

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Иванов В. П., Станкевич К. С.</b> К вопросу об абсолютных измерениях потоков дискретных источников с помощью двухантенного интерферометра . . . . .	5
<b>Бреzugнов В. Н., Удальцов В. А.</b> Многоканальный спектрометр и измерение вариаций спектров пульсаров <i>CP 0950</i> и <i>CP 1133</i> . . . . .	9
<b>Хрулев В. В., Петровский А. А., Капустин П. А.</b> О спектре яркостных температур атмосферы в дециметровом диапазоне волн . . . . .	15
<b>Сорокин Ю. М., Степанов Н. С.</b> Об отражении и преломлении электромагнитных волн в движущейся неоднородной плазме . . . . .	19
<b>Ковнер М. С., Лапидус В. А., Лупанов Г. А.</b> Излучение электрического и магнитного диполей, помещенных в полость, образованную плазменным слоем . . . . .	28
<b>Зюндер Д., Рухадзе А. А.</b> К теории параметрического возбуждения электростатических волн в полностью ионизованной плазме . . . . .	36
<b>Чугунов Ю. В.</b> Об особенностях квазиэлектростатического поля источников в магнитоактивной плазме . . . . .	44
<b>Борисов В. В.</b> Поперечные электромагнитные поля, возникающие при падении плоской волны на фронт ионизации, движущийся со скоростью света . . . . .	54
<b>Докучаев В. П.</b> Излучение волн элементарными статическими диполями, равномерно движущимися по окружности . . . . .	60
<b>Пономарев Г. А., Симакова Н. А., Якубов В. П.</b> Среднее поле точечного источника в плоском турбулентном слое . . . . .	72
<b>Гулин Э. П.</b> Корреляционные функции поля, рассеянного взволнованной поверхностью, при скользящем распространении . . . . .	80
<b>Шишов В. И.</b> Дифракция волн на сильно преломляющем случайному фазовому экране . . . . .	85
<b>Миловский Н. Д.</b> Об устойчивости одночастотного стационарного режима ОКГ бегущей волны на однородно уширенном активном веществе . . . . .	93
<b>Солин Н. Н.</b> Динамика двухконтурного автогенератора с нелинейным кварцевым резонатором . . . . .	100
<b>Боброва Н. П., Зачепицкая Л. П., Созинов И. Н.</b> О денормализации случайных процессов в дисперсионной линейной системе . . . . .	105
<b>Богданов А. А., Брусин И. Я., Скворцов В. Д.</b> Влияние шумов фотопленки в системах оптической обработки сигналов антенн с синтезируемой апертурой . . . . .	114
<b>Ванке В. А., Крюков С. П., Тимофеев Ю. М.</b> О минимальном уровне собственных нальных координатах . . . . .	127
<b>Лубяко Л. В.</b> Исследование электрических и магнитных свойств веществ в диапазоне миллиметровых и субмиллиметровых волн . . . . .	133
<b>Кошкин Л. И., Гордеев В. А., Стрыйгин Ю. Ф., Нагорнов А. И., Васильев В. П.</b> Изменение направления наведенной анизотропии в цилиндрических магнитомягких ферритах . . . . .	138
<b>Ванке В. А., Крюков С. П., Тимофеев Ю. М.</b> О минимальном уровне собственных шумов электростатического усилителя с ленточным лучом . . . . .	141
<b>Селимов Б. К.</b> Индуцированное излучение электронов в аксиально-симметричном электростатическом поле . . . . .	152
<b>Краткие сообщения и письма в редакцию</b>	
<b>Виноградова Л. В., Дмитренко Д. А., Цейтлин Н. М.</b> Абсолютные измерения интенсивности излучения Кассиопеи-А, Лебедя-А и Тельца-А в диапазоне волн 15—30 см . . . . .	157
<b>Диманштейн Ф. А.</b> Излучение релятивистского заряда в поле гравитационной волны . . . . .	159
<b>Вирник Я. З., Ларионцев Е. Г.</b> Естественные флуктуации частоты в твердотельном лазере с однородно уширенной линией люминесценции . . . . .	162
<b>Осика В. И., Хорев А. А.</b> Флуктуации частоты вращения ротора в магнитном подвесе . . . . .	164

УДК 523.164.4

## К ВОПРОСУ ОБ АБСОЛЮТНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ ПОТОКОВ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ С ПОМОЩЬЮ ДВУХАНТЕННОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА

*В. П. Иванов, К. С. Станкевич*

Обсуждается возможность абсолютных измерений потоков дискретных источников с помощью двухантенного интерферометра. Необходимая точность измерений обеспечивается при калибровке каждой из антенн по методу «искусственной луны».

При абсолютных измерениях потоков дискретных источников наибольшую точность, порядка 2—3%, обеспечивает метод «искусственной луны» [1]. Однако в настоящее время из-за конструктивных трудностей этот метод удается реализовать лишь для антенн с размером отражателя не более 12—15 метров на волнах дециметрового диапазона. При измерении с помощью таких антенн потоков от слабых источников могут возникать ошибки, связанные с неоднородностью фона вокруг источника и в области отведения. Этих ошибок можно избежать, если использовать для абсолютных измерений двухантенный интерферометр. Калибровка каждой из антенн интерферометра по излучению поглощающего диска обеспечивает точность измерений, присущую методу «искусственной луны».

В двухантенном интерферометре с общим гетеродином, ориентированным по линии восток—запад, интенсивность выходного сигнала, выраженная в температурах, при приеме точечного источника в простейшем случае имеет вид

$$T_{a\Sigma} = T_{a_1}(\Theta) + T_{a_2}(\Theta) + 2\sqrt{T_{a_1}T_{a_2}}R(\Theta)\cos\left(2\pi\frac{S}{\lambda}\sin\Theta\right), \quad (1)$$

где  $T_{a_i}$  — температура одиночной антенны,  $S$  — длина базы интерферометра,  $R(\Theta) = \sin[(\pi\Delta\nu/c)S\sin\Theta]/(\pi\Delta\nu/c)S\sin\Theta$  — огибающая функция корреляции интерференционного сигнала при приеме в прямоугольной полосе частот пропускания приемника  $\Delta\nu$ .

Для проведения абсолютных измерений потоков дискретных источников важно, чтобы выполнялось условие  $R(\Theta) \approx 1$ . Тогда приращение сигнала  $T_c$ , связанное с интерференционным членом в (1), будет определяться только температурами антенн и равняться разности сигналов между максимумами и минимумами интерференционной картины: при  $\Theta=0$   $T_c = 4\sqrt{T_{a_1}T_{a_2}}$ . Для точного определения этой величины нужно иметь на записи прохождения дискретного источника достаточно большое число интерференционных лепестков. Расчеты показывают, что при числе лепестков, равном 10, обеспечивается погрешность определения  $T_c$  порядка 1%. Если  $D$  — диаметр большой антенны, то указанное условие можно записать в виде

$$\frac{\lambda}{D} \geq 10 \frac{\lambda}{S} \quad \text{или} \quad S \geq 10D. \quad (2)$$

При дальнейшем рассмотрении будем пользоваться только величиной  $T_c$  ( $\Theta = 0$ ).

Поскольку при приеме точечного дискретного источника, у которого поток равен  $s_v$ , имеет место соотношение

$$T_{a_1} = \frac{\lambda^2}{8\pi K} s_v G_i, \quad (3)$$

то для величины  $T_c$  получаем

$$T_c = 4 \sqrt{T_{a_1} T_{a_2}} = \frac{\lambda^2}{2\pi K} s_v \sqrt{G_1 G_2}. \quad (4)$$

Выражение (4) позволяет определить поток  $s_v$ , если известны усиления антенн  $G_1$  и  $G_2$ . Используя калибровку по излучению абсолютно черного диска (метод «искусственной луны»), найдем

$$G = \frac{T_d}{T_o - T_\Phi} \frac{4\pi}{\int_{\Omega_d} F d\Omega}, \quad (5)$$

где  $T_d$  — приращение антенной температуры при приеме радиоизлучения диска,  $T_o$  и  $T_\Phi$  — температуры окружающего воздуха и космического фона за диском,  $\Omega_d$  — телесный угол диска.

Если цикл измерений состоит из записи интерференционной картины от источника и последующей калибровки антенн по диску, то отпадает необходимость определения антенных температур по тепловой калибровке, и из (4) и (5) получим

$$s_v = \frac{K}{2\lambda^2} \frac{n_c}{\sqrt{n_{d_1} n_{d_2}}} (T_o - T_\Phi) \left[ \int_{\Omega_{d_1}} F_1 d\Omega \int_{\Omega_{d_2}} F_2 d\Omega \right]^{1/2}, \quad (6)$$

где  $n_c$  — отсчет по выходному прибору разности огибающих максимумов и минимумов интерференционной картины при  $\Theta=0$ ,  $n_{d_1}$  — отсчет по выходному прибору при приеме радиоизлучения диска.

Если использовать в составе интерферометра antennу большого диаметра, для которой трудно выполнить условия, необходимые для калибровки по диску, то абсолютные значения потока могут быть найдены из цикла измерений, состоящего из измерения антенной температуры при наведении на источник большой антенны, интерференционной записи источника и калибровки по диску малой антенны. В этом случае из (3), (4) и (5) имеем следующее выражение для вычисления потока  $s_v$ :

$$s_v = \frac{K}{8\lambda^2} \frac{n_c^2}{n_{d_1} n_{d_2}} (T_o - T_\Phi) \int_{\Omega_d} F_2 d\Omega, \quad (7)$$

$n_{d_1}$  — отсчет по выходному прибору при приеме дискретного источника на большую antennу.

Описанный выше цикл измерений и тепловая калибровка температуры антенны позволяет также определить усиление большой антенны. Из соотношений (3) и (4) имеем

$$\frac{G_1}{G_2} = 16 \left( \frac{T_{a_1}}{T_c} \right)^2. \quad (8)$$

При измерении усиления малой антенны по радиоизлучению поглощающего диска из (5) и (8) найдем

$$G_1 = 16 \left( \frac{n_{a_1}}{n_c} \right)^2 \frac{n_{d_2}}{n_{K_1}} \frac{T_{K_1}}{T_0 - T_\Phi} \frac{4\pi}{\int_{\Omega} F_2 d\Omega}, \quad (9)$$

где  $T_{K_1}$  — температура теплового эталона,  $n_{K_1}$  — отклонение выходного прибора при подключении теплового эталона (для большой антенны).

В проводившихся ранее абсолютных измерениях потоков дискретных источников с помощью интерферометра применялись большие антенны с неизвестным усилением в паре с опорными простейшими антennами, имеющими малое, но хорошо известное усиление. В частности, в [3] использовалось восточно-западное плечо Креста Милса и 16-вибраторная решетка с отражателем, усиление которой было точно рассчитано; в более ранних работах опорными антеннами были диполь с отражателем [2] и оптимальный рупор [4].

