + \alpha_{13} \alpha_{32} \alpha_{21}), \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \beta_{ab} \Delta_1 \Delta_2 &= \epsilon_{ab} \Delta_1 + q_c^2 \epsilon_{cc} \alpha_{ab} - q_a q_b \epsilon_{ab} - q_a q_c \alpha_{cb} \epsilon_{ac} - \\ &- q_c q_b \alpha_{ac} \epsilon_{cb} - q_a q_b q_c^2 \alpha_{ab}; \\ \epsilon_{aa} &= \alpha_{aa} - \alpha_{bc} \alpha_{cb}, \\ \epsilon_{ab} &= \alpha_{ab} + \alpha_{ac} \alpha_{cb}, \end{aligned} \quad (7b)$$

где  $a, b, c$  не равны друг другу,  $\alpha_{aa} = 1$ ,

$$\mu_{ab} = \frac{1}{\Delta_1} \beta_{ac} q_c \epsilon_{cb}, \quad (7c)$$

$$\eta_{ab} = \frac{1}{\Delta_1^2} \beta_{ac} q_c \epsilon_{cd} q_d \epsilon_{db},$$

$\Delta_1$  — определитель матрицы  $(2\delta_{ab} - \alpha_{ab})$ ,  $\delta_{ab}$  — символ Кронекера,

$$\begin{aligned} \Delta_2 \Delta_1 &= \Delta_1^2 + q_a^2 \epsilon_{aa}^2 + (q_1 q_2 q_3)^2 + (1 - \delta_{ab})(q_a^2 q_b^2 / 2 + \\ &+ q_a q_b \epsilon_{ab} \epsilon_{ba}) + q_1 q_2 q_3 (1 - \delta_{ab})(1 - \delta_{ac}) q_a \alpha_{bc} \alpha_{cb}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из выражений (5) необходимо исключить электрическое поле  $E$ . Заметим, что для плоскостной плазмы, все параметры которой зависят только от координаты  $z$ , из уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{d} &= \operatorname{div} e_a N_a V_a = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\mathbf{d}$  — плотность тока, получаем

$$E_x = E_y = 0, \quad \delta_z = 0. \quad (9)$$

При записи соотношений (9) принято, что вне области ионизации  $E = 0$ ,  $\mathbf{d} = 0$ .

Из (9), учитывая (5), получаем

$$E_z = - \left[ \frac{e_a N_a}{N_b} \xi_{ab} B_{0b} + \frac{e_a N_a}{N_b} \cos I (\eta_{ab} \sin I u_y - \mu_{ab} u_x) \alpha_{bn} N_b \right] / e_a N_a \xi_{ab} \mu_b, \quad (10)$$

где  $B_{0b} = B_{bz}$  ( $E = 0$ ),  $I$  — магнитное наклонение,  $(\pi/2 - I)$  — угол между  $\mathbf{g}_0$  и  $\mathbf{t}$ ;  $\mathbf{g}_0 = -e_z$ ,  $\tau = \tau(0, -\cos I, -\sin I)$ ,

$$\xi_{ab} = \beta_{ab} + \eta_{ab} \sin^2 I. \quad (11)$$

В силу условия квазинейтральности среди уравнений (2б) только два линейно независимых. Пусть это будут уравнения непрерывности для ионных компонент. Подставляя в эти уравнения выражения для плотностей потоков (5) и исключая электрическое поле (10), получаем искомую систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_j}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{N_j e_f N_f}{e_c N_c \xi_{cd} \mu_d} \left\{ \xi_{fa} \xi_{jb} \left[ \frac{\mu_a}{N_b} D_b \left( \frac{1}{H_b} + \frac{\partial}{\partial z} \right) N_b - \right. \right. \\ &- \frac{\mu_b D_a}{N_a} \left( \frac{1}{H_a} + \frac{\partial}{\partial z} \right) N_a - \xi_{fa} \xi_{jb} u_z [\mu_a \alpha_{bn} - \mu_b \alpha_{an}] - \\ &- \cos I \sin I u_y [\xi_{fa} \eta_{jb} \mu_a \alpha_{bn} - \xi_{jb} \eta_{fa} \mu_b \alpha_{an}] + \\ &\left. \left. + \cos I u_x [\xi_{fa} \mu_{jb} \mu_a \alpha_{bn} - \xi_{jb} \mu_{fa} \mu_b \alpha_{an}] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Общий анализ полученной системы уравнений достаточно сложен, поэтому мы ограничимся рассмотрением двух частных случаев применительно к области  $F$  ионосферы, где хорошо выполняется неравенство

$$q_j^2 \gg 1. \quad (13)$$

При условии (13)

$$\xi_{ab} = \frac{2\delta_{ab} - \alpha_{ab}}{q_a q_b} + \frac{\epsilon_{ab}}{\Delta_1} \sin^2 I, \\ \Delta_1 = v_{2n}/v_2. \quad (14)$$

1)  $a = 0$ ,  $N_3 \ll N_2$ , т. е. одна из ионных компонент является примесной.

В рассматриваемом случае для углов

$$\sin^2 I \gg 1/q_i^2, \quad (15)$$

как это следует из уравнений (12),

$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} D_3 \frac{v_2}{v_{2n}} \sin^2 I \left\{ \left( \frac{1}{H_3} + \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{N_3}{N_1} \frac{T_1}{T_3} \frac{m_2 v_{2n} + m_3 v_{32}}{m_2 v_2} \times \right. \\ \times \left. \left( \frac{1}{H_1} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} N_3 + \frac{\partial}{\partial z} D_2 \frac{v_2}{v_{2n}} \sin^2 I \frac{N_3}{N_1} \frac{v_{32}}{v_{32} + v_{3n}} \left\{ \left( \frac{1}{H_2} + \frac{\partial}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{T_1}{T_2} \left( 1 + \frac{m_2 v_{2n}}{m_3 v_{32}} \right) \left( \frac{1}{H_1} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} N_2. \quad (16)$$

Первое слагаемое в правой части (16) определяет взаимную диффузию ионов с коэффициентом диффузии  $D_b$ , равным

$$D_b = D_3 \frac{v_2}{v_{2n}} = \frac{x T_3}{m_3 (v_{32} + v_{3n})} \frac{v_2}{v_{2n}}. \quad (17)$$

При степени ионизации, удовлетворяющей условию  $\frac{v_{2n}}{v_{32}} \gg \left( \frac{N_3}{N_2} + \sqrt{\frac{m_1}{m_j}} \right)$ ,

$$D_b \approx D_3. \quad (18)$$

В этом случае для слабоионизованной плазмы ( $v_{2n} \gg v_{32}$ )  $D_b \approx D_{||}$ , где коэффициент

$$D_{||} = \frac{x(T_1 + T_2)}{m_2 v_{2n}} \quad (19)$$

определяет движение основной компоненты (коэффициент амбиполярной диффузии). С увеличением степени ионизации, при  $v_{2n}/v_{32} \ll 1$

$$D_b \approx D_{||} \left( \frac{v_{2n}}{v_{32}} + \frac{N_3}{N_2} \right) \ll D_{||}. \quad (20)$$

В области  $F$  ионосферы дневная плазма является сильно ионизованной ( $v_{2n} \ll v_{32}$ ), и, следовательно, взаимная диффузия затруднена.

Второе слагаемое в (16) определяет процесс «увлечения» ионной примеси основной ионной компонентой с коэффициентом «увлечения»  $D_2 \frac{v_2}{v_{2n}} \frac{N_3}{N_1} \frac{v_{32}}{v_{32} + v_{3n}}$ . Поскольку характерные размеры распределения ионной примеси  $L_3$  и основных ионов  $L_2$  в области  $F$  одного порядка [6], то скорость «увлечения» порядка скорости амбиполярной диффузии. Следовательно, даже в дневных условиях высотное распределение ионной примеси должно испытывать существенное влияние диффузионных процессов. Задача о движении примесных ионов рассматривалась в [2], где, однако, не был учтен эффект «увлечения».

Для основной ионной компоненты получаем уравнение вида

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} D_{\perp} \sin^2 I \left( \frac{1}{H_{21}} + \frac{\partial}{\partial z} \right) N_2 + \frac{\partial}{\partial z} D_3 \sin^2 I \frac{m_3 v_{32}}{m_2 v_{2n}} \times \\ \times \left\{ \left( \frac{1}{H_3} + \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{T_1}{T_3} \left( 1 + \frac{v_{3n}}{v_{32}} \right) \left( \frac{1}{H_1} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} N_3, \quad (21)$$

$$\frac{1}{H_{21}} = \frac{T_2}{T_2 + T_1} \frac{1}{H_2}.$$

При

$$\frac{N_3}{N_2} \ll (L_3/L_2)^2 \quad (22)$$

эффектом «увлечения» основных ионов ионной примесью можно пренебречь.

Для углов

$$\sin^2 I \leq 1/q_1^2 \quad (23)$$

при условии (22) и достаточно малой примеси,

$$\left( \frac{N_3}{N_2} \right)^2 \leq \sqrt{\frac{m_1}{m_j}}, \quad (24)$$

диффузионные уравнения для компонент плазмы удобно записать в виде

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} D_{\perp} \left( \frac{1}{H_{21}} + \frac{\partial}{\partial z} \right) N_1, \quad (25)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{D_3}{q_3^2} \left( \frac{1}{H_3} + \frac{\partial}{\partial z} \right) N_3 - \frac{\partial}{\partial z} \frac{D_2}{q_2 q_3} \frac{N_3}{N_2} \left( \frac{1}{H_2} + \frac{\partial}{\partial z} \right) N_1.$$

Отсюда видно, что основная часть плазмы ( $N_1 \approx N_2$ ) просачивается\* поперек поля  $H_0$  с коэффициентом диффузии

$$D_{\perp} = \frac{x(T_1 + T_2)}{m_1 v_1} \frac{1}{q_1^2}, \quad (26)$$

что совпадает с  $D_{\perp}$ , вычисленным для слабых возмущений в работах [8, 9].

При наличии примеси в плазме возникает «группа» ионов, состоящая из доли  $N_3/N_1$  основных ионов, образующих «отрицательную» неоднородность, и ионов примеси. В движении «группы» электроны не принимают эффективного участия, и она диффундирует поперек магнитного поля с коэффициентом диффузии ионов

$$D_{3\perp} \approx \frac{D_3}{q_3^2} \gg D_{\perp}. \quad (27)$$

2) Полагаем

$$N_3 = 0. \quad (28)$$

При условии (13) и (28) система уравнений (12) сводится к одному уравнению вида

\* В [7] отмечена целесообразность введения терминов «диффузия» и «просачивание».

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial z} \chi D_{\parallel} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{H_{21}} \right) N - \frac{\partial}{\partial z} (V_{xz} + V_{yz} + V_{zz}) N, \quad (29)$$

где

$$\chi = \frac{q_1^2 \sin^2 I \{ q_2^2 \sin^2 I (\nu_2^2 / \nu_{2n}^2) + 2(\nu_2 / \nu_{2n}) - 1 \} + 1}{q_1 q_2 (\nu_2 / \nu_{2n}) \{ q_1 q_2 (\nu_2 / \nu_{2n}) \sin^2 I - 1 \}}; \quad (30)$$

$$V_{xz} = - \cos I \frac{1}{q_2} \frac{\nu_{2n}}{\nu_2} \left\{ \frac{q_1 q_2 (\nu_2 / \nu_{2n}) \sin^2 I}{q_1 q_2 (\nu_2 / \nu_{2n}) \sin^2 I - 1} \right\} u_x, \quad (31)$$

$$V_{yz} = \cos I \sin I u_y, \quad V_{zz} = \chi u_z$$

(напомним, что  $q_1 < 0$ ). Уравнение (29) можно переписать с учетом высотного распределения температур. Для этого достаточно заменить  $\chi D_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z}$  на  $\frac{\chi D_{\parallel}}{T_1 + T_2} \frac{\partial}{\partial z} (T_1 + T_2)$ . При этом, конечно, уравнение (29) должно рассматриваться совместно с уравнением теплового баланса.

Коэффициент диффузии  $\chi D_{\parallel}$  совпадает с коэффициентом диффузии, рассчитанным при произвольной степени ионизации [8, 9] (в (30) учтено условие (13)). При  $u = 0$ ,  $T_1 = T_2 = T$  и условии (15) получаем уравнение Ферраро [1].

Согласно (31), ветер вносит вклад только в вертикальную компоненту плотности потока заряженных частиц, что является прямым следствием основного предположения о плоскослоистой структуре ионосферы. Участие разных компонент скорости ветра в вертикальном перемещении ионосферы различно:  $u_{z\perp}$  и  $u_{y\perp}$  вертикальных перемещений не вызывают;  $u_{z\parallel}$  и  $u_{y\parallel}$  перемещают плазму параллельно магнитному полю и, следовательно, их вклады в вертикальный поток пропорциональны  $V_{zz}$  и  $V_{yz}$  соответственно; взаимодействие составляющей  $u_x$  с магнитным полем вызывает процесс вертикального перемещения, который аналогичен эффекту Холла.

В заключение отметим следующее. Полученные результаты справедливы в предположении плоскослоистой среды, т. е. в случае зависимости (произвольной) параметров плазмы только от высоты  $z$  (в частности,  $H_0 = H_0(z)$ ,  $u = u(z)$ ). В реальных ионосферных условиях такое предположение оправдано, поскольку горизонтальные характерные масштабы изменения параметров ионосферы много больше вертикальных. Тем не менее, в этом случае необходимо исследование применимости уравнения (29), так как соотношения (9), вообще говоря, уже не выполняются. Можно показать, что соответствующее условие совпадает с условием параллельности внутреннего электрического поля градиенту электронной концентрации.

Оценки, аналогичные приведенным в работе [5], показывают, что в области  $F$  ионосферы условия параллельности  $E \parallel \nabla N$  мало чем отличаются от аналогичных условий для слабоионизованной плазмы [5] (в частности, условие на  $u_{\perp}$  ослаблено на фактор  $\nu_2 / \nu_{2n}$ ).

Все полученные таким образом ограничения при условии (15) достаточно хорошо выполняются в области  $F$  (для оценок использованы данные таблицы, приведенной в работе [10]). Следовательно, уравнение (29) в реальных ионосферных условиях можно рассматривать как уравнение первого приближения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. C. A. Ferrago, Terr. Magn. Atm. El., 50, 215 (1945), J. Geoph. Res., 51, 427 (1946).
2. В. М. Поляков, сб. Исследование ионосферы, изд. Наука, Новосибирск, 1970.
3. А. В. Гуревич, ЖЭТФ, 44, 1302 (1963).
4. А. В. Гуревич, Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрономия, 5, 251 (1965).
5. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 1, 20 (1969).
6. А. А. Похунков, Космические исследования, 1, 267 (1963).
7. С. И. Брагинский, сб. Вопросы теории плазмы, вып. 1, Госатомиздат, М., 1963.
8. Г. И. Григорьев, Геомагнетизм и аэрономия, 4, 183 (1964).
9. Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрономия, 8, 780 (1968).
10. Е. Е. Цедилина, Геомагнетизм и аэрономия, 5, 679 (1965).

Институт геологии и геофизики  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
8 февраля 1971 г.

EQUATIONS OF DIFFUSION COMPONENTS OF A PLANE STRATIFIED  
PLASMA (IONOSPHERE)

*E. I. Ginzburg, V. F. Kim*

The diffusion equations are derived for ion components of two-ion plane stratified magnetoactive plasma (ionosphere). It is shown that the ion admixture undergoes a strong drift by the main ion component with the velocity of the order of the ambipolar diffusion velocity. In the particular case of a single ion plasma in the diffusion equation the wind effect and the presence of the altitude temperature distribution are taken into account.

УДК 538.574.5

## О ПОГЛОЩЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЛИНЕЙНОМ СЛОЕ В ОБЛАСТИ ПЛАЗМЕННОГО РЕЗОНАНСА

*A. Я. Омельченко, В. И. Панченко, К. Н. Степанов*

Приведены результаты численных расчетов коэффициента поглощения электромагнитной волны, поляризованной в плоскости падения, при наклонном падении на линейный слой плазмы в случае, когда поглощение обусловлено эффектом «разбухания» поля в области плазменного резонанса.

Как известно [1, 2], при наклонном падении электромагнитной волны, поляризованной в плоскости падения, в точке плазменного резонанса происходит резкое увеличение составляющей электромагнитного поля в направлении неоднородности (эффект «разбухания» поля). Возрастание поля в резонансной области приводит к увеличению поглощения электромагнитной волны, которое оказывается конечным, даже при частоте столкновений  $\nu$ , стремящейся к нулю. В слабонеоднородной плазме поведение поля в области плазменного резонанса в случае достаточно больших углов падения, когда доля энергии, проникающей в область резонанса, экспоненциально мала, рассмотрено в работе [3], а для весьма малых углов падения, когда составляющая электрического поля в направлении неоднородности значительно меньше амплитуды падающей волны, — в работе [4].

В настоящей работе исследуется угловая зависимость коэффициента поглощения, обусловленного эффектом «разбухания» поля. В случае слабонеоднородной плазмы коэффициент поглощения является функцией одного параметра

$$\epsilon = \rho^{2/3} \sin^2 \Theta, \quad (1)$$

где

$$\rho = \frac{\omega L}{c}, \quad \frac{1}{L} = \left. \frac{d \ln n}{dx} \right|_{\omega_p(x) = \omega}$$

и  $\Theta$  — угол падения. В этом случае коэффициент поглощения достигает максимального значения  $Q = 0,5$  при  $\epsilon = 0,461$ .

Будем считать, что плотность плазмы изменяется по линейному закону  $n(x) = \frac{x}{L} n_0$ . Тогда поведение магнитного поля волны в плазме будет описываться уравнением

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{1}{z} \frac{dH}{dz} - \rho^2 (\sin^2 \Theta - z) H = 0, \quad (2)$$

где  $z = 1 - \frac{x}{L}$ . Решение этого уравнения имеет вид [5, 7]

$$H = AH_1(z) + BH_2(z), \quad (3)$$

где

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+2}, \quad H_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k + \beta H_1 \ln z. \quad (4)$$

Коэффициенты  $c_k$  и  $b_k$  определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\rho^2 \sin^2 \Theta c_{k-2} - \rho^2 c_{k-3}}{k(k+2)}, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \\ c_2 &= \frac{1}{8} \rho^2 \sin^2 \Theta, \\ b_k &= \frac{\rho^2 \sin^2 \Theta b_{k-2} - \rho^2 b_{k-3} - 2\beta(k-1)c_{k-2}}{k(k-2)}, \\ b_0 &= -\frac{1}{2}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -\frac{1}{16} \rho^2 \sin^2 \Theta, \quad \beta = -\frac{1}{4} \rho^2 \sin^2 \Theta. \end{aligned}$$

В выражении (4) при  $z > 0 \quad \ln z = \ln |z|$ , а при  $z < 0 \quad \ln z = \ln |z| + i\pi$ . (Выбор ветви функции  $\ln z$  определяется введением бесконечно малой частоты столкновений  $v$ .)

В области вакуума  $H(x)$  имеет вид

$$H(x) = [\exp(i k_x x) + r \exp(-i k_x x)] \exp[i(k_y y - \omega t)], \quad (5)$$

где

$$k_y = \frac{\omega}{c} \sin \Theta, \quad k_x = \frac{\omega}{c} \cos \Theta.$$

Определение коэффициента отражения проводилось путем расчета на ЭВМ с использованием условий непрерывности  $H$  и  $\frac{dH}{dx}$  на границе плазмы с вакуумом и обращения функции  $H(z)$  в нуль при  $z = -z_0$ , где величина  $z_0$  выбиралась достаточно большой (последнее условие заменяло условие обращения  $H(z)$  в нуль при  $z \rightarrow -\infty$ ).

Зависимость коэффициента поглощения  $Q = 1 - |r|^2$  от параметра  $\epsilon$  в сильнонеоднородной плазме ( $\rho \leq 1$ ) для различных значений параметра  $\rho$  показана на рис. 1. Коэффициент поглощения изменяется линейно с ростом  $\epsilon$  при малых  $\epsilon$ , достигает максимального значения  $Q \leq 0,5$  и затем убывает, обращаясь в нуль в точке  $\Theta = \pi/2$ . При любом фиксированном  $\Theta < \pi/2$  величина  $Q \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow \infty$ .

В слабонеоднородной плазме ( $\rho \gg 1$ ) величина  $Q$  зависит только от  $\epsilon$ . График коэффициента поглощения в этом случае показан на рис. 2\*.

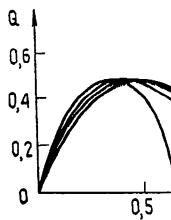


Рис. 1.

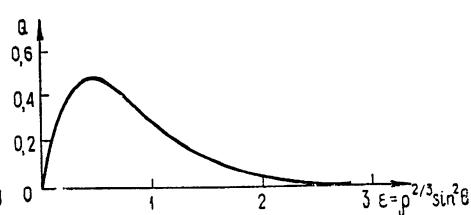


Рис. 2.

\* График квадрата коэффициента отражения  $|\Gamma|^2 = 1 - Q$ , полученный Будденом (не опубликовано) путем численного интегрирования уравнения (2), приведен при  $\epsilon < 1$  в работе [8]. Мы благодарны В. Б. Гильденбургу, указавшему нам на работу [8].

Отметим, что этим графиком можно пользоваться с большой точностью уже при  $\rho \geq 4$ . Если неоднородность плазмы мала, так что можно пользоваться приближением геометрической оптики всюду, за исключением точки отражения и точки плазменного резонанса, то зависимость коэффициента поглощения от угла падения по-прежнему будет определяться графиком, представленным на рис. 2, если только диэлектрическую проницаемость плазмы в области, включающей точку отражения и близко лежащую к ней (при  $\epsilon \leq 1$ ) точку резонанса, можно представить в виде линейной функции от  $x$ .

В работах [3, 6] приведены интерполяционные формулы, определяющие коэффициент поглощения в слабонеоднородной плазме для произвольных значений  $\epsilon$ , выражаяющиеся через функции Эйри и их производные. Эти формулы, однако, при  $\epsilon \ll 1$  не совпадают с результатами [4] и, как показывает сравнение с данными, приведенными на рис. 2, при  $\epsilon \sim 1$  справедливы лишь по порядку величины.

Используя ряды (4), можно получить величину коэффициента поглощения для слабонеоднородной плазмы при малых углах падения ( $\Theta \rightarrow 0$ ). В этом случае решение (3) имеет вид

$$H(z) = Az^2 + B \left[ 1 + \frac{\epsilon}{2} z^2 \ln z \right], \quad (6)$$

где  $\epsilon \ll 1$ ,  $\epsilon \rho^{4/3} z^2 \ll 1$ ,  $\rho \gg 1$ . Используя это решение, нетрудно получить для  $Q$  выражение

$$Q = 2\pi \epsilon \frac{\Gamma(2/3)}{3^{1/6} \Gamma(1/3)},$$

которое совпадает с результатом работы [4]. Это соотношение совпадает с результатом численного расчета, приведенного на рис. 2, с точностью до  $\leq 1\%$  при значениях  $\epsilon \leq 0,05$ .

Приведем для иллюстрации поведение магнитного поля волны  $H(z)$  в окрестности точки отражения и точки резонанса при  $\rho = 20$  и  $\epsilon = 0,461$  ( $z_0 = -1$ ) (рис. 3).

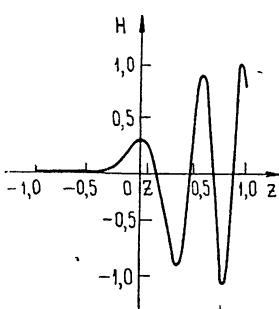


Рис. 3.

Экспериментальное определение коэффициента поглощения в зависимости от частоты позволяет восстановить зависимость плотности от координаты. Если  $\epsilon = \epsilon(Q)$  — функция, обратная  $Q(\epsilon)$  и определяемая графиком рис. 2, то зависимость  $n(x)$  определяется (в неявном виде) следующим соотношением:

$$x = \frac{2c}{\sin^3 \Theta} \int_0^{\omega_p(x)} \frac{\epsilon^{3/2} [Q_{\text{изм}}(\omega)]}{\omega^2} d\omega, \quad (7)$$

где  $Q_{\text{изм}}(\omega)$  — измеренная зависимость коэффициента поглощения от частоты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K. G. Budden, Cavendish Lab., Phys. Soc., London, 1955, p. 320.
2. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
3. Н. Г. Денисов, ЖЭТФ, 31, 609 (1956).
4. А. Я. Омельченко, К. Н. Степанов, УФЖ, 12, 1445 (1967).
5. Е. Н. Васильев, Ю. И. Орлов, В. А. Пермяков, ЖТФ, 34, 1341 (1964).

6. А. Д. Пилия, ЖТФ, 36, 818 (1966).
7. K. Försterling, Archiv der Elektr. Über., 3, 115 (1949).
8. P. Hirsh, J. Shmoyls, Radio Science, J. Res., NBS/USNC—URSI, 69 D, 521 (1965).

Поступила в редакцию  
1 декабря 1970 г.

ABSORPTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A LINEAR LAYER  
IN PLASMA RESONANCE REGION

*A. Ya. Omel'chenko, V. I. Panchenko, K. N. Stepanov*

The paper presents the results of numerical calculations of the absorption coefficient of an electromagnetic wave polarized in the incidence plane at the oblique incidence on the linear plasma layer when the absorption is due to the field broadening effect in the plasma resonance region.

---

УДК 538.56

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОСИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

*B. V. Плоткин*

Рассматривается задача о распространении квазимохроматических радиосигналов с произвольной формой амплитудной и фазовой огибающих в нелинейной среде в случае, когда нелинейность обусловлена нагревом электронов плазмы в поле волны. С помощью метода усреднений получены формулы, описывающие распространение амплитуды и фазы сигнала. Приводятся численные расчеты искажений радиосигналов с первоначальной формой амплитудной огибающей в виде прямоугольного импульса и отрезка синусоиды. Рассматриваются нелинейные искажения модулированных радиоволн. В частности, получено выражение для индекса фазовой модуляции при сильной нелинейности и любой частоте модуляции.

В нелинейной среде, когда нелинейность обусловлена зависимостью эффективной частоты соударений  $\nu$  электронов с тяжелыми частицами от электрического поля волны, в настоящее время хорошо исследовано лишь распространение монохроматических радиоволн (см., например, [1]). Ниже мы приведем некоторые результаты, касающиеся распространения квазимохроматических импульсов произвольной формы в нелинейной среде, полученные с помощью метода усреднения (см. [2, 3]).

Будем считать, что амплитуда волны слабо меняется в пространстве, в силу чего можно не учитывать неоднородность нагрева плазмы и связанное с этим перераспределение электронной концентрации  $N$ . При рассмотрении ограничимся рамками элементарной теории [1]. Тогда имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \nu(T_e) \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\omega_0^2}{4\pi} E, \\ \frac{\partial T_e}{\partial t} + \delta \nu(T_e) (T_e - T) &= \frac{2}{3\pi N} E \frac{\partial P}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $E(z, t)$  — электрическое поле волны;  $P(z, t)$  — поляризация среды;  $T$  — температура тяжелых частиц;  $T_e$  — электронная температура;  $\omega_0 = \sqrt{4\pi Ne^2/m}$  — плазменная частота;  $\delta$  — средняя относительная доля энергии, передаваемая электроном тяжелым частицам при столкновении;  $\pi$  — постоянная Больцмана. Для простоты ниже среда предполагается однородной; рассматривается одномерный случай.

1. В случае слабой нелинейности будем искать решение системы (1) в виде

$$E(z, t) = A(z, t) e^{-iz} \sin \{\omega t - kz + \theta(z, t)\}. \quad (2)$$

Здесь  $A(z, t)$  и  $\theta(z, t)$  являются соответственно амплитудной и фазовой огибающими рассматриваемого радиосигнала с несущей частотой  $\omega$ . Коэффициент затухания  $\gamma$  и волновой вектор  $k$  определим в (2) так же, как и в линейном случае (см. [1]).

Для определенности рассматриваем соударения электронов только с молекулами (для соударений с ионами расчет аналогичен):

$$\nu(T_e) = \nu_0 \sqrt{T_e/T} = \nu_0 + \nu_0 x(z, t), \quad |x(z, t)| \ll 1. \quad (3)$$

Тогда для плавных функций  $A(z, t)$  и  $\theta(z, t)$  методом усреднения (см. [2, 3]) из (1) нетрудно получить следующие уравнения (дисперсионные члены опускаем):

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial z} &= -pAx, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial z} = -qx, \\ \frac{\partial x}{\partial t} + \delta \nu_0 x &= \frac{\delta \nu_0}{2} \frac{A^2}{E_p^2} e^{-2iz}, \\ v = \frac{d\omega}{dk} &= \frac{c^2 k}{\omega(1 - \omega_0^2 \nu_0^2 / (\omega^2 + \nu_0^2)^2)}, \\ p &= \frac{\omega_0^2 \nu_0^2 (\omega^2 - \nu_0^2)}{2(\omega^2 + \nu_0^2)^2 (1 - \omega_0^2 \nu_0^2 / (\omega^2 + \nu_0^2)^2)}, \quad q = \frac{\omega_0^2 \nu_0^2 \omega}{(\omega^2 + \nu_0^2)^2 (1 - \omega_0^2 \nu_0^2 / (\omega^2 + \nu_0^2)^2)}, \\ E_p^2 &= \frac{3m \times T}{e^2} \delta(\omega^2 + \nu_0^2). \end{aligned} \quad (4)$$

При слабой нелинейности (см. (3)) решение системы (4) имеет вид

$$A(z, t) = A_0 \left( t - \frac{z}{v} \right) \left\{ 1 - \frac{p}{v} \frac{1 - e^{-2iz}}{4\gamma} \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta \nu_0 \int_0^\infty A_0^2(t - z/v - \xi) \exp(-\delta \nu_0 \xi) d\xi}{E_p^2} \right\}; \quad (5)$$

$$\theta(z, t) = \theta_0 \left( t - \frac{z}{v} \right) - \frac{q}{v} \frac{1 - e^{-2iz}}{4\gamma} \frac{\delta \nu_0 \int_0^\infty A_0^2(t - z/v - \xi) \exp(-\delta \nu_0 \xi) d\xi}{E_p^2}. \quad (6)$$

Здесь  $A_0(t) = A(0, t)$ ,  $\theta_0(t) = \theta(0, t)$ . Как видно из (5) и (6), нелинейность приводит к тому, что не только амплитуда, но и первоначальная форма огибающих радиосигнала изменяется при его распространении в нелинейной среде.

Для приимера на рис. 1 а приводятся формы амплитудной огибающей для сигнала, когда

$$A_0(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E_0 \sin \frac{\pi t}{T} & (0 < t < T) \\ 0 & (T < t) \end{cases}$$

Расчет произведен по формуле (5) (считаем  $\delta \nu_0 T \gg 1$ ). Кривая 1 изображает начальную форму амплитудной огибающей сигнала при  $z = 0$ . Для кривой 2 мы положили  $\frac{1 - e^{-2iz}}{8} \frac{\omega^2 - \nu_0^2}{\omega^2 + \nu_0^2} \frac{E_0^2}{E_p^2} = 0,1$ , для кривой 3  $\frac{1 - e^{-2iz}}{8} \frac{\omega^2 - \nu_0^2}{\omega^2 + \nu_0^2} \frac{E_0^2}{E_p^2} = -0,1$ . Как и следовало ожидать, при  $p > 0$

поглощение сигнала растет, а при  $p < 0$  — уменьшается. Если условие квазистационарности не выполнено, то это приведет к дополнительным

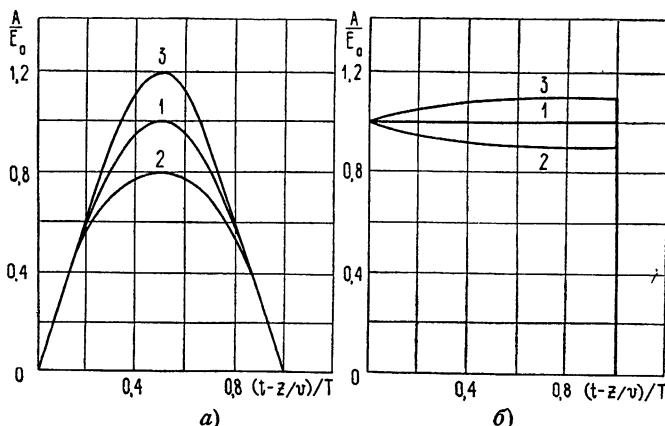


Рис. 1.

искажениям сигнала за счет инерции среды. На рис. 1 б приведены амплитудные огибающие для случая, когда начальный сигнал был прямоугольным импульсом:

$$A_0(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E_0 & (0 < t < T) \\ 0 & (T < t) \end{cases}$$

(кривая 1). Считалось, что  $\delta v_0 T = 4$ . Для кривой 2 выполняется  $\frac{1 - e^{-2\gamma_2}}{4} \frac{\omega^2 - v_0^2}{\omega^2 + v_0^2} \frac{E_0^2}{E_p^2} = 0.1$ , для кривой 3 —  $\frac{1 - e^{-2\gamma_2}}{4} \frac{\omega^2 - v_0^2}{\omega^2 + v_0^2} \frac{E_0^2}{E_p^2} = -0.1$ .

Для радиоволн, модулированных по амплитуде, используя (5) и (6), нетрудно получить выражения для глубины модуляции и индекса фазовой модуляции, совпадающие с результатами работы [4].

2. Для мощных монохроматических волн выражение для поля при любой величине нелинейности в приближении геометрической оптики приводится в [1]. Используя результаты [1], с помощью метода усреднений рассмотрим распространение мощных модулированных волн с малой глубиной модуляции.

Будем искать решение системы (1) в виде

$$E(z, t) = \left\{ A(z, t) \cos \left( \omega t - \int_0^z k_c dz \right) + B(z, t) \sin \left( \omega t - \int_0^z k_c dz \right) \right\} \times \times \exp \left( - \int_0^z \gamma_c dz \right).$$

В соответствии с [1] здесь

$$k_c = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma_c}{\omega}\right)^2}}, \quad \varepsilon_c = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + v_c^2},$$

$$\gamma_c = \frac{\omega}{c} \sqrt{-\frac{\varepsilon_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma_c}{\omega}\right)^2}}, \quad \sigma_c = \frac{\omega_0^2}{4\pi} \frac{v_c}{\omega^2 + v_c^2},$$

$$\nu_c^2 = \nu_0^2 + \nu_0^2 \frac{\omega^2 + \nu_0^2}{\omega^2 + \nu_c^2} \frac{A^{(0)2} + B^{(0)2}}{E_p^2} \exp \left( -2 \int_0^z \gamma_c dz \right)$$

и, кроме того,  $A(z, t) = A^{(0)} + A^{(1)}(z, t)$  и  $B(z, t) = B^{(0)} + B^{(1)}(z, t)$  (для рассматриваемых волн с малой глубиной модуляции выполняются неравенства:  $A^{(0)} \gg |A^{(1)}(z, t)|$ ,  $B^{(0)} \gg |B^{(1)}(z, t)|$ ). Тогда получается следующая система:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A^{(1)}}{\partial t} + v_c \frac{\partial A^{(1)}}{\partial z} &= -p_c A^{(0)} x - q_c B^{(0)} x, \\ \frac{\partial B^{(1)}}{\partial t} + v_c \frac{\partial B^{(1)}}{\partial z} &= -p_c B^{(0)} x + q_c A^{(0)} x, \\ \frac{\partial x}{\partial t} + \delta' \nu_0 x &= \delta \nu_0 (\tau_c^2 - 1) \frac{A^{(0)} A^{(1)} + B^{(0)} B^{(1)}}{A^{(0)2} + B^{(0)2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \tau_c &= \nu_c / \nu_0, \quad \delta' = \delta \left( 1 + \frac{\nu_0^2 (\tau_c^2 - 1)}{\omega^2 + \nu_c^2} \right), \\ v_c &= \frac{c^2 k_c}{\omega \left( 1 - \frac{\omega^2 \nu_c^2}{(\omega^2 + \nu_c^2)^2} \right)}, \quad p_c = \frac{\omega_0^2 \nu_0 (\omega^2 - \nu_c^2)}{2 (\omega^2 + \nu_c^2)^2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2 \nu_c^2}{(\omega^2 + \nu_c^2)^2} \right)}, \\ q_c &= \frac{\omega_0^2 \omega \nu_0 \nu_c}{(\omega^2 + \nu_c^2)^2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2 \nu_c^2}{(\omega^2 + \nu_c^2)^2} \right)}. \end{aligned}$$

Для модулированных радиоволн, когда  $E(0, t) = \sqrt{A^{(0)2} + B^{(0)2}} \times [1 + \mu_0 \cos(\omega t - \psi_0)] \cos \left( \omega t - \arctg \frac{B^{(0)}}{A^{(0)}} \right)$  ( $\mu_0 \ll 1$ ), легко получить решение системы (7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \sqrt{A^{(0)2} + B^{(0)2}} \exp \left( - \int_0^z \gamma_c dz \right) \left\{ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \mu_0 \cos \left[ \Omega \left( t - \int_0^z \frac{dz}{v_c} \right) - \psi \right] \right\} \cos \left\{ \omega t - \int_0^z k_c dz - \right. \\ &\quad \left. - \beta \cos \left[ \Omega \left( t - \int_0^z \frac{dz}{v_c} \right) - \chi \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\mu_0 = \mu_0 \exp \left[ - \int_0^z \frac{p_c}{v_c} \frac{\delta \nu_0 (\tau_c^2 - 1)}{(\delta' \nu_c)^2 + \Omega^2} \delta' \nu_c dz \right],$$

$$\psi = \psi_0 - \int_0^z \frac{p_c}{v_c} \frac{\delta \nu_0 (\tau_c^2 - 1)}{(\delta' \nu_c)^2 + \Omega^2} \Omega dz,$$

$$\beta = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}, \quad \chi = \operatorname{arctg} \frac{d_1}{d_2},$$

$$d_1 = \int_0^z \frac{q_c}{v_c} \frac{\delta v_0 (\tau_c^2 - 1)}{\sqrt{(\delta' v_c)^2 + \Omega^2}} \mu_\Omega \cos \left( \psi + \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\delta' v_c} \right) dz,$$

$$d_2 = \int_0^z \frac{q_c}{v_c} \frac{\delta v_0 (\tau_c^2 - 1)}{\sqrt{(\delta' v_c)^2 + \Omega^2}} \mu_\Omega \sin \left( \psi + \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\delta' v_c} \right) dz.$$

Видно, что в рассматриваемом случае также имеет место изменение глубины модуляции и появление фазовой модуляции. Выражение для  $\mu_\Omega(z)$  полностью совпадает с полученным в работе [5], а выражение для индекса фазовой модуляции при условии  $\delta v_0 \gg \Omega$  переходит в соответствующую формулу [5], рассчитанную там иным методом лишь для малых  $\Omega$ :

$$\beta = \mu_0 \frac{\tau_c^2(z) - \tau_c^2(0)}{\tau_c^2(0)} \frac{\omega v_0 \tau_c(0)}{\omega^2 + v_c^2}, \quad \tau_c(0) = \frac{v_c(0)}{v_0}$$

(в [5] эта формула приведена для случая, когда  $\tau(z) \sim 1$ ). Как видно, при сильной нелинейности вполне может выполняться соотношение  $\beta \sim \mu_0$ , что важно для практики.

Автор искренне благодарит И. М. Виленского за постоянное внимание к работе и ряд полезных замечаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. Н. Н. Богослов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
3. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
4. И. М. Виленский, Н. А. Зыкова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 4, 543 (1959).
5. А. В. Гуревич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 1, № 4, 21 (1958).

Институт геологии и геофизики  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
2 июня 1970 г

## RADIO SIGNAL PROPAGATION IN A NONLINEAR MEDIUM

V. V. Plotkin

The author considers the propagation of quasi-monochromatic radio signals with arbitrary amplitude and phase envelopes in the nonlinear medium when the nonlinearity is due to the plasma electron heating in a wave field. The formulas describing the propagation of the signal amplitude and phase are obtained by the averaging method. The numerical calculations of distortions of radio signals the amplitude envelope of which has the initial form of a rectangular pulse and a sinusoidal section are presented. The nonlinear distortion of modulated radio waves are considered. In particular, the expression is derived for the phase modulation index at the strong nonlinearity and any frequency of modulation.

УДК 538.69

## ВЛИЯНИЕ ФОНОННОГО УЗКОГО ГОРЛА В ЭЛЕКТРОННОЙ СПИН-РЕШЕТОЧНОЙ РЕЛАКСАЦИИ НА НАСЫЩЕНИЕ МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА

*Л. Л. Бушвили, Н. П. Гиоргадзе*

Влияние эффекта фононного узкого горла (ФУГ) в электронной спин-решеточной релаксации на насыщение ЭПР рассматривается методом Зубарева, при этом определенная ранее другими авторами «эффективная температура» спин-системы появляется автоматически, без привлечения каких-либо дополнительных соображений. Показано, что в случае сильной спектральной диффузии и достаточно слабого переменного поля в условиях ФУГ может быть достигнуто состояние «промежуточного насыщения», при котором поглощаемая мощность оказывается пропорциональной амплитуде поля. В достаточно сильном переменном поле ФУГ не оказывает влияния на характер поглощения энергии. В случае слабой спектральной диффузии при частотах переменного поля, близких к резонансной, эффект ФУГ оказывается лишь в поведении связанных с электронной спин-системой фононов. Это обстоятельство является неблагоприятным с точки зрения детектирования эффекта ФУГ в случае слабой спектральной диффузии.

В последнее время как теоретически, так и экспериментально было показано [1, 2], что в достаточно сильных магнитных полях диполь-дипольному резервуару (ДДР) спин-системы (внутренние степени свободы) следует приписывать свою, вообще говоря, отличную от зеемановской температуру. Это обстоятельство, как было указано Провоторовым [1], существенно влияет на характер насыщения магнитного резонанса. Впервые возникающие при этом особенности были замечены экспериментально в случае ЯМР [2]. Но недавно было показано, что двухтемпературная теория справедлива и в случае электронной спин-системы [3].

Вместе с тем Провоторов предполагал, что фононы, участвующие в процессе спин-решеточной релаксации, все время остаются в равновесии с термостатом. Однако при низких температурах (когда определяющим является однофононный механизм релаксации) это предположение не всегда оказывается верным. В частности, при достаточно сильных магнитных полях и высоких концентрациях примеси (когда имеет смысл вводить ДДР в электронной спин-системе) передача энергии от электронных спинов к резонансным фононам протекает обычно быстрее, чем происходит ее перераспределение по спектру фононов и передача термостату. Это приводит к разогреву резонансных фононов. Тогда говорят, что имеет место фононное узкое горло (ФУГ) в электронной спин-решеточной релаксации.

Естественно ожидать, что наличие ФУГ в электронной спин-решеточной релаксации окажет влияние на насыщение ЭПР. Попытка учесть это влияние была предпринята в работе [4]. Рассмотрение, однако, основывалось на введении из простых, но недостаточно строгих физических соображений «эффективной температуры» электронной спин-системы, что привело к возражениям и дискуссии [5, 6]. Следует еще упомянуть работу [7], в которой влияние ФУГ в электронной спин-решеточной релаксации на насыщение ЭПР рассматривалось с точки зрения ДПЯ.

В настоящей работе влияние ФУГ в электронной спин-решеточной релаксации на насыщение ЭПР рассматривается методом Зубарева [8], обеспечивающим последовательное решение задачи при определенных естественных допущениях. При этом введенная в [4] «эффективная температура» появляется автоматически. Кроме того, подробно обсуждаются представляющие практический интерес различные предельные случаи, не упомянутые в [4].

1. Рассмотрим содержащий парамагнитные примеси образец, помещенный в постоянное и радиочастотное магнитные поля. Будем предполагать, что связь парамагнитных примесей с термостатом осуществляется однофононным механизмом релаксации.

Гамильтониан системы будет состоять из энергии фононов  $H_{ph}$ , зеемановской энергии спинов примесей в постоянном внешнем поле  $H_s$ , гамильтонианов диполь-дипольного взаимодействия спинов примесей  $H_d$  переменного поля  $H_a$  и термостата  $H_0$  явный вид которых не понадобится, а также гамильтониана взаимодействия  $H'$ .

Энергия фононов может быть представлена в виде ( $\hbar = 1$ )

$$H_{ph} = \sum_{\mathbf{k}j} H_{\mathbf{k}j}, \quad (1)$$

$$H_{\mathbf{k}j} = \omega_{\mathbf{k}j} a_{\mathbf{k}j}^+ a_{\mathbf{k}j},$$

где  $\omega_{\mathbf{k}j}$  — частота фона  $j$ -й ветви с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , а  $a_{\mathbf{k}j}^+$  и  $a_{\mathbf{k}j}$  — операторы рождения и уничтожения фононов соответственно. В дальнейшем нас будут интересовать фононы с определенной величиной волнового вектора. Поэтому целесообразно, переходя в (1) от суммирования к интегрированию согласно соотношению\*

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int \frac{d\Omega dk k^2}{(2\pi)^3},$$

представить гамильтониан фононов в виде

$$H_{ph} = \sum_j \int_0^{k_j} dk H_{kj},$$

где  $H_{kj} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{k^2}{2\pi^2} H_{kj}$ , а  $k_j$  — максимальное значение волнового вектора  $j$ -й ветви. Далее, зеемановская энергия дается выражением

$$H_s = \omega_s \sum_n S_n^z, \quad (2)$$

где  $\omega_s$  — зеемановская частота, а  $S_n$  — спин парамагнитной примеси. Наконец, гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H' = H_{sL} + H_{sa} + H_{L0}. \quad (3)$$

Первое слагаемое здесь представляет взаимодействие спин-системы с фононами. Для простоты мы будем считать его линейным по спинам парамагнитных примесей и запишем в виде

$$H_{sL} = \sum_n \sum_j \int_0^{k_j} dk \left[ L_{nkj}^z S_n^z + \frac{1}{2} (L_{nkj}^+ S_n^- + L_{nkj}^- S_n^+) \right], \quad (4)$$

\* Принимается изотропная модель.

где

$$L_{nkj} = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{k^2}{2\pi^2} L_{nkj}.$$

Поскольку мы интересуемся эффектами ФУГ, возникающими при одноФононном механизме релаксации, оператор  $L_{nkj}$  предполагается линейным по  $a_{kj}^+$  и  $a_{kj}^-$ .

Второе слагаемое описывает взаимодействие спинов с переменным полем и может быть представлено в виде

$$H_{sa} = \frac{1}{2} \sum_n (h^+ S_n^- + h^- S_n^+), \quad (5)$$

где  $h^\pm$  — циркулярные компоненты переменного поля. Заметим, что мы будем рассматривать переменное поле квантовомеханически, считая  $h^\pm$  оператором. Последнее слагаемое в (3) содержит взаимодействие фононов различных частот с термостатом. Оно может быть записано как

$$H_{L0} = \sum_j \int_0^{k_j} dk H_{kj}^0, \quad (6)$$

где

$$H_{kj}^0 = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{k^2}{2\pi^2} H_{kj}^0$$

имеет смысл плотности взаимодействия в пространстве волновых чисел, а явный вид  $H_{kj}^0$  несуществен.

Следует иметь в виду, что (3) не содержит взаимодействия между фононами различных частот, приводящего к обмену энергией между фононами различной частоты и выравниванию температуры вдоль фононного спектра. Ниже, однако, будут рассмотрены лишь предельные случаи слабой и сильной спектральной диффузии, для описания которых конкретный вид этого взаимодействия не играет роли.

Основное предположение сводится теперь к тому, что равновесие внутри зеемановского и диполь-дипольного резервуаров, фононов одинаковой частоты и термостата устанавливается быстрее, чем равновесие между различными резервуарами. Поэтому квазиравновесное состояние, которое устанавливается по прошествии малого промежутка времени, превышающего, однако, времена установления внутренних равновесий, может быть описано сокращенным набором термодинамических параметров, в частности, температур различных резервуаров — подсистем.

Составляя теперь, в соответствии с методом Зубарева [8], уравнения движения для гамильтонианов различных подсистем

$$\begin{aligned} \frac{dH_s}{dt} &= \frac{\omega_s}{2i} \sum_n \left\{ \left( \sum_{kj} L_{nkj}^- + h^- \right) S_n^+ - \left( \sum_{kj} L_{nkj}^+ + h^+ \right) S_n^- \right\} \equiv K_s, \\ \frac{dH_d}{dt} &= -\frac{1}{2} \sum_n \left\{ \left( \sum_{kj} L_{nkj}^- + h^- \right) \dot{S}_n^+ + \left( \sum_{kj} L_{nkj}^+ + h^+ \right) \dot{S}_n^- \right\} \equiv K_d, \\ \frac{dH_a}{dt} &= -\frac{1}{2} \sum_n (S_n^- h^+ + S_n^+ h^-) \equiv K_a, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{dH_{kj}}{dt} = -\frac{1}{2} \sum_n (S_n^- \dot{L}_{nkj}^+ + S_n^+ \dot{L}_{nkj}^-) + K_{kj}^0 \equiv K_{kj},$$

где

$$\begin{aligned} \dot{S}_n^\pm &= \frac{1}{i} [S_n^\pm H_d], \quad \dot{L}_{nkj}^\pm = \frac{1}{i} [L_{nkj}^\pm H_{kj}], \quad \dot{h}^\pm = \frac{1}{i} [h^\pm H_a], \\ \dot{L}_{nkj}^\pm &= \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{k^2}{2\pi^2} L_{nkj}^\pm, \quad K_{kj}^0 = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{k^2}{2\pi^2} K_{kj}^0, \quad K_{kj}^0 = \frac{1}{i} [H_{kj} H_{kj}^0], \end{aligned} \quad (8)$$

для неравновесного статистического оператора получим

$$\begin{aligned} \rho = Q \exp \Big\{ -\beta_0 H_0 - \beta_s H_s - \beta_d H_d - \sum_j \int_0^{k_j} dk \beta_{kj} H_{kj} + \\ + \int_{-\infty}^0 dt e^{\epsilon t} [(\beta_s - \beta_0) K_s(t) + (\beta_d - \beta_0) K_d(t) - \\ - \beta_0 K_a(t) + \sum_j \int_0^{k_j} dk (\beta_{kj} - \beta_0) K_{kj}(t)] \Big\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\beta_0$ ,  $\beta_s$ ,  $\beta_d$ ,  $\beta_{kj}$  — обратные температуры термостата, зеемановской и диполь-дипольной подсистем и фононов различных частот. Предполагается при этом, что температура электромагнитного поля бесконечна  $|\beta_a \rightarrow 0|$ , что исключает возможность рассмотрения когерентных эффектов.

Используя для  $\beta_s H_s$  и  $\beta_d H_d$  высокотемпературное приближение, а также разлагая (9) по малому возмущению, согласно соотношению

$$e^{A+B} \approx e^A \left[ 1 + \int_0^1 d\lambda e^{-A\lambda} B e^{A\lambda} \right] \quad (A \gg B), \quad (10)$$

для средних потоков имеем

$$\begin{aligned} \bar{K}_s &= \text{Sp } \rho K_s = L_{ss} (\beta_s - \beta_0) + L_{sd} (\beta_d - \beta_0) - \beta_0 L_{sa} + \sum_j \int_0^{k_j} dk L_{skj} (\beta_{kj} - \beta_0), \\ \bar{K}_d &= \text{Sp } \rho K_d = L_{ds} (\beta_s - \beta_0) + L_{dd} (\beta_d - \beta_0) - \beta_0 L_{da} + \sum_j \int_0^{k_j} dk L_{dkj} (\beta_{kj} - \beta_0), \\ \bar{K}_{kj} &= \text{Sp } \rho K_{kj} = L_{kjs} (\beta_s - \beta_0) + L_{kjd} (\beta_d - \beta_0) + \sum_{j'} \int_0^{k_{j'}} dk' L_{kj'j} (\beta_{kj'} - \beta_0), \end{aligned} \quad (11)$$

где\*

$$\begin{aligned} L_{ss} = \frac{\pi \omega_s^2}{2} \sum_n \langle S_n^+ S_n^- \rangle &\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S^{-+}(\omega) \left\{ \sum_{kj} \frac{\exp [\beta_{kj}(\omega_s - \omega)] - 1}{\beta_{kj}(\omega_s - \omega)} L_{kj}^{+-}(\omega_s - \omega) + \right. \\ &\left. + h^{+-}(\omega_s - \omega) \right\}, \end{aligned}$$

\* Недостающие коэффициенты определяются соотношением  $L_{mn} = L_{nm}$ .

$$\begin{aligned}
 L_{sd} = & -\frac{\pi \omega_s}{2} \sum_n \langle S_n^+ S_n^- \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega S^{-+}(\omega) \left\{ \sum_{kj} \frac{\exp[\beta_{kj}(\omega_s - \omega)] - 1}{\beta_{kj}(\omega_s - \omega)} L_{kj}^{+-}(\omega_s - \omega) + \right. \\
 & \left. + h^{+-}(\omega_s - \omega) \right\}, \\
 L_{sa} = & \frac{\pi \omega_s}{2} \sum_n \langle S_n^+ S_n^- \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (\omega - \omega_s) S^{-+}(\omega) h^{+-}(\omega_s - \omega), \quad (12) \\
 L_{skj} = & \frac{\pi \omega_s}{2} \sum_n \langle S_n^+ S_n^- \rangle \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\mathbf{k}^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (\omega - \omega_s) S^{-+}(\omega) \times \\
 & \times \frac{\exp[\beta_{kj}(\omega_s - \omega)] - 1}{\beta_{kj}(\omega_s - \omega)} L_{kj}^{+-}(\omega_s - \omega), \\
 L_{dd} = & \frac{\pi}{2} \sum_n \langle S_n^+ S_n^- \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^2 S^{-+}(\omega) \left\{ \sum_{kj} \frac{\exp[\beta_{kj}(\omega_s - \omega)] - 1}{\beta_{kj}(\omega_s - \omega)} L_{kj}^{+-}(\omega_s - \omega) + \right. \\
 & \left. + h^{+-}(\omega_s - \omega) \right\}, \\
 L_{da} = & \frac{\pi}{2} \sum_n \langle S_n^+ S_n^- \rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega (\omega_s - \omega) S^{-+}(\omega) h^{+-}(\omega_s - \omega), \\
 L_{dkj} = & \frac{\pi}{2} \sum_n \langle S_n^+ S_n^- \rangle \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\mathbf{k}^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega (\omega_s - \omega) S^{-+}(\omega) \times \\
 & \times \frac{\exp[\beta_{kj}(\omega_s - \omega)] - 1}{\beta_{kj}(\omega_s - \omega)} L_{kj}^{+-}(\omega_s - \omega), \\
 L_{k'k'l'} = & \frac{\pi}{2} \sum_n \langle S_n^+ S_n^- \rangle \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\mathbf{k}^2}{2\pi^2} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \frac{\mathbf{k}'^2}{2\pi^2} \delta_{kk'} \delta_{ll'} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S^{-+}(\omega) (\omega_s - \omega)^2 \frac{\exp[\beta_{kj}(\omega_s - \omega)] - 1}{\beta_{kj}(\omega_s - \omega)} L_{kj}^{+-}(\omega_s - \omega) + L_{k'k'l'}^0.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 S^{-+}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \frac{\langle S_n^- \tilde{S}_n^+(t) \rangle}{\langle S_n^- S_n^+ \rangle}, \\
 h^{+-}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle h^+ h^-(t) \rangle,
 \end{aligned}$$

$$L_{kj}^{+-}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \text{Sp} \rho_{kj} L_{nkj}^+ L_{nkj}^- (t), \quad (13)$$

$$\langle A \rangle = \frac{\text{Sp} A}{\text{Sp} 1}, \quad \tilde{S}_n^+(t) = \exp(iH_d t) S_n^+ \exp(-iH_d t),$$

$$\rho_{kj} = \frac{\exp(-\beta_{kj} H_{kj})}{\text{Sp} \exp(-\beta_{kj} H_{kj})}.$$

Очевидно,  $L_{kj}^{+-}(\omega)$  не зависит от  $n$ . Второе слагаемое в  $L_{kj}^{+-}$  определяет релаксацию фононов с термостатом, зависящую от вида  $K_{kj}^0$ .