Включение в пару простейших антенн, имеющих малое усиление, резко увеличивает величину минимально обнаружимого сигнала от дискретного источника. Например, в [3] были сделаны абсолютные измерения только для источников с  $s > 36 \cdot 10^{-6} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ , хотя большая антenna имела  $G > 10^5$ .

В настоящее время для точного определения потоков дискретных источников весьма важно иметь ряд опорных калибровочных источников с потоками порядка  $10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ . Этую задачу можно решить, если применить в качестве опорной параболическую антенну с калибровкой ее усиления по методу «искусственной луны». Для проверки изложенной методики были проведены абсолютные измерения потока дискретного источника Кассиопея-А на частоте  $\nu = 980 \text{ Мгц}$  при полосе приемника  $\Delta\nu = 1 \text{ Мгц}$ , с использованием двухантенного интерферометра с диаметрами параболических отражателей  $D_1 = 12 \text{ м}$  и  $D_2 = 7 \text{ м}$ . Усиление обеих антенн калибровалось по радиоизлучению «черного» диска диаметром 475 см, помещенного во фраунгоферовой зоне. Приемное устройство состоявляли два модуляционных радиометра типа П5-9 с общим гетеродином. Блок-схема установки приведена на рис. 1. Использование модуляционных приемников дало возможность, наряду с интерференционным, вести независимый прием на каждую из антенн.

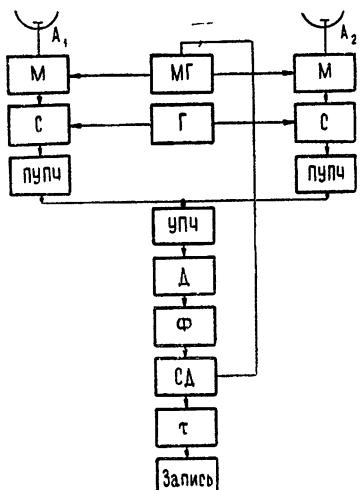


Рис. 1.  $A_1$  и  $A_2$ —антенны интерферометра;  $M$ —модулятор;  $C$ —смеситель;  $УПЧ$ —предварительный усилитель промежуточной частоты  $\omega_{pr}$ ;  $УПЧ$ —усилитель промежуточной частоты;  $\Delta$ —квадратичный детектор;  $\Phi$ —узкополосный усилитель—фильтр частоты  $\Omega$  модуляции;  $СД$ —синхронный детектор;  $МГ$ —модулирующий и опорный генератор частоты  $\Omega$ ;  $\tau$ —усредняющее устройство с постоянной времени  $\tau$ ; „Запись”—выходной прибор (самописец);  $\Gamma$ —генератор частоты  $\omega + \omega_{pr}$ .

В результате измерений, состоящих из интерференционной записи прохождения источника и последующей калибровки усиления каждой из антенн по диску, получено значение плотности потока  $s_{980} =$

$=3,28 \cdot 10^{-23} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \text{ гц}^{-1}$ . Поскольку галактический фон, окружающий источник Кассиопея-А, сравнительно однороден, для оценки точности интерференционного метода были проведены измерения плотности потока на каждой из антенн отдельно при наведении ее на источник и последующем отведении; найденная величина плотности потока в этом случае оказалась равной  $s_{980} = 3,23 \cdot 10^{-23} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ . Хорошее совпадение этих результатов подтверждает возможность получения при интерференционных наблюдениях величин потоков с высокой точностью, обеспечивающей калибровкой усиления антенн по методу «искусственной луны».

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Кротиков, В. А. Порфириев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 4, № 6, 1004 (1961).
2. A. G. Little, Aust. J. Phys., 11, 70 (1958).
3. D. V. Wyllie, Mon. Not. R. astr. Soc., 142, 229 (1969).
4. R. Wielebinski, Proc. IRE (Aust.) (in Press).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
16 февраля 1970 г.

### ON ABSOLUTE MEASUREMENTS OF THE FLUXES OF DISCRETE SOURCES USING TWO-ANTENNA INTERFEROMETER

V. P. Ivanov, K. S. Stankevich

The possibility of absolute measurements of the fluxes of discrete sources using a two-antenna interferometer is discussed. The necessary accuracy is provided when calibrating each of antennas according to the „artificial“ Moon method.

УДК 523.164.4

## МНОГОКАНАЛЬНЫЙ СПЕКТРОМЕТР И ИЗМЕРЕНИЕ ВАРИАЦИИ СПЕКТРОВ ПУЛЬСАРОВ *CP* 0950 И *CP* 1133\*

*B. N. Брезгунов, B. A. Удальцов*

Описывается спектрометр, представляющий собой приемник с широкополосным входом (30—115  $M\mu$ ) и многоканальным узкополосным выходом (40 и 500  $k\mu$ ). Каналы настроены на разные частоты, равномерно распределенные по диапазону анализа (2,8 или 32  $M\mu$ ). Гребенка принимаемых частот перестраивается в пределах 70—115  $M\mu$ . Приводятся спектры серии импульсов пульсаров *CP* 0950 и *CP* 1133 в диапазоне частот 83—111  $M\mu$ . Показано, что спектры импульсов сильно меняются во времени. Изменение спектра от характерного до аномального и наоборот происходит скачкообразно и часто. Найдено, что вращение плоскости поляризации радиоизлучения в межзвездной среде в направлении на *CP* 0950 на частоте 83  $M\mu$  по отношению к 111  $M\mu$  не превышает двух радиан, а зимней иочной ионосферы — 2,5 рад. Такие вращения не могут быть причиной наблюдаемых изменений спектра. Обращено внимание на невозможность объяснения изменений спектра влиянием неоднородностей электронной концентрации в межзвездной среде. Предполагается, что эти изменения связаны с эффектами распространения радиоволн в оболочке пульсаров или с физикой излучения их.

Одной из важнейших характеристик принимаемого излучения пульсаров является его спектральная характеристика. Последняя включает в себя информацию о природе излучения пульсаров и о среде, через которую это излучение проходит. Изменение спектра импульсов во времени — динамика спектра — является также следствием природы излучения пульсара и среды, через которую излучение проходит. Наблюдение динамики спектра и сопоставление результатов измерений с данными о структуре импульсов и поляризации позволяют в отдельных случаях разделить эффекты, связанные с собственным излучением пульсаров и влиянием среды.

Для исследования спектров импульсов пульсаров и дисперсионных измерений в диапазоне частот 60—115  $M\mu$  в лаборатории радиоастрономии ФИАН на базе спектральной установки [1] был разработан многоканальный спектрометр.

Параметры спектрометра, реализованные в процессе разработки, согласованы с диапазоном крестообразного радиотелескопа ДКР-1000 и основными особенностями излучения пульсаров.

Наиболее важные из них приведены в табл. 1.

Спектрометр представляет собой приемник с широкополосным входом и многоканальным узкополосным выходом. Каналы настроены на разные частоты, равномерно распределенные по диапазону анализа. Гребенка принимаемых частот перестраивается на различные участки частотной шкалы.

Таблица 1

## Параметры многоканального спектрометра

1	Диапазон исследования спектров и дисперсии пульсаров	60—115 Мгц
2	Количество каналов одновременной регистрации в том числе узкополосных широкополосных	15 6 9
3	Количество частот фиксированной настройки	24
4	Точность установки частот	не хуже 100 гц
5	Часовая нестабильность принимаемых частот после часо- вого прогрева	не хуже $10^{-6}$
6	Диапазон плавной перестройки гребенки частот Пределы перестройки верхней частоты гребенки Пределы перестройки нижней частоты гребенки	27 Мгц 115—88 Мгц 107—80 Мгц
7	Полосы анализа	0,5, 2; 8 и 32 Мгц
8	Разрешающая способность по частоте узкополосный вариант широкополосный вариант	40 кгц 500 кгц
9	Разрешающая способность по времени не хуже	1 мсек
10	Чувствительность спектрометра с антенной В-3 ДКР-1000 при $\tau=10$ мсек и $\Delta f=500$ кгц	$5 \cdot 10^{-26}$ $\text{вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$
11	Время автокомпенсации уровня среднего квадрата шума на выходе детектора максимальное минимальное	30 мин 10 сек
12	Флуктуационная чувствительность спектрометра (при $\Delta f=500$ кгц, $\tau=1$ сек и эквиваленте антенны на вхо- де приемника)	1,5°К
13	Линейность амплитудной характеристики (по мощности) в единицах напряжения на нагрузке детектора	2,5 в
14	Неравномерность частотной характеристики спектромет- ра в диапазоне 60—120 Мгц	2 дБ
15	Развязка между каналами спектрометра	не менее 30 дБ
16	Набор постоянных времени выходных фильтров канала	1; 2; 5; 10; 100; 200 мсек 1; 10 сек

Блок-схема спектрометра приведена на рис. 1. На входе спектрометра стоит широкополосный усилитель с распределенным усилением (УРУ) [4]. Для подавления помех в низкочастотной части диапазона, где прием не ведется, на вход УРУ включается специальный фильтр

верхних частот (ФВЧ-3). С выхода УРУ сигнал через размножительное устройство поступает на входы приемных каналов I—VIII [3]. Переключение частот настройки осуществляется переключением гетеродинов 10—33. Положения переключателей гетеродинов 1—3 соответствуют различным диапазонам анализа. Для обеспечения дисперсионных и спектральных измерений гетеродины выполнены на кварцевых резонаторах. Выходные схемы каналов I—VIII однотипны. Они обеспечивают основное усиление в приемнике при полосе пропускания 500 кГц. Регистрация сигнала в полосе 500 кГц осуществляется непосредственно с детектора 36 через интегрирующее устройство с набором постоянных времени. Сигнал регистрируется также в полосе 40 кГц (выходы У1—У8). Эта полоса формируется после дополнительного преобразования (39) в УПЧ-2 (40) с помощью фильтров сосредоточенной селекции (ФСС). Частоты настройки ФСС во всех узкополосных каналах разнесены друг от друга на 80 кГц, чтобы иметь возможность подключать все узкополосные каналы к одному широкополосному с целью спектрального анализа в пределах полосы 500 кГц.

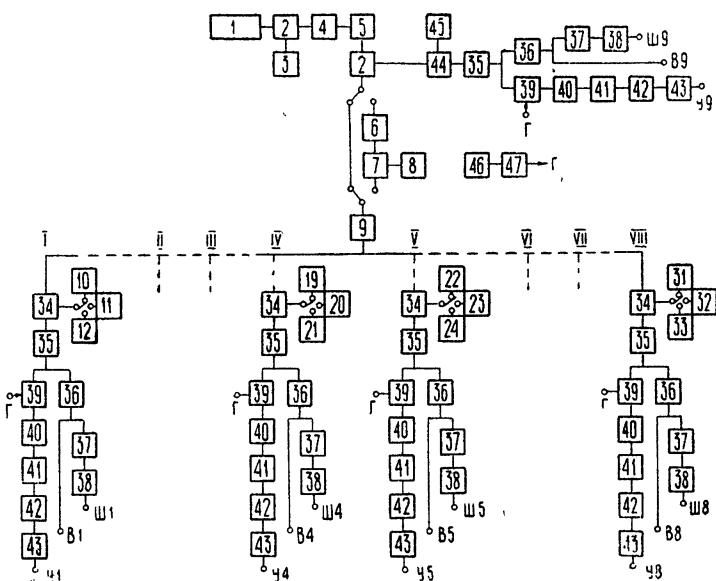


Рис. 1. Блок-схема многоканального спектрометра метрового диапазона волн:

1—антenna; 2—широкополосный гибрид; 3—шумовой генератор; 4—ФВЧ; 5—УРУ; 6—ФНЧ; 7, 34, 39, 44—смесители; 9, 47—размножители; 10—33, 46—кварцевые гетеродины; 8, 45—перестраиваемые гетеродины; 35—полупроводниковый усилитель с дополнительным преобразованием и умножением; 36, 41—линейные детекторы; 40—УПЧ на ФСС; 37, 42—выходные фильтры; 38, 43—компенсаторы; У (1—9)—узкополосные выходы; Ш (1—9)—широкополосные выходы; В (1—9)—выходы детекторные; I—VIII—каналы спектрометра.

Для перестройки гребенки частот спектрометра применяется дополнительное преобразование. Частоты прямого прохождения и зеркальные подавляются специальным фильтром низких частот, стоящим на входе смесителя.

Описанная установка используется для исследования спектров принимаемого радиоизлучения различных пульсаров. Образцы записей импульсов радиоизлучения некоторых пульсаров приведены на рис. 2.

В настоящей работе проведены исследования вариаций спектра импульсов двух наиболее близких пульсаров *CP 0950* и *CP 1133*. В работах [5, 6] рассматривались усредненные спектральные характеристики

этих пульсаров. Однако такие характеристики не могут быть использованы для выделения эффектов мерцания на неоднородностях межзвездной среды и эффектов вращения плоскости поляризации излучения в магнитоактивных средах.

Измерения проводились на частотах 83, 87, 95, 103, 111 Мгц. Полоса пропускания по каждому из каналов была около 500 кгц. Постоянная времени выходного фильтра в каждом из каналов — 10 мсек. В качестве антенны использовалась линия Восток — Запад крестообразного радиотелескопа ДКР-1000. Ширина диаграммы направленности на частоте 100 Мгц по прямому восхождению 11', по склонению — 4,3°. Время наблюдения (сеанс) определялось по времени прохождения источника через диаграмму направленности антенны В—З и составляло примерно 1,5 мин в сутки. Чувствительность радиотелескопа по потоку составляла примерно  $5 \cdot 10^{-26} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$  при  $\Delta f = 450 \text{ кгц}$  и  $\tau = 10 \text{ мсек}$ . Для калибровки сигналов пульсаров, принимаемых на разных частотах, использовались близкие по прямому восхождению дискретные источники радиоизлучения с малыми угловыми размерами и известными спектрами. Были выбраны источники ЗС 267, ЗС 270, ЗС 273, ЗС 283, имеющие угловые размеры, меньшие соответственно 3', 5'; 2', 5'; 12"; 3', и потоки на частоте 86 Мгц ( $27,5; 81,5; 160; 70 \times 10^{-6} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1}$ ). Для контроля за усилением спектрометра применялась калибровка по шумовому генератору [2].

Излучение пульсаров наблюдалось в феврале—марте 1969 г. в ночные времена. Было проведено четыре успешных сеанса наблюдения пульсаров CP 0950 и восемь — CP 1133. Излучение пульсаров принималось эпизодически из-за наличия замираний сигнала и использования меридиального радиотелескопа с узкой диаграммой направленности. За меру интенсивности излучения на фиксированной частоте принимался максимум импульса радиоизлучения пульсара, с поправкой на частотные свойства радиотелескопа и калибровочного источника.

На рис. 3 и 4 показана серия спектральных характеристик импульсов пульсаров CP 0950 и CP 1133, построенная по данным нескольких сеансов наблюдений. Из приведенных графиков следует несколько особенностей в спектрах импульсов.

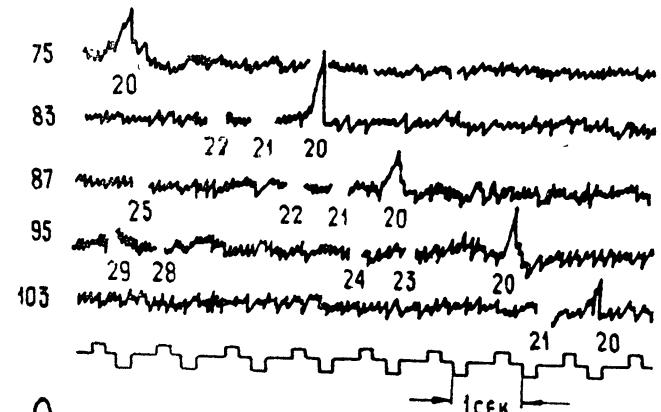
1) Спектры импульсов не одинаковые. Различие в спектрах наблюдается не только между сеансами, но и в пределах одного сеанса наблюдений. Из 12 сеансов наблюдений нет ни одного с одинаковыми спектрами импульсов. На подобную изменчивость спектров импульса пульсара CP 1919 обращалось внимание и ранее в работах [7, 8]. У пульсара CP 0950 и особенно у CP 1133 эти изменения выражены в большей степени, чем у CP 1919. Систематическое наблюдение изменений спектра у трех исследовавшихся пульсаров указывает, по-видимому, на то, что это явление типично для всех пульсаров.

2) У 30—60% импульсов одного сеанса наблюдается близкий вид спектра. Так, например, импульсу CP 0950 5.02.69 г. (см. рис. 2 б) свойственны два характерных вида спектра: 50% импульсов имеет спектр с максимумом интенсивности на частоте 103 Мгц и 30% — спектр, близкий к гладкому.

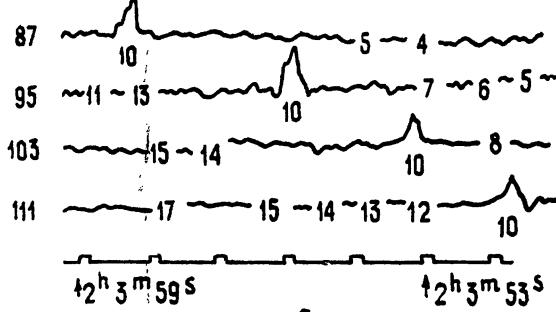
3) Характерный вид спектра импульсов заметно меняется от сеанса к сеансу.

4) Существенное изменение спектров импульсов от характерного для данного сеанса до аномального и наоборот в течение сеанса происходит неоднократно и скачкообразно (см., например, изменение спектра 3-го импульса по отношению ко 2-му и 12-му импульсу по отношению к 11-му на рис. 3 б).

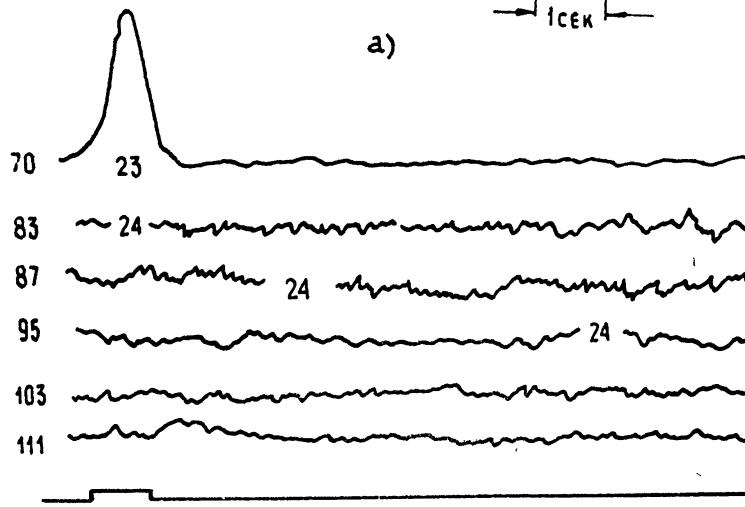
Отмеченные особенности спектров дают основания полагать, что вид спектров CP 0950 и CP 1133 в диапазоне 83—111 Мгц не является



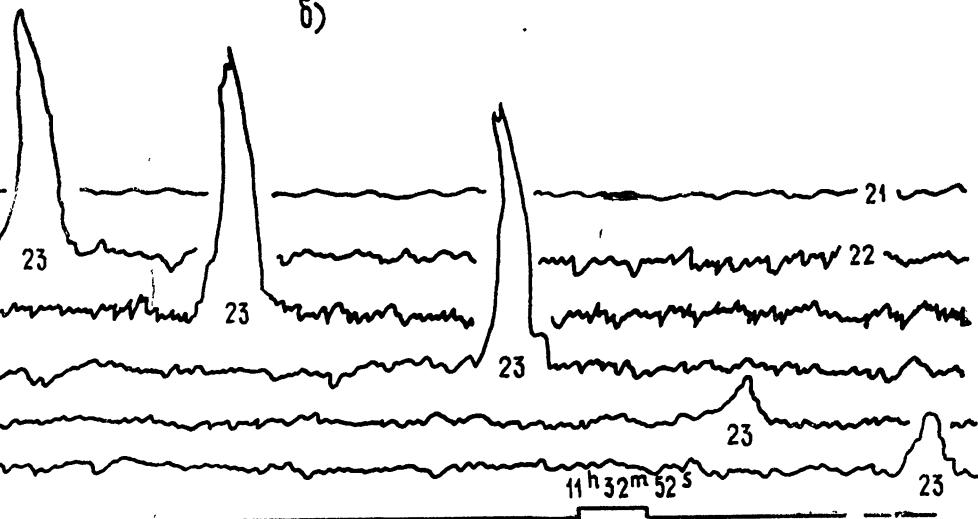
a)



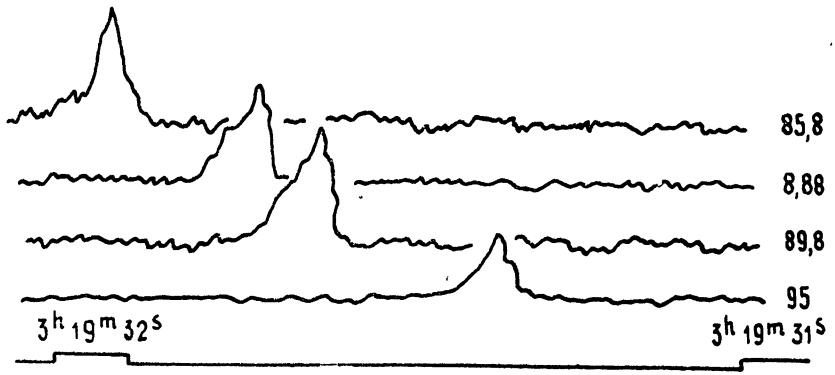
6)