Аналогичным образом могут быть вычислены средние значения энергий различных подсистем:

$$\begin{aligned} \bar{H}_s &= -c_s \beta_s, \\ \bar{H}_d &= -c_d \beta_d, \\ \bar{H}_{kj} &= \frac{k^2 \omega_{kj}}{2\pi^2} n_{kj}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} c_s &= \frac{N_s \omega_s^2}{4}, \quad c_d = \frac{N_s \omega_d^2}{4}, \quad \omega_d^2 = \frac{S_2^{-+}}{2}, \\ n_{kj} &= [\exp(\beta_{kj} \omega_{kj}) - 1]^{-1}, \quad S_2^{-+} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^2 S^{-+}(\omega). \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая теперь, что

$$\frac{d\bar{H}_m}{dt} = \frac{d\bar{H}_m}{dt} = \bar{K}_m,$$

а также принимая условие квазистатичности [9], получим следующую систему уравнений, описывающих процесс установления равновесия между различными подсистемами:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_s}{dt} &= -\pi \sum_j \int_0^{k_j} dk \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{k^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S^{-+}(\omega_s - \omega) L_{kj}^{+-}(\omega) \frac{\exp(\beta_{kj}\omega) - 1}{\beta_{kj}\omega} \left( \beta_s - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \beta_d - \frac{\omega}{\omega_s} \beta_{kj} \right) - \pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S^{-+}(\omega_s - \omega) h^{+-}(\omega) \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \beta_d \right), \\ \frac{d\beta_d}{dt} &= \pi \frac{c_s}{c_d} \sum_j \int_0^{k_j} dk \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{k^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S^{-+}(\omega_s - \omega) L_{kj}^{+-}(\omega) \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \times \\ &\quad \times \frac{\exp(\beta_{kj}\omega) - 1}{\beta_{kj}\omega} \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \beta_d - \frac{\omega}{\omega_s} \beta_{kj} \right) + \\ &\quad + \pi \frac{c_s}{c_d} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S^{-+}(\omega_s - \omega) h^{+-}(\omega) \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \beta_d \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{d\beta_{kj}}{dt} = -\pi \frac{c_s}{\omega_{kj} \frac{\partial n_{kj}}{\partial \beta_{kj}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S^{-+}(\omega_s - \omega) L_{kj}^{+-}(\omega) \frac{\omega}{\omega_s} \frac{\exp(\beta_{kj}\omega) - 1}{\beta_{kj}\omega} \times \\ \times \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \beta_d - \frac{\omega}{\omega_s} \beta_{kj} \right) - \sum_{j'} \int_0^{k_j} dk' \frac{\beta_{k'j'} - \beta_0}{T_{kj}^0 T_{k'j'}^0}.$$

Конкретный вид  $1/T_{kj}^0$  не представляет интереса.

Положим теперь [10], что

$$L_{nkj}^{\pm} = A_{kj} [a_{kj} \exp(ikr_n) + a_{kj}^+ \exp(-ikr_n)], \quad (17)$$

$$|A_{kj}|^2 = A_{\omega_{kj}},$$

а также, что [11]

$$\langle h^+ h^- (t) \rangle = 2h^2 \cos \Omega t, \quad (18)$$

и будем считать  $S^{-+}(\omega_s + \omega_{kj}) \approx 0$ . Пренебрегая далее разницей между скоростями продольного и поперечного звука (замены  $\Sigma \rightarrow 3$ ) и переходя к интегрированию по частотам, после несложных вычислений из (16) получим

$$\frac{d\beta_s}{dt} = -2W \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \Omega}{\omega_s} \beta_d \right) - \pi \int_0^{\omega_m} d\omega S^{-+}(\omega_s - \omega) L^{+-}(\omega) \times \\ \times \frac{\beta_0}{\beta(\omega)} \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \beta_d - \frac{\omega}{\omega_s} \beta(\omega) \right),$$

$$\frac{d\beta_d}{dt} = 2W \frac{\omega_s(\omega_s - \Omega)}{\omega_d^2} \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \Omega}{\omega_s} \beta_d \right) + \pi \frac{c_s}{c_d} \int_0^{\omega_m} d\omega \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} S^{-+}(\omega_s - \omega) \times \\ \times L^{--}(\omega) \frac{\beta_0}{\beta(\omega)} \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \beta_d - \frac{\omega}{\omega_s} \beta(\omega) \right),$$

$$\frac{d\beta(\omega)}{dt} = \pi \frac{c_s}{c_p} S^{-+}(\omega_s - \omega) L^{+-}(\omega) \frac{\omega_s}{\omega} \frac{\beta(\omega)}{\beta_0} \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \beta_d - \frac{\omega}{\omega_s} \beta(\omega) \right) - \\ - \frac{\beta(\omega)}{\beta_0} \frac{\beta(\omega) - \beta_0}{T_0},$$

где

$$W = \frac{\pi}{2} h^2 S^{-+}(\omega_s - \Omega), \quad (20)$$

$$L^{--}(\omega) = \frac{3A\omega^2}{2\pi^2 c^3 \beta_0}, \quad c_p = \frac{3\omega_s^2}{2\pi^2 c^3 \beta_0^2}.$$

Конкретный вид последнего слагаемого в третьем уравнении системы (19) выбран из тех соображений, что релаксация фононов с термостатом в простейшем случае представляется в виде\*

\* Здесь использовано высокотемпературное приближение, поскольку речь идет о фононах частоты  $\sim \omega_s$ . Остальные фононы можно отнести к термостату.

$$\frac{dn(\omega)}{dt} = -\frac{n(\omega) - n_0}{T_0},$$

где время релаксации  $T_0$  не зависит от частоты.

Система уравнений (19) описывает временную эволюцию температур рассматриваемой квазиравновесной системы. Существенно, что последнее уравнение в (19) может быть записано в виде

$$\frac{d\beta(\omega)}{dt} = -\frac{\beta(\omega) - \beta_{\text{эфф}}(\omega)}{T_{ps}(\omega)} - \frac{\beta(\omega)}{\beta_0} \frac{\beta(\omega) - \beta_0}{T_0}, \quad (19a)$$

где  $\frac{1}{T_{ps}(\omega)} = \pi \frac{c_s}{c_p} S^{-+}(\omega_s - \omega) L^{+-}(\omega) \frac{\beta(\omega)}{\beta_0}$  — время релаксации фононов частоты  $\omega$  к спин-системе, которая в процессе релаксации может быть описана единой эффективной температурой

$$\beta_{\text{эфф}}(\omega) = \beta_s + \left( \frac{\omega}{\omega_s} - 1 \right) \beta_d. \quad (21)$$

Заметим, что  $\beta_{\text{эфф}}(\omega)$  совпадает с «эффективной температурой», введенной из физических соображений в работе [4].

2. Рассмотрим сначала случай, когда спектральная диффузия в частотном интервале порядка ширины линии резонанса протекает быстрее, чем происходит обмен энергией между спин-системой и фононами. Тогда находящиеся во взаимодействии со спин-системой фононы приближенно будут иметь одинаковую температуру и могут рассматриваться как подсистема резонансных фононов. Остальные же фононы будут иметь температуру термостата и могут быть включены в термостат. Обозначая температуру резонансных фононов через  $\beta_p$ , из (19) без труда найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_s}{dt} &= -\frac{\beta_s - \beta_p}{T_{sp}} \frac{\beta_0}{\beta_p} + \frac{\beta_s - \beta_d}{T_{sd}} \frac{\beta_0}{\beta_p} - 2W \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \Omega}{\omega_s} \beta_d \right), \\ \frac{d\beta_d}{dt} &= -\frac{\beta_d - \beta_p}{T_{dp}} \frac{\beta_0}{\beta_p} + \frac{\beta_d - \beta_s}{T_{ds}} \frac{\beta_0}{\beta_p} + 2W \frac{\omega_s(\omega_s - \Omega)}{\omega_d^2} \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \Omega}{\omega_s} \beta_d \right), \\ \frac{d\beta_p}{dt} &= -\frac{\beta_p - \beta_s}{T_{ps}} \frac{\beta_p}{\beta_0} - \frac{\beta_p - \beta_d}{T_{pd}} \frac{\beta_p}{\beta_0} - \frac{\beta_p - \beta_0}{T_0} \frac{\beta_p}{\beta_0}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{sp}} &= \pi L^{+-}(\omega_s) \left( 1 + 6 \frac{\omega_d^2}{\omega_s^2} \right), \quad \frac{1}{T_{ps}} = \frac{c_s}{c_p} \frac{1}{2\Delta} \frac{1}{T_{sp}}, \\ \frac{1}{T_{sd}} &= \pi L^{+-}(\omega_s) 4 \frac{\omega_d^2}{\omega_s^2}, \quad \frac{1}{T_{ds}} = \frac{c_s}{c_d} \frac{1}{T_{sd}}, \\ \frac{1}{T_{dp}} &= \pi L^{+-}(\omega_s) \left( 6 + \frac{S_4^{-+}}{\omega_s^2 \omega_d^2} \right), \quad \frac{1}{T_{pd}} = \frac{c_d}{c_p} \frac{1}{2\Delta} \frac{1}{T_{dp}} \end{aligned}$$

— скорости релаксации, взятые на температуре термостата,

$$S_4^{-+} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega^4 S^{-+}(\omega),$$

а  $2\Delta$  — ширина спектра фононов, связанных с электронной спин-системой.

В дальнейшем нас будут интересовать вопросы, связанные с поглощением подводимой мощности радиочастотного поля спиновой системой. В связи с этим необходимо составить уравнение, описывающее изменение во времени энергии  $s$ -,  $d$ - и  $p$ -подсистем. Умножая уравнения (22) на  $-c_s$ ,  $-c_p$  и  $-2\Delta c_p (\beta_0/\beta_p)^2$  соответственно и суммируя полученные результаты, для скорости изменения энергии рассматриваемых подсистем найдем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 2W \left( \beta_s - \frac{\omega_s - \Omega}{\omega_s} \beta_d \right) c_s \frac{\Omega}{\omega_s} + \frac{2\Delta \bar{c}_p}{T_0} \frac{\beta_0}{\beta_p} (\beta_p - \beta_0), \quad (23)$$

где

$$\mathcal{E} = -c_s \beta_s - c_d \beta_d + 2\Delta \bar{c}_p (\beta_0^2/\beta_p).$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой поглощаемую спин-системой мощность, а второе — энергию, передаваемую в единицу времени от спин-системы к термостату. В стационарном состоянии  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$ , и поглощаемую при насыщении мощность можно вычислить посредством одного из этих слагаемых.

Поскольку мы рассматриваем насыщение электронного резонанса, нас будут интересовать стационарные решения системы (22). При этом ввиду сложности общей задачи мы ограничимся рассмотрением двух предельных случаев, представляющих практический интерес.

Положим сначала, что в электронной спин-решеточной релаксации имеет место ФУГ, т. е.  $\sigma = T_0/T_{sp} \gg 1$ . Если при этом переменное поле достаточно мало, так что  $2WT_{sp} \ll 1$ , то равновесие между подсистемами  $s$ ,  $p$  и  $d$  устанавливается быстрее, чем происходит обмен энергией между переменным полем и спин-системой, с одной стороны, и резонансными фононами и термостатом — с другой. В результате за время  $t \sim T_{sp}$  температуры различных подсистем выравниваются\*, и уже после этого находящиеся в равновесии друг с другом подсистемы придут в динамическое равновесие с переменным полем и термостатом. Соответствующее стационарное состояние будет описываться квадратным уравнением

$$\beta^2 + (\beta - \beta_0) \frac{\beta_0}{2WT_0^*} = 0, \quad \beta = \beta_s = \beta_d = \beta_p, \quad (24)$$

где  $T_0^* = (c_s/2\Delta \bar{c}_p) T_0$  — время релаксации системы к термостату, т. е. время спин-решеточной релаксации при наличии ФУГ.

Решение этого уравнения (отвечающее правильному предельному переходу  $\beta \rightarrow \beta_0$  при  $W \rightarrow 0$ ) имеет вид

$$\beta \approx \beta_0 - \frac{1}{2WT_0^*} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8WT_0^*} \right). \quad (25)$$

Если  $8WT_0^* \ll 1$  (связь с термостатом сильнее), то  $\beta \approx \beta_0$ , что означает отсутствие насыщения.

Если же  $8WT_0^* \gg 1$ , то  $\beta \approx \beta_0 / \sqrt{2WT_0^*} \ll \beta_0$ , что означает наличие насыщения. Мы будем говорить о нем, как о промежуточном насыщении.

\* Если в начале  $\beta_s(0) \approx \beta_p(0) \approx \beta_d(0)$ , то этого этапа не будет, и придем прямо к уравнению (24).

Подставляя далее (25) в первое слагаемое правой части выражения (23) для средней поглощаемой мощности, найдем

$$P \approx \frac{c_s \beta_0}{T_0^*} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8WT_0^*} \right) \quad (26)$$

с предельными значениями

$$P \approx 2Wc_s \beta_0 \quad \text{при} \quad 8WT_0^* \ll 1$$

и

$$P \approx \sqrt{\frac{2W}{T_0^*}} c_s \beta_0 = \frac{2Wc_s \beta_0}{\sqrt{2WT_0^*}} \quad \text{при} \quad 8WT_0^* \gg 1.$$

В случае слабого поля наличие ФУГ в электронной релаксации не оказывает влияния на поглощаемую мощность, и получаем известный результат. В случае же промежуточного насыщения поглощаемая мощность оказывается пропорциональной амплитуде поля, чем отличается от известных результатов Провоторова [1] и Блоха [12], в которых поглощаемая мощность от амплитуды не зависит.

Пусть теперь переменное поле настолько сильное, что  $1/W \ll T_{ps}, T_0$ . Тогда при малых временах  $t \leq 1/W$  поведение рассматриваемых подсистем определяется действием переменного поля, в результате чего между температурами  $\beta_s$  и  $\beta_d$  устанавливается соотношение\*

$$\beta_s = \frac{\omega_s - \Omega}{\omega_s} \quad \beta_d = \beta \quad (\omega_s - \Omega \neq 0). \quad (27)$$

Система уравнений, описывающих при  $t \gg 1/W$  эволюцию  $\beta$  и  $\beta_d$  во времени, может быть получена умножением первого из уравнений (22) на  $\omega_s(\omega_s - \Omega)/\omega_d^2$ , суммированием со вторым и подстановкой в полученное уравнение, а также в третье уравнение системы (22) соотношения (27). Мы не будем приводить здесь соответствующих уравнений. Заметим лишь, что в стационарном случае они сводятся к системе двух линейных алгебраических уравнений, решение которых дает

$$\begin{aligned} \beta_s &= \frac{(\omega_s - \Omega)^2}{(\omega_s - \Omega)^2 + 2(1 + \sigma)\omega_d^2} \beta_0, \\ \beta_d &= \frac{\omega_s(\omega_s - \Omega)}{(\omega_s - \Omega)^2 + 2(1 + \sigma)\omega_d^2} \beta_0, \\ \beta_p &= \frac{(\omega_s - \Omega)^2 + 2\omega_d^2}{(\omega_s - \Omega)^2 + 2(1 + \sigma)\omega_d^2} \beta_0 \quad (\omega_s | \omega_s - \Omega | \gg \omega_d^2). \end{aligned} \quad (28)$$

В отсутствие ФУГ  $\sigma \ll 1$  и (28) дает известные результаты Провоторова [1]. Если же в электронной спин-решеточной релаксации имеет место ФУГ, температуры  $s$ -,  $d$ - и  $p$ -подсистем повышаются. Заметим, что (28) совпадает с результатами, полученными ранее Боргини [7].

Наконец, для поглощаемой мощности в рассматриваемом случае можно получить выражение

$$P \approx \frac{\beta_0 c_s}{T_{sp}} \frac{2\omega_d^2}{(\omega_s - \Omega)^2 + 2\omega_d^2}, \quad (29)$$

\* Случай точного резонанса здесь не рассматривается, поскольку при нем диполь-дипольный резервuar не играет роли

совпадающее с результатом Провоторова [1] и не зависящее от  $\sigma$ . Полученный результат может на первый взгляд показаться неожиданным, однако его легко понять, если исследовать выражение для потока энергии от  $s$ - и  $d$ -подсистем к подсистеме  $p$ , который, в силу сохранения энергии, равен поглощаемой мощности. Этот поток определяется выражением

$$S_{s,d \rightarrow p} = \frac{c_s}{T_{sp}} \frac{\beta_0}{\beta_p} (\beta_s - \beta_p) + \frac{c_d}{T_{dp}} \frac{\beta_0}{\beta_p} (\beta_d - \beta_p). \quad (30)$$

Но скорость передачи энергии на участках  $s \rightarrow p$  и  $d \rightarrow p$  при единичной разности обратных температур на них тем больше, чем больше  $\sigma$ . В то же самое время разность обратных температур на этих участках с ростом  $\sigma$  убывает. Например, для участка  $s \rightarrow p$

$$\frac{c_s}{T_{sp}} \frac{\beta_0}{\beta_p} = \frac{c_s}{T_{sp}} \frac{(\omega_s - \Omega)^2 + 2\omega_d^2(1 + \sigma)}{(\omega_s - \Omega)^2 + 2\omega_d^2},$$

$$\beta_s - \beta_p = - \frac{2\omega_d^2}{(\omega_s - \Omega)^2 + 2\omega_d^2(1 + \sigma)} \beta_0.$$

В результате скорость передачи энергии на этих участках, а следовательно, и поглощаемая мощность оказывается не зависящей от  $\sigma$ . Заметим еще, что ввиду малости второго слагаемого в (30)  $S_{s,d \rightarrow p}$  определяется передачей энергии по каналу  $s \rightarrow p$ , что немедленно дает (29).

Отметим далее, вслед за Боргини [7], что при наличии связи между диполь-дипольным резервуаром (ДДР) и ядерной зеемановской подсистемой поляризация ядер уменьшится в  $\sigma$  раз при наличии ФУГ, поскольку во столько же раз увеличивается температура ДДР, в тепловом равновесии с которым находится ядерная зеемановская подсистема. Это обстоятельство открывает возможность детектирования ФУГ в электронной спин-решеточной релаксации наблюдением за ДПЯ.

3. Рассмотрим теперь случай слабой спектральной диффузии, когда фононам, лежащим внутри линии ЭПР, следует приписывать зависящую от частоты температуру.

При этом мы ограничимся рассмотрением достаточно сильного переменного поля, когда на первом этапе между  $\beta_s$  и  $\beta_d$  устанавливается соотношение (27). Случай слабого поля, при котором на первом этапе устанавливается равновесие между различными подсистемами, в том числе и фононами, связанными с электронной спин-системой, не даст ничего нового по сравнению со случаем слабого поля в условиях сильной спектральной диффузии.

Следует иметь в виду, что скорость релаксации фононов частоты  $\omega_s$  (предполагается, что в момент включения поля  $\beta(\omega_s) \approx \beta_0$ )

$$1/T_{ps}^0(\omega_s) \approx \pi \frac{c_s}{c_p} S^{-+}(0) L^{+-}(\omega_s)$$

в  $2\Delta S^{-+}(0) \gg 1$  раз превосходит скорость релаксации подсистемы резонансных фононов к зеемановской подсистеме в случае сильной спектральной диффузии. Поэтому условие сильного поля здесь означает  $2WT_{ps}^0(\omega_s) \gg 1$ . Полагая это условие выполненным, из (19) найдем

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{3A}{2\pi c^3} \frac{\omega_s - \Omega}{(\omega_s - \Omega)^2 + \omega_d^2} \int d\omega \omega^2 (\Omega - \omega) S^{-+}(\omega_s - \omega) \left[ \frac{\omega - \Omega}{\omega_s - \Omega} \frac{\beta}{\beta(\omega)} - \frac{\omega}{\omega_s} \right],$$

$$\frac{d\beta(\omega)}{dt} = \pi A c_s \frac{\omega}{\omega_s} \beta(\omega) S^{-+}(\omega_s - \omega) \left[ \frac{\omega - \Omega}{\omega_s - \Omega} \beta - \frac{\omega}{\omega_s} \beta(\omega) \right] - \frac{\beta(\omega)}{\beta_0} \frac{\beta(\omega) - \beta_0}{T_0}, \quad (31)$$

откуда для стационарных значений  $\beta$  и  $\beta(\omega)$  после некоторых вычислений получим

$$\beta_{ct} = \beta_0 \frac{\omega_s - \Omega}{\omega_s} \frac{I_1(\beta_{ct})}{I_2(\beta_{ct})} \quad (\omega_s - \Omega \neq 0); \quad (32)$$

$$\beta_{ct}(\omega) = \beta_0 \frac{\sigma_m \frac{\omega}{\omega_s} \frac{\omega - \Omega}{\omega_s - \Omega} \frac{S^{-+}(\omega_s - \omega)}{S^{-+}(0)} \frac{\beta_{ct}}{\beta_0} + 1}{\sigma_m \frac{\omega^2}{\omega_s^2} \frac{S^{-+}(\omega_s - \omega)}{S^{-+}(0)} + 1}, \quad (33)$$

где

$$I_1(\beta_{ct}) = \omega_s^3 T_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{[(\omega_s - \Omega) - \omega] S^{-+}(\omega)}{\sigma_m \frac{\beta_{ct}}{\beta_0} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_s - \Omega}\right) \frac{S^{-+}(\omega)}{S^{-+}(0)} + 1}, \quad (34)$$

$$I_2(\beta_{ct}) = \omega_s^2 T_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{[(\omega_s - \Omega) - \omega]^2 S^{-+}(\omega)}{\sigma_m \frac{\beta_{ct}}{\beta_0} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_s - \Omega}\right) \frac{S^{-+}(\omega)}{S^{-+}(0)} + 1},$$

а  $\sigma_m = T_0/T_{ps}^0(\omega_s)$  — коэффициент ФУГ для наиболее сильно связанных со спин-системой фононов.

Общее исследование уравнений (32), (33) затруднительно и связано с заданием формы линии. Однако некоторые заключения можно сделать, не конкретизируя этой формы, если учесть, что обычно ширина линии по порядку величины совпадает с  $S_2^{-+}$ . В частности, можно показать, что при  $\sigma_m \gg 1$  для частот, удовлетворяющих условию

$|\omega_s - \Omega|/\sqrt{S_2^{-+}} \leqslant 1/\sigma_m$ , стационарные значения обратных температур определяются соотношениями\*

$$\beta_{ct} \approx \frac{(\omega_s - \Omega)^2}{S_2^{-+}} \beta_0, \quad \beta_{ct}(\omega) = \frac{1}{1 + \sigma(\omega)} \beta_0, \quad (35)$$

где  $\sigma(\omega) = \sigma_m [S^{-+}(\omega_s - \omega)/S^{-+}(0)]$  играет роль коэффициента ФУГ для фононов частоты  $\omega$ . Отсюда вытекает, что ФУГ не оказывает в рассматриваемом случае влияния на электронную спин-систему. Поведение же фононов определяется  $\sigma(\omega)$ . Фононы частот, для которых  $\sigma(\omega) \gg 1$ , оказываются нагретыми относительно термостата, в то время как фононы частот, для которых  $\sigma(\omega) \ll 1$ , остаются в равновесии с ним. В частности, фононы с частотами, находящимися внутри ширины линии, заметно нагреваются. А в равновесии с термостатом остается тем меньше фононов, чем уже линия и больше  $\sigma_m$ .

Отметим еще, что баланс энергии в случае слабой спектральной диффузии определяется соотношением (23) с той лишь разницей, что

теперь  $\mathcal{E} = -c_s \beta_s - c_d \beta_d + \int_{\omega_s - \Delta}^{\omega_s + \Delta} d\omega \frac{\omega^2}{\omega_s^2} \frac{\beta_0^2}{\beta(\omega)} \bar{c}_p$ . При этом, как и в случае

сильной спектральной диффузии, поглощаемая мощность не ощущает влияния ФУГ.

\* При  $\sigma_m \ll 1$ , естественно, получаются обычные результаты.

Таким образом, в случае слабой спектральной диффузии наличие ФУГ отражается лишь на поведении связанных с электронной спин-системой фононов, что в значительной степени усложняет возможность детектирования эффекта.

Авторы благодарны Г. Р. Хуцишвили за интерес к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Б Н Провоторов, ЖЭТФ, 41, 1582 (1961)
- 2 M. Goldman, Spine Temperature and Nuclear Magnetic Resonance in Solids, Oxford, 1970.
- 3 В. А Ацаркин, Автореферат докторской диссертации, ИРЭ, Москва, 1970
- 4 J. C. Gill, N. P. Vinall, J. Phys., C, Solid State Phys., 2, 1512 (1969).
- 5 S. Clough, J. Phys., C, Solid State Phys., 2, 1528 (1969).
- 6 J. C. Gill, J. Phys., C, Solid State Phys., 2, 1529 (1969).
- 7 M. Borghini, Phys. Lett., 20, 419 (1968).
- 8 Д Н Зубарев, ДАН СССР, 140, 92 (1961), 162, 532 (1965); 162, 794 (1965); 164, 65 (1965).
- 9 Л Л Луишвили, Д. Н Зубарев, ФТТ, 7, 722 (1965)
- 10 Н. Böttger, Phys. Status Sol., 35, 653 (1969).
- 11 Л Л Бушишвили, ФТТ, 9, 2157 (1967).
- 12 Г. Сликтер, Основы теории магнитного резонанса, изд. Мир, М, 1967.

Институт физики АН Грузинской ССР

Поступила в редакцию  
18 марта 1971 г.

#### INFLUENCE OF PHONON BOTTLE-NECK IN ELECTRON SPIN-LATTICE RELAXATION ON THE MAGNETIC RESONANCE SATURATION

*L. L. Bulishvili, N. P. Giorgadze*

The influence of the bottle-neck (PB) in the electron spin-lattice relaxation on the EPR saturation is considered by Zubarev's method. The "effective temperature" of the spin system occurs automatically without any additional assumptions. It is shown that in the case of a strong spectral diffusion and sufficiently weak a-c field there may be obtained (under PB conditions) the state of "intermediate saturation" at which the absorbed power appears to be proportional to the field amplitude. In the sufficiently strong variable field PB has no influence on the character of the energy absorption. For a weak spectral diffusion at the frequencies of the a-c field close to the resonance one, the PB effect takes place only in the behaviour of phonons connected with the electron spin-system. This is unfavourable from the point of view of detecting PB effect in the case of weak spectral diffusion.

УДК 538.56

## К ПРОБЛЕМЕ СОЗДАНИЯ ПУЧКОВОГО СТАНДАРТА ЧАСТОТЫ СУБМИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА

*A. С. Башкин, А. Н. Ораевский*

Рассматриваются возможности создания активного стандарта частоты субмиллиметрового диапазона на пучках медленных молекул формальдегида. Оценена эффективность применения двух вариантов замедляющих систем. Показано, что такие стандарты могут иметь высокую стабильность и воспроизводимость частоты.

Стандарты частоты на пучках атомов или молекул наиболее хорошо развиты в сантиметровом диапазоне длин волн. Проблема создания высокостабильных квантовых генераторов субмиллиметрового диапазона имеет два аспекта: во-первых, они нужны для переноса частоты из радиодиапазона в оптический и обратно, во-вторых, как будет показано в данной работе, имеются пути повышения стабильности стандартов частоты при переходе в субмиллиметровый диапазон.

Рассмотрим возможности построения молекулярного генератора (МГ) в этом диапазоне на пучках молекул формальдегида, чей спектр, благодаря небольшой асимметрии молекулы, богат близкими уровнями, для которых сортировка в радиодиапазоне очень эффективна\* из-за большого штарк-эффекта [1]. Энергетические уровни молекул этого типа описываются тремя индексами  $J_{K-1, K}$ , где  $J$  — момент вращения молекулы,  $K-1, K$  — целые числа. Для получения минимальной длины волны, исходя из технической освоенности субмиллиметрового диапазона, представляется интересным использование вращательного перехода  $8_{2,6} \rightarrow 7_{2,5}$  (рис. 1).

Блок-схема генератора представлена на рис. 2. Молекулы, вылетающие из источников молекулярных пучков, расположенных по окружно-

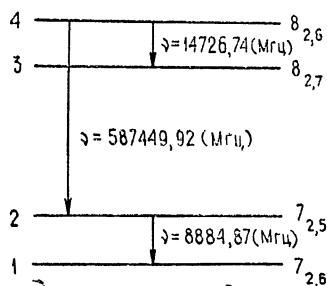


Рис. 1. Схема используемых уровней формальдегида.

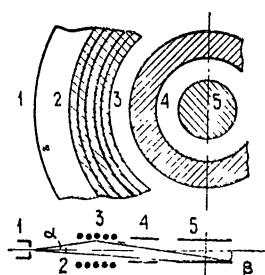


Рис. 2.

Рис. 2. Схема молекулярного генератора:

1—источник молекулярного пучка, 2—вымораживающая диафрагма, 3—сортирующая система, 4—резонатор, 5—резонатор субмиллиметрового диапазона.

\* Аналогичный способ для аммиака впервые был предложен в работе [2].

сти, попадают в короткую сортирующую систему\*, в которой наряду с сортировкой происходит отбор молекул, находящихся в определенном интервале скоростей. От потенциального барьера, образованного полем  $E$  между кольцами сортирующей системы, будут отражаться молекулы, для которых выполняется условие

$$W = \frac{|\mu_{21}|^2 E^2}{\hbar v_{21}} > \frac{mv^2 \sin^2 \alpha}{2}, \quad (1)$$

где  $v_{21}$ ,  $|\mu_{21}|$  — частота и матричный элемент дипольного момента молекулы для перехода  $2 \rightarrow 1$ ,  $v$  — скорость молекулы. Учитывая, что асимметрия молекулы формальдегида мала, матричный элемент можно приближенно вычислять по формуле для молекул типа симметричного волчка [1]. Тогда для максимальной скорости  $v_{\max}$ , которую будут иметь отраженные молекулы (они должны вылетать из сортирующей системы параллельно ее оси), получим выражение

$$v_{\max} = \frac{\mu_0 M K_{-1} E}{J(J+1) \sin \alpha} \sqrt{\frac{2}{m \hbar v_{21}}}, \quad (2)$$

где  $\mu_0$  — дипольный момент молекулы,  $M$  — проекция вращательного момента  $J$  на ось сортирующей системы.

Как показывает проведенный расчет, молекула, влетающая в сортирующую систему под углом  $\alpha$ , после отражения от потенциального барьера будет вылетать из нее под углом

$$\beta \approx \arcsin \left[ \frac{r_0}{a} \left( \frac{v_{\max}^2}{v^2} - 1 \right) \right], \quad (3)$$

где  $2r_0$  — расстояние между плоскостями, образованными кольцами сортирующей системы,  $a$  — расстояние от источника пучка до середины сортирующей системы. В резонатор будут попадать молекулы, у которых  $0 \leq \beta \leq \beta_{\max}$ , где  $\beta_{\max}$  соответствует молекулам с минимальной скоростью  $v_{\min}$ . Причем молекулы, влетающие в резонатор, должны иметь скорости в интервале

$$\Delta v = v_{\max} - v_{\min} = \left( 1 - \sqrt{\frac{Lr_0}{aD + Lr_0}} \right) v_{\max}, \quad (4)$$

где  $L$  — расстояние от середины сортирующей системы до конца субмиллиметрового резонатора, зазор между зеркалами которого равен  $D$ .

Наиболее удобным для целей дальнейшего замедления молекул, как будет показано ниже, является осуществление отбора молекул со скоростями меньше  $0,2 v_{\text{вер}}$  (где  $v_{\text{вер}}$  — наиболее вероятная скорость), причем скорость  $0,2 v_{\text{вер}}$  соответствует молекулам с квантовым числом  $M = 7$  (молекулы с  $M = 8$  в переходе не участвуют). Учитывая это, получим величину  $v_{\max}$  отсортированных молекул для каждого значения  $M$ .

Для устранения быстрых молекул, на которые действие сортирующей системы незначительно, между последней и источниками необходимо поместить холодную диафрагму с малой площадью в виде узкой металлической полоски, исключающей прямое попадание таких молекул в резонатор.

После сортирующей системы в пучке будут находиться молекулы в состояниях  $8_{2,6}$  и  $7_{2,5}$ . Переход  $8_{2,6} \rightarrow 7_{2,6}$  правилами отбора запре-

\* Соображения линзовой оптики при расчете коротких сортирующих систем впервые были использованы в работе [10].

щен, разрешен лишь переход  $8_{2,6} \rightarrow 7_{2,5}$  [1]. Поэтому для создания инверсии населенностей необходимо перевести молекулы каким-либо способом с уровня  $7_{2,5}$  на уровень  $7_{2,6}$ . Для этой цели после сортирующей системы надо поместить  $\pi$ -резонатор, настроенный на частоту перехода  $7_{2,5} \rightarrow 7_{2,6}$  [3]. Тогда действие внешнего излучения в резонаторе будет переводить молекулы с уровня на уровень с вероятностью  $\sin^2|\mu_{2,1}| \mathcal{E}l / 2\hbar v$  ( $\mathcal{E}$  — амплитуда переменного поля,  $l$  — длина  $\pi$ -резонатора). Так как в нашем случае молекулы попадают в резонатор в интервале скоростей  $[v_{\max}; v_{\min}]$ , то надо провести усреднение этого выражения в указанных пределах по максвелловскому распределению молекул по скоростям. Причем амплитуда переменного поля должна удовлетворять условию

$$\sin \frac{|\mu_{2,1}| El}{2\hbar v_{\max}} = 1. \quad (5)$$

Численные расчеты вероятности перехода молекул под воздействием монохроматического сигнала дали величину 0,95.

Учитывая распределение молекул при вылете из источника в виде отверстия в тонкой стенке [4], найдем число молекул в состоянии  $JK_{-1}M$ , влетающих в резонатор из сортирующей системы:

$$N_{\text{сорт}} = \frac{\Delta\Omega}{\pi} N_{JK_{-1}M} \left( \frac{m}{2kT} \right)^2 \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} v^3 \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT} \right) dv = \\ = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} N_{JK_{-1}M} \left( \frac{m}{2kT} \right)^2 (v_{\max}^4 - v_{\min}^4). \quad (6)$$

Телесный угол  $\Delta\Omega$  определяется, с одной стороны, углом захвата сортирующей системы, с другой, — углом, под которым виден резонатор из источника. В случае, если диаметр субмиллиметрового резонатора равен 20 мм,  $L = 50$  мм,  $a = 16$  мм,  $2r_0 = D = 8$  мм, вычисления дают значение  $\Delta\Omega \approx 0,15\pi$ .

Используя формулы (2) и (6), получим отношение  $N_{\text{сорт}} 8_{2,6} / N_{\text{сорт}} 7_{2,5} = = 0,35$ . Следовательно, после  $\pi$ -резонатора число сортированных молекул на уровне  $8_{2,6}$  будет в 7 раз превышать число молекул на уровне  $7_{2,5}$ .

Основываясь на работе [5], условие самовозбуждения запишем в следующем виде:

$$\eta = \frac{4\pi Q}{\hbar V} \sum_M \frac{|\mu_{4,2}|^2 \tau N_{\text{сорт}}}{\Delta\omega_L} > 1, \quad (7)$$

где  $\mu_{4,2}$  — матричный элемент перехода  $4 \rightarrow 2$ ,  $\tau$  — среднее время нахождения молекул в резонаторе,  $Q$ ,  $V$  — добротность и объем резонатора,  $\Delta\omega_L$  — ширина линии излучения. В субмиллиметровой области  $\Delta\omega_L$  определяется, в основном, допплер-эффектом. При ее вычислении необходимо проводить усреднение по скорости молекул, являющейся функцией углов влета и вылета молекул из сортирующей системы. Эффектом уширения линии за счет взаимодействия расходящегося пучка молекул с неоднородным вдоль оси резонатора полем, как показал расчет, можно пренебречь.

Для определения количества сортированных молекул рассмотрим следующую модель. Источники молекулярных пучков расположены по окружности с радиусом 56 мм. Диаметр каждого отверстия в тонкой стенке  $\varnothing = 0,6$  мм, расстояние между отверстиями 5,5 мм, количество отверстий 64. При  $T = 300^\circ\text{K}$  давление внутри источника должно быть

равно  $1,2 \cdot 10^{-2}$  мм рт. ст. [5]. Такая система будет давать суммарный поток молекул, равный  $N_{\text{полн}} = 1,6 \cdot 10^{18}$  мол.·сек<sup>-1</sup> [5], т. е. почти такой же, как и в молекулярном генераторе на аммиаке. Среди них в состоянии с необходимыми  $J$ ,  $K_{-1}$  и  $M$  находится доля молекул  $f_{JK_{-1}M} = 0,02\%$  [1]. Следовательно, полное число молекул в состоянии  $JK_{-1}M$  равно  $N_{JK_{-1}M} = 3,2 \cdot 10^{14}$  мол.·сек<sup>-1</sup>.

Численные расчеты дали значение коэффициента самовозбуждения  $\eta = 1,3$  при  $V = 2,5$  см<sup>3</sup> и  $Q = 10^5$ . Используя в качестве рабочего вещества  $\alpha$ -полиоксиметилен ( $T_{\text{пл}} = 170 \div 180^\circ$ ), можно охлаждением источника до температуры  $T = 180^\circ\text{K}$  увеличить параметр самовозбуждения до значения 3,2.

Так как источников много, то необходимо оценить разрушение пучков при столкновениях молекул. Плотность молекул на входе сортирующей системы вычисляется по формуле

$$n \approx \frac{N_{\text{полн}} d \Omega}{2\pi \bar{v} S}, \quad (8)$$

где  $d\Omega$  — телесный угол, под которым видна сортирующая система из источника молекулярного пучка,  $S$  — площадь входного сечения сортирующей системы. При принятых нами параметрах  $n \approx 0,5 \cdot 10^{12}$  мол.·см<sup>-3</sup>. Отсюда оценка длины свободного пробега при такой плотности дает величину  $\sim 100$  см [6]. У нас же расстояние от источника до середины сортирующей системы равно 1,6 см, т. е., применяя источник в виде длинной щели, можно увеличить интенсивность пучка и, следовательно, коэффициент самовозбуждения на порядок. Мощность излучения такого генератора, рассчитанная по формуле  $P = 1/2 N h v$ , будет равна  $\sim 10^{-9}$  вт.

Предлагаемая схема мазера позволяет применить замедляющую систему, описанную в работе [5], когда совместно действует электрическое поле, отбирающее кинетическую энергию у молекул, и сверхвысокочастотное поле, обеспечивающее фазовые соотношения при этом отборе. Тогда из замедляющей системы, выполненной из трех секций (каждая состоит из двух пластин, между которыми приложено электрическое поле), будут вылетать молекулы со скоростями, лежащими в интервале  $[0; 0,34 \cdot 10^4$  см·сек<sup>-1</sup>]. Это будет соответствовать вырезанию из первоначального интервала скоростей  $[1,0 \cdot 10^4$  см·сек<sup>-1</sup>;  $0,77 \cdot 10^4$  см·сек<sup>-1</sup>] более узкого интервала  $[1,0 \cdot 10^4$  см·сек<sup>-1</sup>;  $0,93 \cdot 10^4$  см·сек<sup>-1</sup>]; т. е. эта система замедлит молекулы в 5 раз, при этом плотность молекул в пучке ослабнет в 8 раз как из-за сужения используемого интервала скоростей (в 3,1 раза), так и из-за отличия вероятности перехода молекул с уровня на уровень при пролете секции от единицы (в 2,5 раза).

Как видно из формулы (7), коэффициент самовозбуждения при этом способе замедления, без учета более быстрых молекул в пучке, уменьшится в 2 раза. Однако практическое осуществление такой замедляющей системы будет встречать технические трудности, заключающиеся в необходимости поддерживать внутри замедляющих секций сверхвысокочастотное поле определенной амплитуды и частоты.

Этого недостатка можно избежать, если осуществить замедление молекул неоднородным нестационарным электрическим полем. Молекулы, находящиеся на верхнем уровне и влетающие в поле, испытывают на «передней» границе поля действие торсионных сил. Когда замедленные молекулы будут подлетать к «задней» границе поля, его необходимо выключить. Замедление молекул можно осуществить при прохождении каждой пластины секции соответствующим переключением напряжения (включается поле там, где оно было нулевым, в конденсаторе

же, где было поле, оно становится нулевым). Тогда количество секций уменьшается вдвое.

Частоту импульсов удобно выбирать из условия, что молекулы, находящиеся в момент  $t = 0$  перед первым конденсатором и имеющие скорость  $v_{\max}$ , по истечении времени  $k\tau/2$  окажутся в конце  $k$ -го конденсатора ( $\tau$  — период изменения поля). Размер же интервала скоростей молекул  $\Delta v$ , движущихся все время внутри замедляемого цуга, определяется из условия, что молекула, находящаяся перед первым конденсатором, через время  $k\tau/2$  должна быть в начале  $k$ -го конденсатора длиной  $L_k = v_k \tau/2$ :

$$\Delta v \frac{k \tau}{2} = L_k. \quad (9)$$

Учитывая, что  $v_k = \sqrt{v_0^2 - 2Wk/m}$ , получим

$$\Delta v = \frac{1}{k} \sqrt{v_{\max}^2 - 2Wk/m}. \quad (10)$$

Используя формулы (6) и (10), можно показать, что количество замедленных молекул в этом методе и методе со стационарным полем одинаково.

Вклад в медленные молекулы будет давать также часть молекул со скоростями меньше  $v_{\max}$ , влетающих в первую секцию, когда поле там нулевое. В этом случае молекулы входят в замедляющий режим, отставая и попадая в последующий цуг. Если же в первой секции в момент влета есть поле, то часть молекул, отставших от своего цуга, будет ускоряться и вновь догонять ушедший вперед цуг. Таким образом, осуществляется группировка молекул, и количество замедленных молекул будет существенно возрастать. К сожалению, рассчитать аналитически эти процессы затруднительно.

Остановимся теперь на вопросах, связанных со стабильностью и воспроизводимостью частоты описанного выше МГ (без замедляющей системы), частота колебаний которого определяется выражением [5].

$$\omega = \omega_l \left[ 1 - \frac{Q_p}{Q_p + Q_l} \frac{\omega_p - \omega_l}{\omega_l} + \Sigma \right], \quad (11)$$

где  $\omega_l$ ,  $\omega_p$  — частоты линии излучения и резонатора;  $Q_p$ ,  $Q_l$  — добротности резонатора и спектральной линии соответственно;  $\Sigma$  — член, учитывающий поправки, обусловленные неравномерностью излучения молекул в резонаторе и влиянием близких спектральных линий. Допплеровская ширина линии в нашем случае равна  $\Delta\omega_{\text{доп}} \approx 55 \text{ кГц}$ , поэтому  $Q_l \approx 70 \cdot 10^6$ . При  $Q_p = 10^5$  отношение  $Q_p/Q_l = 1,5 \cdot 10^{-3}$  — почти такое же, как у аммиачного мазера ( $2 \cdot 10^{-3}$ ), но  $\omega_l$  в 25 раз выше, поэтому во столько же раз меньше будет сказываться расстройка резонатора. Влиянием близких спектральных линий можно пренебречь, поскольку ближайшая из них находится на расстоянии около 4000  $M\text{гц}$ . Сам же выбранный переход  $82,6 \rightarrow 72,5$  сверхтонкой структуры не имеет [1]

Эффект неравномерного излучения молекул, возникающий при применении плоскопараллельного резонатора и односторонне направленного пучка, учтен в работе [7]. Его можно разделить на «поперечный», обусловленный неравномерностью излучения молекул вдоль направления их движения, и «продольный», вызванный появлением бегущей волны вдоль резонатора из-за разницы коэффициентов отражения зеркал  $\Delta r$  и неточной юстировки молекулярных пучков  $\Delta\varphi$ . При наших параметрах (рис. 2),

$\bar{v} \approx 0,8 \cdot 10^4 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $r = 99,8\%$ ,  $\Delta r/r \approx 10^{-4}$ ,  $\Delta\varphi = 10^{-2}$ , получим  $\Delta v_{\perp}/v \approx 3 \cdot 10^{-11}$ , а  $\Delta v_{\parallel}/v \approx 2,5 \cdot 10^{-13}$ . Вследствие симметрии молекулярных пучков «поперечный» эффект значительно уменьшается. На него влияет также непараллельность зеркал, что вынуждает заменить одно из плоских зеркал сферическим.

Настраивать частоту такого МГ можно обычными методами, особенно эффективным будет способ модуляции напряжения на сортирующей системе. При этом возможна 600-процентная модуляция ширины линии (формула (2)) и, следовательно, ее добротности. Точность воспроизведения частоты предлагаемого варианта МГ будет намного выше ( $\sim 10^{-13}$ ), чем у аммиачного МГ ( $\sim 10^{-11}$  при 50-процентной модуляции ширины линии магнитным полем), благодаря, во-первых, увеличению в 25 раз частоты  $\omega_0$ , во-вторых, уменьшению в 10 раз минимально обнаруживаемой девиации  $\Omega(\xi_0)$  частоты генератора из-за очень сильной зависимости его частоты от напряжения на сортирующей системе. Для достижения стабильности  $10^{-13}$  необходима термостабилизация расстояния между зеркалами с точностью  $10^{-10}$  и 50-процентная стабилизация напряжения на сортирующей системе. Дальнейшее увеличение стабильности и точности воспроизведения частоты (лучше  $10^{-13}$ ) связано со способами уменьшения влияния эффекта неравномерного излучения молекул в резонаторе.

В рамках описанной конструкции МГ возможно осуществление двухрезонаторной системы. Первый резонатор должен иметь тороидальную форму, второй — дисковую. Рассмотрим различные аспекты работы в субмиллиметровом диапазоне двухрезонаторного МГ, когда поляризованный в первом резонаторе пучок рождает в последовательно расположенному второму резонаторе когерентное спонтанное излучение («молекулярный» звон), которое после прохождения через усилитель поступает по цепи обратной связи опять в первый резонатор.

Учитывая влияние эффекта неравномерного излучения молекул в первом резонаторе, можно показать на основании работы [8], что расстройка между частотой генерации и частотой линий, если усилитель работает на том же веществе, что и два последовательных резонатора, определяется следующим выражением:

$$\Delta\omega = \frac{\bar{v}}{R - \frac{l_1 - l_2}{2}} \left\{ Q_{cb} \frac{\omega_0 - \omega_p u}{\omega_0} + \frac{Q_p}{1 - \eta} \frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_0} + \frac{\omega_0(1 - r) l_1^2}{16 \pi^2 c r_0} - \frac{\omega_0 \Delta r \Delta \varphi l_1}{2 c r} \right\}, \quad (12)$$

где  $R$  — расстояние между резонаторами,  $Q_{cb}$  — добротность связи с резонатором усилителя,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $Q_p$ ,  $\eta$  — соответственно длины, добротности и коэффициенты самовозбуждения последовательно расположенных резонаторов.

В качестве усилителя можно применить МГ на том же переходе только с одним дисковым резонатором. Тогда вследствие появления эффекта неравномерного излучения молекул в резонаторе усилителя вышеприведенное выражение нужно дополнить членами, аналогичными двум последним. Из формулы (12) видно, что к достоинствам конструкции с усилителем «молекулярного» звона надо отнести независимость частоты колебаний МГ, настроенного на вершину спектральной линии методом модуляции средней скорости молекул в пучке, от влияния эффекта неравномерного излучения молекул при пролете резонаторов.

Проведем сравнение ожидаемых характеристик с параметрами МГ на пучке молекул аммиака, поскольку наиболее коротковолновый из пучковых мазеров, пригодных для создания стандарта частоты, — молекулярный генератор на переходе  $1_{01} - 0_{00}$  формальдегида ( $\lambda = 4,12 \text{ мкм}$ )

еще недостаточно изучен [9]. Из формулы (12) следует, что стабильность частоты будет на два порядка лучше, чем для аммиачного МГ такой же конструкции, из-за увеличения частоты  $\omega$  в 25 раз и уменьшения средней скорости  $v$  в 6 раз. Так как отсутствует влияние сверхтонкой структуры перехода и близких линий, то стабильность частоты такого МГ будет ограничиваться, в основном, флюктуациями расстояния между зеркалами. При реально достижимой термостабилизации этого расстояния с точностью  $10^{-9}$ ,  $Q_{\text{св}} = 2 \cdot 10^4$ ,  $Q_p = 10^4$ ,  $R - \frac{l_1 - l_2}{2} = 6 \text{ см}$  и  $\eta \ll 1$

можно получить  $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-14}$ . Столь высокая стабильность частоты при худшей термостабилизации расстояния между зеркалами по сравнению с однорезонаторным МГ объясняется тем, что ширина линий в данном случае уже не допплеровская, а определяется временем пролета молекулами расстояния между резонаторами.

Такой важный параметр любого стандарта частоты как точность настройки частоты МГ на вершину спектральной линии может быть также значительно лучше, чем у аммиачного МГ. При модуляции ширины линии аммиака магнитным полем происходит расщепление линии на две компоненты с неодинаковыми амплитудами из-за присутствия рассеянного поля сортирующей системы, что не позволяет достичь воспроизводимости частоты аммиачного МГ, лучшей, чем  $10^{-11}$ . В рассматриваемом же выше случае можно показать на основании формулы (12), что 100-процентная модуляция напряжения на сортирующей системе и, следовательно, средней скорости молекул, при  $Q_{\text{св}} = 2 \cdot 10^4$ ,  $R = 8 \text{ см}$ , термостабилизации  $10^{-9}$  может дать воспроизводимость, равную  $\sim 10^{-14}$ . Сдвиг частоты, обусловленный эффектом Допплера второго порядка, по порядку величины равен  $\sim 1/2v^2/c^2$ , что будет ограничивать максимальную достижимую точность настройки частоты МГ значением  $\sim 3 \cdot 10^{-14}$ .

Все сказанное не означает, что в первой же установке удастся достичь рекордных результатов, но проведенные оценки показывают, что имеются большие потенциальные возможности достижения высокой стабильности и воспроизводимости частоты. Для этого должны быть преодолены определенные технические трудности, связанные с получением инверсии населенностей в используемой системе уровней. Также есть вероятность появления aberrации из-за структуры потенциального барьера в сортирующей системе, хотя уменьшение напряжения на сортирующей системе в пять-шесть раз по сравнению с обычным даст возможность уменьшить расстояния между кольцами и, следовательно, несколько сгладить форму потенциального барьера. Большое внимание должно быть уделено термостабилизации расстояния между зеркалами. Формула (12) получена в предположении использования нерегенеративного усилителя, применение же пучкового усилителя может несколько ухудшить частотные характеристики МГ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
- 2 А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 34, № 6, 1658 (1958).
3. P. Kisliuk, C. Townes, Molecular Microwave Spectra Tables, Nat. Bureau Stand. Circ., 518, Washington, 1952,
- 4 Н. Рамзай, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960
5. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
- 6 В. С. Троицкий, ЖЭТФ, 41, 389 (1961).
- 7 А. Н. Ораевский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 10, 1554 (1968).
- 8 А. Н. Ораевский, А. В. Успенский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 11, № 8, 1180 (1968)

- 9 А. Ф. Крупнов, М. Я. Овчаров, В. А. Скворцов, А. А. Ульянов, А. П. Шеронов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 2, 224 (1969).  
10. G. Becker, B. Fischer, Z. f. ang. Physik, XIX Band, H. 6, 537 (1965).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
28 декабря 1970 г.

ON DESIGNING THE BEAM FREQUENCY STANDARD OF SUBMILLIMETER  
WAVE RANGE

*A. S. Bashkin, A. N. Oraevskii*

The possibilities of designing the active frequency standard of submillimeter wave range on the beams of formaldehyde slow molecules are considered. The effectiveness of applying two variants of slowing-down systems is considered. It is shown that these standards may have high stability and reproducibility.

---

УДК 538.576.452.1

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ СПЕКТРАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ МАНДЕЛЬШТАМА — БРИЛЛЮЭНА И ВЫНУЖДЕННОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА В ЖИДКОСТЯХ

*В. И. Беспалов, А. М. Кубарев, Г. А. Пасманик*

Обсуждается влияние пространственно-временных неоднородностей в возбуждающем импульсе на результаты спектральных измерений вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна и вынужденного температурного рассеяния света в жидкостях. Экспериментально подтверждена полученная ранее авторами теоретическая зависимость частотного сдвига спектра вынужденного температурного рассеяния от длительности возбуждающего излучения.

1. Исследование вынужденного рассеяния начато сравнительно давно, однако разброс результатов спектральных измерений довольно велик и нередко превышает точность, указанную в соответствующих работах. Анализ экспериментальных данных по вынужденному рассеянию Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ) [1, 2] и вынужденному температурному рассеянию (ВТР) [3—5] показал, что разброс в измерениях частотных сдвигов составляет в обоих случаях примерно одинаковую величину порядка  $0,01 \text{ см}^{-1}$ .

В настоящей заметке мы остановимся на обсуждении причин указанного разброса, путях его уменьшения и приведем некоторые экспериментальные данные по определению сдвига частоты при ВРМБ и ВТР.