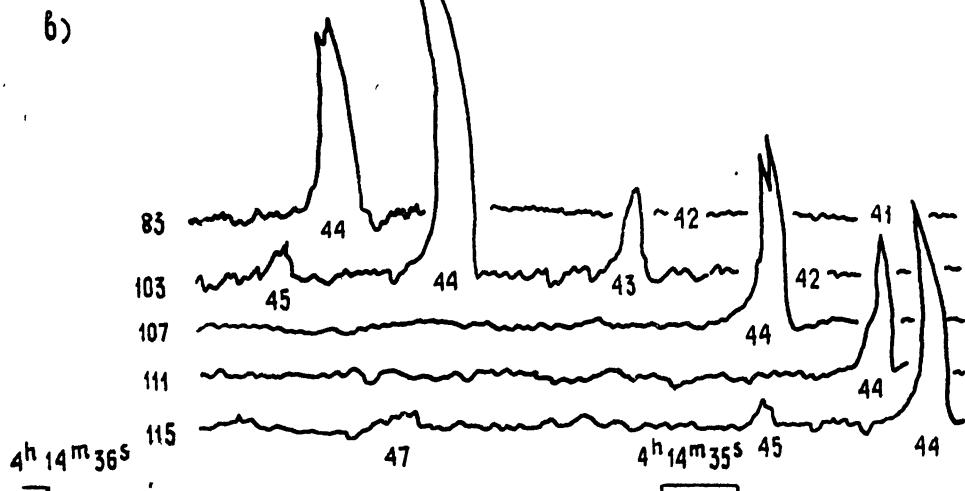
11<sup>h</sup> 32<sup>m</sup> 53<sup>s</sup>



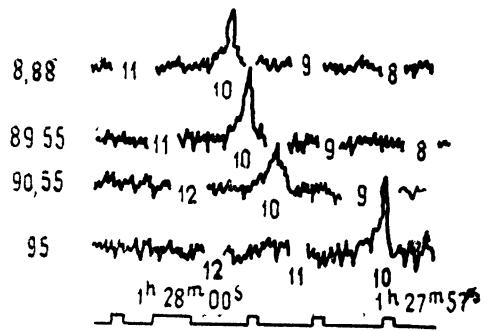
6)



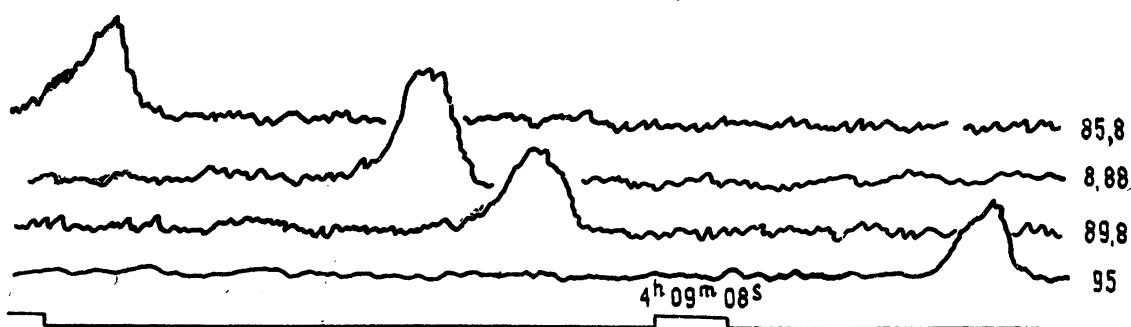
а)



б)



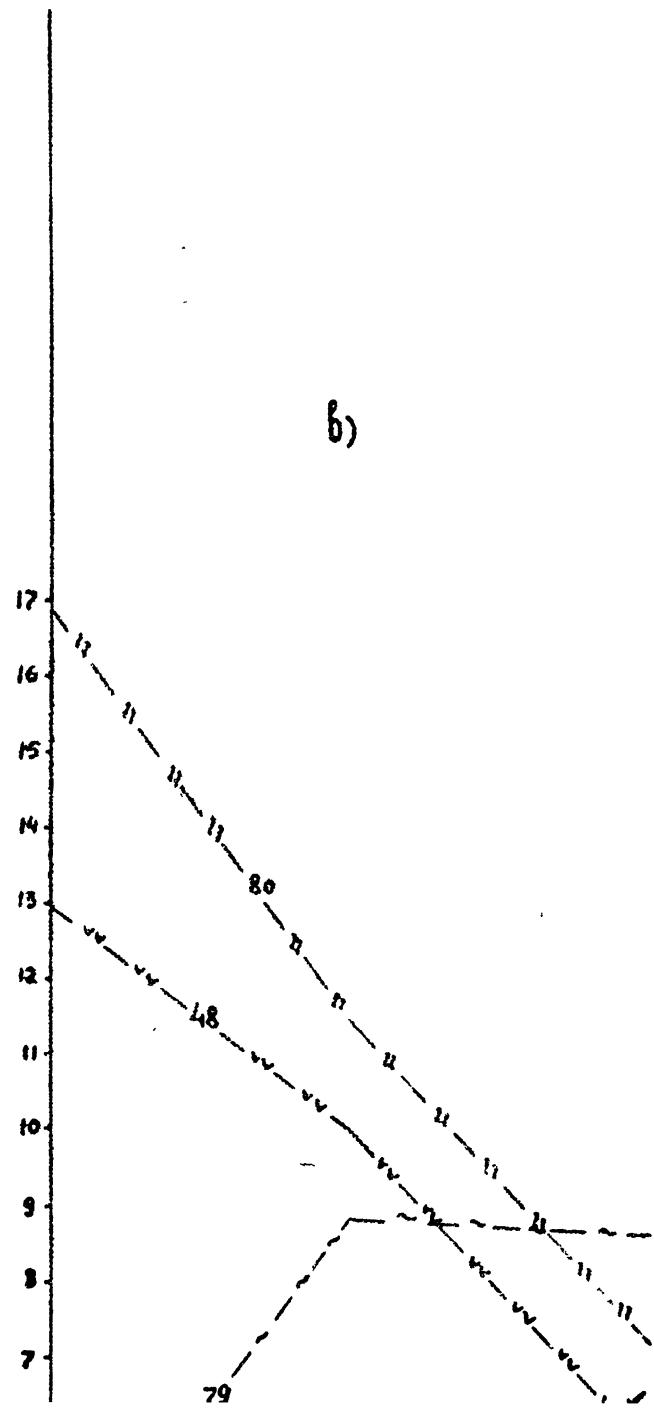
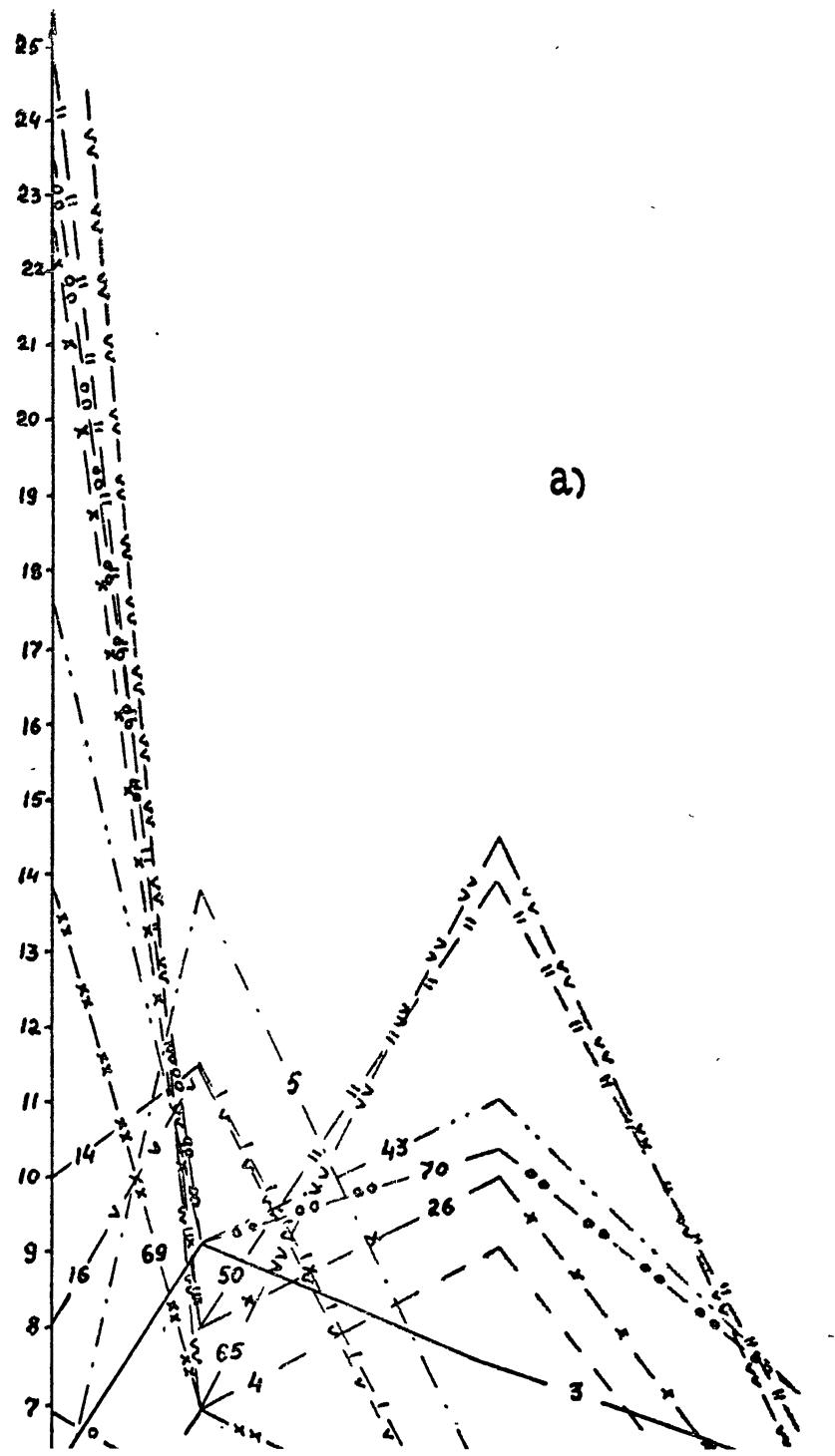
в)

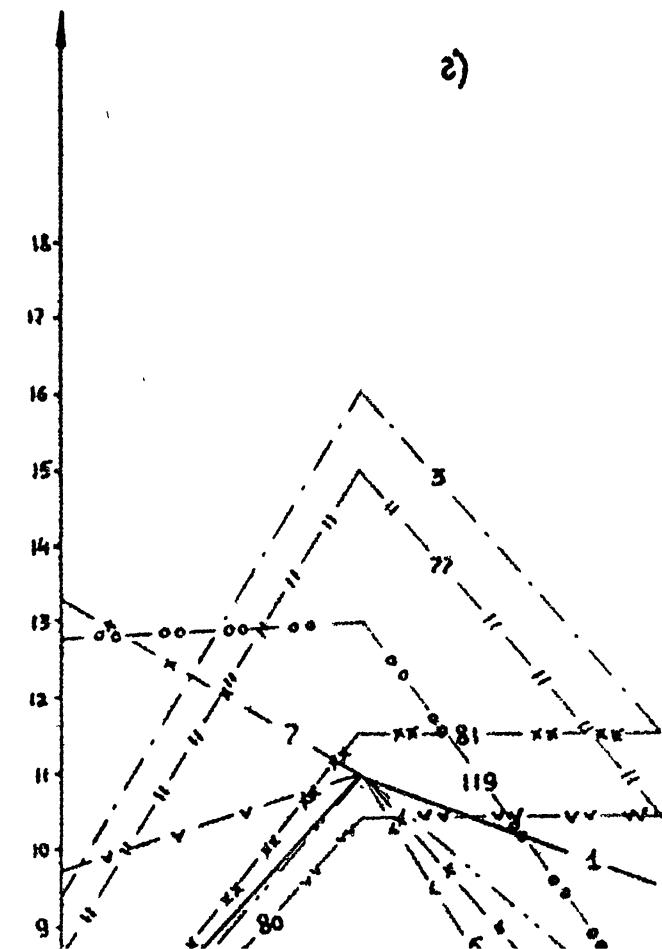
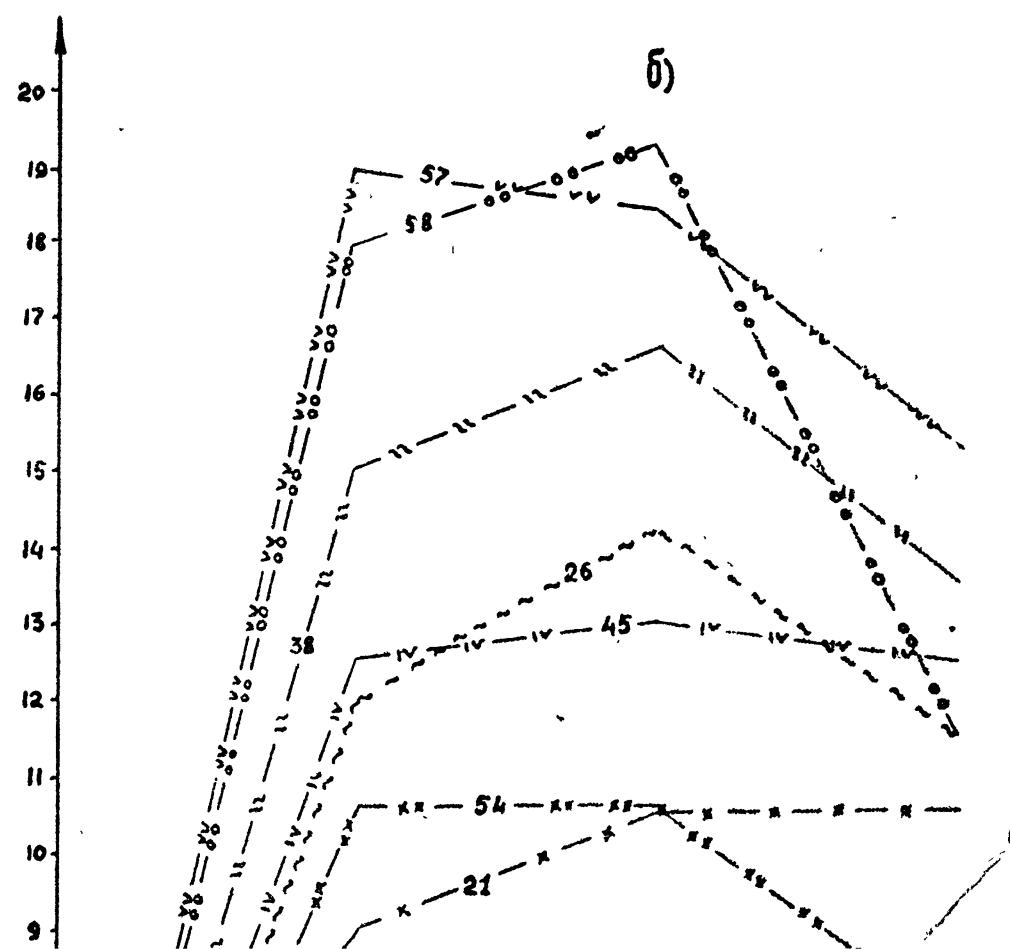
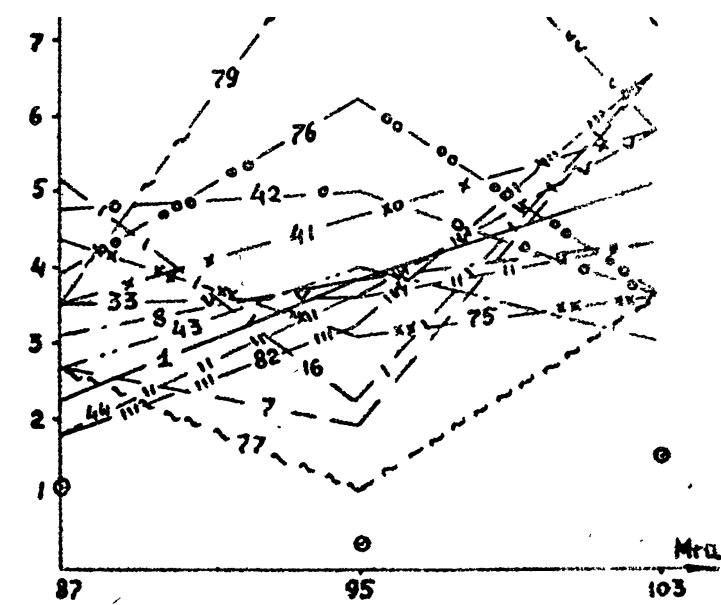
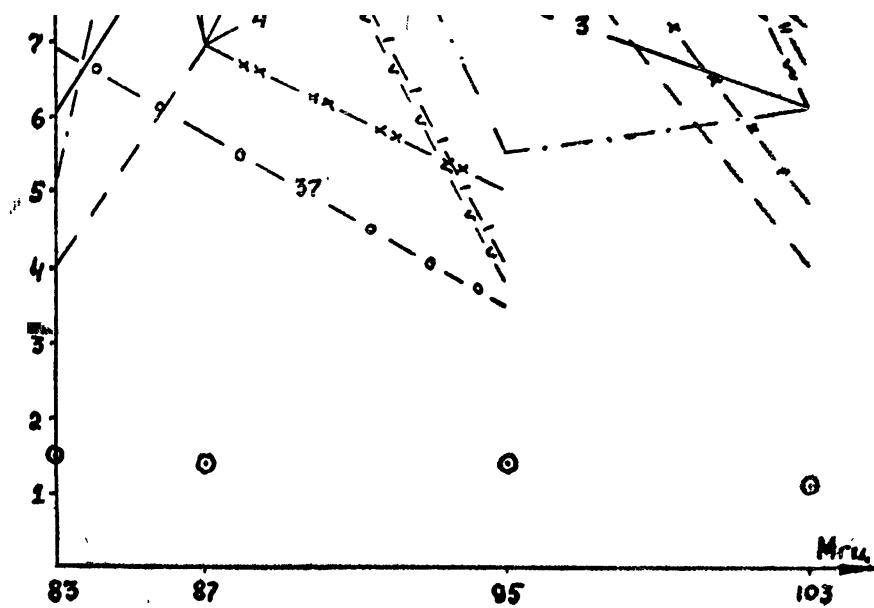


г)

Рис 2 Образцы записей импульсов радиоизлучения пульсаров на разных частотах:

а) HP 1507, 26.3.70, б) CP 0328, 20.10.69; в) CP 1133, 30.1.70; г) CP 0808, 10.12.69, д) CP 0950, 16.12.69; е) MP 0628, 29.11.69, ж) CP 0834, 5.12.69. Записи получены при  $\Delta f = 500$  кгц и  $\tau = 10$  мсек. Цифры на кривых обозначают порядковый номер импульсов. Цифры, соответствующие различным «дорожкам» записей обозначают частоты в Мгц. Для каждого образца записи дана временная шкала. Взаимное смещение импульсов на разных частотах обусловлено дисперсией радиоизлучения в межзвездной среде.