2. Одна из возможных причин разброса — ошибка измерений, обусловленная неидеальностью зеркал интерферометра Фабри — Перо, — рассматривалась в работе [6]. Для ее устранения в нашем эксперименте измерения проводились при засветке лишь центральной части интерферометра диаметром 15 м.м., так что эта ошибка не могла превышать  $5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^{-1}$ . Кроме того, контролировалось совпадение областей, за свечиваемых измеряемым и контрольным световыми пучками\*.

Другая возможная причина разброса, хотя и не относится к категории ошибок, может существенно затруднить интерпретацию экспериментальных результатов. Речь идет о спектроскопии нелинейных процессов с использованием лазерных пучков, имеющих неоднородную пространственно-временную структуру. Если спектр интенсивных всплесков падающего излучения существенно отличается от спектра полного пучка, то, очевидно, при сравнении с последним спектра рассеянного излучения их различие может быть обусловлено не только непосредственно нелинейным преобразованием, но и степенью отличия спектра интенсивных всплесков от спектра полного пучка. Указанное отличие может иметь место в случае многомодовой структуры лазерного луча и при наличии частотной модуляции на протяжении импульса.

\* Подробнее по этому поводу см. [6].

3. Для проверки влияния этого эффекта экспериментальное исследование ВРМБ и ВТР проводилось вначале с импульсом света много-модового рубинового лазера длительностью 25 нсек\*, диаметром 8 мм и мощностью 20 Мвт, сфокусированным ( $F = 7$  см) в кювету с исследуемой жидкостью. При большом превышении порога ВР ширина спектра рассеянного света примерно совпадала с шириной спектра возбуждающего излучения\*\* (рис. 1 а). Однако при уменьшении мощности падающего света спектр рассеяния становился сначала линейчатым, а затем, вблизи порога ВР, сужался до одной линии (рис. 1 б), положение которой относительно середины спектра накачки изменялось при перестройке лазера.

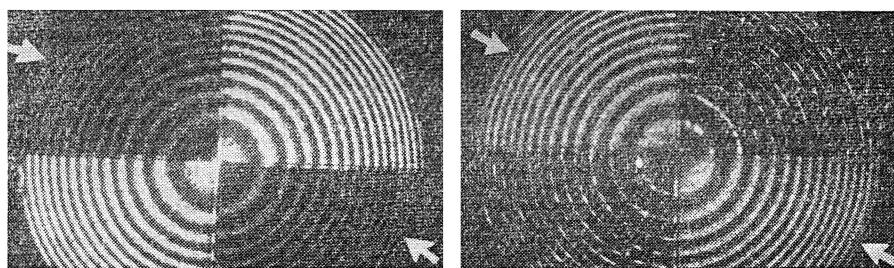


Рис. 1. Интерферограммы Фабри—Перо<sup>†</sup>(база 100 мм) возбуждающего света (со стрелками) и ВРМБ в циклогексане.

Изучение соответствующих осциллограмм показало, что при большом превышении порога ВР огибающие рассеянного и падающего импульсов примерно совпадают (рис. 2а), но при уменьшении мощности возбуждающего излучения рассеянный импульс становится сначала сильно изрезанным (рис. 2б), а затем, вблизи порога ВР, укорачивается вплоть до длительности, равной примерно 7 нсек (рис. 2в). Если на пути возбуждающего луча поставить диафрагму диаметром 1 мм, то импульс, прошедший через нее, также имеет модуляцию, вид которой изменяется при перемещении диафрагмы по сечению луча. Отмеченные эффекты связаны с всплесками интенсивности в поперечном сечении накачки.

Действительно, если при значительном превышении порога весь пучок давал существенный вклад в ВР, то вблизи порога рассеиваются лишь отдельные нити в падающем луче, имеющие, как правило, свою характерную частоту и небольшую длительность излучения по сравнению с длительностью полного импульса. В соответствии с этим, вблизи порога спектр рассеянного света сужается и длительность его уменьшается. Таким образом, из-за всплесков интенсивности в возбуждающем пучке при небольшом превышении порога возможен существенный разброс в спектральных измерениях частотных сдвигов, достигающий в ряде случаев полуширины спектра возбуждающего излучения.

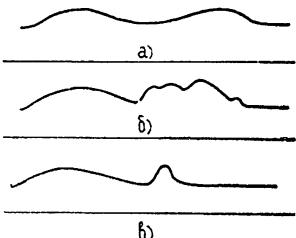


Рис. 2. Осциллограмма импульсов возбуждающего луча (первый) и ВРМБ в циклогексане (второй).

\* Длительность измерялась по уровню половинной интенсивности.

\*\* Интерферограммы снимались по методике, описанной в работе [3].

4. Для уменьшения ошибки измерения спектральных сдвигов при ВРМБ использовался импульс накачки с одномодовой поперечной и продольной структурой. Для получения такого импульса внутрь оптического резонатора ставились две диафрагмы (с обеих сторон от рубина) диаметром 1 мм. Длительность генерируемого импульса была равна примерно 10 нсек, ширина спектра  $8 \cdot 10^{-3}$  см<sup>-1</sup>, полная мощность 2 Мвт, диаметр около 1 мм. Лазерный свет фокусировался ( $F = 7$  см) в кюветы с водой\*, этиловым спиртом, циклогексаном, уксусной кислотой и четыреххлористым углеродом. Измеренные в перечисленных жидкостях спектральные сдвиги ВРМБ и соответствующие им значения скорости гиперзвука  $v$  оказались в хорошем согласии с соответствующими значениями, найденными при спонтанном рассеянии (табл. 1).

Таблица 1

	$T^{\circ}\text{C}$	$\Delta\nu (\text{см}^{-1})$	$v \cdot 10^{-5}$ (см·сек <sup>-1</sup> )	$v \cdot 10^{-5}$ (см·сек <sup>-1</sup> ) по результатам спонтанного рассеяния [7]
Вода	22,5	0,188	1,472	1,488 (22°C)
Спирт этиловый	21	0,155	1,184	1,162 (21,9°C)
Углерод четыреххлористый	21	0,145	1,033	1,046 (22,5°C)
Кислота уксусная	21	0,152	1,154	1,180 (22°C)
Циклогексан	21	0,183	1,346	1,346 (22,3°C)

5. ВТР наблюдалось нами в четыреххлористом углероде, циклогексане и уксусной кислоте с йодом в качестве поглотителя. Более подробно было исследовано ВТР в четыреххлористом углероде, когда при различной длительности падающего излучения  $\tau$  измерялось смещение середины спектра рассеяния  $\Delta\nu$  относительно середины спектра возбуждающей линии. Коэффициент поглощения по интенсивности  $\alpha = 0,3$  см<sup>-1</sup> выбирался таким образом, чтобы интенсивность ВТР была наибольшая при заданной геометрии возбуждающего луча, сфокусированного ( $F = 2$  см)) в кювету с жидкостью.

Критическое поглощение  $\alpha_{kp}$ , при котором сравниваются интенсивности ВРМБ и ВТР для использованных значений интенсивности падающего света, отсутствовало, и имелась некоторая область значений  $\alpha$ , в пределах которой не наблюдался ни тот, ни другой вид ВР. Вне границ указанной области при меньших значениях  $\alpha$  имело место ВРМБ, при больших — ВТР. Измерения спектра проводились на интерферометре Фабри — Перо с базой 10 см при превышении порога ВР примерно в 1,8 раза. Если учесть, что порогу приблизительно отвечает значение полного нестационарного инкремента  $G = 18$  и что  $G$  пропорционально корню квадратному из интенсивности [2, 5], то оценка величины инкремента, соответствующего превышению порога в 1,8 раза, дает  $G \approx 25$ .

Исследование спектра ВТР показало, что смещение максимума спектра расчит с уменьшением длительности падающего импульса. На рис. 3 отмечены значения  $\Delta\nu$ , усредненные по ряду экспериментов\*\*, и приведена теоретическая зависимость, рассчитанная по формуле

$$\Delta\phi = G/4\tau,$$

справедливой при накачке импульсами, короткими по сравнению с вре-

\* При исследовании ВРМБ в воде, где порог рассеяния относительно высок, использовалась линза с фокусным расстоянием  $F = 2$  см

\*\* Разброс в измерениях сдвигов при фиксированной длительности импульсов составлял примерно  $\pm 0,7 \cdot 10^{-3}$  см<sup>-1</sup>.

менем переходного процесса к стационарному рассеянию (см. подробнее [2, 5]\*). В нашем случае для  $G \approx 25^{**}$  смещение  $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi c = 1/\tau$ . Небольшое превышение экспериментальных данных над теоретическими, возможно, обусловлено ростом частоты падающего света от начала к концу импульса. О наличии частотной модуляции свидетельствует отличие ширины спектра падающего импульса  $\delta\omega$  от величины  $2,8/\tau$ , которая имела бы место для гауссова импульса с синусоидальным заполнением. Так, например, в наших измерениях при  $\tau = 1,08 \cdot 10^{-8}$  сек величина  $\delta\omega \approx 0,98 \cdot 10^{-9}$  сек<sup>-1</sup>. С частотной модуляцией связано также некоторое обужение спектра ВР по сравнению со спектром падающего излучения, имеющее место как при ВРМБ, так и при ВРП.

В заключение отметим, что величина смещения  $\Delta\nu$  в наших опытах практически не коррелирована с полушириной спектра исходного импульса, что согласуется с выводом, полученным нами ранее [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Фабелинский, В. С. Старунов, УФН, 98, 441 (1969).
2. В. И. Беспалов, А. М. Кубарев, Г. А. Пасманик, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 13, № 10, 1433 (1970).
3. D. H. Rank, C. W. Cho, N. D. Foltz, T. A. Wiggins, Phys. Rev. Lett., 19, 828 (1967).
4. C. W. Cho, N. D. Foltz, D. H. Rank, T. A. Wiggins, Phys. Rev., 175, 271 (1968).
5. V. I. Bespalov, A. M. Kubarev, G. A. Pasmanik, Phys. Rev. Lett., 24, № 23, 1274 (1970).
6. А. М. Кубарев, Оптика и спектроскопия, 28, № 5, 1028 (1970).
7. P. A. Fleury, R. Y. Chiao, JASA, 39, 751 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
30 июля 1970 г.

#### SOME RESULTS OF THE SPECTRAL INVESTIGATIONS OF THE STIMULATED MANDEL'STAM—BRILLOUIN SCATTERING AND STIMULATED TEMPERATURE LIGHT SCATTERING IN LIQUIDS

V. I. Bespalov, A. M. Kubarev, G. A. Pasmanik

The influence of spatial-time the inhomogeneities in the exciting pulse on the results of spectral measurements of stimulated Mandel'stam—Brillouin scattering and stimulated temperature light scattering in liquids are discussed. The theoretical dependence of the frequency shift of the stimulated temperature scattering spectrum on the duration of the exciting radiation obtained earlier is experimentally confirmed.

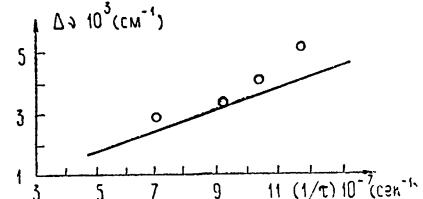


Рис. 3. Зависимость спектрального сдвига при ВТР в растворе  $\text{CCl}_4 + \text{I}_2$  от обратной длительности возбуждающего импульса.

\* Длительность возбуждающих импульсов в описываемом эксперименте не превышала время релаксации температуры, равное при обратном рассеянии в  $\text{CCl}_4$  16,4 нсек, и оставалась значительно меньшей времени переходного процесса.

\*\* Величина нестационарного инкремента контролировалась с точностью  $\pm 5\%$ .

УДК 621.373 . 530 145 6

## ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА С УЧЕТОМ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

*E. L. Ключан, П. С. Ланда*

Исследуется влияние естественных флуктуаций на зависимость средней частоты биений встречных волн в кольцевом лазере от скорости вращения в предположении, что флуктуации амплитуд являются малыми. Флуктуации фазы исследовались методом уравнения Фоккера—Планка. Показано, что влияние естественных флуктуаций на ход частотной характеристики зависит от мощности генерации, особенно сильно это влияние сказывается вблизи порога генерации.

В последнее время большое внимание уделяется рассмотрению процессов, происходящих в кольцевых лазерах [1–10]. Отличительной чертой таких лазеров является возможность генерации двух встречных бегущих волн, частоты которых в общем случае могут быть различны. Анализ показал [2, 4, 8], что при малых скоростях вращения частоты встречных волн в кольцевом лазере синхронизуются, однако в работах [2, 4, 8] влияние собственных шумов кольцевого лазера не учитывалось.

В настоящей статье исследуется влияние собственных шумов на частотную характеристику кольцевого лазера.

Эта задача представляет интерес с точки зрения определения предельной чувствительности лазерного гироскопа. Вопросам предельной чувствительности посвящены работы [5, 6], где показано, что среднеквадратичное отклонение частоты биений от средней частотной характеристики убывает с ростом времени наблюдения  $T$ , как  $\sqrt{D/T}$ , где  $D$  — ширина линии сигнала биений. В нашей работе вычислены средние частотные характеристики для разности частот порядка и много больше ширины полосы синхронизации. При вычислении средней частоты биений учитывалось влияние источников амплитудных флуктуаций на флуктуации фазы. Значения интенсивностей источников флуктуаций взяты из работы [7].

### 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФЛУКТУАЦИЙ РАЗНОСТИ ФАЗ

В работах [2, 3] были получены уравнения колебаний в кольцевом лазере. В приближении слабого поля с учетом связи через обратное рассеяние из них можно получить следующие укороченные уравнения [4, 8]:

$$\dot{x} = \frac{\omega_0}{Q} x (\eta_0 - \alpha ay) - \frac{1}{2} \sqrt{y^2 - x^2} [m_1 \sin(\Phi + \vartheta_1) + m_2 \sin(\Phi + \vartheta_2)] - 2\omega_0 \left[ \sqrt{\frac{y+x}{2}} \xi_{a1} - \sqrt{\frac{y-x}{2}} \xi_{a2} \right]; \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\omega_0}{Q} y \left( \eta_0 - \frac{\alpha + \beta}{2} ay \right) - \frac{\omega_0}{2Q} (\alpha - \beta) ax^2 - \frac{1}{2} \sqrt{y^2 - x^2} \times \\ &\quad \times [m_1 \sin(\Phi + \vartheta_1) - m_2 \sin(\Phi + \vartheta_2)] - 2\omega_0 \left[ \sqrt{\frac{y+x}{2}} \xi_{a1} + \sqrt{\frac{y-x}{2}} \xi_{a2} \right]; \\ \dot{\Phi} &= \Omega - \frac{\omega_0}{2Q} bax - \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{y^2 - x^2}} [m_1 \cos(\Phi + \vartheta_1) - m_2 \cos(\Phi + \vartheta_2)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{y^2 - x^2}} [m_1 \cos(\Phi + \vartheta_1) + m_2 \cos(\Phi + \vartheta_2)] - \\ &\quad - \omega_0 \sqrt{\frac{2}{y^2 - x^2}} (\sqrt{y-x} \xi_{\Phi 1} - \sqrt{y+x} \xi_{\Phi 2}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $x = |E_1|^2 - |E_2|^2$  — разность интенсивностей встречных волн,  $y = |E_1|^2 + |E_2|^2$  — сумма интенсивностей встречных волн,  $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$  — разность фаз встречных волн,  $m_{1,2} \exp(\pm i \vartheta_{1,2})$  — комплексные коэффициенты связи через обратное рассеяние,  $\xi_{a1,2}$ ,  $\xi_{\Phi 1,2}$  — источники амплитудных и фазовых флуктуаций. Остальные обозначения совпадают с принятыми в работе [4].

Времена корреляции шумов  $\xi_{a1,2}$ ,  $\xi_{\Phi 1,2}$  порядка  $1/(ku)$  и, следовательно, значительно меньше характерных времен изменения амплитуд и фаз. В силу этого шумы  $\xi_{a1,2}$  и  $\xi_{\Phi 1,2}$  в уравнениях (1.1) — (1.3) можно считать  $\delta$ -коррелированными и пользоваться теорией марковских процессов [1].

Уравнение Фоккера — Планка для совместной плотности вероятности величин  $x$ ,  $y$  и  $\Phi$ , которое можно получить из (1.1) — (1.3), в общем виде решить трудно. Поэтому мы предполагаем, что флуктуации суммы и разности интенсивностей малы и уравнения (1.1) — (1.3) можно линеаризовать относительно отклонений  $\delta x$  и  $\delta y$ .

Обозначив средние значения суммы и разности интенсивностей через  $\bar{y}$  и  $\bar{x}$ , запишем уравнение (1.3) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \Omega - \frac{\omega_0}{2Q} bax - \frac{1}{2} \frac{\bar{y}}{\sqrt{\bar{y}^2 - \bar{x}^2}} [m_1 \cos(\Phi + \vartheta_1) - m_2 \cos(\Phi + \vartheta_2)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{y}^2 - \bar{x}^2}} [m_1 \cos(\Phi + \vartheta_1) + m_2 \cos(\Phi + \vartheta_2)] - \\ &\quad - \omega_0 \sqrt{\frac{2}{\bar{y}^2 - \bar{x}^2}} [\sqrt{\bar{y}-\bar{x}} \xi_{\Phi 1} - \sqrt{\bar{y}+\bar{x}} \xi_{\Phi 2}] - \frac{\omega_0}{2Q} ba \delta x. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $\delta x$  — флуктуации разности интенсивностей, которые в корреляционном приближении определяются из уравнения

$$\delta \dot{x} = -\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \frac{\omega_0}{Q} \eta_0 \delta x - \omega_0 \sqrt{2\bar{y}} (\xi_{a1} - \xi_{a2}). \quad (1.5)$$

В уравнениях (1.4), (1.5) мы пренебрегли членами порядка  $m_{1,2} \delta x$ ,  $m_{1,2} \delta y$ .

Поскольку время установления амплитуды много меньше характерного времени изменения разности фаз, можно искать стационарное решение уравнений для средних значений суммы и разности интенсивностей. Оно записывается в виде ряда Фурье по гармоникам  $\Phi$ . Легко

показать, что коэффициенты при всех гармониках, кроме первой и нулевой, имеют порядок  $(m_{1,2}^2/\Omega^2)y_0$  и выше. Поэтому при достаточно большой разности частот высшие гармоники можно отбросить. Запишем  $x$  и  $y$  в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x_0 + A_x \cos \Phi + B_x \sin \Phi, \\ \bar{y} &= y_0 + A_y \cos \Phi + B_y \sin \Phi.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Здесь  $y_0 = (\eta_0/a)[2/(\alpha + \beta)]$ ,  $x_0, A_x, B_x, A_y, B_y \ll y_0$ .

Конкретные выражения для коэффициентов  $x_0, A_x, B_x, A_y, B_y$  в случае произвольных связей весьма громоздки. Для комплексно-сопряжённых связей, когда  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ ,

$$A_x = y_0 \frac{1}{\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{Q} \eta_0\right)^2 + \Omega^2} \left[ \Omega m \cos \vartheta - \frac{\omega_0}{Q} \eta_0 \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} m \sin \vartheta \right]; \quad (1.7)$$

$$B_x = -y_0 \frac{1}{\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{Q} \eta_0\right)^2 + \Omega^2} \left[ \Omega m \sin \vartheta + \frac{\omega_0}{Q} \eta_0 \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} m \cos \vartheta \right], \quad (1.8)$$

$$A_y = 0, \quad B_y = 0, \quad x_0 = 0.$$

Подставив в (1.4) решение (1.6) и оставив во флукуационной части (1.4) только члены нулевого порядка по связи, получим

$$\dot{\Psi} = \Omega_1 - \Omega_{03} \sin \Psi - \omega_0 \sqrt{\frac{2}{y_0}} (\xi_{\Phi 1} - \xi_{\Phi 2}) - \frac{\omega_0}{2Q} ba \delta x. \quad (1.9)$$

Здесь  $\Psi = \Phi + \psi$ ,

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \Omega' + \Omega \left\{ \frac{1}{2} M^2 - \frac{b}{\alpha - \beta} M_1 M + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} ba y_0 \frac{\omega_0}{\Omega} \frac{1}{Q} M_1 M \right\} \frac{1}{\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{Q} \eta_0\right)^2 + \Omega^2},\end{aligned}\quad (1.10)$$

где

$$\Omega' = \Omega \left\{ 1 - \frac{1 - \eta_0}{Q} \left[ \frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi} k u} - \frac{\eta_0}{2(\alpha + \beta)} \omega_0 \frac{\partial b}{\partial \omega_0} + \frac{b}{\alpha - \beta} \right] \right\}$$

— асимптотическое значение частоты биений с учетом линейной и нелинейной дисперсии (см. [8]),

$$\begin{aligned}\Omega_{03} &= \left\{ M_3^2 + \left[ \frac{1}{4} b^2 a^2 y_0^2 M^2 + \frac{1}{2} b (\alpha - \beta) a^2 y_0^2 M_2 M + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + bay_0 \frac{\Omega}{\omega_0} Q M_1 M \right] \frac{(\omega_0/Q)^2}{\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{Q} \eta_0\right)^2 + \Omega^2} \right\}^{1/2},\end{aligned}\quad (1.11)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{ba A_x + m_1 \cos \vartheta_1 - m_2 \cos \vartheta_2}{ba B_x - m_1 \sin \vartheta_1 + m_2 \sin \vartheta_2} \right\},$$

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}, \quad M_1 M = \frac{1}{4} (m_1^2 - m_2^2),$$

$$M_2 M = \frac{1}{2} m_1 m_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad M_3 = \frac{1}{2} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}.$$

В уравнении (1.9) величина  $\Omega_1$  имеет смысл эффективной разности частот. При  $\Omega \rightarrow \infty$   $\Omega_1 \rightarrow \Omega'$ , коэффициент  $\Omega_{03}$  переходит в полосу синхронизации  $\Omega_0$  при  $\Omega \sim \Omega_0$ . Величина  $\Omega_0$  вычислена в [8] и в обозначениях данной работы равна

$$\Omega_0 = \left\{ M_3^2 + \frac{b^2}{(\alpha - \beta)^2} M^2 + \frac{2b}{\alpha - \beta} M_2 M \right\}^{1/2}. \quad (1.12)$$

Следует отметить, что при коэффициентах связи, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2, \\ \operatorname{tg} \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} &= -\frac{b}{\alpha - \beta}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

ширина полосы синхронизации в первом приближении по связи обращается в нуль и необходимо пользоваться более высоким приближением. В нашей работе предполагается, что условие (1.13) не имеет места.

Уравнение (1.9) совпадает с выражением (18.43) в [11], полученным для случая синхронизации генератора внешним синусоидальным сигналом. Поэтому в дальнейшем будут использоваться результаты [11].

## 2. ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА ВБЛИЗИ ПОЛОСЫ СИНХРОНИЗАЦИИ

Из (1.12) видно, что вблизи полосы синхронизации разность частот встречных волн представляет собой величину того же порядка малости, что и связь. Ограничившись в уравнении (1.9) только членами первого порядка по связи, получим

$$\dot{\Psi} = \Omega - \Omega_0 \sin \Psi + \omega_0 \sqrt{2/y_0} \zeta. \quad (2.1)$$

Здесь  $\Omega$  — расстройка частот встречных волн из-за вращения,  $\Omega_0$  — ширина полосы синхронизации, а  $\xi = (\xi_{\Phi 1} - \xi_{\Phi 2}) - (1/2Q) \sqrt{y_0/2} ba \delta x$  — эффективный источник фазовых флуктуаций.

Учитывая, что

$$(\delta x^2)_\omega = 2 \omega_0^2 y_0 \frac{(\xi_{a1}^2)_\omega + (\xi_{a2}^2)_\omega}{\left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \left( \frac{\omega_0}{Q} \eta_0 \right)^2 + \omega^2} \quad (2.2)$$

и

$$(\xi_{a1,2} \xi_{\Phi 1,2})_\omega = 0,$$

находим для спектральной интенсивности  $\zeta$  на нулевой частоте следующее выражение:

$$(\zeta^2)_0 = \left\{ \frac{b^2}{(\alpha - \beta)^2} [(\xi_{a1}^2)_0 + (\xi_{a2}^2)_0] + [(\xi_{\Phi 1}^2)_0 + (\xi_{\Phi 2}^2)_0] \right\}.$$

Легко видеть, что при  $\Omega \sim \Omega_0$  и слабой связи характерное время изменения разности фаз  $\tau_\Phi = 1/\sqrt{|\Omega^2 - \Omega_0^2|}$  много больше времени

корреляции случного процесса  $\zeta$ . В силу этого  $\Psi$  можно считать марковским процессом и из (2.1) получить среднюю частоту биений между встречными волнами (см. [11]):

$$\langle \dot{\Psi} \rangle = \langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega \frac{\sinh \pi D}{\pi D} |J_{1D}(D_0)|^{-2}, \quad (2.3)$$

где  $J_{1D}(D_0)$  — функция Бесселя мнимого индекса от мнимого аргумента,

$$D_0 = \frac{y_0}{(\zeta^2)_0} \frac{\Omega_0}{\omega_0^2} = \frac{2\Omega_0}{D_\Phi}; \quad (2.4)$$

$$D = \frac{2\Omega}{D_\Phi}. \quad (2.5)$$

В выражениях (2.4), (2.5)

$$D_\Phi = 2 \left[ \frac{b^2}{(\alpha - \beta)^2} + 1 \right] \frac{\hbar \omega_0 (\Delta \omega_p)^2}{P} \left( 1 + \frac{R^0}{D^0} \right) \quad (2.6)$$

— коэффициент диффузии разности фаз встречных волн (см. [9]). Коэффициент  $D_\Phi$  определяет ширину линии биений вне полосы синхронизации. В формуле (2.6)  $\Delta \omega_p$  —ширина полосы резонатора,  $P$  — мощность излучения,  $R^0/D^0$  — отношение суммы населенностей уровней к их разности в отсутствие поля.

На рис. 18.6 в [11] приведены графики зависимости  $\langle \dot{\Phi} \rangle / \Omega_0$  от  $\Omega / \Omega_0$  для значений  $D_0 = 0, 1, 3, 5, 10$  и  $\infty$ . Из графиков видно, что влияние естественных флюктуаций на частотную характеристику тем меньше, чем больше значение параметра  $D_0$ .

При не очень малой мощности генерации ширина линии сигнала биений много меньше ширины области синхронизации. В этом случае естественные флюктуации практически не влияют на ход частотной характеристики. При работе лазера вблизи порога ширина линии может стать сравнимой с шириной полосы синхронизации. В этом случае влияние естественных флюктуаций на ход частотной характеристики становится заметным. Оценим влияние естественных флюктуаций, задав следующие параметры лазера:  $\Delta \omega_p / 2\pi = 5 \text{ Гц}$ ,  $\omega_0 = 3 \cdot 10^{15} \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,25$ ,  $b = 0,25$ ,  $a/V = 10^2 \text{ ед. CGSE}$ ,  $\Omega_0 / 2\pi = 100 \text{ гц}$ . При мощности генерации  $P = 1 \text{ мвт}$   $D_\Phi / 2\pi = 0,72 \text{ гц}$ ,  $D_0 = 276$ . При  $P = 10 \text{ мквт}$   $D_\Phi / 2\pi = 72 \text{ гц}$ ,  $D_0 = 2,76$ . Заметим, что при меньших мощностях генерации наши результаты перестают быть справедливыми, поскольку нарушается условие слабой связи.

### 3. ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА ВДАЛИ ОТ ОБЛАСТИ СИНХРОНИЗАЦИИ

Чтобы измерить малую скорость вращения, можно при помощи незаимного элемента создать достаточно большую разность частот (подставку), значительно превосходящую ширину области синхронизации. В связи с этим исследование частотных характеристик вдали от области синхронизации представляет практический интерес, так как малые поправки к частотной характеристике за счет влияния шумов и связи могут оказаться сравнимыми с измеряемой разностью частот встречных волн.

Чтобы правильно учесть влияние связи на частотную характеристику, необходимо исследовать непосредственно уравнение (1.9), не ограничиваясь только членами первого порядка по связи (без учета флюктуаций это было сделано в работах [8, 10]).

Учет влияния флюктуаций вдали от области синхронизации осложняется тем, что в некоторой области частот вблизи  $\Omega = \Omega^* \equiv (\omega_0/Q)\eta_0$  характерное время изменения разности фаз и время корреляции флюктуаций  $\delta x$  одного порядка. В этом случае решение задачи нельзя свести к решению одномерного уравнения Фоккера — Планка. Частота  $\Omega^*$  выражается через мощность генерации следующим образом:

$$\Omega^* = \frac{8\pi aP}{V}(\alpha + \beta),$$

где  $a$  — параметр насыщения.

При  $\Omega \ll \Omega^*$  время корреляции флюктуаций  $\delta x$  по-прежнему много меньше характерного времени изменения разности фаз. В этом случае частотная характеристика определяется выражением, аналогичным (2.3):

$$\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega_1 \frac{\sinh \pi D_1}{\pi D_1} |J_{iD_1}(D_{0s})|^{-2}, \quad (3.1)$$

где

$$D_{0s} = \frac{2\Omega_{0s}}{D_\Phi}, \quad D_1 = \frac{2\Omega_1}{D_\Phi}. \quad (3.2)$$

Здесь  $\Omega_1$  и  $\Omega_{0s}$  определяются выражениями (1.10) и (1.11), а  $D_\Phi$  — выражением (2.6).

При  $\Omega \gg \Omega^*$  флюктуации  $\delta x$  можно учесть квазистатически. В этом случае частотная характеристика также будет определяться выражениями (3.1), (3.2), в которых надо заменить  $\Omega_1$  на  $\Omega'_1 = \Omega_1 - (\omega_0/2Q)ba\delta x$ , а  $D_\Phi$  на

$$D'_\Phi = \frac{2\pi\hbar\omega_0(\Delta\omega_p)^2}{P} \left(1 + \frac{R^0}{D^0}\right)$$

— коэффициент диффузии разности фаз встречных волн при отсутствии амплитудных флюктуаций.

Используя асимптотическую формулу для функции Бесселя с большим индексом и усредняя по флюктуациям  $\delta x$ , получим

$$\langle \dot{\Phi} \rangle = \Omega + \Delta\Omega_{cb} + \Delta\Omega_{sh}.$$

Здесь  $\Delta\Omega_{cb}$  — поправка к частотной характеристике за счет влияния связи. Она вычислялась в работах [8, 10]. При комплексно-сопряженной связи поправка  $\Delta\Omega_{cb}$  в наших обозначениях равна

$$\Delta\Omega_{cb} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0^2}{\Omega} \frac{\Omega^2 - [\Omega^* b/(\alpha + \beta)]^2}{\Omega^2 + [\Omega^*(\alpha - \beta)/(\alpha + \beta)]^2}.$$

Поправка за счет связи становится максимальной на частоте

$$\Omega = \frac{\Omega^*}{\sqrt{2}(\alpha + \beta)} \{(\alpha - \beta)^2 + 3b^2 + k\}^{1/2},$$

где  $k = \sqrt{(\alpha - \beta)^4 + 9b^4 + 10b^2(\alpha - \beta)^2}$ . Максимальное значение поправки  $\Delta\Omega_{cb}$  равно

$$\Delta\Omega_{cb \max} = \frac{\Omega_0^2}{\sqrt{2}\Omega^*} \frac{\alpha + \beta}{\{(\alpha - \beta)^2 + 3b^2 + k\}^{1/2}} \frac{(\alpha - \beta)^2 + b^2 + k}{3(\alpha - \beta)^2 + 3b^2 + k}. \quad (3.3)$$

\* Заметим, что частота  $\Omega^*$  совпадает с прочностью предельного цикла (см. [12]).

Поправка за счет влияния флюктуаций  $\Delta\Omega_{\text{ш}}$  различна в зависимости от соотношения между  $\Omega$  и  $\Omega^*$ . При  $\Omega \ll \Omega^*$

$$\Delta\Omega_{\text{ш}} = \frac{5}{32} \frac{D_{\Phi}^2}{\Omega_0} \frac{\Omega_0}{\Omega} = k_1 \frac{\Omega_0}{\Omega}. \quad (3.4)$$

При  $\Omega \gg \Omega^*$

$$\Delta\Omega_{\text{ш}} = \frac{5}{32} \frac{D_{\Phi}'^2}{\Omega_0} \frac{\Omega_0}{\Omega} + \frac{1}{64} b^2 a^2 \frac{\Delta\omega_p^2}{\Omega_0} \delta x^2 \left( \frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^3 = k_2 \frac{\Omega_0}{\Omega} + k_3 \left( \frac{\Omega_0}{\Omega} \right)^3. \quad (3.5)$$

Дисперсию  $\delta x^2$ , входящую в (3.5), легко вычислить из (2.2):

$$\delta x^2 = \frac{16 \pi^2 \hbar \omega_0}{a(\alpha - \beta) V} \left( 1 + \frac{R^0}{D^0} \right). \quad (3.6)$$

Анализ формул (3.3) — (3.5) с учетом выражений для  $\Omega^*$ ,  $D_{\Phi}$  и  $D_{\Phi}'$  показывает, что поправки  $\Delta\Omega_{\text{св max}}$  и  $\Delta\Omega_{\text{ш}}$  растут с уменьшением мощности генерации. Ниже приведены численные оценки поправок  $\Delta\Omega_{\text{св max}}$  и  $\Delta\Omega_{\text{ш}}$  для лазера, параметры которого заданы в разд. 2, при мощностях генерации  $P = 100 \text{ мквт}$  и  $P = 10 \text{ мквт}$ .

При  $P = 100 \text{ мквт}$  ( $\eta_0 = 6,28 \cdot 10^{-3}$ )  $(\Omega^*/2\pi) = 300 \text{ кгц}$ ,  $k_1/2\pi = 0,078 \text{ гц}$ ,  $k_2/2\pi = 0,019 \text{ гц}$ . Коэффициент  $k_3$  не зависит от мощности генерации и равен  $k_3/2\pi = 2,3 \cdot 10^3 \text{ гц}$ . Таким образом, при частотах  $\Omega_0/2\pi \ll \Omega/2\pi \ll 300 \text{ кгц}$   $\Delta\Omega_{\text{ш}}/2\pi = 0,078 (\Omega_0/\Omega) \text{ гц}$ . При частотах  $\Omega/2\pi \gg 300 \text{ кгц}$  вторым слагаемым в выражении (3.5) можно пренебречь и считать  $\Delta\Omega_{\text{ш}}/2\pi = 0,019 (\Omega_0/\Omega) \text{ гц}$ . Максимальное значение поправки за счет связи при мощности генерации  $P = 100 \text{ мквт}$  достигается на частоте  $\Omega/2\pi = 600 \text{ кгц}$  и равно  $\Delta\Omega_{\text{св max}}/2\pi = 0,005 \text{ гц}$ .

При  $P = 10 \text{ мквт}$  ( $\eta_0 = 6,28 \cdot 10^{-3}$ )  $(\Omega^*/2\pi) = 30 \text{ кгц}$ ,  $k_1/2\pi = 7,8 \text{ гц}$ ,  $k_2/2\pi = 1,95 \text{ гц}$ ,  $\Delta\Omega_{\text{св max}}/2\pi = 0,052 \text{ гц}$ . Максимальное значение  $\Delta\Omega_{\text{ш}}$  достигается на частоте  $\Omega/2\pi = 60 \text{ кгц}$ . При  $\Omega_0/2\pi \ll \Omega/2\pi \ll 30 \text{ кгц}$   $\Delta\Omega_{\text{ш}}/2\pi = 7,8 (\Omega_0/\Omega) \text{ гц}$ , при  $\Omega/2\pi \gg 30 \text{ кгц}$  ( $\Delta\Omega_{\text{ш}}/2\pi = 1,95 (\Omega_0/\Omega) \text{ гц}$ ).

Приведенные численные оценки показывают, что естественные флюктуации могут оказывать заметное влияние на ход частотной характеристики вдали от области синхронизации только вблизи порога генерации.

В заключение заметим, что полученное в данном разделе выражение (3.5) имеет более широкое применение. Им можно пользоваться для оценки влияния медленных технических флюктуаций на ход частотной характеристики вдали от области захвата. Для этого в (3.5) надо заменить  $(1/2)ba\Delta\omega_p\delta x$  на эквивалентный источник технических флюктуаций.

Авторы пользуются случаем выразить благодарность А. Н. Малахову за ряд полезных замечаний, сделанных при рецензировании работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Берштейн, Ю. И. Зайцев, ЖЭТФ, 49, 3, 953 (1965).
2. Ю. Л. Климонтович, В. Н. Курятов, П. С. Ланда, ЖЭТФ, 51, № 1, 3 (1966).
3. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, ЖЭТФ, 52, № 6, 1616 (1967).
4. П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, Г. А. Чернобровкин, Радиотехника и электроника, 13, № 11, 2026 (1968).
5. Н. Н. Розапов, Оптика и спектроскопия, 28, № 4, 740 (1970).
6. П. С. Ланда, Оптика и спектроскопия, 29, № 5 (1971).
7. Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда, ЖЭТФ, 58, № 4, 1367 (1970).
8. П. С. Ланда, Е. Г. Ларионцев, Радиотехника и электроника, 15, № 6, 1214, (1970).
9. П. С. Ланда, ЖЭТФ, 58, № 5, 1651 (1970).

- 10 Б В Рыбаков, Ю. В Демиденков, С Г Скроцкий, А М Хромых, ЖЭТФ, 57, № 4, 1184 (1969)
11. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М, 1961
- 12 А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд Наука, М, 1968.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
5 июня 1970 г.

## FREQUENCY CHARACTERISTICS OF A RING LASER WITH TAKING INTO ACCOUNT NATURAL FLUCTUATIONS

*E. L. Klochan, P. S. Landa*

The authors consider the influence of natural fluctuations on the dependence of the mean rate of beats of opposite waves in a ring laser on the rotation velocity under the assumption that the amplitude fluctuations are small. The phase fluctuations are investigated by Fokker-Plank equation method. It is shown that the influence of natural fluctuations on the frequency variation depends on the generation power. It is especially strong near the generation threshold.

---

УДК 538.56

## К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОМЕХ

*Ю. Г. Сосулин*

В работе находится рекуррентное соотношение оптимального обнаружения сигналов на фоне помех, аппроксимируемых компонентами марковских процессов, затем путем предельного перехода выводятся несимметризованные и симметризованные стохастические уравнения, дающие алгоритмы совместного оценивания — обнаружения весьма общего вида

Наблюдаемые данные  $y^*(t)$  в проблеме проверки гипотез  $\Theta = 1$  и  $\Theta = 0$  определим соотношением

$$y_t^* = \begin{cases} \Phi(x_t^*, \eta_t^*, t) + \xi_t & (\Theta = 1) \\ V(\eta_t^*, t) + \xi_t & (\Theta = 0) \end{cases}. \quad (1)$$

Случайные процессы  $\{x_t^*\}, \{\eta_t^*\}$  — параметры сигнала и помехи соответственно — описываются произвольными распределениями вероятностей, функции  $\Phi, V$  заданы. Белый гауссов шум  $\xi_t$  ( $M\xi_t \xi_{t+\tau} = N\delta(\tau)$ ) служит аппроксимацией собственных шумов, всегда присутствующих в реальном приемнике.

Процессы  $\{x_t^*\}, \{\eta_t^*\}$ , являющиеся в общем случае немарковскими и негауссовыми, представляют собой модели реальных радиотехнических процессов. Аппроксимируем их компонентами  $\{x_t\}, \{\eta_t\}$  специально сконструированных многокомпонентных непрерывных марковских процессов  $\{x_t\} = \{x_1, x_{1t}, \dots, x_{nt}\}, \{\eta_t\} = \{\eta_1, \eta_{1t}, \dots, \eta_{nt}\}$ ; в принципе это можно сделать с любой заранее заданной степенью точности [1]. В результате задача (1) будет равносильна проблеме проверки гипотез:

$$y_t = \begin{cases} \Phi(x_t, \eta_t, t) + \xi_t & (\Theta = 1) \\ V(\eta_t, t) + \xi_t. & (\Theta = 0) \end{cases}. \quad (2)$$

Компоненты  $\{x_{1t}, \dots, x_{nt}\}, \{\eta_{1t}, \dots, \eta_{nt}\}$  в наблюдаемые данные (2) не входят, причем  $t$  и  $n$  можно выбирать как угодно большими, достигая тем самым любой степени эквивалентности задач (1) и (2).

Будем искать отношение правдоподобия (ОП)  $\Lambda_t = P(y_0^t | \Theta = 1) / P(y_0^t | \Theta = 0)$ . При этом вначале рассмотрим случай дискретного времени  $t_k$  ( $k$  — целочисленный индекс), заменив  $\{x_t\}, \{\eta_t\}$  марковскими процессами с дискретным временем  $\{x_k\}, \{\eta_k\}$ , сходящимися в пределе к непрерывным марковским процессам [2]. Переходные плотности обозначим через  $\pi_1(x_{k+1} | x_k), \pi_0(\eta_{k+1} | \eta_k)$ . Совместная переходная плотность процесса  $\{x_k, \eta_k\}$  при независимых  $\{x_k\}$  и  $\{\eta_k\}$  равна

$$\pi(x_{k+1}, \eta_{k+1} | x_k, \eta_k) = \pi_1(x_{k+1} | x_k) \pi_0(\eta_{k+1} | \eta_k). \quad (3)$$

Параметры сигнала  $\{x_t^*\}$  и помехи  $\{\eta_t^*\}$  могут быть, вообще говоря, статистически зависимыми между собой; ход рассуждений сохраняется,

при этом процессы  $\{x_t^*\}$  и  $\{\eta_t^*\}$  при  $\Theta = 1$  аппроксимируются двумя компонентами единого марковского процесса  $\{x_t, \eta_t\}$ . Заметим, что последний несколько отличается от совместного процесса, компоненты которого заменяют независимые параметры (в частности, переходную плотность  $\pi(x_{k+1}, \eta_{k+1} | x_k, \eta_k)$  нельзя представить в виде (3)), но для вывода конечных результатов работы это несущественно.

Процессу  $\{\xi_t\}$  в дискретном времени соответствует гауссов процесс с независимыми значениями:

$$\rho(\xi_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(N/\Delta t)}} \exp\left\{-\frac{\Delta t}{2N} \xi_k^2\right\} \quad (\Delta t = t_k - t_{k-1}). \quad (4)$$

Представим ОП  $\Lambda_t$  в виде  $\Lambda_t = \Lambda_{1t}/\Lambda_{0t}$ , где  $\Lambda_{1t}, \Lambda_{0t}$  — ОП в задачах обнаружения на фоне белого шума процессов  $\Phi(x_t, \eta_t, t)$  и  $V(\eta_t, t)$  соответственно. При помощи метода, аналогичного [3, 4], найдем ОП  $\Lambda_{1,k+1}$  и  $\Lambda_{0,k-1}$ ; затем, поделив одно на другое, получим рекуррентное соотношение для ОП проблемы (2) (в варианте дискретного времени):

$$\begin{aligned} \Lambda_{k+1} = \Lambda_k & \left\{ \int \rho[y_{k+1} - \Phi(x_{k+1}, \eta_{k+1}, t_{k+1})] \pi(x_{k+1}, \eta_{k+1} | x_k, \eta_k) \times \right. \\ & \times w_{1k}(x_k, \eta_k) dx_k d\eta_k dx_{k+1} d\eta_{k+1} \left\{ \int \rho[y_{k+1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - V(\eta_{k+1}, t_{k+1})] \pi_0(\eta_{k+1} | \eta_k) w_{0k}(\eta_k) d\eta_k d\eta_{k+1} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$w_{1k} = P(x_k, \eta_k | y_0^k, \Theta = 1), \quad w_{0k} = P(\eta_k | y_0^k, \Theta = 0)$$

— апостериорные плотности вероятностей.

Подставим (4) в (5) и разложим экспоненты в числителе и знаменателе в ряд по степеням  $\Delta t$ . Используя нормировку условных плотностей  $\pi w_{1k}$ ,  $\pi_0 w_{0k}$ ,  $\int \pi w_{1k} dx_k d\eta_k dx_{k+1} d\eta_{k+1} = 1$ ,  $\int \pi_0 w_{0k} d\eta_k d\eta_{k+1} = 1$  и разложение  $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$  при малых  $x$ , приведем (5) к виду

$$\begin{aligned} \Lambda_{k+1} = \Lambda_k + \Lambda_k \int \left[ \frac{\Delta t}{2N} (2y_{k+1} \Phi - \Phi^2) + \frac{(\Delta t)^2 y_{k+1}^2}{2N^2} \Phi^2 \right] \pi w_{1k} dx_k \times \\ \times d\eta_k dx_{k+1} d\eta_{k+1} \left\{ 1 - \int \left[ \frac{\Delta t}{2N} (2y_{k+1} V - V^2) + \frac{(\Delta t)^2 y_{k+1}^2}{2N^2} V^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \pi_0 w_{0k} d\eta_k d\eta_{k+1} + \frac{(\Delta t)^2 y_{k+1}^2}{N^2} \left[ \int V \pi_0 w_{0k} d\eta_k d\eta_{k+1} \right]^2 \right\} + O[(\Delta t)^2] \end{aligned} \quad (6)$$

(для краткости аргументы функций опущены). Заметим, что интегрирование по всем переменным, кроме  $x_{k+1}, \eta_{k+1}$ , осуществляется «автоматически». При этом, введя апостериорную плотность  $P(x_{k+1}, \eta_{k+1} | y_0^k, \Theta = 1)$ , определяемую интегрированием  $\pi w_{1k}$ , будем, например, иметь  $\int \Phi \pi w_{1k} dx_k d\eta_k dx_{k+1} d\eta_{k+1} = \int \Phi(x_{k+1}, \eta_{k+1}, t_{k+1}) P(x_{k+1}, \eta_{k+1} | y_0^k, \Theta = 1) dx_{k+1} d\eta_{k+1}$ . В пределе этот интеграл совпадает с апостериорным математическим ожиданием процесса  $\Phi(x_t, \eta_t, t)$ :

$$M[\Phi(x_t, \eta_t, t) | y_0^t, \Theta = 1] = \hat{\Phi}_t. \quad (7)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}^2 &= M[\Phi_t^2 | y_0^t, \Theta = 1], \quad \hat{V}_{0t} = M[V_t | y_0^t, \Theta = 0], \\ \hat{V}_{0t}^2 &= M[V_t^2 | y_0^t, \Theta = 0].\end{aligned}\quad (8)$$

Отметим, что операторы  $\hat{\Phi}_t$ ,  $\hat{\Phi}_t^2$ ,  $\hat{V}_{0t}$ ,  $\hat{V}_{0t}^2$  являются наилучшими оценками случайных функций  $\Phi_t$ ,  $\Phi_t^2$ ,  $V_t$ ,  $V_t^2$  по результатам наблюдения  $y_0^t$  ( $\Theta = 1$  и  $\Theta = 0$ ) в смысле минимума среднеквадратичной ошибки. Если в них подставить наблюдаемые данные при гипотезах, отличающихся от принятых в (7), (8), то эти операторы называем псевдооценками.

При переходе в (6) к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  можно получить как несимметризованное, так и симметризованное (в смысле [5]) стохастические дифференциальные уравнения в зависимости от того, учитываются или отбрасываются члены типа  $(\Delta t)^2 y_{k+1}^2$  [3, 6]. С учетом этого члена, дающего при  $\Delta t \rightarrow 0$  детерминированный вклад  $N\Delta t$  [3, 6], из (6) получим в пределе стохастическое несимметризованное уравнение (в смысле Ито):

$$d\Lambda_t = \frac{1}{N} (\hat{V}_{0t}^2 - \hat{\Phi}_t \hat{V}_{0t}) \Lambda_t dt + \frac{1}{N} (\hat{\Phi}_t - \hat{V}_{0t}) \Lambda_t d\tilde{y}_t \quad (\tilde{y}_t = \int_0^t y_\tau d\tau) \quad (9)$$

или, в эквивалентной форме,

$$\dot{\Lambda}_t = \frac{1}{N} (\hat{V}_{0t}^2 - \hat{\Phi}_t \hat{V}_{0t}) \Lambda_t + \frac{1}{N} (\hat{\Phi}_t - \hat{V}_{0t}) \Lambda_t y_t. \quad (9a)$$

В практических задачах шум является «сглаженным» процессом, а не дельта-коррелированным (белым). При этом член  $(\Delta t)^2 y_{k+1}^2$  имеет порядок малости уже не  $O(\Delta t)$ , а  $O[(\Delta t)^2]$ , и в пределе дает нулевой вклад. В результате из (6) получаем симметризованное стохастическое уравнение:

$$\dot{\Lambda}_t = -\frac{1}{2N} (\hat{\Phi}_t^2 - \hat{V}_{0t}^2) \Lambda_t + \frac{1}{N} (\hat{\Phi}_t - \hat{V}_{0t}) \Lambda_t y_t. \quad (10)$$

Решения уравнений (9), (10) найдем, сделав замену  $z_t = \ln \Lambda_t$ . При симметризованной записи (10) дифференцирование осуществляется по обычным правилам ( $\dot{z}_t = \dot{\Lambda}_t / \Lambda_t$ ), поэтому

$$\dot{z}_t = -\frac{1}{2N} (\hat{\Phi}_t^2 - \hat{V}_{0t}^2) + \frac{1}{N} (\hat{\Phi}_t - \hat{V}_{0t}) y_t, \quad (11)$$

а отношение правдоподобия в конечный момент наблюдения

$$\Lambda_T = \exp \left\{ \frac{1}{N} \int_0^T (\hat{\Phi}_t - \hat{V}_{0t}) y_t dt - \frac{1}{2N} \int_0^T (\hat{\Phi}_t^2 - \hat{V}_{0t}^2) dt \right\} \quad (\Lambda_0 = 1). \quad (12)$$

При несимметризованной записи (9), (9a) дифференцирование производится по правилу Ито (см., например, [2]). Применяя его к  $\ln \Lambda_t$  с учетом (9) (чтобы непосредственно использовать формулу Ито [2],

нужно  $\tilde{dy}_t$  выразить через дифференциал стандартного винеровского процесса  $w_t$ :  $\tilde{dy}_t = \begin{cases} \Phi_t dt + \sqrt{N} dw_t, & \Theta = 1 \\ V_t dt + \sqrt{N} dw_t, & \Theta = 0 \end{cases}$ , получим

$$\dot{z}_t = -\frac{1}{2N} (\hat{\Phi}_t^2 - \hat{V}_{0t}^2) + \frac{1}{N} (\hat{\Phi}_t - \hat{V}_{0t}) y_t; \quad (13)$$

$$\Lambda_T = \exp \left\{ \frac{1}{N} \int_0^T (\hat{\Phi}_t - \hat{V}_{0t}) y_t dt - \frac{1}{2N} \int_0^T (\hat{\Phi}_t^2 - \hat{V}_{0t}^2) dt \right\}. \quad (14)$$

Первые интегралы в формулах (12), (14) представляют собой симметризованный (в смысле Стратоновича) и несимметризованный (в смысле Ито) стохастические интегралы соответственно. Отметим, что те же самые уравнения (13), (14) можно найти и без использования дифференцирования Ито, если уже в (5) сделать замену  $z_i = \ln \Lambda_i$  и затем после соответствующих разложений перейти к пределу с учетом  $(\Delta t)^2 y_{k+1}^2$ . Это еще раз подтверждает тот факт, что учет указанного члена при переходе к пределу в рекуррентных соотношениях приводит к стохастическим уравнениям Ито.

Найденные формулы (9)–(14) дают оптимальные алгоритмы совместного обнаружения и оценивания сигналов на фоне помех в присутствии собственных шумов приемника, при этом на сигналы и помехи практически не накладывается никаких ограничений. При аддитивных помехах  $\Phi_t = S(x_t, t) + V(\eta_t, t)$  в алгоритмах нужно конкретизировать  $\hat{\Phi}_t$ :

$$\hat{\Phi}_t = \hat{S}_t + \hat{V}_{1t}, \quad \hat{S}_t = M[S_t | y_0^t, \Theta = 1], \quad \hat{V}_{1t} = M[V_t | y_0^t, \Theta = 1],$$

и аналогично  $\hat{\Phi}_t^2$ . В частном случае, когда помеха отсутствует ( $V_t = 0$ ), формулы (12), (14) принимают вид

$$\Lambda_T = \exp \left\{ \frac{1}{N} \int_0^T \hat{S}_t y_t dt - \frac{1}{2N} \int_0^T \hat{S}_t^2 dt \right\}; \quad (15)$$

$$\Lambda_T = \exp \left\{ \frac{1}{N} \int_0^T \hat{S}_t y_t dt - \frac{1}{2N} \int_0^T \hat{S}_t^2 dt \right\}. \quad (16)$$

Последний алгоритм подробно исследован в [7], где доказана его общность с использованием концепции «нововведенных» процессов (первоначально он был получен в [3] для случая марковского гауссова сигнала).

Формулы (9)–(16) связывают отношение правдоподобия с оценками (и псевдооценками) сигналов и помех. Основные операции алгоритмов сводятся к умножению наблюдаемых данных на оценки сигнала и помехи, интегрированию и компенсации помехи при помощи вычитания. Такая оценочно-корреляционно-компенсационная обработка, как следует из вышеизложенного, справедлива для произвольных сигналов и помех. Это говорит о существовании общего оценочно-корреляционного принципа приема сигналов, сущность которого выражают полученные выше алгоритмы.

Изложенный подход к приему произвольных сигналов на фоне произвольных помех аналогичен [8]. В дополнение к [8] здесь рассмотрен случай дискретного времени, а также уделено большее внимание выводу несимметризованных стохастических уравнений.

Данный подход к проблеме произвольных сигналов и помех существенно отличается от подхода, предложенного в недавней работе [9], где также рассматривается задача получения общих алгоритмов обнаружения и оценивания и выводится отношение правдоподобия в предположении, что исходные сигнал и помеха являются немарковскими процессами с дискретным временем; затем для случая диффузионных помех делается переход к непрерывному времени.

При решении же задачи методом нашей работы исходные сигнал и помеха аппроксимируются компонентами некоторых многокомпонентных марковских процессов. При этом общий характер выводимых алгоритмов определяется двумя факторами: возможностью аппроксимировать процесс компонентой марковского с любой заранее заданной степенью точности [1, 5] и тем, что получаемая структура алгоритмов обнаружения и смысл входящих в них оценок не меняются при изменении конструкции аппроксимирующих процессов—вида коэффициентов переноса и диффузии и числа компонент.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1961.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, изд. Наука, М., 1965.
3. Р. Л. Стратонович, Ю. Г. Сосулин, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 10 (1964).
4. Ю. Г. Сосулин, Радиотехника и электроника, 14, № 12, 2136 (1969).
5. Р. Л. Стратонович, Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления, изд. МГУ, 1966.
6. Э. М. Хазен, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 7, 978 (1969).
7. Т. Кайлэт, IEEE Trans. Inform. Theory, IT-15, № 3, 350 (1969).
8. Ю. Г. Сосулин, Радиотехника и электроника, 16, № 3, 281 (1971).
9. Р. Л. Стратонович, ТИИЭР, 58, № 5, 73 (1970).