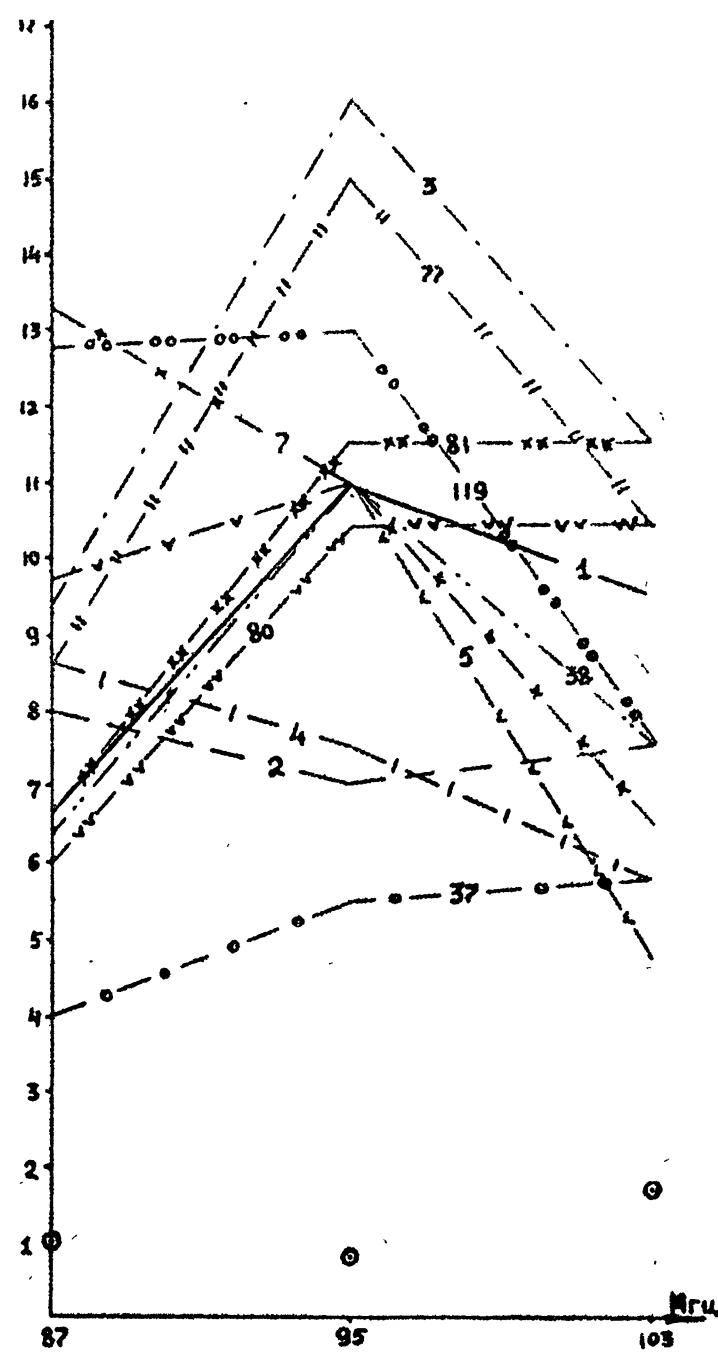
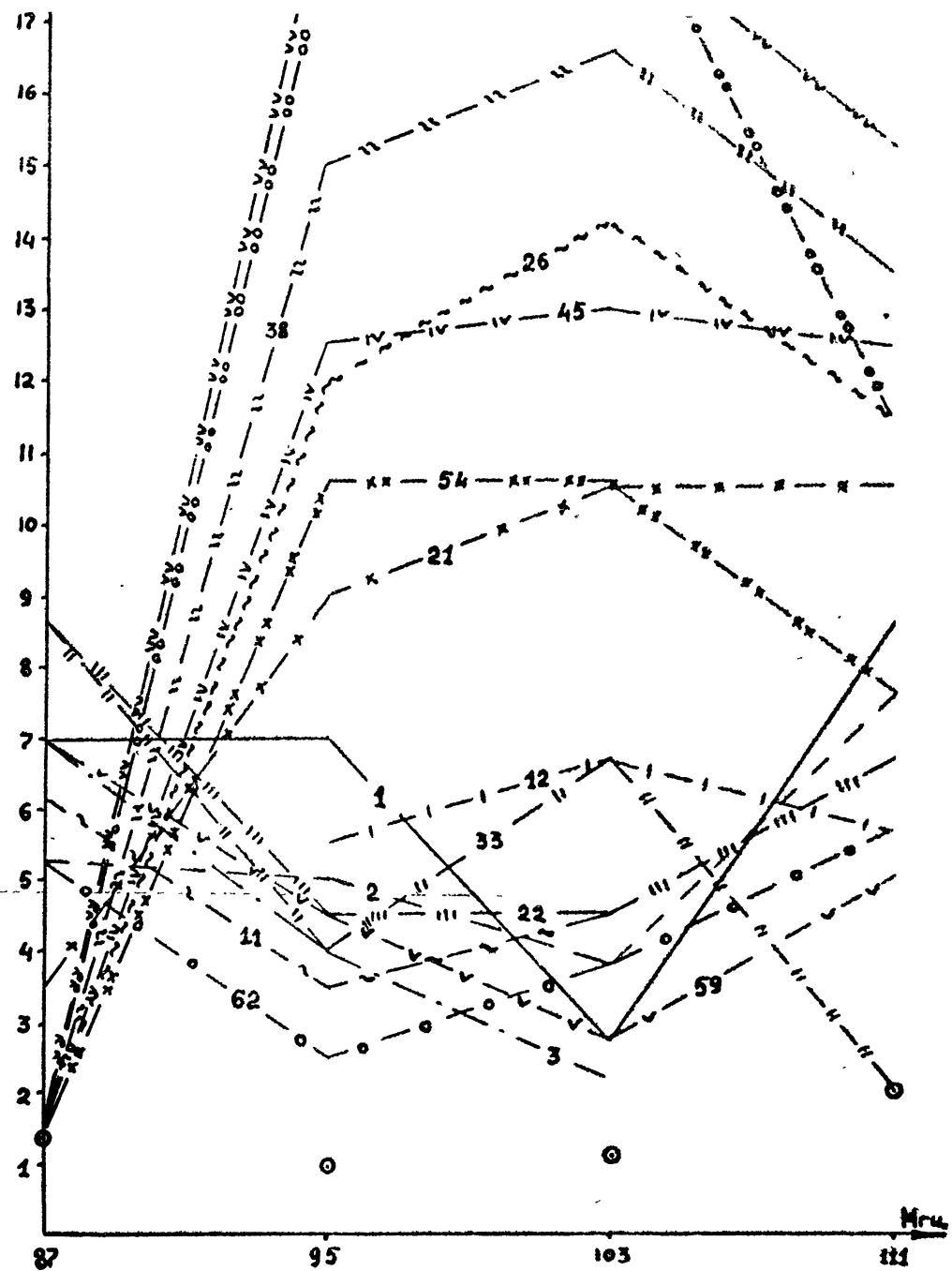


Рис. 3. Спектры импульсов пульсара CP 0950 для различных сеансов наблюдений:  
а) 4.02.69; б) 5.02.69; в) 9.02.69; г) 14.02.69.  
Цифры на кривых обозначают порядковый номер импульсов.

следствием только тонкой структуры, обусловленной влиянием неоднородностей электронной концентрации межзвездной среды. Изменение спектра, связанное с влиянием неоднородностей электронной концентрации в среде, может происходить с характерным масштабом мерцаний ( $10^2 - 10^5$  сек) [9]. Однако из приведенных данных видно, что изменения спектра пульсаров происходят в пределах одного периода пульсаций (0,25 сек для *CP 0950* и 1,19 сек для *CP 1133*).

По данным [10, 11] радиоизлучение пульсаров *CP 0950* и *CP 1133* характеризуется высокой степенью линейной поляризации. Если в оболочке пульсара, межзвездной среде или ионосфере имеет место эффект Фарадея, то при приеме линейно поляризованного излучения на линейно поляризованную антенну будет наблюдаться изменение интенсивности принимаемого сигнала в зависимости от длины волны [12].

Оценки вращения плоскости поляризации в диапазоне 83—111 *Mgц* для межзвездной среды в направлении *CP 0950* и для ионосферы показывают, что вращение мало. Оно не может объяснить наблюдавшиеся изменения спектров импульсов.

Из работы [11] следует, что для пульсара *CP 0950*  $\Delta\phi/\Delta f = 0,65 \text{ rad} \cdot \text{Mgц}^{-1}$ . Отсюда следует, что при полосе анализа 32 *Mgц*  $\Delta\phi < 2 \text{ rad}$ . Ионосфера вносит малый вклад во вращение плоскости поляризации. По данным электронной концентрации в толще ионосферы, полученным с помощью спутников [13, 14] было найдено, что для зимних месяцев и ночного времени мера вращения мала и лежит в пределах  $0,3 - 0,4 \text{ rad} \cdot \text{m}^2$ .

Приведенные оценки показывают, что характерный вид спектра импульсов, наблюдавшийся в диапазоне 83—111 *Mgц* в течение минуты, в принципе можно объяснить эффектом Фарадея в межзвездной среде и в ионосфере; изменения спектра не могут быть связаны с этим эффектом, они, по-видимому, могут быть обусловлены эффектами распространения радиоволн в оболочке пульсаров или с физикой излучения их.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Брезгунов, В. А. Удальцов, Тезисы докладов 6-й Всесоюзной конференции по радиоастрономии, изд. Знание, Рига, 1968, стр. 98
2. В. Н. Брезгунов, В. А. Удальцов, ПТЭ, 6, 100 (1968)
3. В. Н. Брезгунов, В. А. Удальцов, Тр. ФИАН, 38, 109 (1968)
4. В. Н. Брезгунов, В. А. Удальцов, Тр. ФИАН (в печати)
5. A. G. Lyne, B. I. Rickett, Nature, 218, 326 (1968).
6. R. D. Ekkers, A. T. Moffet, Nature, 220, 756 (1968).
7. B. I. Robinson et al., Nature, 218, 1143 (1968).
8. Ю. И. Алексеев, В. В. Виткович, Ю. П. Шитов, Докл. АН СССР, 187, № 2, 291 (1969).
9. E. E. Salpeter, Nature, 221, 31 (1969).
10. A. G. Lyne, F. G. Smith, Nature, 218, 325 (1968).
11. F. G. Smith, Nature, 218, 325 (1968).
12. В. А. Удальцов, Тр. ФИАН, 28, 135 (1964).
13. Tuhir Ram Tyagi, I. V. Somayajulu, Rad. Science, 1, № 10, 1127 (1966).
14. I. A. Klobuchar, H. E. Whitney, Rad. Science, 1, № 10, 1152 (1966).

Физический институт  
им. П. Н. Лебедева АН СССР

Поступила в редакцию  
24 января 1970 г.

#### MULTI-CHANNEL SPECTROMETER AND OBSERVATIONS OF SPECTRUM VARIATIONS OF PULSARS *CP 0950* AND *CP 1133*

V. N. Brezgunov, V. A. Udal'tsov

A spectrometer is described which represents itself a receiver with the wideband input (30—115 Mc/s) and multi-channel narrow-band output (40 and 500 kc/s). The channels are tuned to different frequencies uniformly distributed over the range (2.8 or

32 Mc/s). The comb of the received frequencies is adjusted in the limits of 70—115 Mc/s. The spectra of the series of pulses over the frequency range of 83—111 Mc/s are given for the pulsars *CP 0950* and *CP 1133*. The pulse spectra are shown to be strongly varied in time. The change from the typical spectrum to abnormal one and vice versa has a manner of frequent jumps. It is found that the rotation of the polarization plane of the radio emission in the interstellar medium in the direction to *CP 0950* at the frequency of 83 Mc/s with respect to that at the frequency of 111 Mc/s does not exceed two radians and for winter and the night ionosphere—2.5 radians. These rotations cannot be the reason for the spectrum variations observed. Consideration is given to the impossibility of explaining the spectrum variations by the influence of the electron density inhomogeneities in the interstellar medium. These variations are assumed to be associated with the propagation effects in the envelope of pulsars or with the physics of their radiation.

---

УДК 523.164.3 : 621.371

## О СПЕКТРЕ ЯРКОСТНЫХ ТЕМПЕРАТУР АТМОСФЕРЫ В ДЕЦИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ ВОЛН

*В. В. Хрулев, А. А. Петровский, П. А. Капустин*

Приводятся результаты измерения яркостной температуры атмосферы Земли в зените  $T_3$  на волне 69,3 см. Полученное значение  $T_3$ , равное  $(0,8 \pm 0,2)$ °К, близко к рассчитанному по теории Ван Флека. Отмечается, что в диапазоне волн 20–70 см  $T_3$  с погрешностью, не превышающей 15%, описывается формулой  $T_3 = a\nu^2\Delta\nu [\nu^2 + (\Delta\nu)^2]^{-1}$  ( $a = 4,5 \cdot 10^{-3}$  °К·Мгц $^{-1}$ ,  $\Delta\nu = 0,73 \cdot 10^3$  Мгц).