Московский авиационный институт

Поступила в редакцию  
29 мая 1970 г.

#### TO THE THEORY OF OPTIMAL DETECTION OF RANDOM SIGNALS AT THE BACKGROUND OF RANDOM NOISES

*Yu. G. Sosulin*

The recurrence relation of the optimal signal detection at the noise background approximated by the components of Markov processes is found. The symmetrized and nonsymmetrized stochastic equations giving the algorithms of joint estimation-detection are derived by the limiting transition. The detection is of rather common type.

УДК 621.372

## РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ НА ПОДВИЖНЫХ ГРАНИЦАХ

*A. I. Весницкий*

Найдено точное решение одномерного неоднородного волнового уравнения при заданных начальных и граничных условиях для случаев, когда расстояние между границами изменяется во времени по линейному и гиперболическому законам. Полученные решения используются для определения полей в резонаторах, возбуждаемых источниками, расположенными на границах.

Волновые процессы в системах с подвижными границами, исследование которых сводится к отысканию решений гиперболического уравнения с условиями на движущихся поверхностях, к настоящему времени изучены мало. Тем больший интерес представляет получение точных решений уравнений для полей в подобных системах. До сих пор такие решения были найдены только для случая равномерно движущихся границ [1-3], где рассматривались однородные задачи, т. е. задачи без источников.

В настоящей работе методом замены переменных, аналогичным использовавшемся в [4-6] для решения параболических уравнений с условиями на движущихся поверхностях, решается задача о нахождении функции  $U(x, t)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = F(x, t) \quad (1)$$

и следующим граничным и начальным условиям:

$$U(0, t) = U(a(t), t) = 0 \quad (t \geq 0); \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{t=0} = H_0(x), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = -cE_0(x) \quad (3)$$

$$(0 < x < a(0)),$$

где  $c$  — скорость распространения волн в системе.

Частный случай этой задачи, когда  $F(x, t) = 0$ , рассматривался ранее в [1], где было получено точное решение для  $a(t) = \alpha t$ ,  $\alpha = \text{const}$ . Ниже для линейного и гиперболического законов движения границы ( $a(t) = a_0(1 + \alpha t)^k$ , где  $\alpha$  и  $a_0$  — постоянные величины, а  $k = \pm 1$ ) находится точное решение неоднородного уравнения (1) в предположении, что  $F(x, t)$ ,  $H_0(x)$  и  $E_0(x)$  — произвольные функции.

Решение уравнения (1) совместно с условиями (2) и (3) целесообразно искать в новых переменных, в которых границы области изменения искомой функции были бы неподвижны. С этой целью одну из новых переменных запишем в виде  $\varrho = L(x/a)$ , где  $L$  — произвольная функция. Вторую переменную выберем таким образом, чтобы уравнение (1) в новых переменных не содержало смешанной производной. Нетрудно

убедиться, что надо положить ее равной  $\tau = N \left\{ 2c^2 \int a \left( \frac{da}{dt} \right)^{-1} dt - x^2 \right\}$ ,

где  $N$  — произвольная функция. Если перейти теперь к новым переменным, то для функции  $S(\rho, \tau) = U(x, t)$  граничные условия запишутся в виде

$$S(0, \tau) = S(1, \tau) = 0. \quad (4)$$

При некоторых законах движения границ можно подобрать  $L$  и  $N$  такие, что в уравнении для  $S(\rho, \tau)$  переменные будут разделяться.

Остановимся далее на рассмотрении двух конкретных примеров.

1. Пусть  $a(t) = a_0(1 + \alpha t)$ , где  $|\alpha a_0/c| < 1$ . Переходя к новым переменным

$$\rho = \frac{x}{a}, \quad \tau = \frac{\beta^2}{a_0^2} \left[ 2c^2 \int a \left( \frac{da}{dt} \right)^{-1} dt - x^2 \right] - 1 = (a^2 - \beta^2 x^2)/a_0^2,$$

где  $\beta = \frac{\alpha a_0}{c}$ , для функции  $S(\rho, \tau)$  получаем неоднородное уравнение

$$(1 - \beta^2 \rho^2)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \rho^2} - 2\beta^2 \rho (1 - \beta^2 \rho^2) \frac{\partial S}{\partial \rho} = 4\beta^2 \tau^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} - \\ - 4\beta^2 \tau \frac{\partial S}{\partial \tau} + g(\rho, \tau), \quad g(\rho, \tau)(a_0^2 \tau)^{-1} = F(x, t). \quad (1.1)$$

Если, используя (4), решение однородного уравнения (1.1) искать в виде  $S_0(\rho, \tau) = \Phi(\rho)T(\tau)$ , то получаем следующую задачу Штурма—Лиувилля:

$$(1 - \beta^2 \rho^2)^2 \Phi'' - 2\beta^2 \rho (1 - \beta^2 \rho^2) \Phi' + \lambda \Phi = 0, \\ \Phi(0) = \Phi(1) = 0. \quad (1.2)$$

Записывая уравнение (1.2) в самосопряженном виде, легко показать, что собственные функции  $\Phi_n(\rho)$ , соответствующие различным собственным значениям  $\lambda_n$ , ортогональны с весом  $(1 - \beta^2 \rho^2)^{-1}$ . При  $\lambda \ll 0$  задача (1.2) имеет тривиальное решение. Для  $\lambda > 0$  получаем следующие собственные значения:

$$\lambda_n = \left( \frac{2\beta n \pi}{\ln \frac{1+\beta}{1-\beta}} \right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.3)$$

и собственные функции

$$\Phi_n(\rho) = \sin \left( \frac{V\lambda_n}{2\beta} \ln \frac{1+\beta\rho}{1-\beta\rho} \right), \quad (1.4)$$

удовлетворяющие соотношению

$$(\Phi_n(\rho) \Phi_m(\rho)) = \\ = \int_0^1 \frac{\Phi_n(\rho) \Phi_m(\rho)}{1 - \beta^2 \rho^2} d\rho = \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ \frac{1}{4\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} & (n = m) \end{cases}. \quad (1.5)$$

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$S(\rho, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(\tau) \Phi_n(\rho). \quad (1.6)$$

Разложим  $g(\rho, \tau)$  в ряд по ортогональным функциям  $\Phi_n(\rho)$ :

$$g(\rho, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \Phi_n(\rho), \quad (1.7)$$

где

$$q_n(\tau) = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_0^1 g(\xi, \tau) \frac{\Phi_n(\xi)}{1 - \beta^2 \xi^2} d\xi.$$

Подставляя (1.6) и (1.7) в (1.1) и используя (4), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{4\beta^2 \tau^2 \Theta_n'' + 4\beta^2 \tau \Theta_n' + \lambda_n \Theta_n + q_n(\tau)\} \Phi_n(\rho) = 0.$$

Так как  $\Phi_n(\rho)$  — ортогональные функции, то

$$4\beta^2 \tau^2 \Theta_n'' + 4\beta^2 \tau \Theta_n' + \lambda_n \Theta_n + q_n(\tau) = 0. \quad (1.8)$$

Получили неоднородное уравнение Эйлера. Его решение имеет вид

$$\Theta_n(\tau) = a_n \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \tau \right) + b_n \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \tau \right) - \frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^{\ln \tau} q_n(e^\xi) \sin \left[ \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} (\ln \tau - \xi) \right] d\xi,$$

где  $a_n$  и  $b_n$  — произвольные постоянные.

Переходя к прежним переменным  $(x, t)$ , находим общее решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2):

$$U(x, t) = p(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \times \\ \times \left\{ a_n \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a^2 - \beta^2 x^2}{a_0^2} \right) + b_n \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a^2 - \beta^2 x^2}{a_0^2} \right) \right\}, \quad (1.9)$$

где

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \times$$

$$\times \int_0^{\ln \frac{a^2 - \beta^2 x^2}{a_0^2}} q_n(e^\xi) \sin \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\beta} \left[ \ln \frac{a^2 - \beta^2 x^2}{a_0^2} - \xi \right] \right\} d\xi.$$

Если в (1.9) перейти к пределу при  $\beta \rightarrow 0$ , то получим решение для системы с неподвижными границами.

Определим теперь коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$ . Для этого найдем выражения  $\left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \right\}_{t=0}$  и  $\left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial x} \right\}_{t=0}$ . Используя (3) и (1.9), имеем:

$$\begin{aligned} H_0 - E_0 &= \frac{1}{c} U_t(x, 0) + U_x(x, 0) = \frac{1}{c} p_t(x, 0) + p_x(x, 0) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2(a_0 + \beta x)} \left\{ a_n \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) + b_n \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) \right\}, \\ -(H_0 + E_0) &= \frac{1}{c} U_t(x, 0) - U_x(x, 0) = \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2(a_0 - \beta x)} \left\{ a_n \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 - \beta x}{a_0} \right) + b_n \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 - \beta x}{a_0} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Функции  $E_0(x)$ ,  $H_0(x)$ ,  $p_t(x, 0)$  и  $p_x(x, 0)$  определены в интервале  $[0, a_0]$ . Если продолжить  $E_0(x)$  и  $p_t(x, 0)$  нечетным образом, а  $H_0(x)$  и  $p_x(x, 0)$  — четным образом на интервал  $[-a_0, a_0]$ , то второе выражение будет являться следствием первого. И так как функции  $\cos \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right)$  и  $\sin \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right)$  ортогональны в интервале  $[-a_0, a_0]$  с весом  $(a_0 + \beta x)^{-1}$ , то коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n\pi} \int_{-a_0}^{a_0} \left\{ H_0(x) - E_0(x) - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right\} \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{n\pi} \int_{-a_0}^{a_0} \left\{ H_0(x) - E_0(x) - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right\} \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\beta} \ln \frac{a_0 + \beta x}{a_0} \right) dx. \end{aligned}$$

2. Пусть  $a = a_0(1 + \alpha t)^{-1}$ , где  $0 < \alpha < 1$ . В этом случае новые переменные удобно выбрать в виде

$$\rho = \frac{x}{a}, \quad \tau = -\frac{1}{a_0^2} \left[ 2c^2 \int a \left( \frac{da}{dt} \right)^{-1} dt - x^2 \right] - \frac{1}{\beta^2} = \frac{a_0^2}{\beta^2 a^2} + \frac{x^2}{a_0^2},$$

тогда для  $S(\rho, \tau)$  получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \rho^2} - \frac{4}{\beta^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \tau^2} = g(\rho, \tau), \quad (2.1)$$

где

$$g(\rho, \tau) = [a^{-2} - \beta^2 x^2 a_0^{-4}]^{-1} F(x, t).$$

Решая уравнение (2.1) совместно с (4) и переходя затем к старым переменным, найдем, что

$$U(x, t) = p(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{a} \left\{ a_n \cos \left[ \frac{\beta n\pi}{2} \left( \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{a_0^2}{\beta^2 a^2} \right) \right] \right\} + \quad (2.2)$$

$$+ b_n \sin \left[ \frac{\beta n \pi}{2} \left( \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{a_0^2}{\beta^2 a^2} \right) \right] \Bigg],$$

где

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\beta n \pi} \sin \frac{n \pi x}{a} \int_0^{\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{a_0^2}{\beta^2 a^2}} q_n(\xi) \sin \left[ \frac{\beta n \pi}{2} \left( \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{a_0^2}{\beta^2 a^2} - \xi \right) \right] d\xi,$$

$$q_n(\xi) = \int_0^1 g(\rho, \xi) \Phi_n(\rho) d\rho,$$

$$a_n = \frac{1}{n \pi} \int_{-a_0}^{a_0} \left\{ H_0 - E_0 - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right\} \cos n \pi \left[ \frac{x}{a_0} + \frac{\beta}{2} \left( \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \right] dx,$$

$$b_n = \frac{1}{n \pi} \int_{-a_0}^{a_0} \left\{ H_0 - E_0 - \frac{1}{c} p_t(x, 0) - p_x(x, 0) \right\} \sin n \pi \left[ \frac{x}{a_0} + \frac{\beta}{2} \left( \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \right] dx.$$

3. В качестве примера рассмотрим задачу о возбуждении расширяющегося резонатора с источником, расположенным на подвижной границе. Источник выберем такой, чтобы он возбуждал колебания в основном одной, например, первой, моды резонатора. В частности, для резонатора, размеры которого изменяются по линейному закону, им может быть следующий источник напряженности электрического поля:

$$E|_{x=0} = -\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{x=0} = \frac{A_0}{a} \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\beta} \ln \frac{a}{a_0} \right).$$

Для дальнейшего удобства перепишем граничные условия в виде

$$U|_{x=0} = -\frac{A_0}{\sqrt{\lambda_1}} \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\beta} \ln \frac{a}{a_0} \right).$$

Если ввести новую искомую функцию

$$W(x, t) = U(x, t) - V(x, t),$$

где

$$V(x, t) = -\frac{A_0}{\sqrt{\lambda_1}} \sin \left( \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\beta} \ln \frac{a^2 - \beta^2 x^2}{a_0^2} \right) \left[ 1 + \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda_1}}{2\beta} \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \right],$$

$$\lambda_1 = \left( \frac{2\beta\pi}{\ln \frac{1+\beta}{1-\beta}} \right)^2,$$

то задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = F(x, t), \quad F(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

с однородными граничными условиями

$$W|_{x=0} = W|_{x=a(t)} = 0,$$

Таблица 1

Закон изменения размеров резонатора		Источник на границе	Вынужденные решения для поля
$a = a_0 = \text{const}$	$E_0 = A_0 \cos \frac{d_1}{a_0} ct$ $A_0 = \text{const}, d_1 = \pi$		$E \approx \frac{A_0 d_1 c}{a_0} t \left\{ \cos \frac{d_1}{a_0} (ct - x) - \cos \frac{d_1}{a_0} (ct + x) \right\} - A_0 \cos \frac{d_1 c}{a_0} t \left[ 1 + \cos \frac{d_1 x}{a_0} \right]$
$a = a_0(1 + \alpha t)$ $a_0 = \text{const}$	$E_0 = A_0 \frac{\cos [d_1 \ln(1 + \alpha t)]}{1 + \alpha t}$ $A_0 = \text{const}$ $d_1 = \pi \left( \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{-1}$ $\beta = \alpha a_0/c$		$E \approx A_0 d_1 \ln \left( (1 + \alpha t)^2 - \beta^2 \frac{x^2}{a_0^2} \right) \left\{ \frac{\cos [d_1 \ln(1 + \alpha t) - \beta x/a_0]}{1 + \alpha t - \beta x/a_0} - \frac{\cos [d_1 \ln(1 + \alpha t) + \beta x/a_0]}{1 + \alpha t + \beta x/a_0} \right\} -$ $- \frac{A_0}{2 d_1 \beta} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( 1 + \cos d_1 \ln \frac{a + \beta x}{a - \beta x} \right) \sin \left( d_1 \ln \frac{a^2 - \beta^2 x^2}{a_0^2} \right) \right]$
$a = \frac{a_0}{1 + \alpha t}$ $a_0 = \text{const}$	$E_0 = A_0(1 + \alpha t) \cos [d_1(1 + \alpha t)^2]$ $A_0 = \text{const}$ $d_1 = \pi$ $\alpha = \text{const} > 0$		$E \approx A_0 d_1 \left( \frac{(1 + \alpha t)^2 + \beta^2 \frac{x^2}{a_0^2}}{a_0} \right) \frac{\cos d_1 \left( \beta \frac{x^2}{a_0^2} + (1 + \alpha t)^2 - \frac{x}{a_0} (1 + \alpha t) \right)}{\left( 1 + \alpha t - \beta \frac{x}{a_0} \right)^{-1}} -$ $- \frac{\cos d_1 \left( \beta \frac{x^2}{a_0^2} + (1 + \alpha t)^2 - \frac{x}{a_0} (1 + \alpha t) \right)}{\left( 1 + \alpha t + \beta \frac{x}{a_0} \right)^{-1}} \left\{ - \frac{A_0 \beta}{a_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( 1 + \cos \frac{d_1 x}{a_0} \right) \sin \frac{d_1}{2} \left( \beta \frac{x^2}{a_0^2} - \frac{a_0^2}{\beta a^2} \right) \right] \right\}$

т. е. будет совпадать с (1—2). Следовательно, для нахождения поля в рассматриваемом резонаторе можно воспользоваться решением задачи (1—2). При этом решение запишется в виде

$$U(x, t) = p(x, t) + V(x, t).$$

Нетрудно убедиться, что для расширяющегося резонатора с течением времени энергия колебаний на всех модах станет намного меньше, чем энергия колебаний на первой mode.

В табл. 1 приведены решения для полей в резонаторах, размеры которых изменяются по линейному и гиперболическому законам. Выражения в фигурных скобках описывают собственные колебания резонаторов на первой mode. Здесь же для сравнения приводится решение и для резонатора с неподвижными границами. Из сравнения видно, что при возбуждении колебаний на собственной mode резонатора скорость их нарастания зависит от закона движения границ. Так, например, в резонаторе с неподвижными границами они нарастают линейно во времени, а в равномерно расширяющемся резонаторе — медленнее, по логарифмическому закону.

На основании приведенных примеров можно заключить об имеющихся возможностях использования резонаторов с подвижными границами в качестве оптимальных фильтров. Представляется также интересным их использование для создания генераторов сложных сигналов.

В заключение автор выражает благодарность М. А. Миллеру за постоянное внимание к работе и полезные советы, а также В. Н. Кошелеву за ряд важных замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. N. L. Balazs, J. Mathem. Analysis Appl., 3, 3 (1961).
2. О. А. Стеценко, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 6, № 6, 695 (1963).
3. А. И. Весницкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 935 (1969).
4. В. И. Коган, В. М. Галицкий, Сборник задач по квантовой механике, Гостехиздат, М., 1956, стр. 190.
5. Г. А. Гринберг, ПММ, 33, вып. 2, 269 (1969).
6. Г. А. Гринберг, В. А. Косс, ПММ, 33, вып. 4, 753 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
21 января 1971 г.

#### THE SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL NONUNIFORM WAVE EQUATION WITH CONDITIONS AT MOVABLE BOUNDARIES

A. I. Vesnitskii

An exact solution of the one-dimensional nonuniform wave equation at the given initial and boundary conditions is found for the cases when the distance between the boundaries changes in time according to the linear and hyperbolic laws. The solutions obtained are used to determine the fields in resonators excited by sources situated at the boundaries.

УДК 621.372. 414.2

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО РЕЗОНАТОРА, ИЗМЕНЯЮЩЕГО ВО ВРЕМЕНИ СВОИ РАЗМЕРЫ

*A. И. Весницкий*

Рассматривается вопрос об определении закона изменения размеров резонатора по заданной его собственной моде. Показано, что задача сводится к исследованию алгебраического или трансцендентного уравнения, допускающего во многих случаях точные решения. На основе полученных результатов можно, очевидно, получить конструктивный способ решения прямых задач. В качестве примера показано, как, используя решения обратной задачи, можно сконструировать решение для резонатора, одна из стенок которого колеблется по периодическому закону.

В [1-13] рассматривалась задача отыскания полей в системах, размеры которых изменяются по заданному закону. Но возможна иная, обратная постановка задачи, когда заданным является не закон изменения размеров резонатора, а собственная мода, и требуется найти соответствующий закон движения границ системы\*. Настоящая работа посвящена решению последней задачи применительно к одномерному резонатору с подвижной стенкой.

Рассмотрим задачу об электромагнитных колебаниях в одномерном полом резонаторе, образованном двумя плоскими импедансными стенками, расстояние между которыми изменяется во времени ( $E = Z_1 H|_{x=0}$ ,

$E = \frac{\dot{a} + cZ_2}{c + \dot{a}Z_2} \Big|_{x=a(t)}$ ). Задача, как известно, сводится к односкалярной, если ввести следующим образом волновую функцию  $U(x, t)$ :

$$E = -\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad H = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $E$  и  $H$  — соответственно электрическое и магнитное поля, а  $c$  — скорость света.

Границные и начальные условия, в силу (1), запишутся в виде\*\*

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} - Z_1 \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = \left( 1 + Z_2 \frac{\dot{a}}{c} \right) \frac{\partial U}{\partial t} + (\dot{a} + cZ_2) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=a(t)} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = -cE_0(x), \quad \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{t=0} = H_0(x). \quad (4)$$

\* Интересно отметить, что в какой-то мере аналогичный подход используется и для параболических уравнений с условиями на подвижных границах (см., например, [4-16]).

\*\* Рассматривается вариант граничных условий, который приводит к однозначным решениям.

При этом будем полагать, что  $Z_1$  и  $Z_2$  не зависят от частоты\*.

Решение (2) представим как сумму двух бегущих волн:

$$U(x, t) = f_+(t + x/c) + f_-(t - x/c). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (3), находим, что

$$(1 - Z_1)f'_+(t) + (1 + Z_1)f'_-(t) = 0,$$

$$(1 + Z_2)(1 + a/c)f'_+(t + a/c) + (1 - Z_2)(1 - a/c)f'_-(t - a/c) = 0.$$

Если  $Z_1$  и  $Z_2$  — действительные величины, не зависящие от времени, то, интегрируя последние выражения, получаем

$$f_-(t) + \Gamma_1 f_+(t) = C_1,$$

$$f_+(t + a/c) + \Gamma_2 f_-(t - a/c) = C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования, а  $\Gamma_1 = e^{\delta_1} = \frac{1 - Z_1}{1 + Z_1}$  и  $\Gamma_2 = e^{\delta_2} = \frac{1 - Z_2}{1 + Z_2}$  имеют, очевидно, смысл коэффициентов отражения. Отсюда следует, что

$$f_-(t) = -\Gamma_1 f_+(t) + C_1, \quad (6)$$

а  $f_+(z)$  удовлетворяет уравнению

$$f_+(t + a/c) - \Gamma_1 \Gamma_2 f_+(t - a/c) = \gamma^{**}. \quad (7)$$

Здесь  $\gamma = C_2 - \Gamma_2 C_1$ . Итак, задача свелась к функциональному уравнению с запаздывающим аргументом.

В тех случаях, когда  $Z_1 = Z_2 = 0$  или  $Z_1 \rightarrow \infty$  и  $Z_2 \rightarrow \infty$ , а следовательно,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \pm 1$ , решение уравнения (7) целесообразно искать в виде

$$f_+(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \quad (8)$$

где

$$f_n(z) = a_n \sin \frac{2n\pi g(z)}{\gamma} + b_n \cos \frac{2n\pi g(z)}{\gamma},$$

$a_n$  и  $b_n$  — постоянные, определяемые из начальных условий,  $g(z)$  — новая искомая функция. Подставляя (8) в (7), находим, что

$$g(t + a/c) - g(t - a/c) = \gamma. \quad (7a)$$

При  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \pm 1$  уравнение (7a) совпадает с уравнением (7). Так как функции  $f_n(z)$  представляют собой полный ортогональный набор на некотором интервале [12], то достаточно найти только одно частное решение уравнения (7) (оно же будет являться и решением (7a)), чтобы получить его общее решение. Другими словами, любое частное решение (7a) производит общее и поэтому является как бы производящей функцией.

\* Такое предположение может быть справедливо только для достаточно узкого диапазона частот  $\Delta\omega$ , для которого  $\frac{\partial Z}{\partial \omega} \Delta\omega \ll 1$ , кроме предельных случаев, когда  $Z = 0$  и  $Z = \infty$ .

\*\* Уравнение (7) имеет ясный физический смысл. Здесь коэффициент  $\Gamma_1 \Gamma_2$  учитывает отражение волны от обеих границ, а  $\gamma$  — коэффициент согласования, определяемый из начальных условий.

Если же  $0 < |Z_1| < \infty$  или  $0 < |Z_2| < \infty$ , то задачу тоже можно свести к отысканию одного частного решения уравнения (7а)\*. Нетрудно убедиться, что при этом

$$f_+(z) = \gamma (1 - \Gamma_1 \Gamma_2)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(z), \quad (9)$$

$$\tilde{f}_n(z) = \exp \left[ \frac{\delta_1 + \delta_2}{\gamma} g(z) \right] \left[ a_n \sin \frac{2n\pi g(z)}{\gamma} + b_n \cos \frac{2n\pi g(z)}{\gamma} \right].$$

До сих пор в литературе рассматривались только такие случаи, когда закон движения границы  $a(t)$  известен и требуется узнать, как будут вести себя поля в системе. Такая задача, очевидно, может быть сведена к решению функционального уравнения (7а). Однако, как уже говорилось выше, возможна и другая, обратная постановка задачи, когда требуется найти закон изменения размеров резонатора, обеспечивающий заданную зависимость фаз распространяющихся в резонаторе волн собственной моды соответственно от  $t + x/c$  и  $t - x/c$ , другими словами, заданную зависимость  $g(z)$ . Обратная задача, по-видимому, решается намного проще, чем прямая, так как соотношение (7а) относительно  $a(t)$  представляет собой алгебраическое или трансцендентное уравнение. Решение последнего в очень многих случаях удается получить в аналитическом виде. Имея же достаточно большой набор точных решений обратной задачи, мы можем сконструировать решения и прямых задач для различных законов движения границы  $a(t)$ .

Следует отметить, что обратная задача не всегда имеет однозначное решение, т. е. функция  $g(z)$  может быть одной и той же для различных законов  $a(t)$ . В качестве примера рассмотрим случай, когда  $g(z) = pz^3 + qz^2 + r$ , где  $p, q$  и  $r$ —постоянные величины. Подставляя  $g(z)$  в (7а), получаем следующее уравнение для определения  $a(t)$ :

$$\left( \frac{a}{c} \right)^3 + \left( 3t^2 + 2\frac{q}{p}t + \frac{r}{p} \right) \frac{a}{c} - \frac{\gamma}{2p} = 0.$$

Если  $3t^2 + 2(q/p)t + (r/p) \leq -3(\gamma/4p)^{2/3}$ , то все три решения будут действительными и, следовательно, для трех различных резонаторов будет одинаковый набор собственных мод.

Предположим, что нам известны функция  $g(z)$  и соответствующая ей функция  $a(t)$ . Тогда, чтобы решить задачу с начальными условиями (4), необходимо найти формулы для определения  $a_n$  и  $b_n$ . Из (4), (5), (6) и (9) можно получить выражения через  $g(z)$  для  $\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \right\}_{t=0}$  и  $\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \right\}_{t=0}$ . Интегрируя последнее по  $x$ , имеем

$$\int \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \right\}_{t=0} dx = 2 \exp \left[ \frac{\delta_1 + \delta_2}{\gamma} g \left( \frac{x}{c} \right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \sin \frac{2n\pi g(x/c)}{\gamma} + b_n \cos \frac{2n\pi g(x/c)}{\gamma} \right], \quad (10)$$

\* К исследованию этого же уравнения можно, в принципе, свести и задачу нахождения полей в случае, когда внутри резонатора и на его границах имеются произвольно заданные источники.

$$\int \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \right\}_{t=0} dx = -2 \Gamma_1 \exp \left[ \frac{\delta_1 + \delta_2}{\gamma} g \left( -\frac{x}{c} \right) \right] \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \sin \frac{2n\pi g(-x/c)}{\gamma} + b_n \cos \frac{2n\pi g(-x/c)}{\gamma} \right].$$

Если импеданс на неподвижной границе  $Z_1$  равен нулю, то коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  найти несложно. Для этого надо продлить  $\left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \right\}_{t=0}$  и  $\left\{ \frac{\partial U}{\partial t} \right\}_{t=0}$  на интервал  $[-a(0), 0]$  соответственно четным и нечетным образом. Выражения (10) станут тогда следствием друг друга (одно получается из другого заменой  $x$  на  $-x$ ). Но функции  $\sin \frac{2n\pi g(x/c)}{\gamma}$  и  $\cos \frac{2n\pi g(x/c)}{\gamma}$  ортогональны в интервале  $[-a(0), a(0)]$  с весом  $c^{-1}g'(x/c)$ .

Учитывая сказанное, из (10) находим, что

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-a(0)}^{a(0)} g'(\zeta) \exp(-\delta_2 g(\zeta)/\gamma) \left[ \int \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \right\}_{t=0} dx \right]_{x=c\zeta} \sin \frac{2n\pi g(\zeta)}{\gamma} d\zeta, \\ b_n = \frac{1}{2} \int_{-a(0)}^{a(0)} g'(\zeta) \exp(-\delta_2 g(\zeta)/\gamma) \left[ \int \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial U}{\partial t} \right\}_{t=0} dx \right]_{x=c\zeta} \cos \frac{2n\pi g(\zeta)}{\gamma} d\zeta.$$
(11)

Покажем теперь, как с помощью описанного выше метода можно сконструировать решение для одномерного резонатора, одна из стенок которого движется по периодическому закону.

1. Если период колебания границы много больше времени прохождения света через резонатор, то распространяющиеся в нем волны, очевидно, будут промодулированы по фазе с частотой колебания границы [8]. Поэтому для резонатора, изменяющего свой размер с частотой  $\Omega \ll \pi c/a(0)$ , функцию  $g(z)$  следует искать в виде

$$g(z) = \frac{\gamma}{2} [\omega z + \tilde{g}(z)],$$
(12)

где  $\tilde{g}(z)$  — периодическая функция с периодом  $2\pi/\Omega$ ,  $\omega = \pi c/a(0)$  — собственная частота резонатора с неподвижными границами.

Положим для простоты  $\tilde{g}(z) = m \sin \Omega t$  ( $m = \text{const}$ ). Тогда, подставляя (12) в (7a), получаем для отыскания закона изменения  $a(t)$  следующее трансцендентное уравнение:

$$\sin \varphi = \frac{1 - (\omega/\Omega) \varphi}{m \cos \Omega t}, \quad \varphi = \frac{\Omega}{c} a(t).$$
(13)

Его решением, как и следовало ожидать, являются периодические функции с периодом  $T = 2\pi/\Omega$ . Заметим, что некоторым значениям  $\omega/\Omega$  и  $t$  соответствует движение границы, превышающее скорость света. Однако в этих случаях уравнение (13) имеет неоднозначные решения, что вполне естественно, так как при  $\left| \frac{da}{dt} \right| \geq c$  для однозначного решения зада-

чи достаточно задать только одни начальные условия. В области же значений  $\omega/\Omega$  и  $m$ , где  $\left|\frac{da}{dt}\right| < c$ , уравнение (13) однозначно определяет функцию  $a(t)$ .

Из рис. 1, где приведены зависимости  $a$  от  $t$  для различных значений  $m$  при  $\omega/\Omega = 1$ , видно, что закон движения границы близок к гармоническому. Это и не удивительно, если напомнить, что для  $a(t) = c(\omega + m\Omega \cos \Omega t)$  соответствующая функция  $g(z)$  в нулевом приближении (см. [12]) равна  $\omega z + m \sin \Omega z$ , т. е. совпадает с заданной. Аппрок-

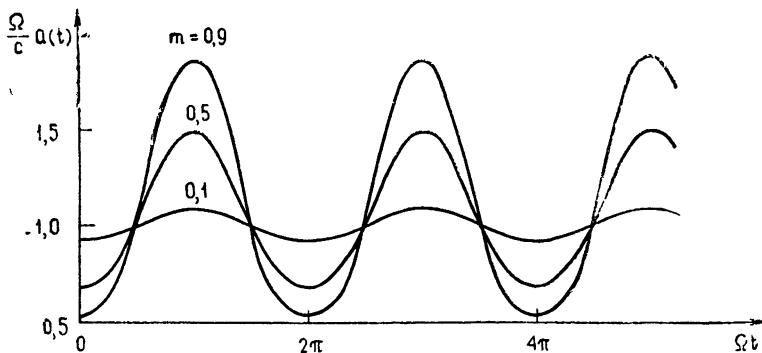


Рис. 1.

симация же закона движения границы, определяемого уравнением (13), гармонической функцией, будет, очевидно, тем точнее, чем меньше  $m$ .

Полагая для простоты  $Z_1 = Z_2 = 0$  и  $b_n = 0$ , из (1), (5), (6), (8) и (12) находим, что

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{n\pi a_n}{c} \left\{ \left[ \omega + m\Omega \cos \Omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \right] \cos n\pi \left[ \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) + m \sin \Omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \omega + m\Omega \cos \Omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \cos n\pi \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + m \sin \Omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \right\}, \\ H_n &= \frac{n\pi a_n}{c} \left\{ \left[ \omega + m\Omega \cos \Omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \right] \cos n\pi \left[ \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) + m \sin \Omega \left( t + \frac{x}{c} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \omega + m\Omega \cos \Omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \cos n\pi \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + m \sin \Omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, собственной моде соответствуют две волны, бегущие в различных направлениях. Каждая из них промодулирована как по частоте, так и по амплитуде. Период модуляции равен периоду колебания стенки резонатора, а глубина модуляции зависит от  $m$ . Интересно отметить, что, когда  $\pi\omega/\Omega$  равно отношению целых чисел, процессы в системе будут циклически повторяться. Например, при  $\pi\omega/\Omega = 2$  период цикла будет совпадать с периодом изменения размеров резонатора.

Уяснив, при каком законе движения границы реализуется выбранная зависимость  $g(z)$ , можно найти решение и прямой задачи для соответствующих  $a(t)$ . Следует, однако, иметь в виду, что для произвольно заданных в начальный момент полей в системе задача будет корректна лишь при условии  $\omega + m\Omega \cos(x/c) > 0$ . В противном случае нельзя гарантировать полноту набора собственных мод резонатора [12].

2. Рассмотрим теперь какую-либо функцию  $g(z)$ , которая соответствовала бы параметрической генерации импульсов в резонаторе. Повидимому, для этого необходимо, чтобы  $g'(z)$  изменялась в неограниченных пределах. С другой стороны, нас интересуют только такие  $g(z)$ , при которых для  $a(t)$  получаются периодические решения. Указанным требованиям удовлетворяет, например, следующая функция:

$$g(z) = \frac{\alpha\gamma}{2} \operatorname{tg} \Omega z, \quad (14)$$

где  $\alpha$  и  $\Omega$  — постоянные величины. Подставляя (14) в (7а), получаем следующее уравнение для определения  $a(t)$ :

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\Omega a}{c} + \alpha \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \Omega t}{\operatorname{tg}^2 \Omega t} \operatorname{tg} \frac{\Omega a}{c} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \Omega t} = 0. \quad (15)$$

Отсюда находим, что

$$a_{\pm} = \frac{c}{\Omega} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\pm \sqrt{\alpha^2 + 2(2 + \alpha^2) \operatorname{tg}^2 \Omega t + \alpha^2 \operatorname{tg}^4 \Omega t} - \alpha(1 + \operatorname{tg}^2 \Omega t)}{2 \operatorname{tg}^2 \Omega t} \right\}. \quad (16)$$

Если  $\alpha$  конечно, то выражение в фигурной скобке будет ограничено при любых  $t$ , и, следовательно, размеры резонатора для рассматриваемой зависимости  $g(z)$  должны изменяться только периодически с периодом  $T = \pi/\Omega$ . Причем решений получается бесчисленное множество. Так, при  $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \frac{c}{\Omega} \pi k &\leq a_+(t) \leq \frac{c}{\Omega} (\pi k + \operatorname{Arctg} 1/\alpha), \\ \frac{c}{\Omega} \left( \pi k + \frac{\pi}{2} \right) &\leq a_-(t) \leq \frac{c}{\Omega} \left( \pi k + \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctg} \alpha \right) \\ (k &= 0, 1, 2, 3, 4, \dots), \end{aligned} \quad (17a)$$

а при

$$\begin{aligned} \frac{c}{\Omega} (\pi k - \operatorname{Arctg} 1/\alpha) &\leq a_+(t) \leq \frac{c}{\Omega} \pi k, \\ \frac{c}{\Omega} \left( \pi k + \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} \alpha \right) &\leq a_-(t) \leq \frac{c}{\Omega} \left( \pi k + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (17b)$$

Из (17а) видно, что за время прохождения сигналом удвоенного минимального размера резонатора подвижная граница последнего успеет совершить целое число колебаний, т. е.

$$\frac{2a_{+\min}}{c} \frac{\Omega}{\pi} = 2k \quad \text{и} \quad \frac{2a_{-\min}}{c} \frac{\Omega}{\pi} = 2k + 1. \quad (18a)$$

В случае же (17б) выполняются следующие условия\*:

$$\frac{2a_{+\max}}{c} \frac{\Omega}{\pi} = 2k \quad \text{и} \quad \frac{2a_{-\max}}{c} \frac{\Omega}{\pi} = 2k + 1. \quad (18b)$$

\* Нетрудно убедиться, что соотношения (18а) и (18б) будут такими же и для  $g(z) = \alpha(\operatorname{tg} \Omega z)^{\gamma}$ , где  $\alpha$ ,  $\Omega$  и  $\gamma$  — произвольные постоянные.

Отсюда можно сделать вывод о том, что в резонаторе, размеры которого изменяются по какому-либо из найденных здесь законов, при отсутствии в нем потерь, возможна генерация импульсов. Действительно, для непрерывного во времени нарастания полей необходимо, чтобы импульс отражался от колеблющейся границы только в те моменты времени, когда она движется ему навстречу. Следовательно, условия генерации записутся в виде

$$\frac{2a_{\min}}{c} \leq m\pi \leq \frac{2a_{\max}}{c} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (19)$$

Сравнивая (18а) и (18б) с (19), замечаем, что рассматриваемый случай соответствует границе зоны генерации.

В связи с этим представляют интерес рассмотреть процесс формирования импульсов из произвольно заданного в начальный момент возмущения. Однако сделать это трудно по той причине, что не ясно, будет ли набор собственных мод ортогональным и полным, если весовая функция  $g'(x/c)$  терпит разрыв в интервале  $[-a(0), a(0)]$ . Поэтому ограничимся здесь рассмотрением процессов на плоскости  $(x, ct)$ . При этом  $|\alpha|$  выберем достаточно большим, чтобы скорость движения границы не превышала скорости света (из (17) следует, что, когда  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\left| \frac{da}{dt} \right| \rightarrow \infty$ ).

На рис. 2 приведена зависимость  $a_+(t)$  для  $\alpha = 1$  и  $k=1$ . Здесь же графически показан процесс формирования импульсов. Дело в том, что поля, существовавшие в резонаторе в начальный момент времени, можно всегда представить в виде двух волн, бегущих в разных направлениях. Следуя [8]\*, каждую из них разобъем условно на маленькие отрезки, т. е. на ряд коротких импульсов. Наблюдая за их поведением на

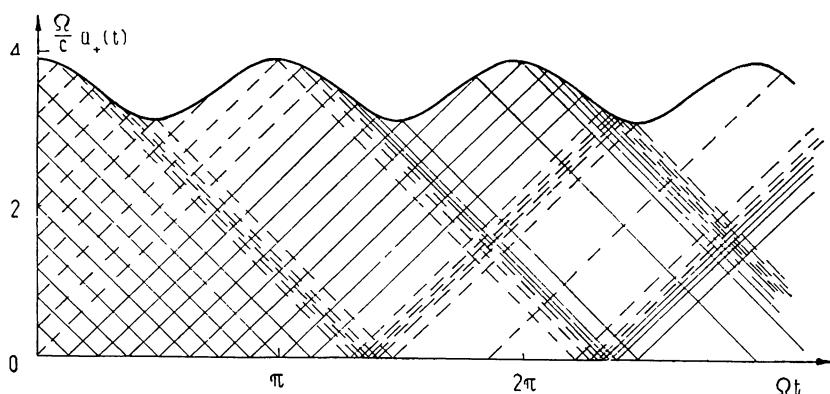


Рис. 2.

плоскости  $(\Omega x/c, \Omega t)$ , замечаем, что со временем происходит группировка импульсов в пространстве (они будут распространяться вдоль характеристик и при отражении от подвижной границы изменять свою длительность и энергию). Процесс группирования будет длиться бесконечно долго, если считать систему линейной, а его скорость будет, очевидно, зависеть от амплитуды колебания границы. Из рисунка видно, что в пределе, при  $t \rightarrow \infty$ , в резонаторе должны сформироваться отдельные импульсы. Количество последних зависит от соотношения между

\* Излагаемый здесь графический метод по своей идее тождествен рассмотренному в [8] механизму авторегулировки фазы взаимодействия.

временем прохождения света через резонатор и периодом колебания его размеров, т. е. равно  $k + 1^*$ .

Форма генерируемых импульсов может быть самой различной. При соответствующих начальных условиях это могут быть видеоимпульсы с чередующейся полярностью. Например, собственные моды резонатора представляют собой импульсы, мгновенная частота заполнения которых изменяется в пределах от 0 до  $\infty$ , а форма огибающей определяется функцией  $\cos^{-2} \Omega z$ .

В заключение следует отметить, что для волн, распространяющихся в резонаторе без потерь, законы изменения амплитуд полей  $E$  и  $H$  совпадают с законами изменения их мгновенных частот. Следовательно, количество квантов в таких системах остается неизменным при любых скоростях движения границ  $\left( \left| \frac{da}{dt} \right| < c \right)^{**}$ . В то же время известно [17, 18],

что в системах с неподвижными границами, заполненных параметрическими средами, количество квантов при некоторых условиях тоже может сохраняться. Отсюда можно заключить, что в последних возможны аналогичные явления. Так, например, рассмотренным выше явлениям в резонаторе с колеблющимися границами соответствует генерация импульсов в отрезке длинной линии, параметры которой изменяются по закону стоячей волны [19].

Автор очень благодарен М. А. Миллеру, С. И. Аверкову и Л. А. Островскому за внимание к работе и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т 2, ИЛ, М., 1960.
2. В. И. Курилко, ЖТФ, 30, № 5, 504 (1960).
3. N. L. Balazs, J. Math. Analys. Appl., 3, 3 (1961).
4. О. А. Степенко, Изв. высш. уч. зав — Радиотехника, 6, № 6, 695 (1963).
5. О. А. Степенко, Изв. высш. уч. зав — Радиотехника, 6, № 6, 701 (1963).
6. О. А. Степенко, Изв. высш. уч. зав — Радиотехника, 7, № 1, 71 (1967).
7. Р. И. Баранов, Ю. М. Широков, ЖЭТФ, 53, вып. 6 (12), 2121 (1967).
8. В. Н. Красильников, А. М. Панкратов, сб. Проблемы дифракции и распространения волн, 8, 59 (1968).
9. В. Н. Красильников, сб Проблемы дифракции и распространения волн, 8, 43 (1968).
10. А. И. Весницкий, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 6, 935 (1969).
11. А. И. Весницкий, А. В. Костров, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 5, 754 (1971).
12. А. И. Весницкий, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 9, 1432 (1971).
13. А. И. Весницкий, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 10, 1531 (1971).
14. Г. А. Мартынов, ЖЭТФ, 25, вып. 10, 1754 (1955).
15. Г. А. Мартынов, ДАН СССР, 109, № 2, 279 (1956).
16. Г. А. Мартынов, ЖТФ, 309, вып. 2, 239 (1960).
17. L. A. Ostrovskii, N. S. Stepanov, Selected Papers from the URSI Symp. on electromagn. waves, Steresa, Italy, 1968; Alta Frequenza, 38, No. Speciale. 204 (1969).
18. Л. А. Островский, Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 14, № 4, 489 (1971).
19. А. И. Весницкий, Л. А. Островский, В. В. Папко, В. Н. Шабанов, Письма в ЖЭТФ, 9, вып. 5 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
11 марта 1971 г

\* Заметим, что графический метод позволяет качественно рассмотреть процесс формирования импульсов и для многих других случаев, например, когда колеблются обе границы или когда частота колебания промодулирована.

\*\* Для медленного движения границы такой вывод следует из результатов работы [12], где показано, что при  $\left| \frac{da}{dt} \right| \ll c$  полная энергия в резонаторе пропорциональна мгновенной частоте распространяющихся в нем волн.

**THE REVERSE PROBLEM FOR UNIFORM RESONATOR WITH SIZES  
CHANGING IN TIME***A. I. Vesnitskii*

The determination of the law of changing the resonator sizes according to its given self mode is considered. The problem is shown to be reduced to investigation of algebraic or transcendental equation admitting in many cases exact solutions. Using the results obtained one may derive a constructive method of solving direct problems. As an example, it is shown the possibility of deriving the solution for the resonator one of the walls of which oscillates according to the periodic law.

---

УДК 538.566 · 621.371

## ДИФРАКЦИЯ НА ЦИЛИНДРЕ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

*Б. М. Петров, В. В. Чечетка*

Рассмотрена задача дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечном цилиндре с импедансными граничными условиями. Предполагается, что поверхностный импеданс является периодической функцией времени. Задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно временных гармоник рассеянного поля. Приводятся результаты численных расчетов и эксперимента.

Часто электродинамические параметры поверхности, на которой происходит дифракция электромагнитного поля, меняются во времени [1, 2]. Изменение параметров поверхности сопровождается изменением частотного спектра рассеянного поля [2]. Если отражающую поверхность с нестационарными электродинамическими параметрами охарактеризовать поверхностным импедансом, изменяющимся во времени, то задача спектрального анализа поля рассеяния может быть решена.

1. Пусть на бесконечный круговой цилиндр в свободном пространстве падает плоская электромагнитная волна. На поверхности цилиндра удовлетворяются импедансные граничные условия

$$[n E] = -Z[n[n H]], \quad (1)$$

где  $E = E^s + E^n$ ,  $H = H^s + H^n$  — полные электрическое и магнитное поля;  $E^s$ ,  $H^s$ ,  $E^n$ ,  $H^n$  — соответственно рассеянное и падающее поля;  $n$  — внешняя относительно рассматриваемой области нормаль;  $Z$  — однородный поверхностный импеданс цилиндра.

Допустим, что поверхностный импеданс  $Z(t)$  периодически меняется во времени, причем частота этого изменения  $\Omega$  значительно меньше частоты падающей волны  $E^n$ ,  $H^n$ . При этом условии считаем выполняющимся с большой точностью соотношение (1). Требуется найти рассеянное цилиндром поле  $E^s$ ,  $H^s$ , удовлетворяющее уравнениям Максвелла, граничному условию (1) и условию излучения.

2. В цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , совмещенной с осью цилиндра, рассмотрим случай TE поляризации электромагнитного поля.

Выражение для магнитного поля падающей волны имеет вид

$$\begin{aligned} H^n &= i_z H_z^n = i_z H_0 \exp(i \omega_c t) \exp[i k_0 r \cos(\varphi - \varphi_0)] = \\ &= i_z H_0 \exp(i \omega_c t) \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon_v J_v(k_0 r) \cos v(\varphi - \varphi_0), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $H_0$ ,  $\omega_c$  — амплитуда и частота падающей волны,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\varphi_0$  — угол падения,  $i_z$  — орт цилиндрической системы координат,  $J_v(x)$  — функция Бесселя,  $\varepsilon_v$  — символ Неймана.

Из граничного условия (1) получаем

$$E_\varphi^s + E_\varphi^n = -Z_{TE}(H_z^s + H_z^n) \quad \text{при } r = a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (3)$$

где  $Z_{TE}$ —поверхностный импеданс цилиндра для случая волны типа TE.

Так как поверхностный импеданс  $Z_{TE}$  является периодической функцией времени, то рассеянное поле, удовлетворяющее условию (3), должно иметь дискретный частотный спектр, т. е. в любой точке пространства  $P(r, \varphi)$  его можно представить в виде ряда Фурье

$$H^s = i_z H_z^s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m^s(P) \exp(i \omega_m t), \quad E^s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m^s(P) \exp(i \omega_m t), \quad (4)$$

где  $\omega_m = \omega_c + m \Omega$ ,  $E_m^s$  и  $H_m^s$  — временные гармоники рассеянного поля, удовлетворяющие однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} H_m^s = i \omega_m \epsilon_0 E_m^s, \quad \operatorname{rot} E_m^s = -i \omega_m \mu_0 H_m^s. \quad (5)$$

Решение (5) для компоненты  $H_{mz}^s$  при граничном условии (3) и условии излучения ищем обычным образом [3]. В результате получаем

$$H_{mz}^s = \sum_{v=0}^{\infty} a_{v,m} H_v^{(2)}(k_m r) \cos(v(\varphi - \varphi_0)), \quad (6)$$

где  $a_{v,m}$  — коэффициенты, определяемые из граничного условия (3),  $k_m = \omega_m/c$  — волновое число,  $H_v^{(2)}(x)$  — функция Ганкеля второго рода.

Для определения  $a_{v,m}$  преобразуем (3) так, чтобы оно связывало временные гармоники полей. Для этого представим периодическую функцию  $Z_{TE}$  в виде ряда Фурье

$$Z_{TE} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} Z_q^{TE} \exp(i q \Omega t). \quad (7)$$

Подставляя это разложение и поля (4) в (3) и используя свойство ортогональности функций  $\exp(i q \Omega t)$  на интервале  $0 \div 2\pi$ , получаем связь между временными гармониками рассеянных электрического и магнитного полей:

$$E_{p\varphi}^s + E_{p\varphi}^n \delta_p = - \sum_{q=-\infty}^{\infty} Z_q^{TE} (H_{p-q,z}^s + H_{p-q,z}^n \delta_{p-q}) \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (8)$$

где  $\delta_p$  — символ Кронекера.

Определяя  $E_{p\varphi}^s$  и  $E_{p\varphi}^n$  из уравнений Максвелла (5) и выражений для  $H_{pz}^s$  и  $H_{pz}^n$  (2) и (6) и подставляя в (8), получим

$$\begin{aligned} a_{v,p} H_v^{(2)'}(k_p a) - i \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q a_{v,p-q} H_v^{(2)}(k_{p-q} a) = \\ = -\epsilon_v i' H_0 [J'_v(k_0 a) \delta_p - i \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_q J_v(k_0 a) \delta_{p-q}], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $C_q = Z_q^{TE}/W_0$  — нормированное значение коэффициентов Фурье функции поверхностного импеданса  $Z_{TE}(t)$ ,  $W_0 = 120 \pi \text{ ом}$ ,  $J'_v(x)$ ,  $H_v^{(2)'}(x)$  — производные по аргументу функций Бесселя и Ганкеля.

Полученная бесконечная система линейных алгебраических уравнений (9) устанавливает связь между временными гармониками рассеянного поля при фиксированном значении  $v$  — номера азимутальной гар-

моники. Если коэффициенты  $a_{vp}$  определены решением системы (9), то рассеянное магнитное поле в соответствии с (4) и (6) представляется выражением

$$\mathbf{H}^s = \mathbf{i}_z H_z^s(P, t) = \mathbf{i}_z \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{vm} H_v^{(2)}(k_m r) \cos(v\varphi - \varphi_0) \exp(i\omega_m t). \quad (10)$$

Таким образом, рассеянное поле может быть записано в виде ряда Фурье по временным гармоникам, каждая из которых, в свою очередь, определяется набором азимутальных гармоник, зависящих от параметров модулированного импеданса и электрических размеров цилиндра.

Поле рассеяния в случае волны типа ТМ может быть получено аналогичным образом.

3. Систему уравнений (9), определяющую азимутальные гармоники поля, изменяя порядок суммирования, можно записать в виде

$$\begin{aligned} a_{vp} H_v^{(2)\prime}(k_p a) - i \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_{p-q} a_{vq} H_v^{(2)}(k_q a) = \\ = -\epsilon_v i' H_0 [J'_v(k_0 a) \delta_p - i C_p J_v(k_0 a)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Воспользуемся далее разложением функции Ганкеля в ряд Тейлора по малой величине  $x_p = \Omega p / \omega_c$ :

$$H_v^{(2)}(k_p a) = \sum_{n=0}^{\infty} x_p^n \frac{(k_0 a)^n}{n!} H_v^{(2)(n)}(k_0 a). \quad (12)$$

Если  $\Omega / \omega_c \ll 1$ , то в этом разложении можно ограничиться первым членом и систему уравнений (11) путем умножения на  $\exp(ip\Omega t)$  и суммирования в пределах  $-\infty < p < \infty$  можно привести к следующему виду:

$$A_v(t) = -\epsilon_v i' H_0 \frac{J'_v(k_0 a) - i C(t) J_v(k_0 a)}{H_v^{(2)\prime}(k_0 a) - i C(t) H_v^{(2)}(k_0 a)}, \quad (13)$$

где

$$A_v(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_{vp} \exp(ip\Omega t)$$

— искомая медленно меняющаяся функция времени, определяющая амплитуду азимутальной гармоники,

$$C(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q \exp(i q \Omega t) = Z_{TE}(t) / W_0$$

— нормированная функция поверхностного импеданса.

Выражение (13) совпадает с известным [4] выражением для коэффициентов разложения поля, рассеянного цилиндром с однородным поверхностью импедансом. В данном случае оно определяет искомое решение в квазистационарном приближении и не имеет особенностей при  $\operatorname{Re} C(t) \geq 0$ .

Если в (12) ограничиться  $N + 1$  первыми членами разложения, то упомянутым способом из (11) можно получить относительно функции  $A_v(t)$  обыкновенное дифференциальное уравнение  $N$ -го порядка с периодическими коэффициентами. Решение этого уравнения также является периодической функцией [5] и определяет  $N$ -е приближение к точному решению. Таким образом, можно определить искомое решение  $A_v(t)$  для  $v$ -й амплитуды азимутальной гармоники в заданном приближении и определить его точность.

4. Расчеты были выполнены на основе бесконечной системы уравнений (11). Численное решение этой системы можно выполнить, если предварительно произвести ее редукцию. Обоснование последней может быть произведено с помощью теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [6]. Получаемые при редукции решения определяются с недостатком. Для оценки точности важно определить решения с избытком. С этой целью были построены соответствующие (11) мажорирующие системы, дающие решения с избытком.

Так как  $\Omega \ll \omega_c$ , то вычисления коэффициентов матрицы выполнялись по приближенным формулам с использованием разложения (12). Допускаемая при этом погрешность может быть легко оценена, а ошибка, вносимая в решения системы, может быть легко определена [7-9].

Наибольший интерес чаще всего представляет структура электромагнитного поля в дальней зоне. Используя асимптотику функций Ганкеля, выражение для поля (10) можно привести к следующему виду:

$$H^s \approx i_z \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} \exp\left[-i\left(k_0 r - \frac{\pi}{4}\right)\right] \sum_{m=-M}^M F_{TE}^m(\varphi) \exp(im\Omega t), \quad (14)$$

где

$$F_{TE}^m(\varphi) = \sum_{v=0}^{\infty} i^v a_{v,m} \cos v(\varphi - \varphi_0)$$

— характеристика рассеяния поля волн ТЕ поляризации для каждой временной гармоники электромагнитного поля. Суммирование в (14) от  $-M$  до  $M$  определяется порядком  $(2M+1)$  решаемых систем уравнений (11).

Численные расчеты были выполнены на ЭВМ для ТЕ поляризации при  $k_0 a = \pi$  и при изменении чисто реактивного поверхностного импеданса по пилообразному закону

$$C(t) = \frac{Z_{TE}(t)}{W_0} = iB(t) = i \begin{cases} b + \frac{dt}{2\pi\varkappa} & (0 \leqslant t \leqslant 2\pi\varkappa) \\ b + \frac{d}{1-\varkappa} - \frac{dt}{2\pi(1-\varkappa)} & (2\pi\varkappa \leqslant t \leqslant 2\pi) \end{cases}, \quad (15)$$

где  $d$ ,  $b$ ,  $\varkappa$  — параметры, определяющие форму пилы. Результаты решений системы (11) были использованы для расчетов диаграмм рассеяния  $F_{TE}^m(\varphi)$ .

На рис. 1 приведены рассчитанные с недостатком и с избытком временные гармоники магнитного поля в направлении  $\varphi = \varphi_0$ , т. е.  $F_{TE}^m(0)$  при  $m = 0, \pm 1, \pm 2$ , параметрах закона изменения поверхностного импеданса  $d = 0,5$ ,  $b = 1,5$  и  $\varkappa = 0,1$ . Сплошной линией представлена огибающая спектра с недостатком, а пунктирной — с избытком. Суммирование в (14) по  $v$  выполнялось в конечных пределах  $v_{max} < (3 \div 3,5) k_0 a$ . При этом наблюдается хорошая сходимость ряда. Из графиков видно, что отличие амплитуд временных гармоник, рассчитанных с недостатком и с избытком, особенно для гармоник с малыми номерами, незначительно. Последнее свидетельствует об удовлетворительной точности вычислений. Точность вычисления гармоник  $F_{TE}^m(\varphi)$  зависит также от порядка  $2M+1$  решаемой системы уравнений. Для выявления закономерностей сходимости отдельных гармоник  $F_{TE}^m(0)$  в зависимости от величины  $2M+1$  были выполнены расчеты при различных значениях порядка системы. Из рис. 2, на котором представлены результаты этих расчетов, видно, что при малых значениях  $2M+1$  графики амплитуд

$F_{TE}^m(0)$  сильно осциллируют. Это указывает на низкую точность вычислений при малых  $2M + 1$ . При  $2M + 1 > 25$  эти осцилляции уже не значительны, поскольку точность вычислений с увеличением порядка системы увеличивается.

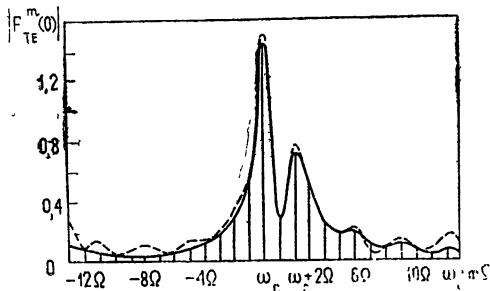


Рис. 1. Спектр поля в направлении обратного рассеяния.

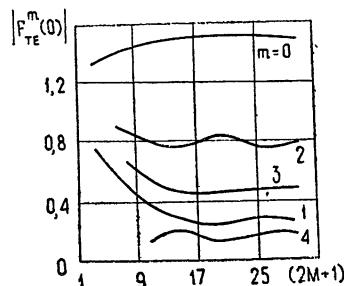
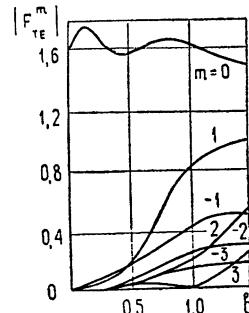


Рис. 2. Зависимость амплитуд гармоник рассеянного поля от порядка решаемой системы.

На рис. 3 даны зависимости модулей отдельных гармоник поля рассеяния  $F_{TE}^m(0)$  от амплитуды  $b$  поверхностного импеданса  $Z(t)$  при  $d = 0$ . Из графиков видно, что амплитуда поля рассеяния на частоте, равной частоте падающего поля, т. е. при  $m = 0$ , с увеличением  $b$  уменьшается, амплитуды же других гармоник ( $m \neq 0$ ) увеличиваются, т. е. происходит перераспределение энергии рассеянного поля по гармоникам спектра.

Рис. 3. Зависимость амплитуд гармоник рассеянного поля от амплитуды  $b$  пилы поверхностного импеданса.



На рис. 4 приведены рассчитанные диаграммы рассеяния  $F_{TE}^m(\varphi)$  для первых гармоник спектра  $m = 0, \pm 1, \pm 2$  при параметрах закона изменения поверхности  $d = 0, b = 0,5, x = 0,1$ .

Диаграммы рассеяния гармоник при  $m \neq 0$  практически не отличаются от гармоник при  $m = 0$ , но поля разных гармоник имеют разную амплитуду.

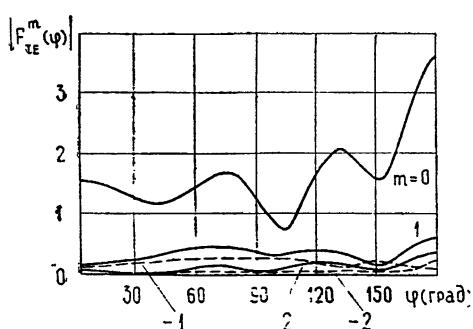


Рис. 4. Диаграммы рассеяния различных гармоник.

5. Экспериментальные исследования были выполнены в трехсантиметровом диапазоне на макете, представляющем собой круговой цилиндр с канавками, прорезанными параллельно образующей и заполненными ферритом. Подмагничивающее поле создавалось при помощи

электромагнита, который помещался внутрь цилиндра. Магнитный поток замыкался при помощи специальных дисков, укрепленных на цилиндре с торцов, и ферромагнитного материала, помещенного в канавках. Усредненный по периоду ребристой структуры поверхностный импеданс, характеризующий свойства поверхности цилиндра, мог меняться во времени за счет внешнего магнитного поля, управляющего свойствами ферромагнитного материала в канавках.

Измерительная установка, представляющая собой однопозиционную систему, включала в себя передатчик на кристаллическом генераторе в режиме с непрерывным излучением и приемник, собранный на ЛБВ, детектор и усилитель У-2-6. Спектральный анализ рассеянного поля выполнялся при помощи прибора СК-4-3.

Подмагничивание осуществлялось током, изменяющимся по пилообразному закону, определяемому специальным генератором тока. При этом подмагничивающее поле в канавках, заполненных ферритом, изменилось также по пилообразному закону, что обеспечивало при определенной глубине канавок и амплитуде пилы изменение импеданса по закону, близкому к пилообразному. Наблюдаемый спектр рассеянного электромагнитного поля качественно аналогичен полученному расчетным путем. Наибольшую амплитуду имеют первые гармоники. С увеличением номера гармоник амплитуда их убывает.

**6.** Примененный метод анализа электромагнитного поля, рассеянного цилиндром с переменным во времени поверхностным импедансом, позволяет представить искомое решение в виде ряда Фурье по временным гармоникам, каждая из которых является периодической функцией азимутального угла. Гармонические составляющие поля рассеяния определяются последовательным решением полученных систем алгебраических уравнений.

Погрешность, допускаемая при численной реализации метода, может быть оценена. Выполненные расчеты подтверждают хорошую сходимость соответствующих рядов. Если частота модуляции поверхностного импеданса значительно меньше частоты падающего поля, то для расчета гармонических составляющих с малыми номерами возможно применение квазистационарного решения, являющегося нулевым приближением.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Микаэлян, И. Г. Тейтельбаум, Радиотехника и электроника, 4, № 12, 2077 (1959).
2. В. В. Марцафей, Радиотехника, 23, № 11 (1968).
3. Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин, Возбуждение электромагнитных волн, изд. Энергия, М.—Л., 1967.
4. М. Г. Andreades, Proc. IEEE, 53, 8 (1965).
5. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИЛ, М., 1950.
6. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М—Л, 1962.
7. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы вычислительной математики, Физматгиз, М., 1966.
8. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М., 1963.
9. Дж. Х. Уилкинсон, Алгебраическая проблема собственных значений, изд. Наука, М., 1970.

**DIFFRACTION ON A CYLINDER WITH NONSTATIONARY BOUNDARY CONDITIONS***B. M. Petrov, V. V. Chechetka*

The diffraction of a plane electromagnetic wave on a infinite cylinder with impedance boundary conditions is considered. The surface impedance is assumed to be the periodic time function. The problem is reduced to the system of linear algebraic equations relative to the time harmonics of the scattered field. The results of numerical calculations and the experiment are given.

---

УДК 621.372 826

## ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНОЙ ДВУМЕРНОПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЛЕНТОЧНОЙ СТРУКТУРЫ

*В. Б. Казанский, Л. Н. Литвиненко, В. П. Шестопалов*

Целью работы является исследование собственных режимов безграничных сред, состоящих из идеально проводящих, регулярным образом расположенных металлических лент при различных направлениях распространения электромагнитной волны. Задача решается без каких-либо ограничений на соотношение между длиной волны и характерными размерами структуры, однако основной анализ проведен для одномодового случая, когда среда может рассматриваться как некоторый однородный диэлектрик с эквивалентным показателем преломления.

Для коэффициента преломления такой анизотропной среды получены либо явные формулы, либо выражения, которые легко поддаются численному и качественному анализу.

Известные методы исследования свойств искусственных диэлектриков [1–4] связаны с ограничениями на соотношение между длиной волны и характерными размерами структуры. Поэтому, несмотря на относительную простоту получаемых аналитических формул, их применимость ограничивается статической или, в лучшем случае, квазистатической областью. В связи с использованием искусственных сред в коротковолновом диапазоне СВЧ возникла необходимость изучения электродинамических свойств указанных структур при условии, когда их характерные размеры становятся сравнимыми с длиной волны. Эта задача решается двумя путями: во-первых, введением поправок, учитывающих дисперсию показателя преломления, в ранее разработанные статические методы расчета [5]; во-вторых, путем разработки новых методов, таких, как метод наведенных ЭДС [6], дифракционный [7], операторный [8] и т. д. Однако существенным недостатком указанных методов является большой объем необходимых вычислений.

Целью настоящей работы является исследование собственных режимов безграничных сред, состоящих из идеально проводящих, регулярным образом расположенных металлических лент при различных направлениях распространения электромагнитной волны. Задача решается без каких-либо ограничений на соотношение между длиной волны и характерными размерами структуры, однако основной анализ проведен для одномодового случая, когда среда может рассматриваться как некоторый однородный диэлектрик с эквивалентным показателем преломления.

### 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ОБРАЗУЮЩИМ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛЕНТ

Рассматриваемая структура (рис. 1) состоит из бесконечного числа идентичных периодических решеток, образованных бесконечно тонкими идеально проводящими лентами (период решетки  $l$ , ширина щели  $d$ ). Расстояние между соседними решетками равно  $a$ . Металлические ленты

находятся в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Поскольку такая структура является анизотропной, то полное описание электродинамических свойств ее в однородовом случае возможно лишь при определении эффективного показателя преломления  $n$  (а следовательно, постоянной распространения  $\gamma = nk$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны в однородной среде) в трех основных направлениях: вдоль осей  $0z$ ,  $0y$  и  $0x$ . В этом разделе мы исследуем распространение волны для первых двух направлений, причем раздельно рассмотрим случаи  $E$ -поляризации электромагнитной волны, когда вектор электрического поля параллелен оси  $0x$ , и  $H$ -поляризации, когда вектор магнитного поля параллелен оси  $0x$ .

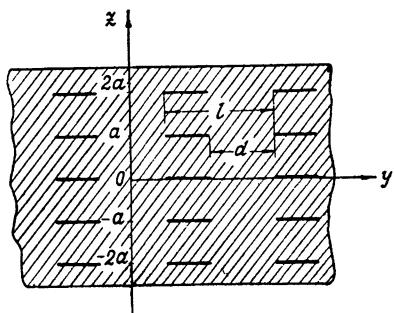


Рис. 1. Ленточная структура.

### 1.1. Распространение волны вдоль оси $0z$

Рассмотрим области  $0 < z < a$  и  $-a < z < 0$ , которые будем называть в дальнейшем соответственно областями 1 и 2. Поля в случаях  $E$ - и  $H$ -поляризации в этих областях можно, учитывая периодичность структуры вдоль оси  $0y$ , представить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x^{(1)} \\ H_x^{(1)} \end{array} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{e_{tm}}{h_{tm}} \right\} \exp[-ih_m(z-a)] + \left\{ \frac{e_{Rm}}{h_{Rm}} \right\} \exp(ih_m z) \right] \times \times \exp \left( i2\pi \frac{m}{l} y \right), \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x^{(2)} \\ H_x^{(2)} \end{array} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{\bar{e}_{tm}}{\bar{h}_{tm}} \right\} \exp(-ih_m z) + \left\{ \frac{\bar{e}_{Rm}}{\bar{h}_{Rm}} \right\} \exp[ih_m(z+a)] \right] \times \times \exp \left( i2\pi \frac{m}{l} y \right),$$

где в фигурных скобках стоят амплитуды пространственных гармоник соответственно для  $E$ - и  $H$ -поляризованных волн. Здесь и везде далее временной множитель вида  $e^{-i\omega t}$  опущен. Величина  $h_m$  в показателе экспоненты определяется из уравнения Гельмгольца и равна

$$h_m = \sqrt{k^2 - \left( \frac{2\pi m}{l} \right)^2}. \quad (2)$$

Знак корня (2) определяется условием  $\text{Im } \sqrt{A} > 0$ ; если  $\text{Im } \sqrt{A} = 0$ , то  $\text{Re } \sqrt{A} > 0$ .

Периодичность структуры вдоль оси  $0z$  позволяет выразить поля в области 2 через их значение в области 1 согласно теореме Флоке:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x^{(2)}(z-a) \\ H_x^{(2)}(z-a) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} E_x^{(1)}(z) \\ H_x^{(1)}(z) \end{array} \right\} e^{-i\gamma a}. \quad (3)$$

Здесь  $\gamma$  — искомая постоянная распространения вдоль оси  $0z$ . Учитывая последнее соотношение, нетрудно показать, что амплитуды волн в обла-

сти 2 отличаются от соответствующих амплитуд в 1 только фазовым множителем, а именно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{e}_{t(R)m} \\ \bar{h}_{t(R)m} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} e_{t(R)m} \\ h_{t(R)m} \end{array} \right\} e^{-i\gamma a}. \quad (4)$$

Равенство тангенциальных составляющих электрических полей (1) на границе  $z = 0$  (на всем периоде структуры) определяет соотношения между амплитудами парциальных волн:

$$\begin{aligned} e_{tm} [\exp(ih_ma) - \exp(-i\gamma a)] &= e_{Rm} [\exp(ih_ma - i\gamma a) - 1], \\ h_{tm} [\exp(ih_ma) - \exp(-i\gamma a)] &= h_{Rm} [1 - \exp(ih_ma - i\gamma a)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя равенство нулю тангенциальных составляющих электрического поля на лентах (при  $z = 0$ ) и непрерывность магнитных составляющих полей на щелях в плоскости  $z = 0$ , можно получить системы функциональных уравнений, которые после ряда формальных преобразований, аналогичных проведенным в [9, 10], заменяются бесконечными однородными системами линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд пространственных гармоник.

Для  $E$ -поляризации

$$\begin{aligned} mA_m &= i\alpha e_{R0} (1 - e^{ika - i\gamma a}) W_m^0 + \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} p [\varepsilon_p A_p + \xi_p (e_{tp} + e_{Rp} e^{-i\gamma a})] [W_m^p + W_m^{-p}] \quad (m \neq 0), \\ &- A_0 = i\alpha e_{R0} (1 - e^{ika - i\gamma a}) W_{[o]}^0 + \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} p [\varepsilon_p A_p + \xi_p (e_{tp} + e_{Rp} e^{-i\gamma a})] [W_{[o]}^{-p} + W_{[o]}^p]. \end{aligned} \quad (6)$$

Для  $H$ -поляризации

$$\begin{aligned} mD_m &= i\alpha (h_{R0} - h_{t0} e^{ika}) W_m^0 + \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} p [\varepsilon_p D_p + \xi_p (h_{tp} - h_{Rp} e^{-i\gamma a})] [W_m^p + W_m^{-p}] \quad (m \neq 0), \\ &- D_0 = i\alpha (h_{R0} - h_{t0} e^{ika}) W_{[o]}^0 + \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} p [\varepsilon_p D_p + \xi_p (h_{tp} - h_{Rp} e^{-i\gamma a})] [W_{[o]}^{-p} + W_{[o]}^p]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_m &= e_{tm} \exp(ih_ma) + e_{Rm}, \quad D_m = h_{Rm} [1 - \exp(ih_ma - i\gamma a)] \\ &\quad (m = 0, 1, 2, \dots), \\ \varepsilon_p &= 1 + i\sqrt{x^2/p^2 - 1}, \quad \xi_p = -i\sqrt{x^2/p^2 - 1} \exp(ih_p a), \\ x &= l/\lambda \quad (p = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (8)$$

$W_m^p$  и  $W_{[o]}^p$  — функции параметра заполнения  $u = \cos(\pi d/l)$  для  $E$ -поляризации (6) и  $-u = -\cos(\pi d/l)$  для  $H$ -поляризации (7). Эти функции определены в работе [11].

Существование полей в рассматриваемой системе требует равенства нулю соответствующих бесконечных определителей однородных систем

(6) или (7). Исследования, проведенные в [12], показали, что бесконечные определители подобного типа относятся к классу нормальных определителей, и для их вычисления применим метод редукции. Системы (6), (7) описывают распространение волн в структуре в самом общем случае, т. е. при произвольных значениях параметров задачи. Мы ограничиваем анализ случаем, когда структуру можно рассматривать как однородную среду, т. е. исключаем возможность распространения в ней дифракционных гармоник, из (2) следует условие  $x < 1$ .

На основании оценок, проведенных в [11], в диапазоне  $x < 1$  с достаточной для приложений точностью ( $\sim 1\%$ ) в определителях можно ограничиться элементами, относящимися к  $\pm$  первым нераспространяющимся гармоникам. Таким образом, дисперсионные уравнения для постоянной распространения в случае  $E$ - и  $H$ -поляризаций могут быть записаны следующим образом:

$$\gamma a = \arccos \left\{ \cos ka - \frac{\sin ka}{x \ln \frac{1+u}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(u-1)^2}{\ln[(1+u)/2]} \zeta_E(\gamma) \right] } \right\} + \pi N; \quad (9)$$

$$\gamma a = \arccos \left\{ \cos ka + \left( x \ln \frac{1-u}{2} \right) \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(1-u)^2}{\ln[(1-u)/2]} \zeta_H(\gamma) \right] \sin ka \right\} + \pi N \quad (N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_E(\gamma) = & \left( \sqrt{1-x^2} \operatorname{ch} \frac{2\pi a}{l} \sqrt{1-x^2} - \operatorname{sh} \frac{2\pi a}{l} \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} \cos \gamma a \right) \times \\ & \times \left[ \operatorname{sh} \frac{2\pi a}{l} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} (u^2 + 2u - 3) \left\{ \sqrt{1-x^2} \operatorname{ch} \frac{2\pi a}{l} \sqrt{1-x^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{sh} \frac{2\pi a}{l} \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} \cos \gamma a \right\} \right]^{-1}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \zeta_H(\gamma) = & \cos \gamma a - \operatorname{ch} \frac{2\pi a}{l} \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \operatorname{sh} \frac{2\pi a}{l} \cos \gamma a \times \\ & \times \left[ \operatorname{ch} \frac{2\pi a}{l} \sqrt{1-x^2} - \cos \gamma a - \frac{1}{4} (u^2 - 2u - 3) \left\{ \cos \gamma a - \operatorname{ch} \frac{2\pi a}{l} \sqrt{1-x^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{1-x^2} \operatorname{sh} \frac{2\pi a}{l} \sqrt{1-x^2} \right\} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Дисперсионные уравнения (9) и (10) получены в форме, позволяющей использовать метод последовательных приближений, и, кроме того, удобны для физического анализа.

## 1.2. Распространение волны вдоль оси $0y$

Фаза волны, распространяющейся вдоль оси  $0y$ , в точках с координатами  $x, y, z$  и  $x+l, z$  отличается на величину  $\gamma l$ , где  $\gamma$  в данном случае играет роль «усредненной» постоянной распространения вдоль оси  $0y$ . Это обстоятельство, а также периодичность структуры позволяют записать поля в двух соседних областях 1 и 2 в виде

$$\begin{Bmatrix} E_x^{(1)} \\ H_x^{(1)} \end{Bmatrix} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} a_m \\ c_m \end{Bmatrix} \exp[-ih_m(z-a)] + \begin{Bmatrix} \bar{a}_m \\ \bar{c}_m \end{Bmatrix} \exp(ih_m z) \times \quad (13)$$

$$\times \exp \left[ i \left( \gamma + 2\pi \frac{m}{l} \right) y \right],$$

$$\left\{ \begin{array}{c} E_x^{(2)} \\ H_x^{(2)} \end{array} \right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \begin{array}{c} a_m \\ c_m \end{array} \right\} \exp(-ih_m z) + \left\{ \begin{array}{c} \bar{a}_m \\ \bar{c}_m \end{array} \right\} \exp[ih_m(z+a)] \right] \times$$

$$\times \exp \left[ i \left( \gamma + 2\pi \frac{m}{l} \right) y \right],$$

где

$$h_m = \sqrt{k^2 - \left( \gamma + \frac{2\pi m}{l} \right)^2} = \sqrt{k^2 - \gamma_m^2}.$$

Границные условия для тангенциальных составляющих электрических полей при  $z = 0$  приводят к равенству

$$\left\{ \begin{array}{c} a_m \\ c_m \end{array} \right\} [\exp(ih_m a) - 1] = \left\{ \begin{array}{c} \bar{a}_m \\ -\bar{c}_m \end{array} \right\} [\exp(ih_m a) - 1],$$

которое при любом  $m$  может быть удовлетворено, если  $a_m = \bar{a}_m$  и  $c_m = -\bar{c}_m$ . Используя оставшиеся граничные условия в области металлических лент и щелей при  $z = 0$ , а также математический формализм работы [13], получим системы бесконечных линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $a_m$  и  $c_m$ .

Для  $E$ -поляризации

$$\left( p + \kappa \frac{\gamma}{k} \right) \alpha_p = \sum_m \left| m + \kappa \frac{\gamma}{k} \right| (2\xi_m a_m + \varepsilon_m a_m) \tilde{W}_{p[\sigma]}^m; \quad (14)$$

для  $H$ -поляризации

$$\left( p + \kappa \frac{\gamma}{k} \right) \beta_p = \sum_m \left| m + \kappa \frac{\gamma}{k} \right| (2\xi_m c_m + \varepsilon_m c_m) \tilde{W}_{p[\sigma]}^m. \quad (15)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\alpha_p = a_p [1 + \exp(ih_p a)], \quad \beta_p = c_p [\exp(ih_p a) - 1],$$

$$\varepsilon_m = 1 + i \sqrt{\frac{\kappa^2}{(m + \kappa\gamma/k)^2} - 1},$$

$$\xi_m = -i \sqrt{\frac{\kappa^2}{(m + \kappa\gamma/k)^2} - 1} \exp(ih_m a),$$

$$\tilde{W}_{p[\sigma]}^m = V_p^m - \tilde{V}_{[\sigma]}^m \frac{R_p}{\tilde{R}_{[\sigma]}}.$$
(16)

Коэффициенты  $\tilde{W}_{p[\sigma]}^m$  являются функцией параметра заполнения, величины  $\kappa\gamma/k$  и определены в [9, 11, 13].

Уравнения (14), (15), которые при произвольных значениях  $\kappa$  имеют несколько более сложный вид, упрощены с учетом того, что в дальнейшем будут интересовать значения  $\kappa < 1$ . Дисперсионные уравнения для нахождения постоянной распространения в этом случае имеют вид (с учетом  $\pm$  первых нераспространяющихся гармоник):

для  $E$ -поляризации

$$\frac{\pi \times a}{l} \frac{\gamma}{k} \left\{ 1 - \frac{1}{\tilde{W}_{0[\alpha]}^0 [1 - \Phi_E]} \right\} = -X \operatorname{tg} X, \quad (17)$$

для  $H$ -поляризации

$$\frac{\pi \times a}{l} \frac{\gamma}{k} \left\{ 1 - \frac{1}{\tilde{W}_{0[\alpha]}^0 [1 - \Phi_H]} \right\} = X \operatorname{ctg} X, \quad (18)$$

где

$$X = \frac{\pi \times a}{l} \sqrt{1 - \left( \frac{\gamma}{k} \right)^2}. \quad (19)$$

Функции  $\Phi_E$  и  $\Phi_H$  в общем случае определяются весьма сложным выражением, однако при  $\times \gamma / k < 1$  и не очень малых  $a/l$  (например,  $a/l > 0,5$ ) их можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_i = & \frac{1 + \times \gamma / k \ln [(1 \pm u)/2]}{8 |\ln [(1 \pm u)/2]|} \left\{ \left[ \frac{x^2}{(1 - \times \gamma / k)^3} \pm \frac{4 \exp(ih_1 a)}{1 - \times \gamma / k} \right] \times \right. \\ & \times \left[ u \pm \frac{1 + \times \gamma / k \ln [(1 \pm u)/2]}{1 - \times \gamma / k \ln [(1 \pm u)/2]} \right]^2 + \left[ \frac{x^2}{(1 + \times \gamma / k)^3} - \frac{4 \exp(ih_1 a)}{1 + \times \gamma / k} \right] \times (20) \\ & \left. \times \left[ 1 \mp u \frac{1 + \times \gamma / k \ln [(1 \pm u)/2]}{1 - \times \gamma / k \ln [(1 \pm u)/2]} \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

где  $i = E, H$ , верхний знак соответствует случаю  $E$ -поляризации, нижний —  $H$ -поляризации. При  $u \rightarrow \pm 1$  (весьма узкие ленты или щели)  $\Phi_i$  стремится к нулю. Для промежуточных значений

$$\Phi_i = 0 \left( \frac{x^2}{4} \pm \exp \left( -2\pi \frac{a}{l} \right) \right),$$

поэтому в Приложениях (а тем более для качественного анализа) с необходимой степенью точности можно ограничиться рассмотрением следующих трансцендентных дисперсионных уравнений:

$$\frac{\pi a}{l |\ln [(1 + u)/2]|} = X \operatorname{tg} X; \quad (21)$$

$$\frac{\pi a}{l |\ln [(1 - u)/2]|} = -X \operatorname{ctg} X. \quad (22)$$

## 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ВДОЛЬ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛЕНТ

Поля в этом случае следует представить в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} E^{(1)} \\ H^{(1)} \end{array} \right\} = & e^{ix} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \begin{array}{c} e_t(m) \\ h_t(m) \end{array} \right\} \exp [-ikh_m(z-a)] + \right. \\ & \left. + \left\{ \begin{array}{c} e_R(m) \\ h_R(m) \end{array} \right\} \exp (ikh_m z) \right] \exp \left( ik \frac{m}{x} y \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} E^{(2)} \\ H^{(2)} \end{array} \right\} = e^{i\gamma x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \left\{ \begin{array}{l} e_t(m) \\ h_t(m) \end{array} \right\} \exp(-ikh_m z) + \right. \\ \left. + \left\{ \begin{array}{l} e_R(m) \\ h_R(m) \end{array} \right\} \exp[ikh_m(z+a)] \right] \exp\left(ik \frac{m}{\kappa} y\right), \end{aligned}$$

где

$$h_m = \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 - \left(\frac{m}{\kappa}\right)^2}. \quad (24)$$

В отличие от рассмотренных выше, эта задача является векторной. Решение ее аналогично [11] и может быть сведено к двум скалярным задачам относительно  $x$ -компонент электрического и магнитного полей. Физически это означает, что в структуре могут распространяться два независимых типа волн, один из которых (мы назовем его  $E$ -типов) не имеет  $x$ -составляющей магнитного поля, а второй ( $H$ -типа) не имеет  $x$ -составляющей электрического поля. Это утверждение доказано в Приложении. Как и в предыдущих случаях, можно провести «усечение» бесконечных определителей с учетом  $\pm$  первых нераспространяющихся гармоник и прийти к следующим дисперсионным уравнениям:

для  $E$ -волн

$$\begin{aligned} l \left| \ln \frac{1+u}{2} \right| \left\{ 1 + \frac{(1-u)^2}{2|\ln[(1-u)/2]|} \frac{\Delta^E}{1+(1/4)(u^2+2u-3)\Delta^E + \exp(ih_1 ka)} \right\} \\ = X \operatorname{tg} X, \end{aligned} \quad (25)$$

для  $H$ -волн

$$\begin{aligned} l \left| \ln \frac{1-u}{2} \right| \left\{ 1 - \frac{(1+u)^2}{2|\ln[(1-u)/2]|} \frac{\Delta^H}{1-(1/4)(u^2-2u-3)\Delta^H - \exp(ih_1 ka)} \right\} \\ = -X \operatorname{ctg} X, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta^E &= 1 - \sqrt{1-\kappa^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{k^2}\right)} + \left[ 1 + \sqrt{1-\kappa^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{k^2}\right)} \right] \exp(ih_1 a), \\ \Delta^H &= - \left[ 1 - \sqrt{1-\kappa^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{k^2}\right)} \right] + \left[ 1 + \sqrt{1-\kappa^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{k^2}\right)} \right] \exp(ih_1 a) \end{aligned}$$

и  $X$  определен формулой (19).

### 3. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассмотрим прежде всего случай распространения волны вдоль оси  $Oz$ . Для того, чтобы выбрать значение  $N$  в формулах (9) и (10), т. е. устранить неоднозначность последних, можно воспользоваться тем, что структура при  $u \rightarrow -1$  переходит в однородное пространство (заполненное однородным диэлектриком). Поэтому при  $u \rightarrow -1$

$$\gamma a = \arccos(\cos ka) + N\pi = ka,$$

где под  $\operatorname{arccos}(x)$  понимается главное значение этой функции. Последнее равенство позволяет определить  $N$ . Заметим, что величина параметра  $u$  оказывает при фиксированном  $\lambda$  тем меньшее влияние на постоянную распространения, чем больше расстояние между слоями  $a$ .

В тех случаях, когда  $ka = n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), постоянная распространения  $\gamma$ , как это следует из (9) и (10), не зависит от параметров решетки. Физически этот режим присущ только бесконечной структуре, так как означает существование стоячей волны, узлы которой располагаются в тех же плоскостях, что и ленточные решетки. Границные условия для  $E$ - и  $H$ -поляризованных волн при этом выполняются автоматически. На возможность существования режима стоячей волны (т. е. двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях) указывает тот факт, что уравнениям (9) и (10) наряду с  $\gamma$  удовлетворяет также  $(-\gamma)$ .

В соответствии с (9) и (10) может иметь место одна из двух ситуаций: а) в структуре распространяется без затухания электромагнитная волна вдоль оси  $0z$  и б) режим распространения невозможен. (Эти рассуждения здесь и далее относятся к волне основного типа с  $m = 0$ .) Условие распространения волны вдоль оси  $z$  определяется следующими неравенствами:

для  $E$ -поляризации

$$\left| \cos ka - \frac{\sin ka}{\times \ln \frac{1+u}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(1-u)^2}{\ln[(1+u)/2]} \zeta_E(\gamma) \right]} \right| \leq 1,$$

для  $H$ -поляризации

$$\left| \cos ka + \left( \times \ln \frac{1-u}{2} \right) \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{(1-u)^2}{\ln[(1-u)/2]} \zeta_H(\gamma) \right] \sin ka \right| \leq 1.$$

Прежде чем переходить к анализу этих условий, обратим внимание на слагаемое с множителем  $\zeta(\gamma)$  в квадратных скобках. При двух крайних значениях параметра заполнения ( $u = \pm 1$ ) это слагаемое равно нулю, при промежуточных значениях  $u$  оно представляет величину второго порядка малости по  $\times$  и  $\exp(-2\pi \frac{a}{l})$  и им можно пренебречь.

Тогда области прозрачности будут определены следующими неравенствами:

$$\frac{1}{\times \left| \ln \frac{1+u}{2} \right|} \leq f\left(\pi \times \frac{a}{l}\right) \text{ и } \frac{1}{\times \left| \ln \frac{1-u}{2} \right|} \leq f\left(\pi \times \frac{a}{l}\right) \quad (27)$$

соответственно для  $E$ - и  $H$ -поляризаций, где

$$f(\alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha & \left( 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \pi \leq \alpha < \frac{3}{2} \pi \right) \\ -\operatorname{ctg} \alpha & \left( \frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi, \quad \frac{3}{2} \pi \leq \alpha < 2\pi \right) \end{cases}. \quad (28)$$

Области прозрачности представлены на рис. 2 в виде заштрихованных участков. Из этого рисунка видно, что на соответствующих фазовых плоскостях область прозрачности структур с параметром заполнения  $u$  для  $E$ -поляризации соответствует области «затухания»  $H$ -поляризованной волны в структурах, являющихся дополнительными к ним

$(u \rightarrow -u)$ . Это обстоятельство нетрудно объяснить, воспользовавшись принципом двойственности [14] для изолированной решетки.

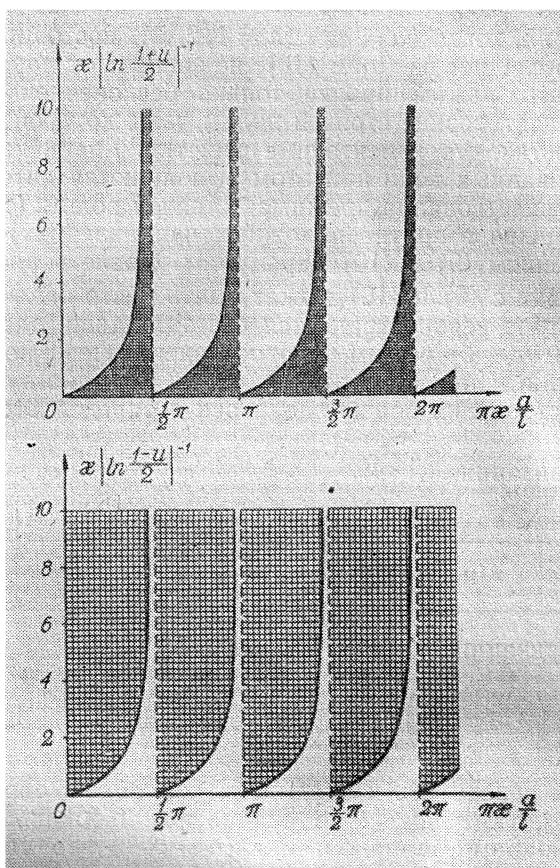


Рис. 2. Области прозрачности структуры при распространении вдоль оси Oz волны а)  $E$ -поляризации, б)  $H$ -поляризации.

Согласно этому принципу, отраженное поле  $E$ -поляризованной волны, дифрагирующей на решетке, становится в соответствие прошедшему через дополнительную решетку полю волнам с ортогональной поляризацией. Таким образом, если параметры отдельной плоской решетки обеспечивают связь между соседними областями структуры, достаточную для существования режима распространения волны одной поляризации, то для волны другой поляризации решетка будет недостаточно прозрачной. Уменьшение ширины щелей при определенном значении  $x$  как в случае  $E$ -, так и  $H$ -поляризации уменьшает область значений  $a/l$ , при которых волна в структуре не «затухает». При  $u = 1$  структура превращается в бесконечный набор плоских резонаторов, а области прозрачности вырождаются в дискретные точки:

$$\pi x \left( \frac{a}{l} \right) = \frac{\pi}{2} p, \quad p = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & (H\text{-поляризация}) \\ 1, 2, 3, \dots & (E\text{-поляризация}) \end{cases}$$

соответствующие собственным режимам отдельного резонатора.

Если для  $E$ -поляризации уменьшение частоты  $\chi$  приводит к сужению области прозрачности (режим распространения возможен лишь в структурах с узкими лентами, т. е. с большим значением  $|\ln(1+u)/2|$ ), то для  $H$ -поляризации в этом случае область «прозрачности» увеличивается, перекрывая практически весь диапазон изменения  $a/l$  и параметра заполнения  $u$ . Для  $H$ -поляризации область «затухания» весьма мала и «затухание» имеет место для решеток с узкими щелями (большое значение  $|\ln[(1-u)/2]|$ ).

Условие, при котором распространяются волны обеих поляризаций при любых значениях расстояния между слоями (плоскими решетками), соответствует значению  $u = -1$ , т. е. однородному пространству.

Существование областей «непрозрачности», связанных с изменением параметра  $\chi a/l$ , обусловлено периодичностью структуры вдоль оси  $0z$ . Действительно, при  $\chi a/l = (p/2)$  ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ) возникают распространяющиеся дифракционные гармоники, что приводит к резкому изменению условий распространения основной волны. Аналогичную природу имеют полосы непропускания кольцевых волноводов и т. п. Возникновение дифракционной гармоники при  $a = 0,5\lambda$  определяет ту естественную границу, вплоть до которой наша двумернопериодическая структура может рассматриваться как искусственный диэлектрик, поскольку при  $a > 0,5\lambda$  усредненное поле нельзя отождествлять с полем в однородной среде. Итак, если электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $0z$ , эквивалентные диэлектрические параметры можно определить при условии, что  $a < 0,5\lambda$  и  $\chi < 1$ .

Выясним при этих условиях характер взаимодействия волны  $E$ - или  $H$ -поляризации с ленточной структурой. Из формулы (9) легко видеть, что при  $E$ -поляризации в случае режима «распространения» электромагнитная волна «ускоряется» структурой. Действительно, поскольку  $ka < \pi$  функция  $\sin ka$  принимает только положительные значения, за счет знака логарифма второе слагаемое в фигурных скобках (9) положительно. Нетрудно найти, что при этом  $\gamma < k$ . Аналогично, из (10) следует, что при  $H$ -поляризации  $\gamma > k$ , т. е. эффективный показатель преломления вдоль оси  $0z$ , определенный как  $n = \gamma/k$ , в первом случае меньше, а во втором больше единицы.

На рис. 3, 4 приведены дисперсионные зависимости эффективного показателя преломления для  $H$ - и  $E$ -поляризации при различных значениях параметра заполнения и расстояниях между слоями.

Особый интерес представляют кривые на рис. 3, из которых ясно, что характер дисперсии показателя преломления искусственной среды зависит от расстояния между решетками. Аномальная дисперсия при малых расстояниях объясняется взаимодействием на высших гармониках и может быть изучена лишь с учетом этого взаимодействия. Решение уравнений (9) и (10) произведено методом последовательных приближений (нулевое значение  $n$  выбиралось при  $\zeta(\gamma) = 0$ ). На графиках приведены результаты третьей итерации.

В таблице даны для сравнения значения  $n$  в нулевом, первом, втором и третьем приближениях для  $H$ -поляризации при различных значениях  $\chi$ ,  $a/l$  и  $u = 0$ . Из таблицы видно, что только для малых  $\chi$  и больших  $a/l$  можно пользоваться нулевым приближением. При увеличении  $\chi$  и уменьшении  $a/l$  весьма существенно влияние нераспространяющихся гармоник. Поскольку это обстоятельство не учитывается нулевым приближением, для определения точных значений показателя преломления необходимо использовать итерации более высокого порядка. Сравнение результатов вычислений эффективного показателя преломления, приведенных на рис. 3 для структуры из бесконечного числа слоев, с результатами для структуры с конечным числом слоев [7] еще раз подтверждает

ет выводы работы [7] о том, что уже четырехслойная структура обладает диэлектрическими свойствами, близкими к свойствам структуры, у которой число слоев бесконечно.

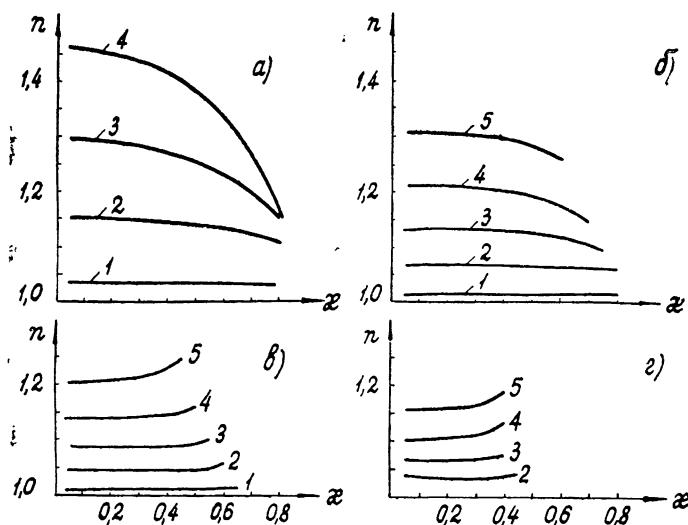


Рис. 3. Дисперсионная зависимость эффективного показателя преломления  $n$  при распространении  $H$ -поляризованной волны вдоль оси  $0z$  при разных значениях параметра заполнения  $u$ :

1 —  $u = -0,9$ ; 2 —  $u = -0,6$ ; 3 —  $u = -0,3$ ; 4 —  $u = 0$ ; 5 —  $u = +0,3$ .  
Расстояния между слоями: а)  $a/l = 0,25$ ; б)  $a/l = 0,5$ ; в)  $a/l = 0,75$ ;  
г)  $a/l = 1,0$ .

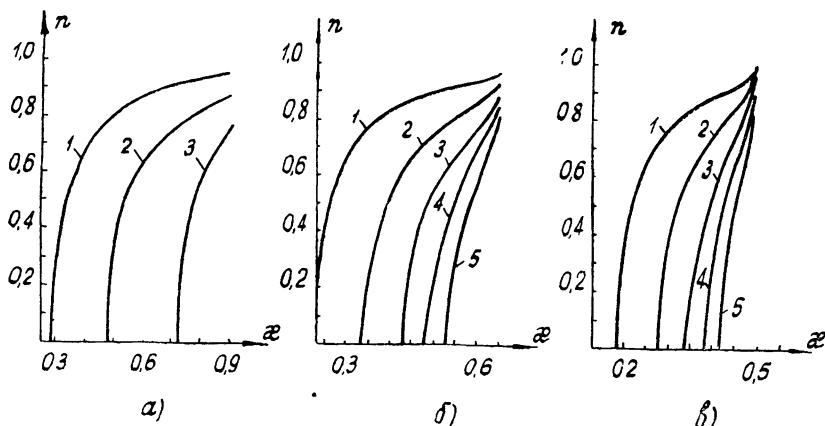


Рис. 4. Дисперсионная зависимость эффективного показателя преломления  $n$  при распространении  $E$ -поляризованной волны вдоль оси  $0z$  при разных значениях параметра заполнения  $u$ :

1 —  $u = -0,999$ ; 2 —  $u = -0,9$ ; 3 —  $u = -0,6$ ; 4 —  $u = -0,3$ ; 5 —  $u = 0$ .  
Расстояния между слоями. а)  $a/l = 0,5$ ; б)  $a/l = 0,75$ , в)  $a/l = 1,0$ .

Таблица 1

$a/l =$	0,25			0,5			0,75		
$\chi$	0,1	0,25	0,6	0,1	0,25	0,6	0,1	0,25	0,5
$n_0$	1,37264	1,37581	1,39711	1,20120	1,20504	1,24808	1,13834	1,14280	1,20154
$n_1$	1,45476	1,44294	1,32784	1,21113	1,20787	1,17367	1,13935	1,13998	1,16209
$n_2$	1,45443	1,44122	1,33945	1,21111	1,20784	1,17706	1,13935	1,13999	1,16231
$n_3$	1,45443	1,44127	1,33751	1,21111	1,20784	1,17689	1,13935	1,13999	1,16231

2. Для анализа дисперсионных свойств ленточных структур при распространении электромагнитной волны вдоль оси  $Oy$  рассмотрим соотношения (21) и (22). Заметим сразу, что этим уравнениям может удовлетворить постоянная распространения  $\gamma < k$ , в противном случае правые части (21) и (22) становятся отрицательными. Это означает, что в таких структурах невозможно распространение медленной волны вдоль оси  $Oy$  ввиду отсутствия линий непрерывного тока (аналогичная картина наблюдается в кольцевых волноводах).

Дальнейшее исследование удобно проводить по графикам, представленным на рис. 5. Постоянная распространения  $\gamma$ , определенная через параметр  $X$  соотношением

$$\left(\frac{\gamma}{k}\right)^2 \left(\frac{\pi \times a}{l}\right)^2 = \left(\frac{\pi \times a}{l}\right)^2 - X^2, \quad (29)$$

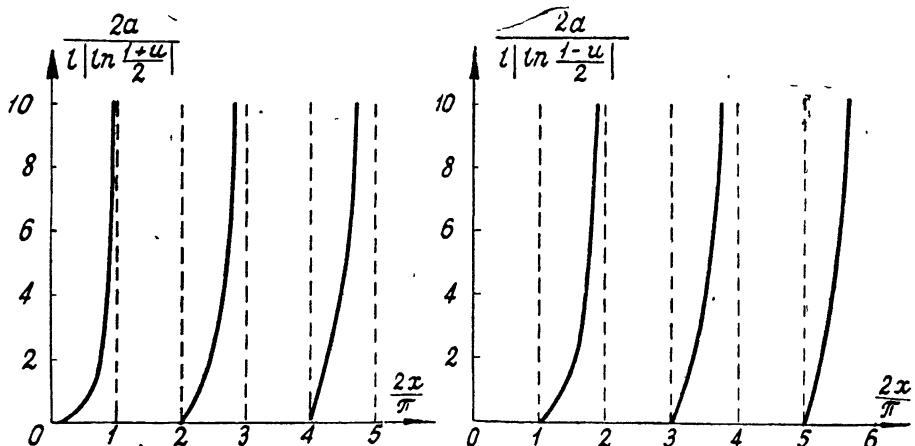


Рис. 5. К определению корней дисперсионных уравнений а) вида [21]; б) вида [22]

является многозначной величиной, зависящей от типа основной волны, распространяющейся в структуре, аналогично ситуации в диэлектрических слоях, выполняющих роль направляющих систем [15]. Выражение (29) ограничивает число возможных типов распространяющихся волн условием  $X \leq \pi \times \frac{a}{l}$ .

Будем использовать следующую систему индексов для обозначения различных типов волн. Символ  $H_{ij}$ -волну означает, как обычно, волну, у которой  $H_y \neq 0$  ( $0y$  — направление распространения);  $E_{ij}$ -волну опре-

деляется аналогичным образом. Первый индекс указывает номер волны в спектре поля (13), т. е.  $i = m$ ; второй индекс — номер корня уравнения (21) или (22). В дальнейшем мы рассматриваем распространение только основной волны спектра (13), т. е.  $i = 0$ .

Из рис. 4 видно, что при  $X \leq \pi/2$  в структуре может распространяться без затухания только  $H_{00}$ -тип волны ( $E_y = 0$ ,  $E$ -поляризация), длина которой не превышает удвоенного расстояния между слоями (2a). Если  $X \leq \pi$ , то наряду с  $H_{00}$ -типов волны может существовать и  $E_{01}$ -тип ( $H_y = 0$ ,  $H$ -поляризация), при  $X \leq \frac{3}{2}\pi$  в структуре существует как  $H_{00}$ ,  $E_{01}$ , так и  $H_{01}$ -тип волн и т. д.

Важным свойством таких структур при распространении волны вдоль оси  $y$  является дискретность диапазонов длин волн, при которых могут существовать соответствующие типы колебаний. Так, при условии

$\frac{2}{2m+1} < \lambda \leq \frac{a}{m}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) существуют только волны  $H_{0m}$ -типа,

а при  $\frac{a}{m} < \lambda \leq \frac{2a}{2m-1}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) существует только  $E_{0m}$ -тип

волн. Это свойство может быть использовано при конструировании поляризационных ускоряющих фильтров для плоских электромагнитных волн как в свободном пространстве, так и в прямоугольном волноводе с широкими стенками. Единственными общими точками (одновременное существование как  $E$ -, так и  $H$ -типов волн) в дисперсионных уравнениях (21) и (22) есть  $X = \nu \frac{\pi}{2}$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ), где четным значениям  $\nu$  соответствует свободное пространство ( $u = -1$ ), а нечетным — сплошные металлические экраны ( $u = 1$ ).

Введем на основании (29) понятие критической длины волны  $\lambda_c = \pi a/X$  и выясним, как она изменяется в зависимости от параметра заполнения  $u$ . Если структура состоит из сплошных металлических экранов ( $u = 1$ ), то как для  $H_{00}$ , так и  $E_{01}$ -типов колебаний значение критической длины волны равно  $2a$  ( $X = \pi/2$ ), в полном согласии с известными результатами [16]. При появлении щелей ( $u < 1$ ) в случае  $H_{00}$ -волны  $X$  уменьшается (рис. 4) и критическая длина волны увеличивается, а для  $E$ -волны ее критическая длина уменьшается, увеличивается  $X$ . В пределе, когда структура переходит в однородное пространство ( $u \rightarrow -1$ ), критическая длина волны для  $H_{00}$ -типа становится равной бесконечности, а для  $E_{01}$ -волны стремится к  $a$ . В последнем случае мы должны иметь в виду, что критическая длина волны для  $E_{01}$ -типа лишь асимптотически стремится к значению  $a$ , поскольку для свободного пространства теряют смысл типы волн  $E_{0j}$  и  $H_{0j}$  с  $j \neq 0$ . Для  $j = 0$  только в одной точке  $X = 0$ , соответствующей свободному пространству на диаграммах рис. 4, существует волна  $E_{00}$ , для которой критическое значение равно бесконечности.

Очевидно, что рассматриваемую структуру можно сопоставить с искусственным диэлектриком строго лишь в случае, когда распространяется волна  $H_{00}$ , поскольку при  $X > \pi/2$  возникают незатухающие дифракционные гармоники, обусловленные периодичностью среды вдоль оси  $z$ . Интерес представляет исследование первых ветвей корней  $0 \leq X < \pi/2$  для  $H_{00}$ - и  $\pi/2 \leq X < \pi$  для  $E_{01}$ -типов волн, поскольку остальные ветви исследуются аналогично.

При малых значениях  $u \approx -1$  (очень узкие металлические ленты) эффективный показатель преломления близок к единице ( $X \approx 0$ ), а для  $E_{01}$ -типа волны постоянная распространения определяется равенством

$\gamma_E^2 \approx k^2(1 - \lambda^2 a^{-2})$  ( $X \approx \pi$ ). С увеличением ширины металлических лент  $n$  уменьшается (растет  $X$  при постоянном  $a/l$  и  $\kappa$ ), стремясь к значению  $n^2 = 1 - 0,25 \lambda^2 a^{-2}$  при  $\kappa \rightarrow 1$  ( $X = \pi/2$ ), а  $\gamma_E$  возрастает (уменьшается  $X$ ), стремясь к значению  $\gamma_E^2 = k^2(1 - 0,25 \lambda^2 a^{-2})$ . Для выяснения дисперсии эффективного показателя преломления зафиксируем значение  $a/l$  и  $\kappa$ . Если обозначить при этом значение корня дисперсионного уравнения (21) через  $\mu$ , то частотная зависимость эффективного показателя преломления определяется соотношением

$$n^2 = 1 - \frac{\mu^2}{\pi^2 a^2} \frac{l^2}{\kappa^2}. \quad (30)$$

Как видно из (30), диапазон изменений  $\kappa_{\min} \leq \kappa \leq \kappa_{\max}$ , при котором основная волна распространяется без затухания ( $\text{Im } n = 0$ ), ограничен неравенством

$$\frac{\mu^2 l^2}{\pi^2 a^2} \leq \kappa^2 \leq \frac{1}{(1+n)^2}.$$

Правая часть этого неравенства следует из уже упоминавшихся предположений об отсутствии в такой структуре незатухающих дифракционных гармоник. Нетрудно заметить, что для существования волны в диапазоне от  $\kappa_{\min}$  до  $\kappa_{\max}$  необходимо выбирать значения  $X$  (расстояние между слоями и параметр заполнения) такими, чтобы имело место неравенство  $X^2 l^2 / \pi^2 a^2 \leq \kappa_{\min}^2$ . На рис. 6 представлена дисперсионная зависимость эффективного показателя преломления при разных значениях  $\kappa$  и  $a/l$ .

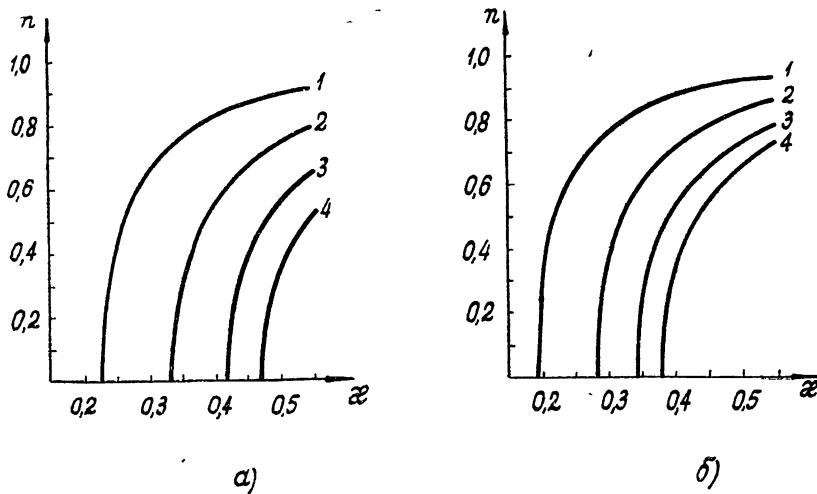


Рис. 6. Дисперсия показателя преломления при распространении волны с  $E \parallel 0x$  вдоль оси  $0x$  и  $0y$  для разных параметров заполнения  
1 —  $u = -0,999$ ; 2 —  $u = -0,9$ ; 3 —  $u = -0,6$ ; 4 —  $u = -0,3$ .  
Расстояния между слоями: а)  $a/l = 0,75$ ; б)  $a/l = 1,0$ .

3. Переидем теперь к анализу дисперсионных уравнений (25) и (26), описывающих свойства полей, распространяющихся вдоль оси  $0x$ . Заметим сразу, что в знаменателях левых частей этих уравнений величины в квадратных скобках мало отличаются от единицы; в связи с чем условия распространения  $E$ -поляризованной волны вдоль оси  $0x$  качественно не отличаются от условий для соответствующей  $E$ -поляризован-

ной волны (волна *H*-типа), распространяющейся вдоль оси *Oy* (сравним (25) и (21)). Аналогичное качественное совпадение имеет место для *H*-поляризации (формулы (26) и (22)).