Ввиду противоречивости опубликованных значений яркостных температур радиоизлучения атмосферы Земли  $T_3^*$  на дециметровых волнах [1, 2], недавно были проведены специальные измерения на волнах 19,9, 31,9, 47,5 и 57,2 см с целью выяснения спектра радиоизлучения атмосферы в дециметровом диапазоне. Как показали измерения [3–6], существенно завышенные (в 2–3 раза) значения  $T_3$ , приведенные в обзоре [2], являются следствием экспериментальных ошибок, обусловленных несовершенством методики наблюдений. Значения  $T_3$ , приведенные в работах [3–6], находятся в удовлетворительном согласии с расчетными [7]. Для получения дополнительной информации о спектре  $T_3$  в длинноволновой части дециметрового диапазона нами были проведены измерения яркостной температуры атмосферы на волне 69,3 см. В настоящем сообщении приводятся результаты этих измерений и обсуждается частотный спектр радиоизлучения атмосферы в дециметровом диапазоне волн с учетом результатов работ [3–6].

Измерения проводились в марте и октябре 1969 г. на радиоастрономической станции НИРФИ в Старой Пустыни с помощью радиотелескопа с параболическим рефлектором диаметром 12 м. Для проверки правильности учета побочных эффектов при измерениях применялись излучатели 2-х типов: 1) полуволновой вибратор, запитываемый симметричными щелями в коаксиальной линии с рефлектором в виде диска диаметром  $0,8\lambda$ ; 2) двухвибраторный облучатель с квадратным металлическим контуррефлектором. Основные параметры радиотелескопа приведены в табл. 1.

Таблица 1

Частота (Мгц)	Тип облучателя	Флуктуационный порог чувствительности при постоянной времени 16 сек	Ширина луча на уровне 0,5 по мощности	$D_{\text{гл}}$	Эффективность луча $(1 - \beta_{\text{гл}})\eta$
433	полуволновой вибратор	0,1°К	$3^\circ 36' \times 3^\circ 06'$	2660	0,64
433	двувибраторный	0,1°К	$4^\circ 20' \times 4^\circ 30'$	2100	0,78

\* Здесь и ниже под  $T_3$  понимается яркостная температура радиоизлучения атмосферы в зените.

Методика наблюдений и редукция экспериментальных данных были аналогичны описанным в работах [4, 5]. При измерениях  $T_3$  особое внимание уделялось учету систематических погрешностей, обусловленных следующими факторами:

1) реакцией приемника на изменение параметров антенного тракта при изменении высоты антенны; 2) поляризованной компонентой радиоизлучения Земли; 3) неполяризованным радиоизлучением Земли; 4) неоднородностью космического фона, обусловленной как поляризованной, так и неполяризованной компонентами космического радиоизлучения; 5) собственным радиоизлучением атмосферы, принимаемым боковыми лепестками диаграммы направленности радиотелескопа; 6) радиоизлучением ионосферы.

Применение методов, рассмотренных в работах [3–5], позволило исключить влияние факторов (1)–(4) на результаты измерения. Величина относительной систематической ошибки  $\alpha$ , обусловленной фактором (5), для данной антенной системы оценивалась по формуле  $\alpha < 0,25 \beta_{1,l}/(1 - \beta_{rl})$  ( $\beta_{rl}$  — фактор рассеяния вне главного луча) и при  $\beta_{1,l} = 0,2$  составляла 3–4%. Вклад собственного радиоизлучения ионосферы, согласно [8], не превышал  $0,05^{\circ}\text{K}$ . При определении  $T_3$  учитывались также поправки из-за конечной ширины диаграммы направленности антенны. В процессе наблюдений было проведено до 10 циклов измерений с каждым типом облучателя. Значения  $T_3$ , полученные в результате измерений с различными облучателями, находятся в хорошем соответствии друг с другом (см. табл. 2).

Таблица 2

Период наблюдения	Тип облучателя	Координаты наблюдавшейся области небосвода	$T_3$
март 1969 г.	полуволновой вибратор	$\delta=34^{\circ}$ $\alpha=8^h00^m$	$(0,9 \pm 0,3)^{\circ}\text{K}$
октябрь 1969 г.	двуихвibrаторный	$\delta=34^{\circ}$ $\alpha=16^h43^m$	$(0,7 \pm 0,3)^{\circ}\text{K}$

Среднее значение  $T_3$  по двум сериям измерений равно  $(0,8 \pm 0,2)^{\circ}\text{K}$ . Сопоставляя это значение  $T_3$  с результатами работ [3–6] (см. рис. 1), можно сделать следующее заключение о характере спектра  $T_3$  в дециметровом диапазоне волн.

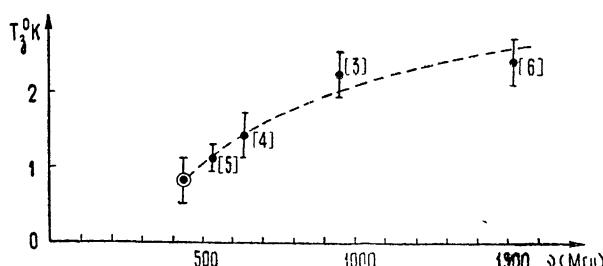


Рис. 1. Спектр яркостной температуры атмосферы Земли в зените на волнах 20–70 см.

- 1) Частотная зависимость яркостной температуры атмосферы в зените в дециметровом диапазоне волн описывается выражением дебаев-

ского типа. Причем, значения  $T_s$  в диапазоне волн 20—70 см с погрешностью, не превышающей 15%, удовлетворяют соотношению:

$$T_s = a \frac{v^2 \Delta v}{v^2 + (\Delta v)^2} (\text{°К}), \quad (1)$$

где  $a = 4,5 \cdot 10^{-3} (\text{°К} \cdot \text{Мгц}^{-1})$ ,  $\Delta v = 0,73 \cdot 10^3 \text{ Мгц}$ . Зависимость  $T_s$ , вычисленная по формуле (1), приведена на рис. 1 (пунктирная кривая).

2) Соответствие приведенных результатов с результатами [1, 9], полученными другим методом (по радиоизлучению дискретных источников с учетом рефракционных поправок), дает основание считать вопрос о спектре радиоизлучения атмосферы Земли решенным в том смысле, что  $T_s$  в дециметровом диапазоне волн близки к рассчитанным по теории Ван Флека [7], а не отличаются от них в 2—3 раза, как это утверждалось ранее в работе [2].

3) Сведения о величине и частотной зависимости  $T_s$  в дециметровом диапазоне волн, полученные в работах [1, 3—6, 9], не дают основания для пересмотра существующих представлений о природе нерезонансного поглощения радиоволн молекулярным кислородом атмосферы в рассматриваемом диапазоне [10]. Предпринятая в [11] ревизия теории нерезонансного поглощения с целью объяснения результатов [2] представляет необоснованной.

4) Исследования, проведенные в работах [3—6], показывают необходимость учета отмеченных выше мешающих факторов при измерениях  $T_s$ . С этой точки зрения, разбиение области боковых лепестков диаграммы направленности реальных антенных систем на анизотропную и изотропную подобласти, положенное в основу методов измерения  $T_s$  в работе [2], является весьма грубой идеализацией, приводящей к существенным ошибкам при измерениях.

Необходимо отметить, что подобное представление недопустимо и при измерениях потоков дискретных источников относительно опорных областей, о чем свидетельствуют ошибочные сведения о характере спектра Кассиопеи-А, полученные в работе [12].

Авторы благодарны В. А. Разину, под руководством которого была выполнена данная работа, а также Ю. С. Самохвалову, принимавшему участие в наблюдениях и обработке данных.

## ЛИТЕРАТУРА

1. T. F. Howell, J. R. Shakeshaft, J. Atmos. and Terr. Phys., **29**, 1559 (1967).
2. А. Г. Кисляков, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1244 (1967).
3. В. В. Хрулев, И. П. Хижнякова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 12, 1798 (1968).
4. В. В. Хрулев, С. А. Волохов, А. И. Теплыx, Радиотехника и электроника, **14**, № 5, 895 (1969).
5. В. В. Хрулев, А. И. Теплыx, С. А. Волохов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **12**, № 6, 819 (1969).
6. Д. А. Дмитренко, А. И. Теплыx, В. В. Хрулев (в печати).
7. D. C. Hogg, J. Appl. Phys., **30**, 1417 (1959).
8. В. В. Беликович, Е. А. Бенедиктов, Геомагнетизм и аэрономия, **8**, 3 (1968).
9. A. A. Penzias, R. W. Wilson, Astron. J., **72**, № 3, 315 (1967).
10. R. G. Gordon, J. Chem. Phys., **44**, 1635 (1966).
11. К. С. Станкевич, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, **3**, 836 (1967).
12. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **7**, № 2, 202 (1964).

**THE SPECTRUM OF THE ATMOSPHERIC BRIGHTNESS TEMPERATURE  
AT DECIMETER WAVELENGTHS****V. V. Khrulev, A. A. Petrovskii, P. A. Kapustin**

Results are given of measuring the brightness temperature of the Earth's atmosphere at the zenith  $T_z$  at the wavelength 69.3 cm. The obtained value  $T_z = (0.8 \pm 0.2)^\circ\text{K}$  is close to the calculated one based on Van Fleck theory. It is noted that in the range of 20–70 cm  $T_z$  with an error not exceeding 15% is described by the formula  $T_z = a\nu^2\Delta\nu [\nu^2 + (\Delta\nu)^2]^{-1}$  ( $a = 4.5 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{K} \cdot \text{Mc/s}^{-1}$ ,  $\Delta\nu = 0.73 \cdot 10^3 \text{ Mc/s}$ ).

УДК 538.574.33 : 533.9.02

## ОБ ОТРАЖЕНИИ И ПРЕЛОМЛЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ДВИЖУЩЕЙСЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

*Ю. М. Сорокин, Н. С. Степанов*

Рассматривается взаимодействие электромагнитных волн с равномерно движущейся неоднородностью концентрации в изотропной плазме, помещенной в недиспергирующий диэлектрик. Показано, что коэффициенты отражения и проникновения для такого слоя могут быть выражены через соответствующие коэффициенты для неподвижного слоя аналогичного профиля. Найдены частоты и групповые скорости волн и выяснено, что, в отличие от недиспергирующей среды, в рассматриваемой системе не может возникнуть больше двух вторичных волн. Получены соотношения, связывающие полные энергии и частоты взаимодействующих волн при различных скоростях движения неоднородности.

1. Вопросам распространения электромагнитных волн в движущихся неоднородных средах (в частности, в плазме) посвящено за последнее время довольно большое число работ (см., например, работу [1] и библиографию к ней). Однако при этом рассматриваются, как правило, два предельных случая: резкая граница раздела (скакок параметров среды) и плавная (в масштабе длины волны) неоднородность. В первом случае задача упрощается тем, что для отыскания отраженной и преломленной волн здесь достаточно граничных условий на поверхности разрыва\*, так что не нужно решать уравнений с зависящими от координат и времени коэффициентами; во втором—решение можно найти, используя метод геометрической оптики, обобщенный для нестационарных сред; отражение в этом приближении (вне областей поворота лучей) отсутствует.