Это связано с тем, что замена квадратных скобок в (25) и (26) единицей эквивалентна пренебрежению влиянием на свойства поля всех дифракционных гармоник, кроме нулевой. Ясно, что такое уравнение адекватно модели многослойной структуры из однородных вдоль оси *Oy* плоскостей с анизотропными свойствами, на которых справедливы эквивалентные граничные условия типа условий Конторовича—Мойжеса [17]. Записывая поля в такой структуре в виде суперпозиций бриллюэновских волн, нетрудно убедиться, что граничные условия при распространении волн одинаковой поляризации вдоль осей *Ox* и *Oy* совпадают с точностью до величин порядка  $(x \sin \alpha)^2$ , где  $\alpha$  — угол падения (отсчитываемый от оси *Oz*) бриллюэновской волны на гипотетическую полупрозрачную плоскость. Заметим, что уравнения (21) и (22), полученные с использованием асимптотик функций Лежандра, выписаны с аналогичной погрешностью порядка  $(x\gamma/k)^2$ .

Таким образом, строго говоря, при распространении волны вдоль оси *Ox* структуру с бесконечным числом слоев можно отождествлять с искусственным диэлектриком лишь для волны *E*-типа, в отличие от случая распространения вдоль оси *Oy*. Поляризация распространяющихся волн в этих случаях совпадает.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Плоская волна произвольной поляризации всегда может рассматриваться в виде суперпозиции двух плоских волн, у одной из которых  $H_x = 0$  (*E*-поляризованная), а у второй —  $E_x = 0$  (*H*-поляризованная волна). *E*-поляризованную волну легко представить с помощью однокомпонентного электрического вектора Герца

$$\Pi^{\text{пад}} = \{\mathcal{E}e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}, 0, 0\}, \quad (\text{П.1})$$

где  $\mathcal{E}$  — некоторая константа,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения. Аналогичным образом с помощью магнитного вектора Герца может быть представлена *H*-поляризованная волна. Покажем, что при взаимодействии с решеткой поляризация этих волн не изменяется и, таким образом, они могут существовать в структуре раздельно.

Поле, возникшее в результате дифракции на отдельной решетке, однородной вдоль оси *Ox* поля (П.1), следует искать в виде

$$\Pi = \{u(x, y, z), 0, 0\},$$

причем  $u(x, y, z) = V(x, y, z) + \mathcal{E}e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}$ , где  $V(x, y, z)$  во всем пространстве, кроме лент решетки, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta V + k^2 V = 0,$$

а компоненты векторов *E* и *H* выражаются через скалярную функцию  $u(x, y, z)$  следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 u \\ E_y = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ E_z = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x = 0 \\ H_y = -ik \frac{\partial u}{\partial z} \\ H_z = ik \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{П.2})$$

Искомое поле должно удовлетворять граничным условиям на металле (пусть решетка располагается в плоскости  $z = 0$ ):

$$\begin{aligned} E_x|_{z=0} &= 0, \\ E_y|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Из (П.2) и (П.3) видно, что граничные условия удовлетворяются, если  $u(x, y, z) = 0$  на металле. Нетрудно также выписать для функции  $u(x, y, z)$  условие на бесконечности и, таким образом, корректно сформулировать граничную задачу относительно функции  $u(x, y, z)$ , решение которой может быть получено известными методами (см., например, [9]). Аналогично можно рассмотреть и  $H$ -поляризацию.

Авторы благодарят О. А. Третьякова за полезные дискуссии при выполнении данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954.
2. Н. А. Хижняк, ЖТФ, 27, вып. 9, 2006 (1957).
3. М. А. Бровн, Proc. IEE, 97, р. III, № 45 (1950).
4. А. М. Модель, Радиотехника, 10, вып. 6, 52 (1955).
5. В. Б. Казанский, Л. Н. Литвиненко, Р. В. Шапиро, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 40, вып. 3, 631 (1970).
6. Я. Н. Фельд, Л. С. Бененсон, Радиотехника и электроника, 4, вып. 3, 417 (1957).
7. В. Б. Казанский, Л. Н. Литвиненко, Н. Г. Савенко, В. П. Шестопалов, УФЖ, 15, вып. 12, 2021 (1970).
8. В. Б. Казанский, Л. Н. Литвиненко, Н. Г. Савенко, Аннотации докладов V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Ленинград, 1970.
9. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32, вып. 4, 381 (1962).
10. В. Б. Казанский, Л. Н. Литвиненко, Н. Г. Савенко, В. П. Шестопалов, УФЖ, 15, вып. 11, 1800 (1970).
11. В. Б. Казанский, Л. Н. Литвиненко, Н. Г. Савенко, В. П. Шестопалов, УФЖ, 15, вып. 10, 1619 (1970).
12. Л. Н. Литвиненко, В. П. Шестопалов, Сборник вычислительной математики и математической физики, изд. Наука, М., 113, 1966.
13. В. Б. Казанский, Радиотехника, изд. ХГУ, вып. 13, 138 (1970).
14. Я. Н. Фельд, ДАН СССР, 60, № 7, 1165 (1948).
15. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.
16. С. Рамо, Дж. Уиннери, Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
17. Б. Я. Мойжес, ЖТФ, 25, вып. 1, 158 (1955).

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
23 марта 1971 г.

## EQUIVALENT DIELECTRIC PROPERTIES OF INFINITE TWO-DIMENSIONAL PERIODIC TAPE STRUCTURE

V. B. Kazanskii, L. N. Litvinenko, V. P. Shestopalov

The purpose of the paper is to investigate the natural regimes of boundless media composed of perfectly conducting regularly situated metal tapes at different directions of electromagnetic wave propagation. The problem is solved without any limitations on the relation between the wavelength and the characteristic dimensions of the structure. However the main analysis is made for a single-mode case when the medium may be considered as a uniform dielectric with the equivalent refractive index.

The explicit formulas or expressions which are easy to be numerically and qualitatively analysed are obtained for the refractive index of such an anisotropic medium.

УДК 621.378.8

## ЗАДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ВОЛНОВОДОВ КЛАССА «ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ КАНАЛ»

*B. A. Зятицкий, Ю. Н. Казанцев*

Анализируется эффективность возбуждения волноводов класса «диэлектрический канал» (ДК-волноводы) тремя типами возбудителей: металлическим волноводом, диафрагменной и линзовой линиями. Найдено, что коэффициент возбуждения основной волны ДК-волноводов в двух последних случаях составляет не менее 0,98. Полученные результаты переносятся на задачи возбуждения ДК-волноводов лазерами со сферическими и плоскими зеркалами.

Для канализации электромагнитных волн миллиметрового и децимиллиметрового диапазонов можно успешно применять широкие волноводы типа «диэлектрический канал» (ДК-волноводы). К числу таких волноводов относятся собственно канал в безграничном диэлектрике [1], газово-диэлектрический [2], металло-диэлектрический волноводы [3] и др.

Газово-диэлектрический волновод — тонкостенная диэлектрическая трубка, наполненная газом с относительно высокой диэлектрической проницаемостью. Металло-диэлектрический волновод — это волновод, на внутренние стенки которого нанесен слой диэлектрика антрезонансной толщины.

Всюду ниже изучаются волноводы, поперечные размеры которых во много раз превышают длину волны  $\lambda$ .

Структура поля и характер затухания распространяющихся волн ДК-волноводов сравнительно хорошо изучены [1—3], что же касается возбуждения ДК-волноводов, то этот вопрос до сих пор не рассматривался.

Как известно, волна  $EH_{11}$  в ДК-волноводе характеризуется весьма малым затуханием; поэтому в дальнейшем нами будет изучаться возбуждение именно этой волны. Для возбуждения  $EH_{11}$  используются низшие типы волн ряда известных волноводов: металлического волновода, линзового лучевода [4] и диафрагменной линии [5].

Взаимное расположение ДК-волноводов и волноводов-возбудителей показано на рис. 1—3. Во всех трех случаях оси ДК-волновода и волновода-возбудителя лежат на одной прямой, причем торцовый срез ДК-волновода перпендикулярен оси лучевода. На рис. 1 видно, что плоскости срезов ДК-волновода и металлического волновода совпадают. На рис. 2 показано, что торцевая плоскость ДК-волновода удалена (в случае линзового лучевода-возбудителя) на расстояние, равное половине расстояния между двумя соседними линзами. И, наконец, в случае диафрагменного лучевода (рис. 3) плоскость последней диафрагмы и торцевая плоскость ДК-волновода совпадают.

Поля распространяющихся волн во внутреннем канале ДК-волновода с точностью до членов порядка  $1/ka$  ( $k = 2\pi/\lambda$ ,  $a$  — радиус внутренней плоскости) идентичны полям волновода с анизотропным импедансом стенок:

$$\frac{E_0}{H_z} = W_1, \quad \frac{E_z}{H_0} = W_2, \quad (1)$$

где поперечный и продольный импедансы, соответственно  $W_1$  и  $W_2$ , определяются конкретной структурой стенки. Формулы для  $W_1$  и  $W_2$  приведены в работе [6].

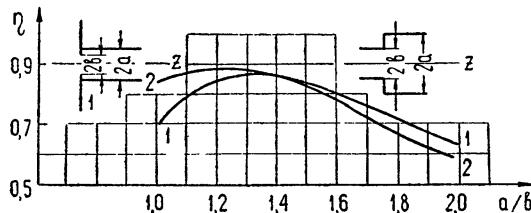


Рис. 1. Эффективность возбуждения ДК-волноводов плоской волной (кривая 1) и волной  $H_{11}$  (кривая 2) металлического волновода круглого сечения.

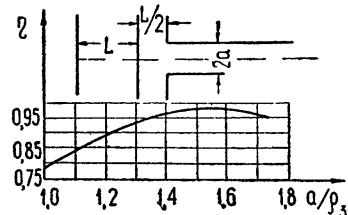


Рис. 2. Эффективность возбуждения ДК-волновода низшей волной линзового лучевода.

Ввиду такой идентичности полей задача о возбуждении ДК-волноводов может быть сведена к задаче о возбуждении широкого волновода с анизотропным импедансом стенок.

Поле падающей волны возбуждает в исследуемом волноводе сумму собственных волн. Если пренебречь затуханием собственных волн, то мощность, переносимая суммой волн, равна сумме мощностей каждой из волн.

Эффективность возбуждения определяется как отношение мощности рабочей волны ДК-волновода к мощности падающей волны

$$\eta = P/P_0, \quad (2)$$

где

$$P = \frac{c}{8\pi} \frac{\left| \int_Q [E_0 H] \bar{1} ds \right|^2}{\left| \int_Q [EH] \bar{1} ds \right|},$$

$$P_0 = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{S_1} [E_0 H_0^*] \bar{1} ds,$$

$S$  — площадь возбуждающей апертуры;  $Q$  — площадь поперечного сечения ДК-волновода;  $S_1$  — эффективная площадь падающей волны;  $E_0, H_0$  — поле на возбуждающей апертуре;  $E, H$  — поле возбужденной волны;  $1$  — орт, направленный по оси  $z$ .

Так как все поперечные размеры волноводов во много раз превышают длину волны, поле на возбуждающей апертуре будем считать равным полю падающей волны. Зная выражения для поля падающей волны и основной волны ДК-волновода и подставляя эти выражения в формулу (2), найдем явные выражения для  $\eta$  — коэффициента эффективности возбуждения волны  $E_{H11}$  ДК-волновода (см. табл. 1).

Анализ найденных выражений для  $\eta$  позволяет установить условия оптимального возбуждения в зависимости от типа волновода-возбудителя.

1) Рабочая волна ДК-волновода возбуждается полем типа плоской волны свободного пространства. График 1 на рис. 1 фиксирует  $\eta_{\max}$  в точке  $a/b = 1,31$  ( $2b$  — диаметр возбуждающей апертуры), причем  $\eta_{\max} = 0,87$ .

2) Рабочая волна ДК-волновода возбуждается металлическим волноводом. Величина  $\eta$  достигает максимального значения при  $a/b = 1,16$  и равна 0,895 (см. рис. 1) ( $2b$  — поперечный размер волновода-возбудителя).

3) Рабочая волна ДК-волновода возбуждается линзовым лучеводом. Величина  $\eta_{\max} = 0,982$  и максимум достигается при  $a/\rho_s = 1,56$  ( $\rho_s$  — радиус пятна основной волны линзового лучевода). Как показано на рис. 2, при изменении от 1,42 до 1,64 величина  $\eta$  меняется весьма слабо.

4) Когда возбудителем является диафрагменная линия, то  $\eta$  — двухпараметрическая функция, зависящая и от  $a/b$ , и от  $M$  ( $2b$  — поперечный размер диафрагмы,  $M$  — характерный размер диафрагмы (см. обозначения к табл. 1)). Максимальное значение по параметру  $a/b$  достигается в просчитанном диапазоне значений  $4 \leq M \leq 20$  при  $a/b = 1$ , причем  $\eta_{\max}$  монотонно возрастает с  $M$ . Расчет показывает, что при  $M = 20$   $\eta_{\max} = 0,985$  (см. рис. 3, 4).

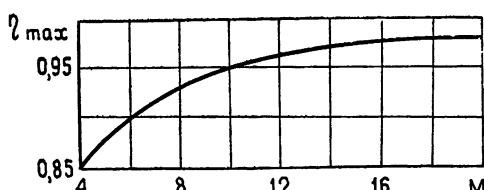


Рис. 4. Зависимость максимального значения коэффициента эффективности возбуждения ДК-волновода от характерного размера  $M$  диафрагменной линии.

Сравним данные расчета. Предпочтение, видимо, следует отдать линзовой линии, работающей в оптимальном режиме возбуждения ДК-волновода. Действительно, чистота возбуждения у диафрагменной линии и линзовой линии одного порядка. Вместе с тем, линзовая линия обладает менее жесткими допусками на соотношение поперечных размеров волновода-возбудителя и ДК-волновода в области экстремума для величины  $\eta$ . Результаты настоящей работы полностью применимы к возбуждению ДК-волноводов лазерами с плоскими и сферическими зеркалами, что соответствует возбуждению с помощью диафрагменной и линзовой линий соответственно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. E. A. J. Marcatili, R. A. Schmelzger, Bell System Tech. J., 43, № 4, part 2 1783 (1964).
2. Ю. Н. Казанцев, Радиотехника и электроника, 13, № 7, 1227 (1968).
3. Ю. Н. Казанцев, Радиотехника и электроника, 15, № 1, 207 (1970).
4. G. Goubau, F. Schwering, IRE Trans., AP-9, № 3, 248 (1961).

5. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
6. Ю. Н. Казанцев, Радиотехника и электроника, 15, № 6, 1140 (1970).

Институт радиотехники и электроники  
АН СССР

Поступила в редакцию  
8 февраля 1971 г.

## EXCITATION OF WAVEGUIDES OF „DIELECTRIC CHANNEL“ TYPE

*V. A. Zyatitskii, Yu. N. Kazantsev*

The authors analize the efficiency of excitation of „dielectric channel“ type waveguides (DC-waveguides) by three types of excitors: a metal waveguide, iris and lens lines. The excitation coefficient of the main DC-waveguide wave is not less than 0.98 in two last cases. The results obtained are applied to the problems of DC-waveguide excitation by lasers with spherical and plane mirrors.

---

УДК 538.566

## КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ВЫПУКЛОМ ТЕЛЕ. I

*E. A. Леонтьев*

Получено интегральное представление для поля, рассеянного выпуклым цилиндром произвольной формы. Решение представляет собой равномерное асимптотическое разложение, справедливое как в освещенной области, так и в области тени. Падающее поле является произвольным полем, заданным своим геометрооптическим разложением.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе рассматривается задача дифракции произвольного поля, заданного своим геометрооптическим разложением, на выпуклой поверхности произвольной формы. Эта задача заключается в нахождении функции  $u(x, k) = u_i(x, k) + u_s(x, k)$ , удовлетворяющей уравнению

$$(\Delta + k^2)u(x, k) = 0 \quad (1.1)$$

снаружи поверхности  $S_0$  и граничному условию первого рода

$$u(x, k) = 0, \quad x \in S_0 \quad (1.2)$$

либо второго рода

$$\frac{\partial}{\partial n} u(x, k) = 0, \quad x \in S_0 \quad (1.3)$$

на поверхности  $S_0$ . Здесь  $u_i(x, k)$  — падающее поле,  $u_s(x, k)$  — рассеянное поле, удовлетворяющее на бесконечности условию излучения

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \frac{\partial}{\partial |x|} u_s - iku_s \right) = 0. \quad (1.4)$$

Предполагается, что поверхность тела  $S_0$  является выпуклой и аналитической.

Мы ставим перед собой задачу получения коротковолновой асимптотики решения уравнения (1.1). Это решение ищется в виде интеграла от некоторых частных решений уравнения (1.1) так, чтобы удовлетворялись граничные условия (1.2) либо (1.3):

$$u_i(x, k) = k \int_{p_1}^{p_2} dp e^{ik\theta(x, p)} J(x, p; k); \quad (1.5)$$

$$u_s(x, k) = -k \int_{p_1}^{p_2} dp e^{ik\theta(x, p)} H^{(1)}(x, p; k) \beta(p; k). \quad (1.6)$$

Частное решение  $e^{ik\theta(x, p)} J(x, p; k)$  является асимптотическим решением уравнения (1.1), всюду регулярным. Соответственно  $e^{ik\theta(x, p)} H^{(1)}(x, p; k)$

есть решение, соответствующее расходящимся волнам. Асимптотическое поведение решений, стоящих под знаком интеграла, может быть истолковано в терминах лучей, которые имеют в качестве своей огибающей поверхность  $S_p$ . Семейство каустических поверхностей  $S_p$  определяется по заданной поверхности тела  $S_0$ . Эти частные решения уравнения (1.1) представляют собой равномерные асимптотические разложения, справедливые как вдали от каустики, так и вблизи нее.

Решения такого рода были впервые рассмотрены в работах Кравцова [2, 3] и работе [4] по проблеме каустики. Главный результат этих работ состоит в том, что одно из основных понятий геометрической оптики — понятие эйконала — сохраняет свою силу вблизи каустики и в области каустической тени.

Интегральные представления (1.5), (1.6) получаются из анализа решения задачи дифракции плоской волны на круговом цилиндре. Функции  $J(x, p; k)$  и  $H^{(1)}(x, p; k)$  являются асимптотическими аналогами функций Бесселя и Ганкеля, используемыми при решении задачи в случае кругового цилиндра.

Главный результат работы состоит в получении равномерного асимптотического разложения решения уравнения (1.1) с граничными условиями (1.2) либо (1.3). Данный метод решения задач дифракции на выпуклых телах позволяет, не привлекая дополнительных гипотез, последовательно описать переход от сильно освещенной области, где справедлива геометрическая оптика, к области глубокой тени, где справедлива геометрическая теория дифракции Келлера [5].

Интегральные представления, аналогичные (1.5) и (1.6), были рассмотрены в работе Людвига [1]. Однако эта работа обладает весьма существенными недостатками, связанными с тем, что граничные условия удовлетворяются по-разному, в зависимости от того, находится точка наблюдения в освещенной области или в области тени. Это приводит к тому, что ошибка при удовлетворении граничным условиям в освещенной области больше, чем общее поле в области тени, а также ведет к усложнению, не позволяющему эффективно вычислять функции, входящие в подынтегральные выражения (1.5) и (1.6).

Чтобы не загромождать изложение работы излишними для понимания деталями, а также в целях наглядности, мы будем рассматривать двумерный случай задачи дифракции на выпуклом теле. Наши поверхности будут цилиндрическими, а падающее поле будет зависеть только от двух координат. Трехмерный случай, хотя он и сложнее в геометрическом отношении, может быть рассмотрен этим же методом.

Асимптотическое решение рассматриваемой задачи получено в частях I и II настоящей работы. В части I формулируется общая постановка задачи и исследуются условия, которым должны удовлетворять исходные функции. Находятся, кроме того, амплитудные функции  $g$  и  $h$ . Определение остальных величин, входящих в интегральное представление решения, составляет часть II [7]. В дальнейшем на основе полученного решения предполагается дать анализ поведения дифракционного поля в различных областях.

## 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ И УДОВЛЕТВОРЕНIE ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ

Падающее и рассеянное поля мы записываем в виде интегралов (1.5) и (1.6), где функции  $J(x, p; k)$  и  $H^{(1)}(x, p; k)$  в соответствии с работами [2, 4] определяются с помощью выражений

$$J(x, p; k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ ik \left( \rho(x, p) \xi - \frac{\xi^3}{3} \right) \right\} [g(x, p; k) + \xi h(x, p; k)] d\xi = \quad (2.1)$$

$$= \frac{k^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} [v(-k^{2/3}\rho(x, p))g(x, p; k) + ik^{-1/3}v'(-k^{2/3}\rho(x, p))h(x, p; k)];$$

$$H^{(1)}(x, p; k) = \frac{1}{\pi} \int_L \exp \left\{ ik \left( \rho(x, p) \xi - \frac{\xi^3}{3} \right) \right\} [g(x, p; k) + \xi h(x, p; k)] d\xi = \quad (2.2)$$

$$= -\frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} [w_1(-k^{2/3}\rho(x, p))g(x, p; k) + ik^{-1/3}w'_1(-k^{2/3}\rho(x, p))h(x, p; k)].$$

Интегрирование в (2.2) ведется по контуру  $L$ , показанному на рис. 1. Функции  $v(t)$  и  $w_1(t)$  — линейно независимые решения уравнения Эйри

$$f''(t) - tf(t) = 0, \quad (2.3)$$

$v'(t)$  и  $w'_1(t)$  — их производные.

Чтобы частные решения, стоящие под знаком интегралов (1.5) и (1.6), были асимптотическими решениями уравнения (1.1), необходимо потребовать (см. [2, 4]), чтобы аргументы  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$  удовлетворяли системе уравнений

$$(\nabla\theta(x, p))^2 + \rho(x, p)(\nabla\rho(x, p))^2 = 1; \quad (2.4)$$

$$\nabla\theta(x, p)\nabla\rho(x, p) = 0, \quad (2.5)$$

а амплитуды  $g(x, p; k)$  и  $h(x, p; k)$  удовлетворяли уравнениям переноса

$$2\nabla\theta\nabla g + (\Delta\theta)g + 2\rho\nabla\rho\nabla h + \rho(\Delta\rho)h + (\nabla\rho)^2h + (1/ik)\Delta g = 0; \quad (2.6)$$

$$2\nabla\rho\nabla g + (\Delta\rho)g + 2\nabla\theta\nabla h + (\Delta\theta)h + (1/ik)\Delta h = 0. \quad (2.7)$$

Перейдем теперь к удовлетворению граничных условий (1.2) и (1.3). Рассмотрим сначала граничные условия первого рода (1.2). Потребуем, чтобы на поверхности тела  $S_0$  при произвольном  $p$  функция  $\rho(x, p)$  не зависела от  $x$ , т. е.

$$\rho(x, p) = \tilde{\rho}(p), \quad x \in S_0. \quad (2.8)$$

Кроме того, потребуем также, чтобы функция  $h(x, p; k)$  при произвольном  $p$  обращалась в нуль на поверхности тела  $S_0$ :

$$h(x, p; k) = 0, \quad x \in S_0. \quad (2.9)$$

Границное условие (1.2) при этом будет выполнено, если положить

$$\beta(p; k) = \frac{\tilde{J}(p; k)}{\tilde{H}^{(1)}(p; k)}; \quad (2.10)$$

$$\tilde{J}(p; k) = \frac{k^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} v(-k^{2/3}\tilde{\rho}(p)); \quad (2.11)$$

$$\tilde{H}^{(1)}(p; k) = -\frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} w_1(-k^{2/3}\tilde{\rho}(p)). \quad (2.12)$$

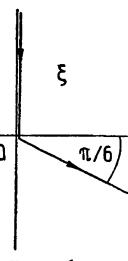


Рис. 1.

Рассмотрим теперь граничные условия второго рода (1.3). Как и в предыдущем случае, потребуем выполнения условия (2.8). Вычисляя нормальную производную, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} e^{ik\theta(x, p)} J(x, p; k) &= \frac{k^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} \left\{ v(-k^{2/3}\rho) \left[ ik \frac{\partial \theta}{\partial n} g + \frac{\partial g}{\partial n} + ik\rho \frac{\partial \rho}{\partial n} h \right] + \right. \\ &\quad \left. + ik^{-1/3} v'(-k^{2/3}\rho) \left[ ik \frac{\partial \theta}{\partial n} h + \frac{\partial h}{\partial n} + ik \frac{\partial \rho}{\partial n} g \right] \right\} e^{ik\theta}; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} e^{ik\theta(x, p)} H^{(1)}(x, p; k) &= -\frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} \left\{ w_1(-k^{2/3}\rho) \left[ ik \frac{\partial \theta}{\partial n} g + \frac{\partial g}{\partial n} + ik\rho \frac{\partial \rho}{\partial n} h \right] + \right. \\ &\quad \left. + ik^{-1/3} w'_1(-k^{2/3}\rho(x, p)) \left[ ik \frac{\partial \theta}{\partial n} h + \frac{\partial h}{\partial n} + ik \frac{\partial \rho}{\partial n} g \right] \right\} e^{ik\theta}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

При выводе (2.13) и (2.14) мы исключили вторые производные функций  $v$  и  $w_1$ , пользуясь уравнением (2.3). В силу условия (2.8) из уравнения (2.5) следует

$$\frac{\partial}{\partial n} \theta(x, p) = 0, \quad x \in S_0. \quad (2.15)$$

Из формул (2.8) и (2.13)–(2.15) получаем, что граничное условие (1.3) будет выполнено, если на поверхности  $S_0$

$$\frac{\partial}{\partial n} g(x, p; k) + ik\rho(x, p) \frac{\partial \rho(x, p)}{\partial n} h(x, p; k) = 0, \quad x \in S_0, \quad (2.16)$$

а коэффициент  $\beta(p; k)$  выберем в виде

$$\beta(p; k) = \frac{\tilde{J}'(p; k)}{\tilde{H}^{(1)'}(p; k)}; \quad (2.17)$$

$$\tilde{J}'(p; k) = \frac{k^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} v'(-k^{2/3}\rho(p)); \quad (2.18)$$

$$\tilde{H}^{(1)'}(p; k) = -\frac{ik^{-1/3}}{\sqrt{\pi}} w'_1(-k^{2/3}\tilde{\rho}(p)). \quad (2.19)$$

Таким образом, подводя итоги данного раздела, можно сказать, что уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) либо (1.3) будут выполнены, если функции  $\theta$  и  $\rho$  будут удовлетворять уравнениям (2.4), (2.5) и граничному условию (2.8), а функции  $g$  и  $h$ —уравнениям переноса (2.6), (2.7) и граничному условию (2.9) либо (2.16).

### 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПАДАЮЩЕГО ПОЛЯ

Как указывалось в разд. 1, падающее поле задано геометрооптическим разложением

$$u_i(x, k) = \exp(ik\Phi_i(x)) Z_i(x, k), \quad (3.1)$$

которое справедливо в окрестности тела или, по крайней мере, в окрестности границы геометрической тени. Оно должно быть представлено в виде интеграла (1.5), или, другими словами, разложение интеграла (1.5) по обратным степеням  $k$  должно совпадать с разложением (3.1).

Это накладывает определенные условия на функции  $\theta$ ,  $\rho$ ,  $g$  и  $h$ . Процедура представления падающего поля в виде (1.5), если известны каустические кривые  $S_p$ , полностью совпадает с описанной в работе [1], и мы приводим ее здесь в целях связности изложения.

Учитывая (2.1), представим (1.5) в виде двойного интеграла

$$\exp(ik\Phi_i(x))Z_i(x, k) = \quad (3.2)$$

$$= \frac{k}{2\pi} \int \int \exp \left[ ik \left( \theta(x, p) + \rho(x, p) \xi - \frac{\xi^3}{3} \right) \right] [g(x, p; k) + \xi h(x, p; k)] d\xi dp.$$

Применяя для вычисления этого интеграла двумерный метод стационарной фазы [6], получим

$$\exp(ik\Phi_i(x))Z_i(x, k) = \sum e^{ik\hat{\Phi}(x, \bar{p}, \bar{\xi})} \hat{Z}(x, k), \quad (3.3)$$

где

$$\hat{\Phi}(x, p, \xi) = \theta(x, p) + \rho(x, p) \xi - \xi^3/3, \quad (3.4)$$

$\hat{Z}(x, k)$  — ряд по обратным степеням  $k$ . Суммирование в правой части (3.3) предполагается по всем  $\bar{p}$ ,  $\bar{\xi}$ , удовлетворяющим уравнениям

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \xi} = \rho(x, \bar{p}) - \xi^2 = 0; \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial p} = \theta_p(x, \bar{p}) + \rho_p(x, \bar{p}) \bar{\xi} = 0. \quad (3.6)$$

Точка стационарной фазы будет находиться в области интегрирования при  $\rho(x, \bar{p}) \geq 0$ . Подставляя (3.5) в (3.4), имеем

$$\hat{\Phi}(x, \bar{p}, \bar{\xi}) = \theta(x, \bar{p}) \pm \frac{2}{3} \rho^{3/2}(x, \bar{p}) = \Phi^\pm(x, \bar{p}), \quad (3.7)$$

а уравнение (3.6) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial p} \Phi^\pm(x, \bar{p}) \equiv \Phi_{\bar{p}}^\pm(x, \bar{p}) = 0. \quad (3.8)$$

Необходимо заметить, что в нашем случае сразу обе функции  $\Phi^\pm(x, p)$  для произвольной точки  $x$  не могут удовлетворять условию (3.8), т. е. в (3.3) будет присутствовать только один член. Отсюда следует, что

$$\Phi_i(x) = \hat{\Phi}(x, \bar{p}, \bar{\xi}) = \Phi^\pm(x, \bar{p}) \quad (3.9)$$

(смотря по тому, какая из функций  $\Phi^\pm$  удовлетворяет условию (3.8)) и

$$Z_i(x, k) = \hat{Z}(x, k). \quad (3.10)$$

Дифференцируя (3.9) по  $x$  и учитывая (3.8), получим

$$\nabla \Phi_i(x) = \nabla \Phi^\pm(x, \bar{p}), \quad (3.11)$$

$\nabla \Phi_i$  постоянно вдоль лучей падающего поля. С другой стороны, как будет видно из следующего раздела,  $\nabla \Phi^\pm(x, p)$  постоянно вдоль лучей, касательных к  $S_p$ . Отсюда мы можем заключить, что падающий луч, проходящий через точку  $x$ , должен быть касательным к  $S_{\bar{p}}$ . Это условие определяет  $\bar{p}$  как функцию  $x$ .

Далее в работе [1] показано, что условия (3.8) и (3.9) будут выполнены для произвольной точки  $x$ , если в точке  $\zeta(p)$  касания кривой  $S_p$  падающим лучом положить

$$\theta(\zeta(p), p) = \Phi_i(\zeta(p)); \quad (3.12)$$

$$\nabla^\theta(\zeta(p), p) = \nabla\Phi_i(\zeta(p)). \quad (3.13)$$

Мы переходим теперь к рассмотрению условий, накладываемых на амплитуды  $g$  и  $h$ . Представляя их в виде разложений

$$g(x, p; k) = \sum_{n=0}^{\infty} (ik)^{-n} g_n(x, p); \quad (3.14)$$

$$h(x, p; k) = \sum_{n=0}^{\infty} (ik)^{-n} h_n(x, p); \quad (3.15)$$

$$Z_i(x, k) = \sum_{n=0}^{\infty} (ik)^{-n} Z_n^i(x), \quad (3.16)$$

имеем согласно методу стационарной фазы

$$Z_n^i(x) = \frac{g_n(x, \bar{p}) + \bar{\xi} h_n(x, \bar{p})}{\sqrt{|\Delta(x, \bar{p})|}} \exp\left(i \frac{\pi}{4} \delta\right) + f_n, \quad (3.17)$$

где  $\Delta(x, \bar{p})$  — определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{pp} & \hat{\Phi}_{p\xi} \\ \hat{\Phi}_{\xi p} & \hat{\Phi}_{\xi\xi} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

$\delta$  — сигнатура квадратичной формы с матрицей (3.18). Величины  $f_n$  включают в себя функции  $g_0, \dots, g_{n-1}; h_0, \dots, h_{n-1}$  и их производные.

Уравнения (3.17) представляют собой систему рекуррентных соотношений. В частности, для  $n = 0$

$$Z_0^i(x) = \frac{g_0(x, \bar{p}) + \bar{\xi} h_0(x, \bar{p})}{\sqrt{|\Delta(x, \bar{p})|}} \exp\left(i \frac{\pi}{4} \delta\right); \quad (3.19)$$

$$\Delta(x, \bar{p}) = -2(\theta_{pp} + \bar{\xi} \rho_{pp})\bar{\xi} - \rho_p^2. \quad (3.20)$$

В точке касания  $\zeta(p)$  кривой  $S_p$  лучом падающего поля  $\bar{\xi} = 0$ , так как  $\rho(x, p) = 0$  при  $x \in S_p$ ,

$$Z_0^i(\zeta(p)) = \frac{g_0(\zeta(p), p)}{|\rho_p(\zeta(p), p)|} \exp\left(i \frac{\pi}{4} \delta\right). \quad (3.21)$$

Уравнение (3.21) определяет значение функции  $g_0(x, p)$  в точке  $\zeta(p)$  на кривой  $S_p$ , что в дальнейшем позволяет однозначно найти решения уравнений (2.6), (2.7).

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИВЫХ $S_p$

Определим свойства кривых  $S_p$ , характеризующие лучевую структуру решений, входящих в интегралы (1.5) и (1.6). Эти кривые находятся по заданной границе тела  $S_0$  в соответствии с (2.8). Мы проанализи-

руем их геометрические свойства и получим строгие следствия условия (2.8), которые будут использованы нами в дальнейшем. Построение кривых  $S_p$  выполнено в части II настоящей работы.

Нахождение кривых  $S_p$  по заданной кривой  $S_0$  связано с решением системы уравнений (2.4), (2.5) при условии (2.8). С другой стороны, как показано в работах [2, 4], решения системы (2.4), (2.5) могут быть выражены через решения уравнения эйконала. В самом деле, если ввести функции  $\Phi^\pm(x, p)$  с помощью уравнений

$$\theta(x, p) = \frac{1}{2} [\Phi^+(x, p) + \Phi^-(x, p)]; \quad (4.1)$$

$$\rho(x, p) = \left[ \frac{3}{4} (\Phi^+(x, p) - \Phi^-(x, p)) \right]^{2/3}, \quad (4.2)$$

то они будут удовлетворять уравнению эйконала

$$(\nabla\Phi^\pm(x, p))^2 = 1 \quad (4.3)$$

в силу уравнений (2.4), (2.5). По определению, эйконалу  $\Phi^\pm(x, p)$  соответствует система лучей, касательных к кривой  $S_p$ . Через каждую точку  $x$ , лежащую снаружи  $S_p$ , в случае неособенной каустики проходят два луча, касательных к  $S_p$ , один — прошедший каустику, и другой — не дошедший до нее. Первому соответствует функция  $\Phi^+(x, p)$ , а второму —  $\Phi^-(x, p)$ . На каустике  $S_p$   $\Phi^+(x, p) = \Phi^-(x, p) \equiv \sigma(x, p)$ . Снаружи  $S_p$  мы полагаем  $\Phi^+(x, p) > \Phi^-(x, p)$ , откуда следует, что  $\rho(x, p) > 0$  снаружи  $S_p$  и  $\rho(x, p) = 0$  на  $S_p$ .

На каустике  $S_p$  уравнение (2.4), поскольку  $\rho(x, p) = 0$ , переходит в уравнение поверхностного эйконала

$$(\nabla\sigma(x, p))^2 = 1, \quad x \in S_p, \quad (4.4)$$

причем  $\sigma(x, p) = \theta(x, p)$  на  $S_p$ , а  $\nabla\sigma(x, p) = \nabla\theta(x, p) = \nabla\Phi^\pm(x, p)$  касателен к кривой  $S_p$ . Если известна  $\sigma(x, p)$  как функция точки на  $S_p$ , то решения уравнения эйконала (4.3) можно записать в виде

$$\Phi^\pm(x, p) = \sigma_\pm(x, p) \pm l_\pm(x, p), \quad (4.5)$$

где  $\sigma_\pm(x, p)$  — значения поверхностного эйконала в точках касания  $S_p$  лучами, проходящими через точку  $x$ , а  $l_\pm(x, p)$  — расстояния от точки касания до точки  $x$ . В двумерном случае  $\sigma(x, p)$  равна длине дуги кривой  $S_p$  от некоторой фиксированной точки до точки  $x$  на  $S_p$ .

Если точка  $x$  лежит внутри кривой  $S_p$ , где уже нельзя говорить о лучах в обычном смысле этого слова, а эйконалы  $\Phi^\pm(x, p)$  становятся комплексными, то функции  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$  определяются здесь с помощью аналитического продолжения. В работе [4] показано, что  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$  являются регулярными функциями  $x$  в окрестности  $S_p$ .

Единственным условием, которое определяет кривые  $S_p$  по заданной кривой  $S_0$ , является условие (2.8). Для кривых  $S_p$ , лежащих внутри  $S_0$ , учитывая формулы (4.2), (4.5), это условие можно записать в виде уравнения

$$\sigma_+(x, p) - \sigma_-(x, p) + l_+(x, p) + l_-(x, p) = \frac{4}{3} \tilde{\rho}^{3/2}(p), \quad x \in S_0, \quad (4.6)$$

которое означает, что левая часть (4.6) не зависит от  $x$ , когда  $x$  находится на  $S_0$ . Уравнению (4.6) можно дать очень простое геометрическое истолкование в случае, когда  $S_0$  — замкнутая кривая. Накинем на кривую  $S_p$  замкнутую нерастяжимую нить, вставим в нее карандаш и про-

чертим кривую так, чтобы нить все время была натянута, тогда, если длина нити соответственным образом подобрана, полученная кривая совпадает с данной кривой  $S_0$ . При этом, как легко видеть, для лучей, соответствующих  $\Phi^\pm(x, p)$  ( $x \in S_0$ ), выполняется закон: угол падения равен углу отражения (см. рис. 2).

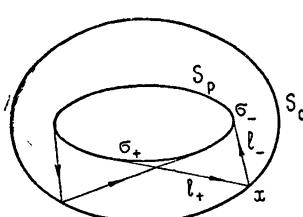


Рис. 2.

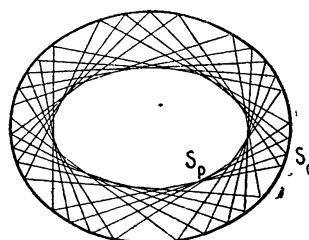


Рис. 3.

Другими словами, если изнутри кривой  $S_0$  пустить луч, касательный к  $S_p$ , и далее многократно отражать его от кривой  $S_0$  по закону геометрической оптики, то полученные таким способом новые лучи будут оставаться касательными к  $S_p$ . Кривая  $S_p$  будет огибающей семейства многократно отраженных лучей (см. рис. 3).

Таким образом, мы имеем семейство  $S_p$  выпуклых, вложенных кривых. Кривые  $S_p$ , лежащие снаружи  $S_0$ , получаются из внутренних аналитическим продолжением. Исходная кривая относится к тому же семейству. Ей соответствует значение  $p = 0$ . Кривым  $S_p$ , лежащим снаружи  $S_0$ , соответствуют значения  $p > 0$ , внутри  $S_0$   $p < 0$ .

Мы переходим к выводу соотношений, которые будут необходимы нам в разд. 5. Пусть точка  $x \in S_0$  и угол наклона луча, соответствующего  $\Phi^\pm(x, p)$ , есть  $\psi_\pm$ ,  $\varphi_0$  — угол наклона касательной к  $S_0$  в точке  $x$  (см. рис. 4), тогда, поскольку угол падения равен углу отражения,

$$\varphi_0 - \psi_+ = \psi_- - \varphi_0. \quad (4.7)$$

Пусть точка  $x$ , оставаясь на кривой  $S_0$ , занимает положение  $x_1$ , близкое к исходному, тогда для приращений  $d\psi_\pm$  справедливо соотношение

$$l_+(x, p) d\psi_+ = l_-(x, p) d\psi_-. \quad (4.8)$$

По определению радиуса кривизны кривой  $S_p$   $R(\sigma, p)$  имеем

$$d\psi_\pm = \frac{d\sigma_\pm}{R(\sigma_\pm, p)}, \quad (4.9)$$

где  $d\sigma_\pm$  — приращения длины дуги кривой  $S_p$ . Из (4.8) и (4.9) следует

$$l_+(x, p) \frac{d\sigma_+}{R(\sigma_+, p)} = l_-(x, p) \frac{d\sigma_-}{R(\sigma_-, p)}, \quad x \in S_0. \quad (4.10)$$

Из условия (2.8) следует еще одно важное следствие. Чтобы получить его, продифференцируем уравнение (4.3) по  $p$ :

$$\nabla \Phi^\pm(x, p) \nabla \Phi^\pm(x, p) = 0; \quad (4.11)$$

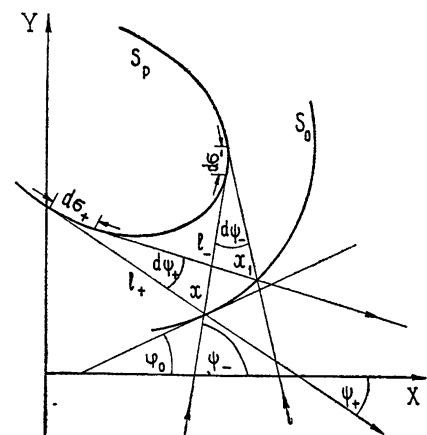


Рис. 4.

(4.11) означает, что  $\Phi_p^\pm(x, p) = \theta_p(x, p) \pm \sqrt{\rho(x, p)} \rho_p(x, p)$  есть постоянная величина на лучах, касательных к  $S_p$ . Поскольку при  $x \in S_p$   $\rho(x, p) = 0$ , легко видеть, что значение  $\Phi^\pm(x, p)$  на луче выражается через значение  $\theta_p(\sigma, p)$  на кривой  $S_p$ :

$$\Phi_p^\pm(x, p) = \theta_p(x, p) \pm \sqrt{\rho(x, p)} \rho_p(x, p) = \theta_p(\sigma_\pm, p). \quad (4.12)$$

Таким образом, нам необходимо определить  $\theta_p(\sigma, p)$ . Для этого продифференцируем уравнение (2.4) по  $p$  и возьмем  $x$  на  $S_p$ . В результате получим

$$2 \nabla \theta(x, p) \nabla \theta_p(x, p) + \rho_p(x, p) (\nabla \rho(x, p))^2 = 0, \quad x \in S_p. \quad (4.13)$$

Как следует из уравнения (2.5) и (4.1),  $\nabla \theta(x, p)$  при  $x \in S_p$  есть единичный вектор, касательный к  $S_p$ , и первый член уравнения (4.13) можно записать в виде

$$2 \nabla \theta(x, p) \nabla \theta_p(x, p) = 2 \frac{\partial \theta_p(\sigma, p)}{\partial \sigma}, \quad x \in S_p. \quad (4.14)$$

Кроме того, из уравнения (1.59) работы [4] следует, что

$$(\nabla \rho(x, p))^2 = \left( \frac{2}{R(\sigma, p)} \right)^{2/3}, \quad x \in S_p, \quad (4.15)$$

где  $R(\sigma, p)$  — радиус кривизны каустики  $S_p$ . После этого (4.13) можно записать в виде

$$2 \frac{\partial \theta_p(\sigma, p)}{\partial \sigma} + \left( \frac{2}{R(\sigma, p)} \right)^{2/3} \rho_p(\sigma, p) = 0. \quad (4.16)$$

В точке касания  $\zeta(p)$  кривой  $S_p$  лучом падающего поля из (3.8) имеем

$$\theta_p(\sigma_0(p), p) = 0, \quad (4.17)$$

где  $\sigma_0(p)$  — длина дуги  $S_p$ , соответствующая точке  $\zeta(p)$ .

Интегрируя (4.16) с учетом (4.17), получаем

$$\theta_p(\sigma, p) = -\frac{1}{2} \int_{\sigma_0(p)}^{\sigma} \rho_p(\sigma', p) \left( \frac{2}{R(\sigma', p)} \right)^{2/3} d\sigma'. \quad (4.18)$$

Из уравнений (4.12) и (4.18) находим  $\theta_p$  и  $\rho_p$ . В частности, для  $\rho_p$  имеем

$$\rho_p(x, p) = \frac{1}{4 \sqrt{\rho(x, p)}} \int_{\sigma_+(x)}^{\sigma_-(x)} \rho_p(\sigma', p) \left( \frac{2}{R(\sigma', p)} \right)^{2/3} d\sigma'. \quad (4.19)$$

Выбирая в (4.19) точку  $x$  на границе тела  $S_0$  и учитывая условие (2.8), получим

$$\tilde{\rho}_p(p) = \frac{1}{4 \sqrt{\tilde{\rho}(p)}} \int_{\sigma_+(x)}^{\sigma_-(x)} \rho_p(\sigma', p) \left( \frac{2}{R(\sigma', p)} \right)^{2/3} d\sigma', \quad x \in S_0, \quad (4.20)$$

откуда следует, что значение интеграла не зависит от положения точки  $x$  на кривой  $S_0$ . Взяв дифференциал от (4.20), имеем

$$\rho_p(\sigma_+, p) \left( \frac{2}{R(\sigma_+, p)} \right)^{2/3} d\sigma_+ = \rho_p(\sigma_-, p) \left( \frac{2}{R(\sigma_-, p)} \right)^{2/3} d\sigma_-, \quad x \in S_0. \quad (4.21)$$

Из сравнения (4.10) и (4.21) следует

$$\sqrt{\frac{|\rho_p(\sigma_+, p)|}{l_+(x, p)}} R^{1/6}(\sigma_+, p) = \sqrt{\frac{|\rho_p(\sigma_-, p)|}{l_-(x, p)}} R^{1/6}(\sigma_-, p), \quad x \in S_0. \quad (4.22)$$

Соотношение (4.22) является строгим следствием условия (2.8) и должно выполняться в произвольной точке  $x$  на кривой  $S_0$ . Мы используем его в разд. 5 при удовлетворении граничных условий (2.9) и (2.16) для амплитуд  $g$  и  $h$ .

Все остальные результаты, относящиеся к решению уравнений (2.4), (2.5) и эффективному определению кривых, представлены в [7].

## 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДНЫХ ФУНКЦИЙ $g$ И $h$

В этом разделе, считая известными функции  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$ , а также кривые  $S_p$ , определим амплитуды  $g(x, p; k)$  и  $h(x, p; k)$ . Мы решим уравнения (2.6) и (2.7), удовлетворяя граничному условию (2.9) в случае задачи первого рода, либо условию (2.16) в случае задачи второго рода. Решения ищем в виде разложения по обратным степеням  $k$  (3.14), (3.15). Будут определены только первые члены этих разложений  $g_0(x, p)$  и  $h_0(x, p)$ , поскольку остальные находятся аналогично. Функции  $g_0$  и  $h_0$  подчиняются уравнениям

$$2\nabla\rho\nabla g_0 + (\Delta\theta)g_0 + 2\rho\nabla\rho\nabla h_0 + \rho(\Delta\rho)h_0 + (\nabla\rho)^2 h_0 = 0; \quad (5.1)$$

$$2\nabla\rho\nabla g_0 + (\Delta\rho)g_0 + 2\nabla\theta\nabla h_0 + (\Delta\theta)h_0 = 0. \quad (5.2)$$

Граничные условия (2.9) и (2.16) для функций  $g_0$  и  $h_0$  переходят в одно условие

$$h_0(x, p) = 0, \quad x \in S_0, \quad (5.3)$$

т. е.  $g_0(x, p)$  и  $h_0(x, p)$  будут одинаковыми в задаче как первого, так и второго рода. С точки зрения амплитуд различие между этими задачами проявляется в высших членах разложений (3.14), (3.15).

Помимо граничного условия (5.3) должно быть выполнено начальное условие (3.21) в точке  $\zeta(p)$  на  $S_p$ . Эти условия полностью исключают произвол в определении функций  $g_0(x, p)$  и  $h_0(x, p)$ .

Чтобы решить уравнения (5.1) и (5.2), введем обозначения

$$g_0(x, p) \pm \sqrt{\rho(x, p)} h_0(x, p) = \rho^{1/4}(x, p) Z_{\pm}(x, p), \quad (5.4)$$

тогда, как показано в работах [2, 4], в силу уравнений (5.1), (5.2)  $Z_{\pm}(x, p)$  подчиняется уравнению переноса геометрической оптики

$$2\nabla\Phi^{\mp}(x, p)\nabla Z_{\pm}(x, p) + (\Delta\Phi^{\pm}(x, p))Z_{\pm}(x, p) = 0, \quad (5.5)$$

решение которого в двумерном случае имеет вид

$$Z_{\pm}(x, p) = \frac{a(\sigma_{\pm})}{|T_{\pm}(x, p)|}. \quad (5.6)$$

где  $a(\sigma)$  — некоторая произвольная функция.

Подставим (5.6) в (5.4) и устремим точку  $x$  на кривую  $S_p$ , тогда,

учитывая, что отношение  $\rho^{1/4}/\sqrt{l_{\pm}}$  имеет конечный предел на каустике  $S_p$ , равный

$$\lim_{x \rightarrow S_p} \frac{\rho^{1/4}(x, p)}{\sqrt{l_{\pm}(x, p)}} = 2^{-1/6} R^{-1/3}(\sigma, p), \quad (5.7)$$

получим

$$g_0(\sigma, p) = \frac{a(\sigma)}{2^{1/6} R^{1/3}(\sigma, p)}. \quad (5.8)$$

Из (5.8) определяем

$$a(\sigma) = 2^{1/6} R^{1/3}(\sigma, p) g_0(\sigma, p). \quad (5.9)$$

Учитывая (5.9) и (5.6), мы можем переписать (5.4) в виде

$$g_0(x, p) \pm \sqrt{\rho(x, p)} h_0(x, p) = 2^{1/6} R^{1/3}(\sigma_{\pm}, p) \frac{g_0(\sigma_{\pm}, p)}{\sqrt{l_{\pm}(x, p)}} \rho^{1/4}(x, p). \quad (5.10)$$

Таким образом, функции  $g_0(x, p)$  и  $h_0(x, p)$  в произвольной точке  $x$ , лежащей снаружи  $S_p$ , определяются через значения  $g$  на кривой  $S_p$ :

$$g_0(x, p) = 2^{-5/6} \rho^{1/4}(x, p) \left[ \frac{R^{1/3}(\sigma_+, p) g_0(\sigma_+, p)}{\sqrt{l_+(x, p)}} + \frac{R^{1/3}(\sigma_-, p) g_0(\sigma_-, p)}{\sqrt{l_-(x, p)}} \right]; \quad (5.11)$$

$$h_0(x, p) = 2^{-5/6} \rho^{-1/4}(x, p) \left[ \frac{R^{1/3}(\sigma_+, p) g_0(\sigma_+, p)}{\sqrt{l_+(x, p)}} - \frac{R^{1/3}(\sigma_-, p) g_0(\sigma_-, p)}{\sqrt{l_-(x, p)}} \right]. \quad (5.12)$$

Чтобы определить функции  $g_0(x, p)$  и  $h_0(x, p)$  для точек, лежащих внутри кривой  $S_p$ , формулы (5.11) и (5.12) должны быть аналитически продолжены.

Подставляя (5.12) в граничное условие (5.3), имеем

$$\frac{R^{1/3}(\sigma_+, p) g_0(\sigma_+, p)}{\sqrt{l_+(x, p)}} = \frac{R^{1/3}(\sigma_-, p) g_0(\sigma_-, p)}{\sqrt{l_-(x, p)}}, \quad x \in S_0. \quad (5.13)$$

Выражение (5.13) представляет собой функциональное уравнение для определения функции  $g_0(\sigma, p)$ . Как следствие условия (2.8) в предыдущем разделе нами было получено соотношение (4.22), справедливое для любой точки  $x$  на  $S_0$ .

Из сравнения (5.13) и (4.22) следует, что

$$g_0(\sigma, p) = C(p) \frac{\sqrt{|\rho_p(\sigma, p)|}}{R^{1/6}(\sigma, p)}, \quad (5.14)$$

где  $C(p)$  — постоянная, подлежащая определению.

Постоянную  $C(p)$  определяем из условия (3.21):

$$C(p) = Z_0^i(\zeta(p)) R^{1/6}(\sigma_0(p), p) \sqrt{|\rho_p(\sigma_0, p)|} \exp\left(-i \frac{\pi}{4} \delta\right). \quad (5.15)$$

Формулы (5.11), (5.12), (5.14) и (5.15) полностью решают задачу определения амплитуд  $g_0(x, p)$  и  $h_0(x, p)$ .

Подведем итоги решения задачи дифракции на выпуклом теле, данного в части I нашей работы. Чтобы найти интегральное представление решения, нужно по заданной границе тела  $S_0$  построить семейство кривых  $S_p$ , характеризующее лучевую структуру частных решений, определить функции  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$ , а также амплитуды  $g(x, p; k)$  и  $h(x, p; k)$ . В данной работе мы получили условия для эффективного нахождения семейства  $S_p$  и сформулировали следствия из этих условий, проанализировали некоторые геометрические свойства кривых  $S_p$ . Опираясь на это, мы нашли точное решение уравнений переноса для функций  $g_0(x, p)$  и  $h_0(x, p)$ , удовлетворяющее необходимым начальным и граничным условиям. Величины, входящие в это решение, будут полностью определены, после того как будут приведены результаты определения семейства кривых  $S_p$  и решения уравнений (2.4) и (2.5) для функций  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$ . Этим вопросам посвящена часть II настоящей работы [7].

В заключение автор приносит свою искреннюю благодарность Б. Е. Кинберу и В. И. Токатлы за многочисленные дискуссии по вопросам, затронутым в этой работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D. Ludwig, Comm. Pure Appl. Math., **20**, 103 (1967).
2. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **7**, № 4, 664 (1964).
3. Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **7**, № 6, 1049 (1964).
4. D. Ludwig, Comm. Pure Appl. Math., **19**, 215 (1966).
5. J. B. Keller, J. Optical Soc. Amer., **52**, 116 (1962).
6. М. В. Федорюк, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **2**, № 1, 145 (1962).
7. Е. А. Леонтьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати).

Поступила в редакцию  
4 декабря 1970 г.

#### SHORTWAVE ASYMPTOTICS OF SOLVING THE PROBLEM OF DIFFRACTION ON CONVEX BODY. I

E. A. Leont'ev

The integral representation is obtained for the field scattered by a convex arbitrary-shape cylinder. The solution is the uniform asymptotic expansion valid both in the illuminated and shadow regions. The incident field is arbitrary, given by its geometrical optics expansion.

УДК 538 566

## КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ВЫПУКЛОМ ТЕЛЕ. II

*E. A. Леонтьев*

Результаты, сформулированные в части II настоящей работы, завершают построение коротковолновой асимптотики решения задачи дифракции геометрооптического поля на выпуклом цилиндре произвольной формы. В явном виде найдены семейство каустических кривых  $S_p$ , а также функции  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$ , входящие в интегральное представление решения.

В части I нашей работы [1] было рассмотрено интегральное представление решения задачи дифракции на выпуклом цилиндре произвольной формы. Для получения решения необходимо найти семейство каустических кривых  $S_p$ , характеризующее лучевую структуру входящих в интеграл решений волнового уравнения, аргументы  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$ , амплитуды  $g(x, p; k)$  и  $h(x, p; k)$ . В работе [1] мы нашли функции  $g(x, p; k)$  и  $h(x, p; k)$ , выразив их через геометрические характеристики кривых  $S_p$  и функции  $\rho(x, p)$  и  $\rho_p(x, p)$ . Там же мы сформулировали условия для эффективного нахождения семейства  $S_p$  и рассмотрели некоторые из его геометрических свойств. В данной работе будут найдены семейство кривых  $S_p$  и функции  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$ . Этим исчерпывается определение величин, входящих в интегральное представление решения интересующей нас задачи.

### 1. НАХОЖДЕНИЕ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ $S_p$ И ФУНКЦИИ $\theta(x, p)$ И $\rho(x, p)$

Как следует из разд. 4 работы [1], определение кривых  $S_p$  по заданной кривой  $S_0$ , являющейся границей тела, связано с решением уравнений для функций  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$ :

$$(\nabla \theta(x, p))^2 + \rho(x, p)(\nabla \rho(x, p))^2 = 1; \quad (1.1)$$

$$\nabla \theta(x, p) \nabla \rho(x, p) = 0, \quad (1.2)$$

и удовлетворением условию на кривой  $S_0$ :

$$\rho(x, p) = \tilde{\rho}(p), \quad x \in S_0. \quad (1.3)$$

Из анализа [1] геометрических свойств кривых  $S_p$  следует метод построения их, основанный на многократном отражении луча, пущенного внутрь  $S_0$ , в случае, когда  $S_0$  — замкнутая кривая. Кривая  $S_p$  является огибающей этих многократно отраженных от  $S_0$  лучей. Кривые  $S_p$ , лежащие внутри  $S_0$ , очевидно, совпадают с каустиками волн типа «шепчущей галереи» резонатора, ограниченного кривой  $S_0$ . Способ построения кривых  $S_p$ , основанный на нахождении огибающей многократно отраженных лучей, хотя и позволяет в принципе найти кривые  $S_p$ , предполагает, очевидно, использование численных методов.

Анализ асимптотических свойств точного решения задачи дифракции плоской волны на круговом цилиндре показывает, что для описания

перехода от сильно освещенной области, где справедлива геометрическая оптика, к области глубокой тени достаточно знания кривых  $S_p$ , лежащих в некоторой окрестности вблизи кривой  $S_0$  по обе стороны от нее.

Для нахождения этих кривых мы воспользуемся разложением функций  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$  в степенной ряд около точки  $p = 0$ , поскольку кривой  $S_0$  соответствует значение параметра  $p = 0$ :

$$\theta(x, p) = \theta(x, 0) + \theta_p(x, 0)p + \frac{1}{2} \theta_{pp}(x, 0)p^2 + \dots; \quad (1.4)$$

$$\rho(x, p) = \rho(x, 0) + \rho_p(x, 0)p + \frac{1}{2} \rho_{pp}(x, 0)p^2 + \dots \quad (1.5)$$

Необходимо определить функции, стоящие в правой части (1.4) и (1.5), после чего  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$  будут приближенно найдены. После этого кривые  $S_p$  из окрестности  $S_0$  можно определить из уравнения

$$\rho(x, 0) + \rho_p(x, 0)p + \frac{1}{2} \rho_{pp}(x, 0)p^2 + \dots = 0, \quad (1.6)$$

$(\rho(x, p) = 0, \text{ когда } x \in S_p).$

Аналогичный способ нахождения кривых  $S_p$  был рассмотрен в работе [2], однако там не использовалось жесткое условие (1.3). В нашем случае функция  $\tilde{\rho}(p)$  является граничным значением функции  $\rho(x, p)$  на кривой  $S_0$ , причем предполагается, что оно не зависит от положения точки  $x$  на кривой  $S_0$ . Функция  $\tilde{\rho}(p)$  целиком определяется способом параметризации семейства кривых  $S_p$  (в зависимости от параметра  $p$ ), который обладает достаточным произволом, чтобы им распорядиться по собственному усмотрению.

В работе [1] мы предполагали, что кривым  $S_p$ , лежащим снаружи  $S_0$ , соответствуют значения  $p > 0$ , внутри  $S_0$   $p < 0$ . Учитывая, что  $\rho(x, p) > 0$  ( $\rho(x, p) < 0$ ), когда точка  $x$  лежит снаружи кривой  $S_p$  (внутри  $S_p$ ), получим из условия (1.3), что  $\tilde{\rho}(p) \geq 0$  при  $p \leq 0$  и  $\tilde{\rho}(p) < 0$  при  $p > 0$ . Имея это в виду, мы положим

$$\tilde{\rho}(p) = -p. \quad (1.7)$$

Тем самым мы выбрали определенный способ параметризации семейства кривых  $S_p$ .

Теперь мы переходим к нахождению функций, стоящих в правых частях (1.4) и (1.5). Функции  $\theta(x, 0)$  и  $\rho(x, 0)$  находятся из уравнений (1.1) и (1.2) при  $p = 0$  или из эквивалентного им уравнения эйконала при  $p = 0$ :

$$(\nabla \Phi^\pm(x, p))^2 = 1. \quad (1.8)$$

Каустикой лучей, связанных с  $\Phi^\pm(x, p)$ , является исходная кривая  $S_0$ . Решение этого уравнения может быть записано в виде

$$\Phi^\pm(x, 0) = s_\pm(x) \pm l_\pm(x, 0), \quad (1.9)$$

где  $s_\pm(x)$  — длина дуги кривой  $S_0$  в точках касания лучей, проходящих через точку  $x$ ,  $l_\pm(x, 0)$  — расстояния вдоль лучей от точки  $x$  до точек касания. В приложении 1 найдены решения для функций  $\theta(x, 0)$ ,  $\rho(x, 0)$  и  $\Phi^\pm(x, 0)$ , справедливые вблизи кривой  $S_0$ .

Функции  $\theta_p(x, 0)$  и  $\rho_p(x, 0)$  находятся из уравнений, которые получаются дифференцированием по  $p$  уравнений (1.1) и (1.8). Эта про-

цедура уже рассматривалась нами в разд. 4 части I [1]. Там была получена формула (4.20), из которой следует

$$\Phi_p^\pm(x, 0) = \theta_p(x, 0) \pm V\varphi(x, 0) \rho_p(x, 0) = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_\pm} \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{2/3} ds', \quad (1.10)$$

где  $R_0(s)$  — радиус кривизны кривой  $S_0$  как функция длины ее дуги,  $s_0$  — длина дуги в точке касания кривой  $S_0$  падающим лучом, образующим границу геометрической тени за телом. При получении (1.10) мы учли условие (1.3) и (1.7). Из (1.10) следует

$$\theta_p(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ \int_{s_0}^{s_+} \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{2/3} ds' + \int_{s_0}^{s_-} \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{2/3} ds' \right]; \quad (1.11)$$

$$\rho_p(x, 0) = - \frac{1}{4V\varphi(x, 0)} \int_{s_+}^{s_-} \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{2/3} ds'. \quad (1.12)$$

Формулы (1.11) и (1.12) справедливы всюду снаружи кривой  $S_0$ . Для точек  $x$ , лежащих внутри  $S_0$ , эти формулы должны быть аналитически продолжены.

В приложении 2 вычислены функции  $\rho_{pp}(x, 0)$  и  $\theta_{pp}(x, 0)$ . Результаты есть

$$\begin{aligned} \rho_{pp}(x, 0) = & \frac{1}{2V\varphi(x, 0)} \left\{ \left[ \left( \frac{R_0(s_+)}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{l_+(x, 0)} + \left( \frac{R_0(s_-)}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{l_-(x, 0)} \right] - \right. \\ & - \frac{\rho_p^2(x, 0)}{V\varphi(x, 0)} + \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{2}{R_0(s_+)} \right)^{1/3} R'_0(s_+) - \left( \frac{2}{R_0(s_-)} \right)^{1/3} R'_0(s_-) \right] - \quad (1.13) \\ & \left. - \int_{s_+}^{s_-} \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \left[ \frac{1}{30R_0(s)} + \frac{8R_0'^2(s)}{135R_0(s)} - \frac{4R_0''(s)}{45} \right] ds \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{pp}(x, 0) = & \frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{R_0(s_+)}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{l_+(x, 0)} - \left( \frac{R_0(s_-)}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{l_-(x, 0)} \right] + \right. \\ & + \frac{1}{6} \left[ \left( \frac{2}{R_0(s_+)} \right)^{1/3} R'_0(s_+) + \left( \frac{2}{R_0(s_-)} \right)^{1/3} R'_0(s_-) \right] + \left( \frac{2}{R_0(s_0)} \right)^{1/3} \times \quad (1.14) \\ & \times \left. \left( \frac{R_0(s_0)}{R(\zeta(0))} - \frac{R'_0(s_0)}{3} \right) + F(s_+) + F(s_-) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$F(s) = \int_{s_0}^s \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{1/3} \left( \frac{1}{30R_0(s')} + \frac{8R_0'^2(s')}{135R_0(s')} - \frac{4R_0''(s')}{45} \right) ds', \quad (1.15)$$

$R(\zeta(0))$  — радиус кривизны фронта падающей волны в точке начала границы геометрической тени. Несмотря на то, что в формулах (1.13) и (1.14) в знаменателе стоит функция  $l_\pm(x, 0)$ , обращающаяся в нуль при  $x \in S_0$ , они дают конечный результат для точек  $x$  на  $S_0$ . В частности,

$$\rho_{pp}(x, 0) = 0, \quad x \in S_0 \quad (1.16)$$

в соответствии с (1.13) и (1.7).

Аналогично могут быть найдены высшие производные по  $p$  от функций  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$  при  $p = 0$ . При этом в формулы будут входить высшие производные радиуса кривизны кривой  $S_0$  и производные радиуса кривизны фронта падающей волны, проходящего через точку касательного падения.

Чтобы найти кривые  $S_p$ , лежащие в окрестности  $S_0$ , необходимо рассмотреть поведение функций  $\rho(x, 0)$ ,  $\rho_p(x, 0)$ ,  $\rho_{pp}(x, 0)$ , ... в окрестности кривой  $S_0$ . Мы проделаем это, пользуясь каустическими координатами, связанными с  $S_0$ . Связь каустических координат  $(s, \eta)$  с декартовыми  $(x, y)$  выражается уравнениями

$$x = x_0(s) + \eta \sin \varphi_0(s); \quad (1.17)$$

$$y = y_0(s) - \eta \cos \varphi_0(s), \quad (1.18)$$

где  $x = x_0(s)$ ,  $y = y_0(s)$  — уравнения кривой  $S_0$  как функции натурального параметра,  $\varphi_0(s)$  — угол наклона касательной к кривой  $S_0$ ,

$n = \{\sin \varphi_0(s), -\cos \varphi_0(s)\}$  — единичный вектор нормали к  $S_0$ ,  $\frac{d\varphi_0}{ds} =$

$= \frac{1}{R_0(s)}$ . Точкам, лежащим снаружи  $S_0$ , соответствует  $\eta > 0$ , внутри  $S_0$   $\eta < 0$ .

Из формулы (П1.14) следует, что при  $\eta/R_0(s) \ll 1$  поведение функции  $\rho(x, 0)$  определяется разложением, первые два члена которого имеют вид

$$\rho(x, 0) = \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \eta - \frac{1}{10} \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \left( \frac{3}{R_0(s)} - \frac{2R_0'^2(s)}{9R_0(s)} + \frac{R_0''(s)}{3} \right) \eta^2 + \dots \quad (1.19)$$

Из (1.12) вблизи  $S_0$  получаем (см. (П2.8))

$$\rho_p(x, 0) = -1 + \frac{4}{15} \left( \frac{1}{R_0(s)} + \frac{R_0'^2(s)}{9R_0(s)} - \frac{R_0''(s)}{6} \right) \eta + \dots \quad (1.20)$$

Заметим, что формулы (1.19) и (1.20) решают задачу аналитического продолжения функций  $\rho(x, 0)$  и  $\rho_p(x, 0)$  внутрь кривой  $S_0$ . Для этого в них нужно положить  $\eta < 0$ .

Уравнение кривой  $S_p$  в каустических координатах имеет вид

$$\eta = \eta(s, p). \quad (1.21)$$

Мы будем искать эту функцию в виде разложения по степеням

$$\eta(s, p) = \eta_1(s)p + \eta_2(s)p^2 + \dots \quad (1.22)$$

Подставляя (1.19), (1.20) и (1.16) с учетом (1.22) в уравнение (1.6) и приравнивая нуль коэффициенты при одинаковых степенях  $p$ , находим

$$\eta_1(s) = \left( \frac{R_0(s)}{2} \right)^{1/3}; \quad (1.23)$$

$$\eta_2(s) = \left( \frac{R_0(s)}{2} \right)^{2/3} \left( \frac{1}{30R_0(s)} - \frac{7R_0'^2(s)}{135R_0(s)} + \frac{7R_0''(s)}{90} \right). \quad (1.24)$$

Следующий член разложения  $\eta_3(s)$  получается из формул (П1.14), (1.12) и (1.13), если их разложить до степеней  $\eta$  более высокого порядка, и в принципе мы можем вычислить сколько угодно членов ряда (1.22). Уравнение кривой  $S_p$  в декартовых координатах получается подстановкой (1.21) в (1.17), (1.18). Заметим, однако, что при  $p \neq 0$   $s$  уже не является натуральным параметром.

Таким образом, мы нашли кривые из семейства  $S_p$ , лежащие в окрестности границы тела, и геометрические характеристики этих кривых, использованные в работе [1], приобретают вполне определенный смысл.

Формулы (1.4), (1.5), а также (1.11)–(1.14) пригодны не только для нахождения кривых  $S_p$ , но и могут быть использованы для определения функций  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$ , соответствующих этим кривым. Мы считаем при этом, что функции  $\theta(x, 0)$  и  $\rho(x, 0)$ , связанные с кривой  $S_0$ , нам известны всюду (они могут быть выражены через решения уравнения эйконала (1.9)). Эти формулы определяют функции  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$  через параметры, относящиеся к кривой  $S_0$ . Функция  $\rho(x, p)$  не зависит от характеристик падающего поля, и, вследствие этого, от них не зависят найденные кривые  $S_p$ . Напротив, функция  $\theta(x, p)$  зависит от  $s_0$ , радиуса кривизны фронта падающей волны и его высших производных и, таким образом, несет информацию о структуре падающего поля. Функция  $\rho_p(x, p)$ , входящая в определение амплитуд  $g_0(x, p)$  и  $h_0(x, p)$  (см. формулу (5.14) работы [1]), также может быть найдена из формул (1.12) и (1.13):

$$\rho_p(x, p) = \rho_p(x, 0) + \rho_{pp}(x, 0)p + \dots \quad (1.25)$$

Помимо формул (1.4), (1.5), (1.11)–(1.14) для определения функции  $\theta(x, p)$  и  $\rho(x, p)$  можно непосредственно использовать известные нам каустики  $S_p$ .

Таким образом, учитывая результаты, полученные в части I [1], а также приведенные в настоящей работе, мы можем считать решенной задачу получения интегрального представления асимптотического решения, описывающего дифракцию заданного геометрооптического поля на произвольном выпуклом цилиндре. Дальнейшая задача заключается в оценке полученного интеграла в различных областях и в сведении его к известным стандартным интегралам. Эта работа близка к завершению.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Вычисление $\rho(x, 0)$ , $\theta(x, 0)$ и $\Phi^\pm(x, 0)$

В этом Приложении мы находим формулы, описывающие поведение функций  $\rho(x, 0)$ ,  $\theta(x, 0)$  и  $\Phi^\pm(x, 0)$  в окрестности кривой  $S_0$ . Все вычисления проводятся в каустических координатах (1.17), (1.18), связанных с  $S_0$ .

Вычислим сначала  $\Phi^\pm(x, 0)$ . Запишем уравнение эйконала (1.8) в каустических координатах

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{R_0^2(s)}{(R_0(s) + \eta)^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 = 1. \quad (\text{П 1.1})$$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям (3.12), (3.13) работы [1], будем искать в виде разложения

$$\Phi = s + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{2}{m} A_{m-2}(s) \eta^{m/2}, \quad s_0 = \Phi_i(\zeta(0)). \quad (\text{П 1.2})$$

Такая форма решения следует из регулярности функций  $\theta(x, 0)$  и  $\rho(x, 0)$ , в окрестности кривой  $S_0$ . Подставляя (П1.2) в уравнение (П1.1), а также учитывая, что

$$\frac{R_0^2(s)}{(R_0(s)+\eta)^2} = 1 - 2 \frac{\eta}{R_0(s)} + 3 \frac{\eta^2}{R_0^2(s)} - 4 \frac{\eta^3}{R_0^3(s)} + \dots, \quad (\text{П1.3})$$

и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\eta$ , получим систему рекуррентных уравнений:

$$A_1^2(s) = \frac{2}{R_0(s)}; \quad (\text{П1.4})$$

$$2A_1A_2 + (4/3)A_1' = 0; \quad (\text{П1.5})$$

$$2A_1A_3 + A_2^2 + A_2' + \frac{3}{R_0^2(s)} = 0; \quad (\text{П1.6})$$

$$2A_1A_4 + 2A_2A_3 + \frac{4}{5}A_3' - \frac{8}{3}\frac{A_1'}{R_0(s)} = 0; \quad (\text{П1.7})$$

$$2A_1A_5 + 2A_2A_4 + \frac{2}{3}A_4' + A_3^2 - 2\frac{A_2'}{R_0(s)} + \frac{4}{9}A_1'^2 - \frac{4}{R_0^3(s)} = 0. \quad (\text{П1.8})$$

Из уравнений (П1.4) — (П1.8) находим коэффициенты разложения

$$A_1(s) = \pm \sqrt{\frac{2}{R_0(s)}}; \quad (\text{П1.9})$$

$$A_2(s) = \frac{1}{3} \frac{R_0'(s)}{R_0(s)}; \quad (\text{П1.10})$$

$$A_3(s) = \mp \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{R_0(s)}} \left( \frac{3}{R_0(s)} - \frac{2R_0'^2(s)}{9R_0(s)} + \frac{R_0''(s)}{3} \right); \quad (\text{П1.11})$$

$$A_4(s) = -\frac{13}{15} \frac{R_0'(s)}{R_0^2(s)} + \frac{2R_0'^3(s)}{135R_0^2(s)} - \frac{R_0'(s)R_0''(s)}{30R_0(s)} + \frac{R_0'''(s)}{30}; \quad (\text{П1.12})$$

$$A_5(s) = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{R_0(s)}} \left( \frac{23}{8R_0^2(s)} - \frac{13R_0'^2(s)}{10R_0^2(s)} + \frac{R_0'^4(s)}{270R_0^2(s)} + \frac{179R_0''(s)}{180R_0(s)} - \frac{R_0'^2R_0''(s)}{90R_0(s)} + \frac{R_0'^2(s)}{120} - \frac{R_0^{(4)}R_0(s)}{45} \right). \quad (\text{П1.13})$$

Верхний знак в формулах (П1.9) — (П1.13) соответствует  $\Phi^+(x, 0)$ , нижний —  $\Phi^-(x, 0)$ . Подставляя (П1.2) в формулы (4.1), (4.2) части 1 [1] и разлагая в ряд по степеням  $\eta$ , получим

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) = & \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \eta - \frac{1}{10} \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \left( \frac{3}{R_0(s)} - \frac{2R_0'^2(s)}{9R_0(s)} + \frac{R_0''(s)}{3} \right) \eta^2 + \\ & + \frac{1}{175} \left( \frac{32}{R_0^2(s)} - \frac{47R_0'^2(s)}{3R_0^2(s)} + \frac{2R_0'^4(s)}{81R_0^2(s)} + \frac{104R_0''(s)}{9R_0(s)} - \right. \end{aligned} \quad (\text{П1.14})$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2R_0'^2 R_0''(s)}{27R_0(s)} + \frac{R_0''^2(s)}{18} - \frac{5R_0^{(4)}(s)}{18} \Big) \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \eta^3 + \dots; \\
 & \theta(x, 0) = s + \frac{1}{6} \frac{R_0'(s)}{R_0(s)} \eta^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{13R_0'(s)}{15R_0^2(s)} - \frac{2R_0'^3(s)}{135R_0^2(s)} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{R_0'(s)R_0''(s)}{30R_0(s)} - \frac{R_0'''(s)}{30} \right) \eta^3 + \dots \tag{П 1.15}
 \end{aligned}$$

Из (1.17) и (1.18) следует

$$\nabla \eta = n(s) = (\sin \varphi_0(s), -\cos \varphi_0(s)); \tag{П1.16}$$

$$\nabla s = \frac{R_0(s)}{\eta + R_0(s)} \tau(s); \tag{П1.17}$$

$$\tau(s) = (\cos \varphi_0(s), \sin \varphi_0(s)). \tag{П1.18}$$

Вычисляя  $\nabla \rho(x, 0)$  при  $x = S_0$ , находим из (П1.14) и (П1.16)

$$\nabla \rho(x, 0) = \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} n(s), \quad x \in S_0. \tag{П1.19}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Вычисление $\rho_{pp}(x, 0)$ , $\theta_{pp}(x, 0)$ и $\Phi_{pp}^\pm(x, 0)$

В этом Приложении мы получим формулы для вторых производных по  $p$  функций  $\rho(x, p)$ ,  $\theta(x, p)$  и  $\Phi^\pm(x, p)$ . Для этого нам необходимо определить из (1.11), (1.12) поведение  $\theta_p(x, 0)$  и  $\rho_p(x, 0)$  вблизи кривой  $S_0$ . Вычисления будем проводить в каустических координатах  $(s, \eta)$ . Нам нужно выразить величины  $s_\pm(x)$ ,  $l_\pm(x, 0)$  через  $s$ ,  $\eta$ . Связь между ними определяется формулами (1.17), (1.18) и

$$x = x_0(s_\pm) \pm l_\pm(x, 0) \cos \varphi_0(s_\pm); \tag{П2.1}$$

$$y = y_0(s_\pm) \pm l_\pm(x, 0) \sin \varphi_0(s_\pm). \tag{П2.2}$$

Можно показать, что вблизи кривой  $S_0$

$$\begin{aligned}
 l_\pm(x, 0) &= \sqrt{2R_0(s)} \eta^{1/2} + \frac{2}{3} R_0'(s) \eta + \\
 &+ \left( \frac{1}{4R_0(s)} + \frac{R_0'^2(s)}{18R_0(s)} + \frac{R_0''(s)}{4} \right) \sqrt{2R_0(s)} \eta^{3/2} + \dots; \tag{П2.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_\pm(x) &= s \mp \sqrt{2R_0(s)} \eta^{1/2} + \frac{2}{3} R_0'(s) \eta \pm \\
 &\pm \left( \frac{5}{12R_0(s)} - \frac{R_0'^2(s)}{18R_0(s)} - \frac{R_0''(s)}{4} \right) \sqrt{2R_0(s)} \eta^{3/2} + \dots \tag{П2.4}
 \end{aligned}$$

Чтобы оценить  $\rho_p(x, 0)$  вблизи кривой  $S_0$ , в формуле (1.12) необходимо оценить интеграл. Представим его в виде

$$\int_{s_+}^{s_-} \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{2/3} ds' = \int_s^{s_-} \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{2/3} ds' - \int_s^{s_+} \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{2/3} ds'. \quad (\text{П2.5})$$

Для интегралов в правой части (П2.5) запишем разложение в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \int_s^{\pm} \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{2/3} ds' &= \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{2/3} (s_{\pm} - s) - \frac{1}{3} \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{2/3} \times \\ &\times \frac{R'_0(s)}{R_0(s)} (s_{\pm} - s)^2 + \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{2/3} \left[ \frac{5R'^2_0}{27R_0^2} - \frac{R''_0}{9R_0} \right] (s_{\pm} - s)^3. \end{aligned} \quad (\text{П2.6})$$

С учетом (П2.4), интеграл (П2.5) равен

$$\begin{aligned} \int_{s_+}^{s_-} \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{2/3} ds' &= \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{2/3} 2\sqrt{2R_0(s)} \eta^{1/2} \times \\ &\times \left[ 1 - \left( \frac{5}{12R_0(s)} + \frac{R'^2_0(s)}{54R_0(s)} - \frac{R''_0(s)}{36} \right) \eta + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{П2.7})$$

Подставляя (П2.7) и (П1.14) в (1.12) и разлагая в ряд по степеням  $\eta$ , получим

$$\rho_p(x, 0) = -1 + \frac{4}{15} \left( \frac{1}{R_0(s)} + \frac{R'^2_0(s)}{9R_0(s)} - \frac{R''_0(s)}{6} \right) \eta + \dots \quad (\text{П2.8})$$

Поступая совершенно аналогично с формулой (1.11), имеем оценку

$$\theta_p(x, 0) = \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{2/3} ds' + \gamma(s) \eta^2 + \dots, \quad (\text{П2.9})$$

где  $\gamma(s)$  — величина, зависящая от  $R_0(s)$  и его производных.

Теперь мы можем перейти к вычислению  $\rho_{pp}(x, 0)$ ,  $\theta_{pp}(x, 0)$  и  $\Phi_{pp}^{\pm}(x, 0)$ . Поступаем аналогично случаю вычисления первых производных этих величин, описанному в разд. 4 работы [1]. Дифференцируя (4.8) два раза по  $p$  и полагая  $p = 0$ , получим

$$\nabla \Phi^{\pm}(x, 0) \nabla \Phi_{pp}^{\pm}(x, 0) + (\nabla \Phi_p^{\pm}(x, 0))^2 = 0. \quad (\text{П2.10})$$

Мы нашли функцию  $\Phi_p^{\pm}(x, 0)$  (см. (1.10)):

$$\Phi_p^{\pm}(x, 0) = \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s_{\pm}} \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{2/3} ds'. \quad (\text{П2.11})$$

Вычислим теперь  $\nabla \Phi_p^{\pm}(x, 0)$ :

$$\nabla \Phi_p^{\pm}(x, 0) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{R_0(s_{\pm})} \right)^{2/3} \nabla s_{\pm}(x). \quad (\text{П2.12})$$

Из (П2.1) и (П2.2) следует:

$$\nabla s_{\pm}(x) = \mp \frac{R_0(s_{\pm})}{l_{\pm}(x, 0)} n(s_{\pm}). \quad (\text{П2.13})$$

Учитывая (П2.12) и (П2.13), мы можем записать уравнение (П2.10) в виде

$$\pm \frac{\partial \Phi_{pp}^{\pm}(x, 0)}{\partial l_{\pm}(x, 0)} + \left( \frac{R_0(s_{\pm})}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{l_{\pm}^2(x, 0)} = 0. \quad (\text{П2.14})$$

Интегрируя (П2.14) вдоль лучей, получаем

$$\Phi_{pp}^{\pm}(x, 0) = \pm \left( \frac{R_0(s_{\pm})}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{l_{\pm}(x, 0)} + b(s_{\pm}), \quad (\text{П2.15})$$

где  $b(s)$  — некоторая произвольная функция, подлежащая определению. С другой стороны,

$$\Phi_{pp}^{\pm}(x, 0) = \theta_{pp}(x, 0) \pm \sqrt{\rho(x, 0)} \rho_{pp}(x, 0) \pm \frac{\rho_p^2(x, 0)}{2\sqrt{\rho(x, 0)}}. \quad (\text{П2.16})$$

Подставим (П2.15) в (П2.16) и устремим точку  $x$  на кривую  $S_0$ . тогда, согласно (П2.3), (П2.4), а также (П2.8) и (П1.14), получим

$$b(s) = \theta_{pp}(s, 0) + \left( \frac{R_0(s)}{2} \right)^{2/3} \frac{R'_0(s)}{3R_0(s)}. \quad (\text{П2.17})$$

Таким образом, необходимо знать  $\theta_{pp}(s, 0)$  как функцию точки на кривой  $S_0$ . Дифференцируя (1.1) два раза по  $p$ , полагая  $p = 0$  и выбирая точку  $x$  на  $S_0$ , получим с учетом (1.3) и (1.7)

$$2\nabla\theta(x, 0)\nabla\theta_{pp}(x, 0) + 2(\nabla\theta_p(x, 0))^2 - 4\nabla\rho(x, 0)\nabla\rho_p(x, 0) = 0, \quad x \in S_0. \quad (\text{П2.18})$$

Из (П2.8), (П2.9) и (П1.19), (П1.16), (П1.17) следует

$$\nabla\theta_p(x, 0) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{2/3} \tau(s), \quad x \in S_0; \quad (\text{П2.19})$$

$$\nabla\rho(x, 0)\nabla\rho_p(x, 0) = \frac{4}{15} \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \left( \frac{1}{R_0(s)} + \frac{R_0'^2(s)}{9R_0(s)} - \frac{R_0''(s)}{6} \right), \quad x \in S_0. \quad (\text{П2.20})$$

В соответствии с (П2.19) и (П2.20) уравнение (П2.18) можно записать в виде

$$2 \frac{\partial\theta_{pp}(s, 0)}{\partial s} - \left( \frac{2}{R_0(s)} \right)^{1/3} \left( \frac{1}{15R_0(s)} + \frac{16R_0'^2(s)}{135R_0(s)} - \frac{8R_0''(s)}{45} \right) = 0. \quad (\text{П2.21})$$

К этому уравнению необходимо добавить начальные условия, которые получаются из формулы (4.18) части I [1] дифференцированием по  $p$ :

$$\theta_{pp}(\zeta(p), p) + \nabla\theta_p(\zeta(p), p) \frac{d\zeta(p)}{dp} = 0. \quad (\text{П2.22})$$

Полагая  $p = 0$  и учитывая (П2.19), будем иметь

$$\theta_{pp}(s_0, 0) = - \frac{1}{2} \left( \frac{2}{R_0(s_0)} \right)^{2/3} \frac{d\zeta(0)}{dp} \tau(s_0). \quad (\text{П2.23})$$

Путем довольно длинных, но простых выкладок можно показать, что

$$\frac{d\zeta(0)}{dp} \pi(s_0) = \left(\frac{R_0(s_0)}{2}\right)^{1/3} \left[ -\frac{R_0(s_0)}{R(\zeta(0))} + \frac{R'_0(s_0)}{3} \right], \quad (\text{П2.24})$$

где  $R(\zeta(0))$  — радиус кривизны фронта падающей волны в точке касательного падения, вычисляемый по формуле

$$-\frac{1}{R(x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \Phi_t}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi_t}{\partial y^2} & \frac{\partial \Phi_t}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_t}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_t}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{П2.25})$$

Начальное условие (П2.23), таким образом, может быть записано в виде

$$\theta_{pp}(s_0, 0) = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{R_0(s_0)} \right)^{1/3} \left[ \frac{R_0(s_0)}{R(\zeta(0))} - \frac{R'_0(s_0)}{3} \right]. \quad (\text{П2.26})$$

Интегрируя (П2.21) при условии (П2.26), получаем

$$\begin{aligned} \theta_{pp}(s, 0) = & \int_{s_0}^s \left( \frac{2}{R_0(s')} \right)^{1/3} \left( \frac{1}{30R_0(s')} + \frac{8R_0'^2(s')}{135R_0(s')} - \frac{4R_0''(s')}{45} \right) ds' + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{2}{R_0(s_0)} \right)^{1/3} \left[ \frac{R_0(s_0)}{R(\zeta(0))} - \frac{R'_0(s_0)}{3} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П2.27})$$

Из (П2.15) — (П2.17) и (П2.27) следуют формулы (1.13) и (1.14).

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Е. А. Леонтьев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 14, № 10, 1574 (1971).
2. D. Ludwig, Comm. Pure and Appl. Math., 20, 103 (1967).

Поступила в редакцию  
4 декабря 1970 г.

#### SHORTWAVE ASYMPTOTICS OF SOLVING THE PROBLEM OF DIFFRACTION ON A CONVEX BODY. II

E. A. Leont'ev

The results formulated in part II of the present paper complete the construction of the shortwave asymptotics of solving the problem on diffraction of the geometrical-optics field on a convex cylinder of the arbitrary form. The family of caustic curves  $S_p$ , as well as the functions  $\theta(x, p)$  and  $\rho(x, p)$  in the integral representation of the solution are found in the explicit form.

УДК 538.574.4

**РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ТОНКИМ  
БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ СТЕРЖНЕМ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ**

Л. К. Гал, Н. А. Хижняк

Методом интегральных уравнений рассмотрено рассеяние произвольно падающей монохроматической волны тонким бесконечно длинным изотропным диэлектрическим и металлическим стержнем эллиптического сечения. С точностью до величин  $(a/\lambda)^2$  включительно построены матрицы рассеяния, определяющие поле в волновой зоне. С той же точностью найдены распределения индуцированных зарядов и токов на металлическом стержне. Установлено соответствие между задачами рассеяния на изотропных диэлектрических и металлических объектах.

Задача о рассеянии электромагнитных волн на металлических стержнях произвольного поперечного сечения представляет как практический (применительно к теории антенн), так и самостоятельный теоретический интерес. Решению этой задачи посвящено большое количество работ, так как условия задачи могут широко варьироваться в зависимости от типа и поляризации падающей волны, а также геометрии поперечного сечения стержня. В настоящей работе эта задача формулируется в весьма общей форме, допускающей единый подход к различным уже рассмотренным случаям, а также исследование ряда новых конкретных случаев. С физической точки зрения предлагаемое рассмотрение интересно тем, что на базе единых интегральных уравнений оказывается возможным решение задач по рассеянию электромагнитных волн как на диэлектрических телах с произвольными параметрами анизотропии по  $\epsilon$  и  $\mu$ , так и на металлических телах с изотропной и анизотропной проводимостью токов. Поскольку предлагаемый метод еще не обсуждался в литературе, остановимся более подробно на исходных интегральных уравнениях и на соответствии задач о рассеянии волн на диэлектрических и металлических телах одной и той же геометрии.

Исходными уравнениями являются следующие интегральные уравнения, полностью эквивалентные уравнениям Максвелла для полей, зависимость которых от времени имеет вид  $e^{i\omega t}$  (в дальнейшем этот временной множитель опускаем):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + (\text{grad div} + k^2 \epsilon_1 \mu_1) \Pi^\epsilon - ik \mu_1 \text{rot} \Pi^\mu; \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + (\text{grad div} + k^2 \epsilon_1 \mu_1) \Pi^\mu + ik \epsilon_1 \text{rot} \Pi^\epsilon, \quad (2)$$

где

$$\Pi^\epsilon = \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_1} - 1 \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}') f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}',$$

$$\Pi^\mu = \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1 \right) \mathbf{H}(\mathbf{r}') f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\mathbf{r}'$$

— электрический и магнитный потенциалы Герца,  $\varepsilon_1$ ,  $\mu_1$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающей среды,  $\hat{\varepsilon}$ ,  $\hat{\mu}$  — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости рассеивающего тела,  $k = \omega/c$ , функция  $f(|r - r'|)$  определяется уравнением

$$\Delta f(|r - r'|) + k^2 \varepsilon_1 \mu_1 f(|r - r'|) = -4\pi \delta(|r - r'|).$$

Напомним смысл уравнений (1), (2). При  $r \in V$ , где  $V$  — объем рассеивающего тела, уравнения (1), (2) являются интегральными уравнениями, определяющими внутренние поля  $E(r')$  и  $H(r')$  через поле невозмущенной падающей волны  $E_0(r)$  и  $H_0(r)$ . Тип и поляризация падающей волны, а также геометрия рассеивающего тела и его свойства могут быть самыми произвольными. Для  $r$  вне  $V$  уравнения (1), (2) сводятся к равенствам, определяющим полное рассеянное поле через потенциалы Герца. Это поле состоит из поля падающей волны и поля рассеяния, определяемого интегральными слагаемыми, которые выражаются только через известные внутренние поля. Уравнения (1), (2) полностью эквивалентны уравнениям Максвелла во всем диапазоне частот, и, так как они являются интегральными уравнениями типа уравнений Фредгольма II рода, они имеют единственное решение.

### 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Введем в рассмотрение векторы

$$\mathbf{A}(r) = ik \varepsilon_1 \int_V \frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} E(r') f(|r - r'|) dr' - \text{rot} \int_V H(r') f(|r - r'|) dr', \quad (3)$$

$$\mathbf{B}(r) = ik \mu_1 \int_V \frac{\hat{\mu}}{\mu_1} H(r') f(|r - r'|) dr' + \text{rot} \int_V E(r') f(|r - r'|) dr'.$$

Тогда уравнения (1), (2) преобразуются к виду

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{E}_0(r) - \frac{i}{4\pi k \varepsilon_1} (\text{grad div} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \mathbf{A} - \frac{1}{4\pi} \text{rot} \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{H}_0(r) - \frac{i}{4\pi k \mu_1} (\text{grad div} + k^2 \varepsilon_1 \mu_1) \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi} \text{rot} \mathbf{A}.$$

Так как функция  $f(|r - r'|)$  зависит от  $r$  и  $r'$  только в виде разности  $r - r'$ , дифференциальные операторы в (3) можно поднести под интегралы и заменить дифференцирование по  $r$  дифференцированием по  $r'$ .

Воспользовавшись уравнениями Максвелла для векторов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , из (3) получим эквивалентные выражения:

$$\mathbf{A} = \oint_S f(|r - r'|) [nH(\tau)] d\tau, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = - \oint_S f(|r - r'|) [nE(\tau)] d\tau,$$

где  $n$  — вектор нормали к поверхности тела. Эти соотношения допускают простой предельный переход к металлу. В соответствии с граничным условием на идеально проводящем металле  $E_t = 0$ , вектор  $B(r) = 0$ , поэтому вне рассматриваемого тела

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \frac{i}{4\pi k \epsilon_1} (\text{grad div} + k^2 \epsilon_1 \mu_1) \mathbf{A}, \quad (6)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \text{rot} \mathbf{A}.$$

Однако теперь вектор  $\mathbf{A}$  определен лишь на поверхности рассеивающего тела, что создает определенные трудности в его вычислении ( $\mathbf{E}_n$  и  $\mathbf{H}_n$  терпят разрыв на  $S$ ). Тем не менее можно сформулировать некоторые правила, позволяющие обойти эти трудности.

Предположим, что решена дифракционная задача о рассеянии электромагнитной волны на теле с заданной геометрией и заданными  $\epsilon$  и  $\mu$ , а значит, известно внутреннее поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ . Из полученного решения легко построить решение соответствующей дифракционной задачи на идеально проводящем теле той же геометрии.

Для этого необходимо:

1. Положить магнитную проницаемость тела равной нулю. При этом обращается в нуль первый интеграл в (3) для  $\mathbf{B}$ .

2. Из полного внутреннего поля, определяемого уравнениями (1), (2), выделить потенциальную его часть

$$\mathbf{E}_{\text{пот}} = -\frac{1}{4\pi} \text{grad} \int_V \frac{\text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (7)$$

и положить равной нулю соленоидальную часть

$$\mathbf{E}_{\text{сол}} = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_V \frac{\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \mathbf{C},$$

где

$$\text{rot} \mathbf{C} = \frac{1}{4\pi} \text{grad div} \int_V \frac{\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

(при этом обращается в нуль второе слагаемое в (3) для вектора  $\mathbf{B}$ ).

3. В соответствии с (3) составить вектор  $\mathbf{A}$  и в полученном выражении устремить  $\epsilon \rightarrow \infty$ , чем будет обращено в нуль внутреннее электрическое поле, но не вектор  $\mathbf{A}$ . В соответствии с (6) построить выражение для поля рассеяния от металлического тела рассматриваемой геометрии.

Заметим, что в настоящее время соответствующая эквивалентность известна лишь для задач электростатики (при  $\epsilon \rightarrow \infty$  задача об искажении электрического поля диэлектрическим телом переходит в задачу об искажении поля металлическим телом той же геометрии) и магнитостатики (при  $\mu \rightarrow 0$  задача об искажении магнитного поля магнетиком переходит в задачу об искажении этого поля сверхпроводящим телом той же геометрии) [1].

Легко выяснить физический смысл вектора  $\mathbf{A}$ . Внешняя электромагнитная волна порождает в теле высокочастотные токи и заряды, причем

$$i \omega \rho + \text{div} \mathbf{j} = 0. \quad (8)$$

Скалярный  $\varphi$  и векторный  $\mathbf{A}_0$  потенциалы этих зарядов и токов (их фурье-компоненты) равны

$$\varphi = \frac{1}{\epsilon_1} \int_V \rho(r') f(|r - r'|) dr', \quad (9)$$

$$A_0 = \frac{\mu_1}{c} \int_V j(r') f(|r - r'|) dr'.$$

Тогда

$$E = E_0 - \nabla \varphi - ik A_0, \quad (10)$$

$$H = H_0 + \frac{1}{\mu_1} \operatorname{rot} A_0,$$

и если положить равным нулю  $j_n$  на поверхности рассеивающего тела, то из (8) — (10) находим, что вектор  $A$  из (3) пропорционален  $A_0$  из (9), т. е.

$$\begin{aligned} ik \frac{\epsilon_1}{\epsilon_{\infty}} \int_V^{\wedge} E_{\text{пот}}(r') f(|r - r'|) dr' - \operatorname{rot}_{\mu \rightarrow 0} \int_V H(r') f(|r - r'|) dr' = \\ = \frac{4\pi}{c} \int_V j(r') f(|r - r'|) dr'. \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно, первое слагаемое в (11) определяет поляризационные, а второе слагаемое — индукционные токи в рассеивающем теле. По известным поляризационным токам в соответствии с (18) легко определяются поляризационные заряды на рассеивающем теле. Таким образом, если известно решение дифракционной задачи для некоторого диэлектрического тела, то по этому решению можно не только восстановить поле рассеяния на идеально проводящем теле той же геометрии, но и определить наведенные токи и заряды в нем.

Естественно, что величины  $E$  и  $H$ , полученные в результате операций (1) — (3), уже не являются реальными полями в идеально проводящем теле. Их следует рассматривать как некоторые вспомогательные функции, через которые выражаются рассеянные поля и индуцированные токи и заряды.

## 2. ВНУТРЕННЕЕ ПОЛЕ ИЗОТРОПНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА, ПОРОЖДАЕМОЕ ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНОЙ

Предположим сначала, что цилиндр является диэлектрическим и характеризуется некоторыми проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ , и пусть под произвольным углом к его оси (ось  $z$ ) падает электромагнитная волна вида

$$E_0(r) = E_0(\rho) \exp(-ik_z z), \quad (12)$$

$$H_0(r) = H_0(\rho) \exp(-ik_z z).$$

Для определенности в дальнейшем будем полагать, что

$$E_0(\rho) = E_0 \exp(-ik_{\perp} \rho),$$

$$H_0(\rho) = H_0 \exp(-ik_{\perp} \rho),$$

хотя приведенная схема решения просто обобщается и на другие случаи, допускающие разложение полей  $E_0(\rho)$  и  $H_0(\rho)$  в окрестности

$\rho = 0$  в ряд по степеням  $\rho$ . Используя (12), проведем интегрирование уравнений (1), (2) по переменной  $z$  в бесконечных пределах и далее разложим поля по малому параметру  $a/\lambda$ :

$$E(\rho) = E^{(0)}(\rho) + ik E^{(1)}(\rho) + (ik)^2 E^{(2)}(\rho) + \dots$$

Тогда получим уравнения, определяющие поля в случае тонкого цилиндра в любом приближении по  $ik$ :

$$E_{\perp}^{(n)}(\rho) = E_{0\perp}^{(n)}(\rho) + \frac{1}{2\pi} \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_S \left( \frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_1} - 1 \right) E^n(\rho') \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} d\rho', \quad (13)$$

где

$$E_{0\perp}^0 = E_{00\perp},$$

$$E_{0\perp}^{(1)} = E_{00\perp}^{(1)} - \frac{k_z}{k} [e_z \operatorname{rot} \Pi_0^s] - \mu_1 \operatorname{rot} \Pi_0^m,$$

$$E_{0\perp}^{(2)} = E_{00\perp}^{(2)} + \frac{k_\perp^2}{8\pi k^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_S \left( \frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_1} - 1 \right) E^0(\rho') |\rho - \rho'| \ln \frac{1}{|\rho - \rho'|} d\rho' - \\ - \epsilon_1 \mu_1 \Pi_0^s - \frac{k_z}{k} [e_z \operatorname{rot} \Pi_0^s] - \mu_1 \operatorname{rot} \Pi_0^m + \frac{k_z \mu_1}{k} [e_z \Pi_0^m].$$

Для продольных составляющих имеем

$$E_z^{(n)} = E_{0z}^{(n)}, \quad (14)$$

где

$$E_{0z}^0 = E_{00z},$$

$$E_{0z}^{(1)} = E_{00z}^{(1)} - \frac{k_z}{k} \operatorname{div} \Pi_0^s - \mu_1 \operatorname{rot}_z \Pi_0^m,$$

$$E_{0z}^{(2)} = E_{00z}^{(2)} - \frac{k_z}{k} \operatorname{div} \Pi_0^s - \frac{k_\perp^2}{k^2} \Pi_{0z}^s - \mu_1 \operatorname{rot}_z \Pi_0^m.$$

Аналогично находим составляющие магнитного вектора.

Таким образом, имеем цепочку интегральных уравнений двумерной электро- и магнитостатики, дающих возможность определить последующие члены разложения для полей через предыдущие. Здесь  $n = 0$  соответствует приближению электростатики, и  $E_{0\perp}^{(n)}$  при  $n = 0$  соответствует нулевому приближению в разложении падающей волны по степеням  $(ik)$ . При  $n \neq 0$  эта величина выражается через соответствующие разложения падающей волны и решения предыдущих приближений. Компоненты поля  $E_z^{(n)}$ , параллельные оси цилиндра, находятся по соответствующим разложениям падающей волны и решениям уравнений для  $E_{\perp}^{(n)}$  в предыдущих приближениях.

Уравнения (13) могут быть решены относительно просто, если цилиндр является эллиптическим. Для построения внутреннего поля в любом приближении по  $n$  разработан достаточно эффективный метод, которым вычислены внутренние поля эллиптического анизотропного цилиндра при  $n = 0, 1, 2$ . Ниже приводятся эти результаты для изотропного диэлектрического цилиндра с некоторыми значениями проницаемостей  $\epsilon$  и  $\mu$ .

При  $n = 0$

$$E_{\perp}^{(0)} = \alpha E_{0\perp}^{(0)}, \quad H_{\perp}^{(0)} = \beta H_{0\perp}^{(0)}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{1 + \frac{b}{a+b} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right)}, \quad \alpha_{22} = \frac{1}{1 + \frac{a}{a+b} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right)}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0, \\ \beta_{11} &= \frac{1}{1 + \frac{b}{a+b} \left( \frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right)}, \quad \beta_{22} = \frac{1}{1 + \frac{a}{a+b} \left( \frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right)}, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = 0. \end{aligned}$$

При  $n = 1$  свободный член интегральных уравнений (13) равен

$$\begin{aligned} E_{0x}^{(1)} &= \chi_{xx} x + \chi_{xy} y, \\ E_{0y}^{(1)} &= \chi_{yx} x + \chi_{yy} y. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= -\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta \cos \alpha E_{0x} + \frac{k_z}{k} \frac{b}{a+b} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) E_z^{(0)}, \\ \chi_{xy} &= -\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta \sin \alpha E_{0x} + \frac{\mu_1 a}{a+b} \left( \frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) H_z^{(0)}, \\ \chi_{yx} &= -\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta \cos \alpha E_{0y} - \frac{\mu_1 b}{a+b} \left( \frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) H_z^{(0)}, \\ \chi_{yy} &= -\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta \sin \alpha E_{0y} + \frac{k_z}{k} \frac{a}{a+b} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) E_z^{(0)}. \end{aligned}$$

Внутреннее электрическое поле  $E^{(1)}$  имеет компоненты, являющиеся линейными функциями координат:

$$E^{(1)} = (A_1 x + B_1 y) \mathbf{i} + (A_2 x + B_2 y) \mathbf{j} + (A_3 x + B_3 y) \mathbf{k}, \quad (17)$$

$$A_1 = \frac{1}{\Delta_2} \left\{ \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \chi_{xx} + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \beta (\chi_{xx} + \chi_{yy}) \right\},$$

$$B_1 = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \chi_{xy} + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \alpha (\chi_{yx} - \chi_{xy}) \right\},$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \chi_{yx} + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \beta (\chi_{xy} - \chi_{yx}) \right\},$$

$$B_2 = \frac{1}{\Delta_2} \left\{ \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \chi_{yy} + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \alpha (\chi_{xx} + \chi_{yy}) \right\},$$

$$A_3 = \chi_{xz}, \quad B_3 = \chi_{yz},$$

$$\chi_{xz} = -\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta \cos \alpha E_{0z} + \frac{k_z}{k} \frac{b}{a+b} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) E_x^{(0)} + \frac{\mu_1 b}{a+b} \left( \frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) H_y^{(0)},$$

$$x_{yz} = -\nu \overline{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta \sin \alpha E_{0z} - \frac{k_z a}{k(a+b)} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) E_y^{(0)} - \frac{\mu_1 a}{a+b} \left( \frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) H_x^{(0)},$$

$$\Delta_1 = 1 - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) (\alpha + \beta), \quad \Delta_2 = 1 + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) (2 + \alpha + \beta) +$$

$$+ \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right)^2 (1 + \alpha + \beta),$$

$$\alpha = -\frac{a^2}{(a+b)^2}, \quad \beta = -\frac{b^2}{(a+b)^2}.$$

Магнитный вектор находится из электрического заменой  $E$  на  $H$  и  $\epsilon$  на  $\mu$  с учетом соответствующих изменений в величинах  $x_{ik}$ .

Во втором приближении свободные члены уравнений (13) имеют вид

$$\begin{aligned} E_{0x}^{(2)} &= \alpha_{11} x^2 + \alpha_{12} xy + \alpha_{22} y^2 + \alpha_{00}, \\ E_{0y}^{(2)} &= \beta_{11} x^2 + \beta_{12} xy + \beta_{22} y^2 + \beta_{00}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\alpha_{ik}$  и  $\beta_{ik}$  — уже известные величины, выражющиеся через полуоси эллипса, проницаемости диэлектрика и известные поля в нулевом и первом приближениях. Их общий вид достаточно громоздкий и поэтому будет приведен лишь после перехода к металлическому цилиндру.

В соответствии с общей схемой построения решений интегральных уравнений (13) со свободными членами, являющимися квадратичными функциями декартовых координат, ищем  $E^{(2)}$  и  $H^{(2)}$  в виде

$$\begin{aligned} E_x^{(2)} &= A_{11} x^2 + 2A_{12} xy + A_{22} y^2 + A_{00}, \\ E_y^{(2)} &= B_{11} x^2 + 2B_{12} xy + B_{22} y^2 + B_{00}, \\ E_z^{(2)} &= C_{11} x^2 + 2C_{12} xy + C_{22} y^2 + C_{00}. \end{aligned} \quad (19)$$

Для определения коэффициентов  $A_{ik}$  и  $B_{ik}$  из (13) приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \frac{6e}{\pi} \right] A_{11} - \frac{6e'}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) A_{22} - \frac{3p'}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) B_{12} &= \alpha_{11}, \\ -\frac{f}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) A_{11} + \left[ 1 - \frac{f'}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \right] A_{22} - \frac{3m}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) B_{12} &= \alpha_{22}, \\ -\frac{f}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) A_{11} - \frac{f'}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) A_{22} + \left[ 1 - \frac{3m}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \right] B_{12} &= \beta_{12}, \\ -\frac{f}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) B_{11} - \frac{f'}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) B_{22} + \left[ 1 - \frac{3p'}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \right] A_{12} &= \alpha_{12}, \\ \left[ 1 - \frac{f}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \right] B_{11} - \frac{f'}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) B_{22} - \frac{3p'}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) A_{12} &= \beta_{11}, \\ -\frac{6p}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) B_{11} + \left[ 1 - \frac{6p'}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \right] B_{22} - \frac{3m}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) A_{12} &= \beta_{22}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) A_{11} - \frac{d_1}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) A_{22} - \frac{n}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) B_{12} + \\
& + \left[ 1 - \frac{J_1}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \right] A_{00} = \alpha_{00}, \\
& -\frac{e}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) B_{11} - \frac{e'}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) B_{22} - \frac{n}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) A_{12} + \\
& + \left[ 1 - \frac{J_2}{\pi} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \right] B_{00} = \beta_{00},
\end{aligned}$$

где  $p, m, p', \dots$  — коэффициенты при переменных  $x, x^2, \dots$  в выражениях для логарифмического потенциала, определенного внутри эллиптической области.

Магнитный вектор  $H_{\perp}^{(2)}$  находится из электрического  $E_{\perp}^{(2)}$  по тем же правилам, что и в первом приближении.

Полученные соотношения полностью определяют внутренние поля внутри тонкого изотропного эллиптического цилиндра с точностью до величин порядка  $(a/\lambda)^2$  включительно. В соответствии с общей теорией, изложенной в разд. 1, вычислим теперь токи и заряды внутри металлического цилиндра эллиптического сечения, порождаемые падающей волной (12).

### 3. ТОКИ И ЗАРЯДЫ ВНУТРИ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА, ПОРОЖДАЕМЫЕ ВНЕШНЕЙ ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНОЙ

При переходе к идеально проводящему цилинду в соответствии с правилами 1—3 (стр. 1598) полагаем равной нулю магнитную проницаемость  $\mu$  и устремляем  $\epsilon$  в бесконечность. Тогда при  $n = 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \epsilon E_{\perp}^{(0)} = \hat{\alpha} E_{0\perp}^{(0)}, \quad H_{\perp}^{(0)} = \hat{\beta} H_{0\perp}^{(0)}, \quad (21)$$

где

$$\alpha_{11} = \epsilon_1 \frac{a+b}{b}, \quad \alpha_{22} = \epsilon_1 \frac{a+b}{a}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0,$$

$$\beta_{11} = \frac{a+b}{a}, \quad \beta_{22} = \frac{a+b}{b}, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = 0,$$

$$E_z^{(0)} = 0, \quad H_z^{(0)} = H_{0z}.$$

Потенциальная часть полного внутреннего поля (17) в первом по  $a/\lambda$  приближении равна

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow \infty \\ \mu \rightarrow 0}} \epsilon E^{(1)} = & \left[ -\frac{k_x}{k} \epsilon_1 \frac{E_{0x}}{1 + \alpha + \beta} x - \frac{\epsilon_1}{a + b} \left( -\frac{k_y}{k} E_{0x} - \mu_1 \frac{a}{a + b} H_{0z} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\epsilon \mu}{\epsilon_1} \alpha H_{0z} \right) \right] i + \left[ -\frac{\epsilon_1}{\alpha + \beta} \left( -\frac{k_x}{k} E_{0y} + \mu_1 \frac{b}{a + b} H_{0z} + \frac{\epsilon \mu}{\epsilon_1} \beta H_{0z} \right) x - \right. \\
& \left. \left. \right]
\end{aligned} \quad (22)$$

$$-\frac{k_y}{k} \frac{\varepsilon_1 E_{0y}}{1+\alpha+\beta} y \Big] j + \left[ \left( -\frac{k_z}{k} \varepsilon_1 E_{0x} + \varepsilon_\mu H_{0y} \right) x + \left( -\frac{k_z}{k} \varepsilon_1 E_{0y} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \varepsilon_\mu H_{0x} \right) y \right] k.$$

Для магнитного вектора находим аналогично

$$H_x^{(1)} = \left\{ -\frac{1}{\alpha+\beta} \left[ -\frac{k_x}{k} H_{0x} - \frac{2k_z}{k} (1+\alpha+\beta) H_{0z} \right] x - \frac{k_y}{k} \frac{1}{1+\alpha+\beta} \times \right.$$

$$\times H_{0x} y \Big\} i + \left\{ -\frac{1}{1+\alpha+\beta} \frac{k_x}{k} H_{0y} x - \frac{1}{\alpha+\beta} \left[ -\frac{k_y}{k} H_{0y} - \frac{k_z}{k} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times (1+\alpha+\beta) H_{0z} \right] y \right\} j, \quad (23)$$

$$H_z^{(1)} = \left[ -\frac{k_x}{k} H_{0z} - \frac{k_z}{k} \frac{b}{a} H_{0x} - \frac{b}{a} \varepsilon_1 E_{0y} \right] x +$$

$$+ \left[ -\frac{k_y}{k} H_{0z} - \frac{k_z}{k} \frac{a}{b} H_{0y} + \frac{a}{b} \varepsilon_1 E_{0x} \right] y. \quad (24)$$

Хотя сами величины  $\varepsilon E$  и  $H$  в идеально проводящем цилиндре при  $r \in V$  физического смысла не имеют, однако через них вычисляются  $j$  и  $\rho$ , представляющие самостоятельный физический интерес. Из (11) находим, что

$$j(\rho) = -\frac{c}{4\pi} \left\{ \text{rot } H + \left[ \frac{\nabla H_0^{(2)}(k_\perp |\rho - \rho'|)}{H_0^{(2)}(k_\perp |\rho - \rho'|)} H \right] \right\}_{\mu \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow \infty},$$

$$\rho = -\frac{1}{i\omega} \text{div } j. \quad (25)$$

(Как и  $H$ ,  $E_{\text{пот}}$ , плотность тока  $j(r)e^{i\omega t}$  зависит от переменной  $z$  через множитель  $\exp(-ik_z z)$ . В (25) этот множитель уже исключен.)

Величины  $j$  и  $\rho$  также имеет смысл представить в виде разложения по степеням параметра  $ik$ :

$$j = j^{(0)} + (ik)j^{(1)} + (ik)^2 j^{(2)} + \dots, \quad (26)$$

$$\rho = \rho^{(0)} + (ik)\rho^{(1)} + (ik)^2 \rho^{(2)} + \dots$$

Воспользовавшись полученными ранее соотношениями, при  $|\rho| \gg |\rho'|$  будем иметь

$$j^{(0)} = 0, \quad j^{(1)} = \text{const},$$

где

$$j_x^{(1)} = \frac{c}{4\pi} \left[ -\frac{2a+b}{b} \frac{k_y}{k} H_{0z} + \frac{k_\perp}{k} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) H_{0z} \right],$$

$$j_y^{(1)} = \frac{c}{4\pi} \left[ +\frac{a+2b}{a} \frac{k_x}{k} H_{0z} - \frac{k_\perp}{k} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) H_{0z} \right]. \quad (27)$$

$$\mathbf{j}_z^{(1)} = \frac{c}{2\pi} \left[ \frac{k_{\perp}}{ka} \sin \varphi H_{0x} - \frac{k_{\perp}}{kb} \cos \varphi H_{0y} \right] (a+b).$$

Теперь можно легко определить  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \rho^{(0)} &= -\frac{k_z}{ck} (\mathbf{e}_z \mathbf{j}^{(0)}) - \frac{1}{c} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(1)}, \\ \rho^{(1)} &= \frac{k_z}{ck} (\mathbf{e}_z \mathbf{j}^{(1)}) - \frac{1}{c} \operatorname{div} \mathbf{j}^{(2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (28) следует, что отличной от нуля является плотность зарядов  $\rho^{(1)}$  в первом по  $a/\lambda$  приближении.

#### 4. ПОЛЕ В ВОЛНОВОЙ ЗОНЕ

Поле в волновой зоне  $|\rho| \gg |\rho'|$  можно представить в виде разложения по мультипольным моментам. Используя теорему сложения для цилиндрических функций

$$H_0^{(2)}(k_{\perp}|\rho - \rho'|) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_{\perp}\rho') H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) \exp[i m(\varphi - \varphi_0)],$$

где  $\varphi - \varphi_0$  — угол между векторами  $\rho$  и  $\rho'$ , запишем вектор  $A$  в волновой зоне:

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} k \pi \int_S \epsilon E(\rho') H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) J_m(k_{\perp}\rho') \exp[i m(\varphi - \varphi_0)] d\rho' + \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} i \pi \operatorname{rot} \int_S H(\rho') H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) J_m(k_{\perp}\rho') \exp[i m(\varphi - \varphi_0)] d\rho' + \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \pi k_z \left[ \mathbf{e}_z \int_S H(\rho') H_m^{(2)}(k_{\perp}\rho) J_m(k_{\perp}\rho') \exp[i m(\varphi - \varphi_0)] d\rho' \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Построим с точностью до величин  $(a/\lambda)^2$  включительно матрицы рассеяния, определяющие поля в волновой зоне. В общем случае эллиптического цилиндра выражения достаточно сложны и поэтому здесь не приводятся. В частном случае кругового цилиндра

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{пacc}} &= \hat{A} \mathbf{E}_0 + \hat{B} \mathbf{H}_0, \\ \hat{A} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & 0 & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$A_{11} = 1 + \frac{i \beta_0^2}{2} S \left\{ \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1 + \frac{\beta_0^2 S}{8\pi} [1 + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi (3 \cos^2 \theta - 1)] \right\},$$

$$A_{22} = 1 + \frac{i \beta_0^2}{2} S \left\{ \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - 1 + \frac{\beta_0^2 S}{8\pi} [1 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi (3 \cos^2 \theta - 1)] \right\},$$

$$A_{12} = \frac{i\beta_0^2}{2} S \left[ 1 + \frac{\beta_0^2 S}{8\pi} (3\cos^2 \theta - 1) \right] \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$A_{31} = \frac{i\beta_0^2}{2} S \left[ 1 - \frac{\beta_0^2 S}{8\pi} (3\cos^2 \theta + 1) \right] \sin \theta \cos \theta \cos \varphi,$$

$$A_{32} = \frac{i\beta_0^2}{2} S \left[ 1 - \frac{\beta_0^2 S}{8\pi} (3\cos^2 \theta + 1) \right] \sin \theta \cos \theta \sin \varphi,$$

$$B_{12} = \frac{i\beta_0}{2} k \mu_1 S (1 - \alpha_0) \cos \theta,$$

$$B_{21} = -\frac{i\beta_0}{2} k \mu_1 S (1 - \bar{\alpha}_0) \cos \theta,$$

$$B_{31} = \frac{i\beta_0}{2} k \mu_1 S (1 - \bar{\alpha}_0) \sin \theta \sin \varphi,$$

$$B_{32} = -\frac{i\beta_0}{2} k \mu_1 S (1 - \alpha_0) \sin \theta \cos \varphi,$$

$$B_{13} = -\frac{i\beta_0}{4} k \mu_1 S (1 - \beta) \sin \theta \sin \varphi,$$

$$B_{23} = \frac{i\beta_0}{4} k \mu_1 S (1 - \bar{\beta}) \sin \theta \cos \varphi,$$

$$B_{33} = \frac{i\beta_0^3}{4\pi} k \mu_1 S^2 \sin^2 \theta \cos \theta \sin(\varphi - \alpha).$$

Для магнитного поля имеем

$$\hat{H}_{\text{пacc}} = \hat{C}E_0 + \hat{D}H_0, \quad (31)$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & -C_{11} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix},$$

$$C_{12} = \frac{i\beta_0}{2} k \varepsilon_1 S \left[ 1 - \frac{\beta_0^2 S}{8\pi} (3\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + 1) \right] \cos \theta,$$

$$C_{21} = -\frac{i\beta_0}{2} k \varepsilon_1 S \left[ 1 - \frac{\beta_0^2 S}{8\pi} (3\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + 1) \right] \cos \theta,$$

$$C_{31} = \frac{i\beta_0}{2} k \varepsilon_1 S \left( 1 - \frac{\beta_0^2 S}{8\pi} \right) \sin \theta \sin \varphi,$$

$$C_{32} = -\frac{i\beta_0}{2} k \varepsilon_1 S \left( 1 - \frac{\beta_0^2 S}{8\pi} \right) \sin \theta \cos \varphi,$$

$$C_{11} = -\frac{3i\beta_0^3}{16\pi} k \varepsilon_1 S^2 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$D_{11} = 1 + \frac{i\beta_0^2}{2} S(1 - \bar{\alpha}_0)(1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi),$$

$$D_{22} = 1 + \frac{i\beta_0^2}{2} S(1 - \alpha_0)(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi),$$

$$D_{12} = \frac{i\beta_0^2}{2} S(1 - \alpha_0) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$D_{21} = -\frac{i\beta_0^2}{2} S(1 - \bar{\alpha}_0) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$D_{31} = -\frac{i\beta_0^2}{2} S(1 - \bar{\alpha}_0) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi,$$

$$D_{32} = -\frac{i\beta_0^2}{2} S(1 - \alpha_0) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi,$$

$$D_{23} = i\beta_0^2 S \left[ \beta - z \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin \theta \sin \varphi \right] \cos \theta,$$

$$D_{13} = i\beta_0^2 S \left[ \bar{\beta} + z \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin \theta \cos \varphi \right] \cos \theta,$$

$$D_{33} = 1 + i\beta_0^2 S \left( \beta \sin \varphi + \bar{\beta} \cos \varphi - \frac{1}{4} \sin \theta \right) \sin \theta,$$

где

$$\alpha_0 = \frac{3\beta_0^2 S}{8\pi} \left[ 1 + \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{1}{3} \cos \alpha \cos \varphi \right) \right],$$

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{3\beta_0^2 S}{8\pi} \left[ 1 + \sin^2 \theta \left( 1 - \frac{1}{3} \sin \alpha \sin \varphi \right) \right],$$

$$\beta_0 = k \sqrt{\varepsilon_1 p_1},$$

$$\beta = \frac{\beta_0^2 S}{16\pi} \sin^3 \theta \sin \varphi [1 - 2 \cos(\varphi - \alpha)] + \frac{\beta_0^2 S}{4\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \sin \alpha,$$

$$\bar{\beta} = \frac{\beta_0^2 S}{16\pi} \sin^3 \theta \cos \varphi [1 - 2 \cos(\varphi - z)] + \frac{\beta_0^2 S}{4\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \cos \alpha,$$

$$z = \frac{\beta_0^2 S}{4\pi} \sin^2 \theta \sin(\varphi - \alpha).$$

Если  $\theta = \pi/2$  (нормальное падение), все соотношения сильно упрощаются, и остаются отличными от нуля лишь элементы

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{C} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (32)$$

Матрицы рассеяния для тонкой металлической ленты ( $a = 0$ ) с точностью до величин  $(a/\lambda)^2$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \begin{pmatrix} 1 & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & 0 & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{12} &= \frac{i\beta_0^2}{4} \pi b^2 \left( \alpha + \frac{5\beta_0^2 b^2}{24} \cos^2 \theta \right) \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi, \\ A_{22} &= 1 + \frac{i\beta_0^2}{4} \pi b^2 \left[ \alpha (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi - 1) + \frac{5\beta_0^2 b^2}{24} \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \sin^2 \theta \right], \\ A_{32} &= \frac{i\beta_0^2}{4} \pi b^2 \left( \alpha - \frac{5\beta_0^2 b^2}{24} \sin^2 \theta \right) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, \\ B_{21} &= -\frac{i\beta_0}{4} k \mu_1 \pi b^2 \beta \cos \theta, \\ B_{31} &= \frac{i\beta_0}{4} k \mu_1 \pi b^2 \beta \sin \theta \sin \varphi, \\ \hat{C} &= \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 \\ 0 & C_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ D_{21} & 1 & 0 \\ D_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ C_{12} &= \frac{i\beta_0}{4} k \varepsilon_1 \pi b^2 \left( \alpha - \frac{5\beta_0^2 b^2}{24} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \right) \cos \theta, \\ C_{22} &= \frac{5i\beta_0^2}{96} k \varepsilon_1 \pi b^4 \sin^2 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi, \\ C_{32} &= -\frac{i\beta_0^2}{4} k \varepsilon_1 \pi b^2 \alpha \sin \theta \cos \varphi, \\ D_{11} &= 1 + \frac{i\beta_0^2}{4} \pi b^2 \beta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi), \\ D_{21} &= -\frac{i\beta_0^2}{4} \pi b^2 \beta \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi,\end{aligned}\quad (34)$$

$$D_{31} = -\frac{i \beta_0^2}{4} \pi b^2 \beta \sin \theta \cos \theta \cos \varphi,$$

где

$$\alpha = 1 + \frac{\beta_0^2 b^2}{24} (\cos^2 \theta - 6 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi),$$

$$\beta = 1 + \frac{\beta_0^2 b^2}{96} (1 + \cos^2 \theta) - \frac{\beta_0^2 b^2}{8} \sin^2 \theta (1 + 2 \sin^2 \varphi).$$

В случае нормального падения ( $\theta = \pi/2$ ) электромагнитной волны на тонкую металлическую ленту запишем компоненты рассеянных полей относительно некоторой неподвижной системы координат  $X'$ ,  $Y'$ , относительно которой тонкая металлическая лента расположена под углом  $\psi$  к оси  $Y'$ . В такой записи легко видеть зависимость полей рассеяния в некоторой точке наблюдения ( $\varphi = \text{const}$ ) от положения тонкой ленты в пространстве:

$$E_x = \left[ 1 + \frac{i \beta_0^2}{4} \pi b^2 \alpha \cos \varphi \sin \psi \sin(\varphi - \psi) \right] E_{0x} +$$

$$+ \frac{i \beta_0^2}{4} \pi b^2 \alpha \cos \varphi \cos \psi \sin(\varphi - \psi) E_{0y},$$

$$E_y = -\frac{i \beta_0^2}{4} \pi b^2 \alpha \cos \varphi \sin \psi \cos(\varphi - \psi) E_{0x} +$$

$$+ \left[ 1 - \frac{i \beta_0^2}{4} \pi b^2 \alpha \cos \varphi \cos \psi \cos(\varphi - \psi) \right] E_{0y},$$

$$E_z = E_{0z} + \frac{i \beta_0^2}{4} \pi b^2 k \mu_1 \beta \sin \varphi (\cos \psi H_{0x} - \sin \psi H_{0y}),$$

$$H_x = \left[ 1 + \frac{i \beta_0^2}{4} \pi b^2 \beta \sin \varphi \cos \psi \sin(\varphi - \psi) \right] H_{0x} -$$

$$- \frac{i \beta_0^2}{4} \pi b^2 \beta \sin \varphi \sin \psi \sin(\varphi - \psi) H_{0y},$$

$$H_y = -\frac{i \beta_0^2}{4} \pi b^2 \beta \sin \varphi \cos \psi \cos(\varphi - \psi) H_{0x} +$$

$$+ \left[ 1 + \frac{i \beta_0^2}{4} \pi b^2 \beta \sin \varphi \sin \psi \cos(\varphi - \psi) \right] H_{0y},$$

$$H_z = H_{0z} - \frac{i \beta_0^2}{4} k \varepsilon_1 \pi b^2 \alpha \cos \varphi (\sin \psi E_{0x} + \cos \psi E_{0y}).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1 Л. Д. Ландау, Е. Н. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959

## SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY A THIN INFINITELY LONG METAL ROD OF ELLIPTIC SECTION

*L. K. Gal, N. A. Khizhnyak*

The scattering of an arbitrarily incident monochromatic wave by a thin infinitely long isotropic dielectric and metal rod of the elliptic section is considered by the integral equation method. The matrices of scattering, determining the field in a wave zone, are built with an accuracy of the value  $(a/\lambda)^2$  inclusive. The distributions of induced charges and currents on the metallic rod are found with the same accuracy. The agreement is established between the problems of scattering on isotropic dielectric and metal objects.

---

УДК 621.372.8 09

## О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Э. С. Масунов

С помощью электродинамического подхода задача о движении пучка в периодическом волноводе сводится к отысканию решений системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Это позволяет довольно просто исследовать основные резонансы, которые могут возникать при движении пучка в такой волноводной системе.

Если использовать электродинамический подход [1], легко показать, что решение неоднородных уравнений Максвелла совместно с кинетическим уравнением для электронов в периодическом волноводе\* сводится к отысканию решения уравнения

$$\frac{d}{dz} |p\rangle = B |p\rangle, \quad |p\rangle = \text{colon} \left( f^{(1)}, G \frac{d}{dz} f^{(1)} + Q_1 f^{(1)}, f^{(e)}, G_e \frac{d}{dz} f^{(e)} \right); \quad (1)$$

$$B = \begin{bmatrix} -G^{-1} Q_1 & G^{-1} & 0 & 0 \\ -P_1 - Q_1^+ G^{-1} Q_1 & Q_1^+ G^{-1} & -V_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_e^{-1} \\ V_e & 0 & P_e & G_e^{-1} Q_e \end{bmatrix}. \quad (1a)$$

В выражении (1a) матрицы  $G$ ,  $Q_1$ ,  $P_1$  находятся по формулам (4 а) работы [1] при  $m = 0^{**}$ , а элементы матрицы  $G_e$ ,  $P_e$ ,  $Q_e$ ,  $V_e$  и  $V_1$  соответственно равны

$$G_{ens} = [1 - (\Delta v/v)^2] \delta_{ns}, \quad Q_{ens} = 2i \frac{\omega}{v} \delta_{ns},$$

$$P_{ens} = \frac{\omega^2 - \Omega_e^2}{v^2} \delta_{ns} \quad \left( \Omega_e^2 = \frac{4\pi Ne^2}{\epsilon m} \right), \quad (2)$$

$$V_{ens} = \frac{2\Omega_e^2 v_n}{v^2 R^2 v_s} J_1^{-1}(v_n) J_1^{-1}(v_s) \frac{\bar{R}}{b} \int_0^b \rho J_0(v_n \rho/R) J_0(v_s \rho/R) d\rho,$$

$$V_{1ns} = \epsilon^{-1} \frac{v_n^2}{R^2} \frac{b}{\bar{R}} \delta_{ns}.$$

\* В дальнейшем будем считать, что периодичность волновода обусловлена либо периодичностью радиуса, либо периодичностью среды, заполняющей волновод.

\*\* Для простоты мы рассматриваем случай азимутально симметричной системы, предполагая, что поперечная составляющая скорости пучка равна нулю.

Амплитудные функции  $f^{(1)} = \text{colon}(f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, \dots, f_n^{(1)}, \dots)$  связаны с компонентами электромагнитного поля, возбуждаемого в структуре, формулой (2) из [1], а функции  $f^{(e)} = \text{colon}(f_1^{(e)}, f_2^{(e)}, \dots, f_n^{(e)}, \dots)$  определяются через плотность тока пучка  $j(\omega, r)$  следующим образом:

$$f_n^{(e)} = \frac{8\pi^{3/2}}{\omega v_n J_1(v_n)} \frac{\bar{R}}{b} \int_0^b \rho j(\omega, r) J_0(v_n \rho / R) d\rho. \quad (3)$$

Здесь  $b$  — радиус пучка,  $\bar{R}$  — средний радиус периодического волновода. Величина  $2\Delta v$  характеризует ширину разброса по скоростям частиц в пучке.

В простейшем случае гладкой однородной структуры матрица  $B \equiv B_0 = \text{const}$  и решение уравнения (1) имеет вид

$$|p_\lambda\rangle = \exp(i\mathbf{k}_\lambda z)|c_\lambda\rangle, \quad \lambda \equiv r, j \quad (r=1 \div 2, -\infty < j < \infty), \quad (4)$$

где через  $|c_\lambda\rangle$  и  $i\mathbf{k}_\lambda$  мы обозначили собственные векторы и собственные значения матрицы  $B_0$ .

Для периодического волновода матрица  $B$  в уравнении (1) будет периодической с периодом  $D$  и решение следует искать в виде  $|p_\lambda\rangle = e^{i\beta z}|u_\lambda\rangle$ , где  $-\pi/D \leq \text{Re } \beta \leq \pi/D$ , а  $|u_\lambda\rangle$  — периодическая функция. При произвольной форме ячейки периодичности решение можно найти, используя численные методы. Однако основные свойства собственных волн легко уяснить уже в случае малого изменения параметров волновода по периоду. Если ввести малый параметр  $\varepsilon$  так, что  $R(z) = \bar{R}[1 + \varepsilon g_R(z)]$ ,  $\varepsilon(z) = \bar{\varepsilon}[1 + \varepsilon g_\varepsilon(z)]$ , то матрицу  $B$  можно записать в виде  $B = B_0 + \varepsilon B_1 + O(\varepsilon^2)$ .

Рассмотрим основные виды неустойчивости движения пучка в периодическом волноводе. При наличии периодического возмущения  $\beta$  может стать комплексным для тех частот  $\omega_0$ , при которых

$$k_{r_1 i_1}(\omega_0) - k_{r_2 i_2}(\omega_0) = \frac{2\pi l}{D} \quad (l = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Если ограничиться первым приближением по  $\varepsilon$ , то в случае двукратного вырождения ( $\beta_{r_1 i_1}^{(0)} = \beta_{r_2 i_2}^{(0)} = \beta^{(0)}$ ) получим

$$\beta = \beta^{(0)} + \varepsilon [N_{r_1 i_1}^{-1} N_{r_2 i_2}^{-1} \langle d_{r_1 i_1} | B_1^{(l)} | c_{r_1 i_1} \rangle \langle d_{r_2 i_2} | B_1^{(-l)} | c_{r_1 i_1} \rangle]^{1/2}, \quad (6)$$

где  $|d_{rj}\rangle$  — собственные векторы матрицы  $B_0^+$ , а величина  $N_{rj} = -i \langle d_{rj} | c_{rj} \rangle$  определяет поток переносимой мощности одной из собственных волн в невозмущенном волноводе.

Используя свойства матрицы  $B_1$ , легко убедиться, что  $\langle d_{\lambda_1} | B_1^{(l)} | c_{\lambda_2} \rangle \langle d_{\lambda_2} | B_1^{(-l)} | c_{\lambda_1} \rangle > 0$ . Поэтому (6) станет комплексной, если  $N_{r_1 i_1} N_{r_2 i_2} < 0$ . Отсюда следует учитывать три возможности появления комплексных  $\beta$ : а) резонанс между прямой и обратной волнами структуры ( $r_1 = r_2 = 1$ ), б) резонанс между быстрой и медленной волнами плотности тока ( $r_1 = r_2 = 2$ ); в) резонанс между быстрой (медленной) волной плотности тока и обратной (прямой) волной структуры ( $r_1 \neq r_2$ ).

Резонанс первого типа был подробно исследован ранее [2]. Второй тип резонанса в самом простейшем случае обсуждался в [3], а резонысы типа в) рассматривались в работах по ЛБВ. Отметим, что приведенный здесь подход позволяет без особого труда найти основные особен-

ности всех из указанных выше резонансов с учетом разброса частиц по скоростям.

Пусть параметры пучка таковы, что

$$\Omega_e/\omega \ll 1, \quad b \approx \bar{R}, \quad \Delta v = 0. \quad (7)$$

Тогда для волновода с периодической границей величина  $\operatorname{Im} \beta$ , определяющая степень экспоненциального нарастания амплитуды волны, в случае резонанса б) равна

$$\operatorname{Im} \beta = \pm \times |g_R^{(l)}| \frac{\Omega_e \omega}{v^2} \frac{v_j^2}{\bar{R}^2} \frac{\sqrt{1 - v^2 \epsilon/c^2}}{(\omega^2/v^2 + v_j^2/\bar{R}^2 - \omega^2 \epsilon/c^2)^{3/2}}, \quad (8)$$

а ширину резонансной полосы можно определить по формуле

$$\Delta \omega/\omega = 2 \times |g_R^{(l)}|. \quad (9)$$

Предельно допустимый разброс по скоростям находится из условия

$$0 \leq \left( \frac{\Delta v}{v} \right)^2 \leq 2 \times |g_R^{(l)}| \frac{v_j^2}{\bar{R}^2} \frac{\Omega_e^2}{v^2} \frac{|1 - v^2 \epsilon/c^2|}{[\omega^2/v^2 + v_j^2/\bar{R}^2 - \omega^2 \epsilon/c^2]^2}. \quad (10)$$

Для волновода с периодическим заполнением вместо формул (8) — (10) соответственно получим

$$\operatorname{Im} \beta = \pm \frac{\times}{2} |g_{\epsilon}^{(l)}| \frac{\Omega_e \omega}{v^2} \left[ v_j^2/\bar{R}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - v^2 \epsilon/c^2)^2 \right] \left[ \left( 1 - \frac{v^2 \epsilon}{c^2} \right) \left( \frac{\omega^2}{v^2} + \frac{v_j^2}{\bar{R}^2} - \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} \right)^3 \right]^{-1/2}; \quad (11)$$

$$\Delta \omega/\omega = \times |g_{\epsilon}^{(l)}| \left[ 1 + \frac{\omega^2 \bar{R}^2}{v^2 v_j^2} (1 - v^2 \epsilon/c^2)^2 \right] |1 - v^2 \epsilon/c^2|^{-1}; \quad (12)$$

$$0 \leq \left( \frac{\Delta v}{v} \right)^2 \leq \times |g_{\epsilon}^{(l)}| \frac{\Omega_e^2}{v^2} \left[ v_j^2/\bar{R}^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - v^2 \epsilon/c^2)^2 \right] \left( \frac{\omega^2}{v^2} + \frac{v_j^2}{\bar{R}^2} - \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} \right)^{-2}. \quad (13)$$

Аналогичный расчет можно провести для пучка, параметры которого удовлетворяют условиям

$$\Omega_e \approx \omega, \quad b \ll \bar{R}, \quad \Delta v = 0. \quad (14)$$

При этом вместо (11) и (13) получим в рассматриваемом приближении\*

$$\operatorname{Im} \beta = \pm \frac{\times}{2} |g_{\epsilon}^{(l)}| \frac{\pi l}{D}; \quad (15)$$

$$0 \leq \left( \frac{\Delta v}{v} \right)^2 \leq 2 \times |g_{\epsilon}^{(l)}| \left[ 1 + \left( \frac{\omega D}{\pi l v} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (16)$$

Как и следовало ожидать, формула (15) в первом приближении совпадает с тем, что было найдено в случае безграничной периодически неоднородной среды [4, 5].

Подобным же образом можно рассмотреть резонансы типа в). Например, для пучка (14) получим в приближении  $O(\times^2)$

\* Без ограничения общности можно теперь положить  $\times = \frac{b}{\bar{R}}$ .

$$\operatorname{Im} \beta = \pm \times \frac{\nu_j}{2R} \sqrt{\frac{\Omega_e/\omega}{1 + \Omega_e/\omega}}. \quad (17)$$

Указанный резонанс может стать довольно существенным, если плотность пучка такова, что наряду с синхронизмом прямой (обратной) волны структуры и медленной (быстрой) волны плотности тока имеет место резонанс типа б). Решение уравнения (1) теперь следует искать с учетом трехкратного вырождения. Вместо формулы (6) имеем

$$\begin{aligned} \beta = \beta^{(0)} & \pm \times [N_{\lambda_1}^{-1} N_{\lambda_2}^{-1} \langle d_{\lambda_1} | B_1^{(l)} | c_{\lambda_2} \rangle \langle d_{\lambda_2} | B_1^{(-l)} | c_{\lambda_1} \rangle + \\ & + N_{\lambda_1}^{-1} N_{\lambda_3}^{-1} \langle d_{\lambda_1} | B_1^{(l)} | c_{\lambda_3} \rangle \langle d_{\lambda_3} | B_1^{(-l)} | c_{\lambda_1} \rangle]^{1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Если прямая волна структуры синхронизована с медленной волной плотности тока, из (18) получим  $l_1 = l$ ,  $l_2 = 0$ )

$$\operatorname{Im} \beta = \pm \frac{x}{2} \left[ |g_e^{(l)}|^2 \frac{\pi^2 l^2}{D^2} + \frac{\nu_{ls}^2}{R^2} \left[ 1 + \frac{\omega D}{\pi l v} \right]^{-1} \frac{1}{J_1^2(\nu_{ls})} \right]^{1/2}, \quad (19)$$

т. е. степень экспоненциального нарастания амплитуды может стать больше, чем величина, найденная в (15).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э С Масунов, сб Ускорители, вып 12, 44 (1970).
- 2 В И Короза, Э С Масунов, Радиотехника и электроника, - 15, № 8, 1594 (1970).
3. C. K. Birdsall, Proc. IRE, 42, 1629 (1959).
- 4 А С Омелаенко, П. В Блиох, Изв высш. уч зав — Радиофизика, 6, № 5, 946 (1963)
- 5 Н С Репалов, И А Хижняк, Радиотехника и электроника, 10, № 2, 334 (1965).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию  
24 декабря 1969 г.,  
после доработки  
21 декабря 1970 г.

#### ON THE STABILITY OF AN ELECTRON BEAM MOVING IN A PERIODIC WAVEGUIDE

E. S. Masunov

By means of the electrodynamic approach the problem of the beam motion in the periodic waveguide is reduced to finding the solutions of the system of linear differential equations with periodic coefficients. This permits a rather simple investigation of the main resonances which may occur when the beam is moving in such a waveguide system.

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

УДК 621.378.32

### САМОСИНХРОНИЗАЦИЯ МОД В ОКГ НА РУБИНЕ В РЕЖИМЕ СВОБОДНОЙ ГЕНЕРАЦИИ

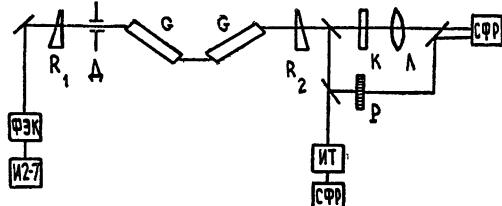
*А. Н. Бондаренко, Г. В. Кривошеков, В. М. Семибалаумут, В. А. Смирнов,  
М. Ф. Ступак*

В ряде работ (см., например, [1, 2]) сообщалось о наблюдении периодической модуляции выходной мощности твердотельных ОКГ в режиме свободной генерации и гигантского импульса. Авторы этих работ связывают это явление с самосинхронизацией мод в активной среде ОКГ. Исследование модуляции интенсивности излучения первого пичка свободной генерации ОКГ на рубине и неодимовом стекле проводилось также в [3]. В этой работе делается вывод об отсутствии самосинхронизации мод в активной среде в режиме свободной генерации, а периодическая модуляция интенсивности объясняется случайной интерференцией мод. Периодическая модуляция с межмодовой частотой наблюдалась также в [4] при использовании длинных резонаторов (200 метров). Авторы этой работы предполагают, что модуляция интенсивности является следствием самосинхронизации аксиальных мод.

Нами наблюдалась генерация сверхкоротких импульсов света с глубиной модуляции 100% при самосинхронизации мод в ОКГ на рубине в режиме свободной генерации. Изучались пространственная и временная когерентности излучения, спектр генерации и длительность сверхкоротких импульсов.

Экспериментальная установка приведена на рис. 1. Резонатор с оптической дли-

Рис. 1.  $R_1$ ,  $R_2$  — зеркала с коэффициентами отражения 0,96 и 0,78;  $G$  — рубиновые стержни с размерами  $120 \times 12$  мм;  $D$  — диаграмма диаметром 1,8 мм;  $K$  — клиновидное зеркало;  $P$  — дифракционная решетка; ИТ — интерферометр Фабри—Перо.



ной  $L = 210$  см образован двумя зеркалами на клиновидных подложках с коэффициентами отражения  $R_1$ ,  $R_2$ , 0,96 и 0,78. Активный элемент состоял из двух рубиновых стержней с размерами  $120 \times 12$  мм, срезанных под углом Брюсгера к оси резонатора. Таким образом, паразитная селекция продольных типов колебаний отсутствовала, а поперечные типы колебаний устраивались с помощью диафрагмы  $D$  диаметром 1,8 мм. В первой части эксперимента регистрировались временные и спектральные характеристики излучения первого пичка. Для этого использовались коаксиальные фотодиоды типа ФЭК-15 с осцилографом И2-7, интерферометр Фабри—Перо с расстоянием между зеркалами 6 мм. Для выделения спектра излучения первого пичка использовался скоростной фоторегистратор типа СФР2М. Измерения показали, что в большинстве случаев (с вероятностью 70%) первый пичок промодулирован сверхкороткими импульсами с периодом 14 нсек при глубине модуляции 100% (рис. 2а, б). Измеренная длительность сверхкоротких импульсов составляла 2 нсек, что равно пределу разрешения регистрирующей аппаратуры. В особых случаях глубина модуляции составляла 20—90%. На рис. 2в приведена микрофотограмма спектра излучения первого пичка. Как видно, кривая — гладкая (с точностью до межмодовой структуры), что характерно для режима полностью синхронизованных мод [5]. Ширина спектра составляла  $0,4 \text{ см}^{-1}$ , что соответствует длительности импульса  $8 \cdot 10^{-11}$  сек при полной синхронизации мод.

Во второй части эксперимента исследовалась временная и пространственная когерентность излучения первого пичка. Для этого излучение направлялось на дифракцион-

онную решетку с расстоянием между щелями 0,3 мм и на клиновидное зеркало (клин  $1'$ ), где должна наблюдаваться интерференционная картина в случае сохранения временной когерентности.

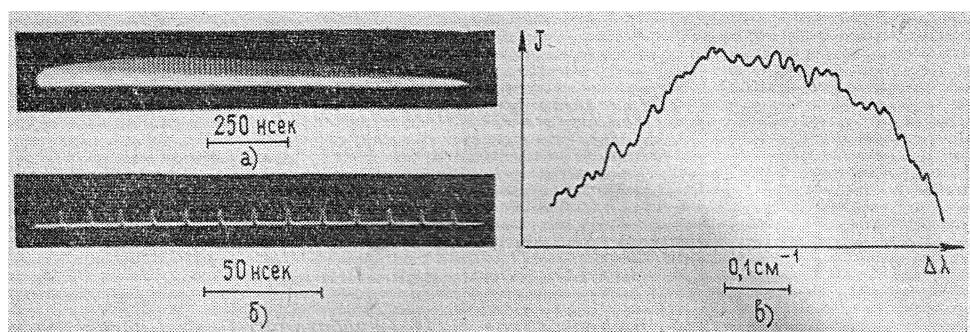


Рис. 2 *a*, *б* — осциллограммы излучения первого пичка генерации, *в* — микрофотография спектра излучения первого пичка.

менной когерентности. Изображение зеркала  $K$  с помощью линзы  $L$  проектировалось на щель СФР. Объектив СФРа фокусировался на бесконечность. Изображения интерференционных картин от решетки и зеркала были разнесены на пленке СФРа в вертикальном направлении. Это обеспечивало одновременную развертку во времени интерференционных картин пространственной (рис. 3 *а*) и временной (3 *б*) когерентности, из которых можно установить, что пространственная и временная когерентность излучения первого пичка всегда сохраняется. Таким образом, результаты измерений (100%-я глубина модуляции, «гладкость» спектра, наличие когерентности) убеждают в том, что в эксперименте наблюдалась самосинхронизация мод

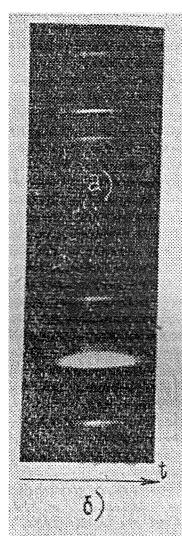


Рис. 3. Интерференционные картины пространственной (*а*) и временной (*б*) когерентности излучения первого пичка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Коробкин, М. Я. Щелев, ЖЭТФ, 53, 1230 (1967).
2. S. L. Sharigo, M. A. Duguay, L. B. Kleizerg, Appl. Phys. Lett., 12, 36 (1968).
3. В. И. Малышев, А. С. Маркин, А. В. Масалов, А. А. Сычев, ЖЭТФ, 57, 827 (1969).
4. А. С. Корниенко, И. В. Кравцов, Е. Г. Ларинов, Н. И. Наумкин, Письма в ЖЭТФ, 11, 585 (1970).
5. В. И. Малышев, А. В. Масалов, А. А. Сычев, ЖЭТФ, 59, 48 (1970).

УДК 621.37

## УПРАВЛЯЕМАЯ МАГНИТОСТАТИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ ЗАДЕРЖКИ СВЧ С ПЕРЕСТРОЙКОЙ ПО ЧАСТОТЕ\*

Д. М. Иошпе

Многочисленные исследования магнитоупругих (МУ) и магнитостатических (МС) волн в монокристаллах ферритов (см. [1, 2] и др.) привели к созданию макетов миниатюрных управляемых МУ [3] и МС [4] линий задержки (ЛЗ) с постоянными магнитами. Однако рабочие частоты  $f$  этих ЛЗ ограничены диапазоном  $0,4 < f < 1 \text{ Гц}$ . Ниже описан разработанный и изготовленный нами макет МС ЛЗ с постоянным магнитом на частоте  $f_0 = 4,5 \text{ Гц}$ .

Ряд преимуществ МС ЛЗ по сравнению с МУ ЛЗ делает целесообразным разработку прежде всего этого типа устройств менее жесткие требования к обработке кристаллов, возможность работы в моноимпульсном режиме и в режиме «на проход», обеспечивающем эффективную развязку входа и выхода при регулировке задержки практически от нуля [4], почти в два раза меньше поле смещения, чем в МУ ЛЗ; весь диапазон регулировки обеспечивается изменением поля в пределах  $10-15 \text{ э}$ , тогда как в МУ ЛЗ для этого требуются десятки и сотни эрстед [1, 2]; МС ЛЗ может быть перестроена по  $f$  по линейному закону изменением поля на величину  $0,2-0,4 \text{ э} \cdot \text{Мгц}^{-1}$ ; величина пороговой мощности на 3-4 порядка выше, чем в МУ ЛЗ [5].

В макете использован монокристаллический стержень ИЖГ длиной 9,48 мм и диаметром 2,05 мм с ориентацией оси вдоль  $H$ . Торцы его полированы и строго параллельны. Потери на распространение  $R_p (\text{дб} \cdot \text{мксек}^{-1})$  МС волн в этом стержне в диапазоне  $1 < f < 4,7 \text{ Гц}$  даются выражением [6]  $R_p \approx 2f + 4,3$  и составляют  $\approx 13,3 \text{ дб} \cdot \text{мксек}^{-1}$  на  $f = f_0$ . Зависимость от  $f$  (Гц) продольного внешнего поля смещения  $H_0 (\text{э})$ , необходимого для получения задержки  $\tau = 1 \text{ мксек}$ , определяется формулой  $H_0 = 335f - 45$ , т. е. коэффициент перестройки по частоте приближенно равен  $0,355 \text{ э} \cdot \text{Мгц}^{-1}$  и поле смещения составляет примерно  $1550 \text{ э}$  на  $f_0$ .

Указанное сравнительно большое поле обеспечивается подковообразным магнитом, рабочая точка подбирается с помощью магнитных шунтов. Конструкция секции с кристаллом обеспечивает необходимую жесткость в сочетании с малой длиной рабочего зазора магнита (13 мм) и развязкой в режиме «на проход» входа и выхода по просачивающемуся сигналу не менее 90 дБ, что является существенным отличием данной ЛЗ от описанных ранее [3, 4] (рис. 1). Развязка обеспечивается помещением фер-

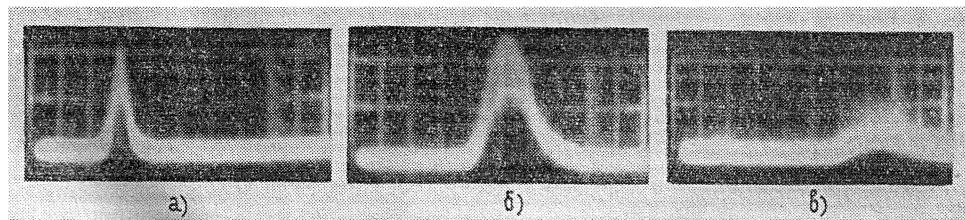


Рис. 1. Осциллограммы МС импульсов на частоте  $4,5 \text{ Гц}$ :

длительность импульса  $\tau_i = 0,3 \text{ мксек}$ , развертка — 0,5 мксек на большое деление; задержка  
a) 1,0 мксек; б) 2,0 мксек; в) 3,2 мксек.

ритового стержня в металлическую оболочку (рис. 2). Расчет по формуле, выведенной нами с учетом того, что указанная конструкция является заполненным диэлектриком запредельным металлическим волноводом, хорошо согласуется с экспериментом. Развязка  $R_s (\text{дб})$  металлической оболочки длиной  $l_s (\text{см})$ , имеющей погонное затухание  $R_1 (\text{дб} \cdot \text{см}^{-1})$  [6], равна

$$R_s = R_1 l_s \geqslant \frac{54,5 l_s}{K a_s} = K_s \tau_s, \quad (1)$$

\* Доклад на Всесоюзной научно-технической конференции по ферритовой технике, г. Ленинград, 1970 г.

где для оболочки круглого сечения (волна  $H_{11}$ )  $K_3 = 16 \text{ дБ}$ ;  $\rho_3 = l_3/r_3 = 2l_3/d_3$ ; для прямоугольного сечения (волна  $H_{10}$ )  $K_3 = 27,25 \text{ дБ}$ ;  $\rho_3 = l_3/a_3$ . Здесь  $K$  — коэффициент, зависящий от формы волновода и типа волны в нем;  $a_3$  — характеристический размер волновода;  $r_3$  — радиус,  $d_3$  — диаметр,  $a_3$  — ширина стенки.

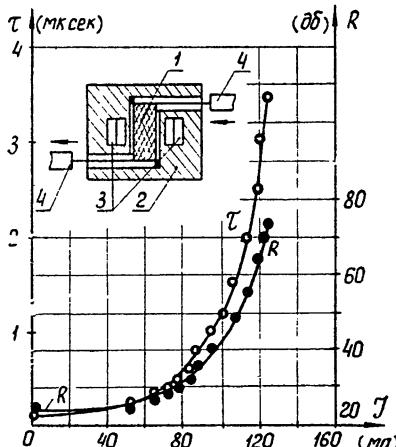


Рис. 2. Градуировочные кривые ЛЗ—время задержки ( $\tau$ ) и полные потери ( $R$ ) в зависимости от управляемого тока ( $I$ ) на  $f_0=4,5 \text{ Гц}$ .

На вставке:

1 — кристаллический стержень ИЖГ; 2 — металлический корпус; 3 — катушки: управляющая и перестройки по частоте; 4 — коаксиальные кабели с тонкими коротко-замкнутыми центральными проводниками — антennами на концах.

Описанная конструкция в отличие от [4] снимает полностью ограничение  $\tau$  снизу; в отличие от [3] отпадает необходимость в ортогональном расположении возбуждающих антенн, и поэтому оси миниатюрных 75-омных разъемов расположены в одной плоскости.

В отличие от [3, 4] в макете осуществляется электрическая перестройка в полосе  $f_0 \pm 200 \text{ МГц}$  изменением тока в специальной катушке перестройки от 0 до  $\pm 800 \text{ мА}$ . Полоса частот перестройки может быть увеличена, если катушку перестройки поместить на шунте и электрически регулировать его магнитное сопротивление. На каждой  $f$  изменением тока в управляющей катушке от 0 до  $\sim 125 \text{ мА}$   $\tau$  регулируется от  $\sim 0,1 \text{ мксек}$  (как подобрано начальное поле при настройке) до  $\sim 3,5 \text{ мксек}$  (рис. 2). При этом полные потери  $R$  (дБ) изменяются от  $\sim 25 \text{ дБ}$  при  $\tau = 0,1 \text{ мксек}$  до  $\sim 72 \text{ дБ}$  при  $\tau \approx 3,5 \text{ мксек}$ .

Следует отметить, что важным резервом снижения  $R$  является электродинамическое согласование ЛЗ. Известно, что  $R = R_p \tau + R_c$ , где потери связи (дБ) равны  $R_c = R|_{\tau=0}$  [7] и включают в себя [8] потери на отражение  $R_0$  (дБ) из-за электродинамического рассогласования секций, содержащей ферритовый образец, с трактом СВЧ, и потери на преобразование  $R_n$  (дБ) электромагнитной энергии в энергию МС волны  $R_c = R_0 + R_n$ , следовательно,

$$R = R_p \tau + R_0 + R_n. \quad (2)$$

Успехи, достигнутые в электродинамическом согласовании МУ ЛЗ [8], показывают, что и в случае МС ЛЗ оно позволит добиться снижения  $R_c$  практически до уровня  $R_0$ .

ЛЗ весом 300 г может быть использована как дисперсионный фильтр для сжатия частотно-модулированных импульсов или как ЛЗ с электрической перестройкой по частоте.

Автор выражает благодарность А. Г. Гуревичу за постоянную поддержку, интерес к работе и ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Гуревич, Б. М. Лебедь, С. А. Миронов, С. С. Старобинец, А. Г. Титова, К. В. Шевлягин, Изв. АН СССР, сер. физ., 30, № 5, 1002 (1966).
2. F. A. Olson, J. R. Yaeger, IEEE Trans., MTT-13, № 1, 63 (1965).
3. А. Г. Гуревич, Б. М. Лебедь, С. А. Миронов, К. В. Шевлягин, Электронная техника, сер. 7, № 3, 75 (1968).
4. К. В. Шевлягин, А. Г. Гуревич, Б. М. Лебедь, С. А. Миронов, Электронная техника, сер. 7, № 5, 3 (1968).
5. J. H. Collins, D. A. Wilson, Appl. Phys. Lett., 12, № 10, 331 (1968).
6. Д. М. Иошпе, ФТТ, 12, № 11, 3361 (1970).
7. R. A. Sparks, Appl. Phys. Lett., 8, № 11, 287 (1966).
8. J. D. Adam, J. H. Collins, N. Rubino, Proc. IEEE, 56, № 8, 1373 (1968).

УДК 538.56

## ВЛИЯНИЕ РАДИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛА НА ДЕТЕКТОРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИРТУАЛЬНОГО КАТОДА

Ю. А. Пирогов

Механизм детектирования СВЧ сигналов виртуальным катодом (ВК) теоретически исследовался ранее лишь в одномерном приближении [1–3]. В данной работе учитывается влияние на детекторный эффект радиальной зависимости потенциала ВК в аксиально-симметричном электронном пучке конечного сечения. В электронных детекторах рассматриваемого типа перед анодом прибора (например, перед отражателем кристалла [4] или коллектором ЛБВ [5]) создается ВК, который реагирует изменением анодного тока на СВЧ модуляцию по скоростям, появляющуюся в пучке при облучении его приемляемым сигналом. В одномерном случае это изменение анодного тока  $\Delta I_a$  (так называемый «детекторный ток») определяется выражением вида [1–3]

$$\Delta I_a = I_a \gamma (\eta - 0,5), \quad (1)$$

где  $I_a = I_0 \exp(-\eta)$  — анодный ток;  $I_0$  — ток насыщения,  $\eta = e_0 V_m / kT$  — безразмерный потенциал ВК;  $T$  — температура катода;  $\gamma$  — параметр, пропорциональный мощности СВЧ сигнала.

Согласно (1), детекторный ток имеет различную величину и знак в разных точках анодной вольт-амперной характеристики и при токе  $I_a = 0,61 I_0$  ( $\eta = 0,5$ ) обращается в нуль. Эксперимент, однако, показывает, что точка перехода детекторного тока через нуль обычно наблюдается при значениях анодного тока, меньших, чем  $0,61 I_0$ . Так, при исследовании отражательных кристаллов-детекторов [4] в диапазонах  $\lambda = 3 \text{ см}, 8 \text{ мм}$  и  $4 \text{ мм}$  переход детекторной характеристики  $\Delta I_a(\eta)$  через нуль наблюдался при токах  $I_a = (0,3 \pm 0,5) I_0 < 0,61 I_0$ , т. е. при  $\eta > 0,5$ . Одной из причин этого смещения может явиться радиальное провисание потенциала ВК, имеющееся в реальных, т. е. ограниченных по сечению, электронных пучках.

Разобъем электронный поток на тонкие коаксиальные слои, полагая, что внутри слоев выполняется условие прямолинейности электронных траекторий, необходимое для вычисления детекторного тока по формуле (1). Если предположить также, что плотность пространственного заряда в области ВК постоянна по всему сечению электронного пучка, то решение уравнения Пуассона даст квадратичную зависимость потенциала ВК от радиуса (для пучков с плотностью пространственного заряда, уменьшающейся к периферии, радиальное провисание потенциала будет еще заметнее).

$$\eta = \eta_0 (1 - \zeta r^2). \quad (2)$$

Здесь  $\zeta = \rho_0 R_0 / 4e_0 V_m$ ;  $r = R/R_0$ ;  $e_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума;  $R_0$  — радиус пучка;  $R$  — текущий радиус;  $V_m$  — потенциал ВК на оси пучка;  $\eta_0 = e_0 V_m / kT$ ;  $e_0$  — заряд электрона;  $k$  — постоянная Больцмана.

Применяя (1) с учетом (2) для детекторного тока в элементарном цилиндрическом слое, будем иметь

$$d(\Delta I_a) = I_0 \gamma \{ \eta_0 (1 - \zeta r^2) - 0,5 \} \exp [-\eta_0 (1 - \zeta r^2)] 2r dr. \quad (3)$$

Интегрируя (3) по  $r$  от 0 до 1, получим суммарный детекторный ток, регистрируемый во внешней цепи прибора.

$$\Delta I_{a\Sigma} = \frac{I_0 \gamma \exp(-\eta_0)}{\eta_0 \zeta} \{ (\eta_0 + 0,5) [\exp(\eta_0 \zeta) - 1] - \\ - \eta_0 \zeta \exp(\eta_0 \zeta) \} \approx I_0 \gamma \{ \eta_0 (1 - \zeta) - 0,5 \} \exp(-\eta_0). \quad (4)$$

(здесь и далее приближенные равенства справедливы в случае  $\zeta \ll 1$ ). Приравнивая  $\Delta I_{a\Sigma}$  нулю, найдем потенциал ВК на оси пучка, при котором детекторный ток во внешней цепи обращается в нуль:

$$\eta_{00} \approx 0,5 (1 + \zeta). \quad (5)$$

Для сравнения с экспериментом введем эффективный (усредненный по сечению) потенциал ВК, соответствующий току во внешней цепи  $I_{a\Sigma}$ :

$$I_{a\Sigma} = I_0 \exp(-\eta_{\text{эфф}}). \quad (6)$$

С другой стороны, интегрированием по радиусу элементарного тока в форме Больцмана,  $dI_a = I_0 \exp[-\eta(r)] 2r dr$ , с учетом (2) можно получить для анодного тока во внешней цепи соотношение вида

$$I_{a\Sigma} = \frac{I_0 \exp(-\eta_0)}{\eta_0 \zeta} [\exp(\eta_0 \zeta) - 1] \approx I_0 (1 + 0,5 \eta_0 \zeta) \exp(-\eta_0). \quad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), выразим  $\eta_{\text{эфф}}$  через потенциал ВК на оси пучка:

$$\eta_{\text{эфф}} = \eta_0 - \ln(1 + 0,5 \eta_0 \zeta) \approx \eta_0 (1 - 0,5 \zeta). \quad (8)$$

И, наконец, подставляя вместо  $\eta_0$  выражение (5), найдем значение эффективного потенциала  $\eta_{\text{эфф}0}$  при нуле детекторного тока.

$$\eta_{\text{эфф}0} = 0,5 (1 + 0,5 \zeta) > 0,5.$$

Таким образом, в случае ограниченных по сечению электронных пучков ( $\zeta > 0$ ) точка перехода детекторного тока через нуль должна находиться (в соответствии с приведенными выше данными эксперимента [4]) при анодных токах  $I_{a\Sigma} = I_0 \exp(-\eta_{\text{эфф}0})$ , меньших значения  $0,61 I_0$ , полученного в одномерном приближении.

В заключение отметим, что эффект одновременного появления в пучке детекторных токов различного знака (основная гипотеза предложенной теории) экспериментально пока не исследован. В специально сконструированных приборах с коаксиально секционированным анодом этот эффект может быть обнаружен методом раздельной регистрации токов на оси и периферии пучка.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- 1 С. Д. Гвоздовер, Изв. высш. уч. зав—Радиофизика, 8, 2, 308 (1965).
- 2 С. Д. Гвоздовер, Радиотехника и электроника, 10, № 10, 1726 (1965).
3. Ю. А. Пирогов, Вестник МГУ, сер. физ.-астр. (в печати).
- 4 М. Н. Девятков, А. И. Костиенко, Ю. А. Пирогов, С. К. Романюк, Электронная техника, сер. Электроника СВЧ, вып. 9, 86 (1970).
- 5 М. Н. Девятков, А. И. Костиенко, Е. Я. Мясоедов, Радиотехника и электроника, 7, № 5, 838 (1962). ,

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
23 ноября 1970 г.