Здесь нас будет интересовать более общий случай, когда параметры среды в пределах некоторого слоя произвольно быстро изменяются по закону бегущей волны, т. е. имеется равномерно движущаяся неоднородность произвольного, но не деформирующегося профиля. Естественным подходом к решению подобной задачи является переход в сопровождающую систему отсчета, что обычно и делается. Однако такой метод не всегда удобен, так как материальные уравнения среды при этом необходимо заменить гораздо более сложными соотношениями Минковского.

Для ряда конкретных случаев (в частности, для движущейся плазмы) более удобен формальный метод сопоставления со вспомогательным слоем, предложенный в [3]. Этот метод позволяет свести задачу об отражении и преломлении электромагнитных волн на движущейся неоднородности к аналогичной задаче для неподвижной неоднородной среды с тем же материальным уравнением; методы же решения подобных задач (в том числе приближенные) сравнительно хорошо разработаны. Такой подход позволяет легко получить некоторые общие соотношения для частот и амплитуд отраженной и проникающей через

\* Правда, в некоторых случаях обычных условий для тангенциальных компонент  $E$  и  $H$  на указанной поверхности недостаточно (см. [2]).

движущийся слой волн, а для конкретных случаев — непосредственно использовать известные методы и результаты решения.

Настоящая работа посвящена обобщению указанного метода и более детальному исследованию закономерностей взаимодействия волн с движущейся неоднородностью на примере изотропной плазмы. При этом рассматривается изменение не только мощностей взаимодействующих волн, но также полных энергий волновых пакетов с учетом преобразования их длительности.

**2. Специфическая трудность исследования волн в нестационарной диспергирующей среде связана с тем, что даже в пренебрежении пространственной дисперсией здесь нельзя в явном виде задавать эффективную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_{\text{эфф}}(\omega, r)$ , как это возможно в стационарном случае\*. Поэтому следует исходить из соответствующих уравнений микротеории.**

Для краткости мы ограничимся случаем холодной изотропной плазмы без столкновений, которая равномерно движется в однородном

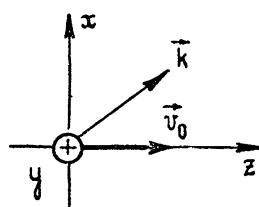


Рис. 1.

недиспергирующем диэлектрике с проницаемостью  $\epsilon^{**}$ . Пусть концентрация  $N(z, t)$  меняется во времени и пространстве из-за движения (дриффа) неоднородной плазмы вдоль оси  $z$  со скоростью  $v_0 = \text{const}$ . Возможность применения метода сопоставления при нормальном падении на такой слой была указана ранее в работе [3]. Покажем здесь, что метод может быть обобщен на случай наклонного падения, если вектор  $E$  в падающей волне перпендикулярен плоскости падения (см. рис. 1).

Существенное упрощение задачи в рассматриваемом случае связано с тем обстоятельством, что из уравнения движения электронов здесь следует  $v = (-e/mc)A$ , где  $v$  — возмущение скорости электронов электромагнитной волной,  $A(0, A_y, 0)$  — векторный потенциал этой волны ( $E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$ ,  $H = \text{rot } A$ ),  $e$  и  $m$  — заряд и релятивистская масса электрона,  $c$  — скорость света в вакууме. В результате все относящиеся к электромагнитной волне величины удается выразить через потенциал  $A_y$ , для которого из уравнений Максвелла нетрудно получить следующее уравнение с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = \frac{\epsilon}{c^2} \omega_p^2 (z - v_0 t) A_y, \quad (1)$$

где  $\omega_p(z - v_0 t) = [4\pi e^2 N(z - v_0 t)/\epsilon m]^{1/2}$  — плазменная частота.

Введем новые независимые переменные

$$\zeta = z - v_0 t, \quad \tau = \frac{t - nz/c}{1 - \beta}, \quad (2)$$

где  $n = \sqrt{\epsilon}$  — показатель преломления диэлектрической среды без плазмы,  $\beta = (v_0/c)n$  — величина, характеризующая отношение скорости движения неоднородного слоя к скорости света в заполняющей диэлектрической среде.

\* Тензор эффективной диэлектрической проницаемости можно ввести лишь для слабонестационарных сред [4], причем этот тензор оказывается антиэрмитовым и отсутствие обычных диссипативных механизмов.

\*\* Такая постановка задачи с  $\epsilon > 1$  может соответствовать полупроводниковой плазме, а также с некоторым приближением позволяет учесть влияние замедляющих систем в практических устройствах.

Поскольку параметр  $\omega_p$  зависит только от аргумента  $\zeta$ , решение можно искать в виде гармонической функции  $x$  и  $t$ :

$$A_y(t, x, z) = F(\zeta) \exp[j(\omega' t + \gamma x)]. \quad (3)$$

Тогда для множителя  $F(\zeta)$  получим уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} - 2j \frac{\omega'}{c} \frac{n}{1 - \beta^2} \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{1}{1 - \beta^2} \left( \frac{n^2}{c^2} \omega_p^2 + \gamma^2 \right) F = 0, \quad (4)$$

где  $\omega'$  и  $\gamma$  — некоторые постоянные, смысл которых выяснится в дальнейшем.

Решение уравнения (4) может быть найдено в квадратурах лишь для нескольких видов функции  $\omega_p^2(\zeta)$ . Существенно, однако, что при переходе к неподвижной плазме ( $\beta = 0$ ) вид этого уравнения не изменяется. Параметры плазмы можно подобрать таким образом, что соответствующее уравнение для множителя  $F$  будет в точности совпадать с (4) при данных  $\omega_p^2(\zeta)$ ,  $v_0$ ,  $n$  для исходной задачи. Как ясно из (4), для этого достаточно, чтобы параметры построенной таким образом вспомогательной задачи (их будем помечать штрихом) удовлетворяли соотношениям:

$$n' = \frac{n}{1 - \beta^2}, \quad \omega_p'^2 = (1 - \beta^2)(\omega_p^2 + v_0^2 \gamma^2). \quad (5)$$

В результате, если решение для вспомогательной задачи известно, то для получения зависимости  $F(\zeta)$  достаточно заменить в выражении  $F'(z)$  переменную  $z$  на  $\zeta = z - v_0 t$ ; зависимость решения от  $x$  с точностью до постоянного множителя сохраняется\*.

Без ограничения общности решение для вспомогательного слоя можно записать в виде

$$A'_y(t, x, z) = [f_+(z) \exp(-j \int h' dz) + f_-(z) \exp(j \int h' dz)] \times \times \exp[j(\omega' t + \gamma x)], \quad (6)$$

где

$$h'^2(z) = k'^2 - \gamma^2, \quad k'^2 = \left( \frac{\omega'}{c} n_{\text{эфф}}' \right)^2,$$

$$n_{\text{эфф}}' = n' \sqrt{1 - \omega_p'^2 / \omega'^2}.$$

При такой записи становится очевидным физический смысл введенных величин:  $\omega'$  и  $n_{\text{эфф}}'$  соответствуют частоте и эффективному показателю преломления во вспомогательной задаче. Выделение множителей  $f_{\pm}(z)$  удобно при рассмотрении «выходных» значений полей (вне слоя с переменными параметрами), где эти множители имеют смысл амплитуд прямой и обратной волн, а  $h'$  и  $\gamma$  — компонент волнового вектора этих волн. Выражая из (6) функцию  $F'(z)$  и заменяя в ней, согласно сказанному выше,  $z$  на  $\zeta$ , получаем решение исходной задачи:

$$A_y(t, x, z) = f_+(\zeta) e^{i\Phi_+} + f_-(\zeta) e^{i\Phi_-}, \quad (7)$$

\* Заметим, что такой пересчет решений оказывается возможным лишь вследствие специального выбора переменной  $t$  (см. (2)); при другом выборе пар переменных (например,  $\zeta$ ,  $t$  или  $\zeta$ ,  $z$ ) уравнение для  $F(\zeta)$  в случае движущейся и неподвижной сред получается существенно различным.

где

$$\psi_{\pm} = \omega' \left[ t - \gamma \frac{x}{\omega'} - \frac{1}{c} \int \left( \frac{n\beta}{1 - \beta^2} \pm \frac{ch'(\zeta)}{\omega'} \right) d\zeta \right]. \quad (8)$$

Частоты и продольные компоненты волнового вектора вне движущегося слоя (где  $f_{\pm}(\zeta) = \text{const}$ ) естественно определить как  $\omega_{\pm} = \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t}$ ,  $h_{\pm} = -\frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial z}$ . Подставляя сюда  $\psi_{\pm}$  из (8), нетрудно видеть, что они связаны с  $\omega'$  и  $h'$  соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \frac{\omega'}{1 - \beta^2} \pm v_0 h', \\ h_{\pm} &= \pm h' + \beta \frac{\omega'}{c} n'. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что величины  $\omega_{\pm}$  и  $h_{\pm}$ , найденные согласно (9), связаны друг с другом обычными формулами Допплера ( $\omega_+ - v_0 h_+ = \omega_- - v_0 h_-$ ), а также удовлетворяют дисперсионным соотношениям для электромагнитных волн в изотропной плазме:  $(c^2/n^2)(h_{\pm}^2 + r^2) = \omega_{\pm}^2 - \omega_p^2$ .

В итоге задача сводится к отысканию амплитудных множителей  $f_{\pm}(z)$  для вспомогательного стационарного слоя (они равны амплитудам соответствующих волн исходной задачи—ср. (6) и (7)). Еще раз подчеркнем, что сведение задачи к стационарной само по себе не дает возможности находить строгое решение для каких-либо новых случаев, когда другими способами (скажем, непосредственно из уравнения (4)) найти решение невозможно. Метод сопоставления с неподвижным слоем позволяет, однако, выяснить многие качественные закономерности и особенности, вызванные движением неоднородности, не уточняя закон изменения параметров среды; а в тех случаях, когда решение для неподвижного слоя известно, путем простого пересчета найти и волны в движущемся слое.

3. Таким образом, применение метода сопоставления в случае наклонного падения (когда электрический вектор в волне перпендикулярен плоскости падения) не встречает специфических трудностей.

Далее мы проведем более детальный анализ особенностей распространения волн, ограничиваясь для краткости случаем нормального падения ( $\gamma = 0$ ). Рассмотрим, в частности, вопрос о числе волн, взаимодействующих с движущейся неоднородностью. Известно, что в недиспергирующей среде при некоторых условиях с волной параметра одновременно могут взаимодействовать четыре волны (по две с каждой стороны от слоя), т. е. падающая (первичная) волна возбуждает не две вторичных волны, как обычно (например, отраженную и преломленную), а все три [2]. Чтобы выяснить, какие волны возникают в каждом конкретном случае, необходимо, очевидно, сравнить групповые скорости волн по обе стороны от движущегося слоя со скоростью самого слоя  $v_0$  и использовать условия излучения (возникают лишь те вторичные волны, которые уносят энергию от слоя).

Для диспергирующих сред этот вопрос достаточно сложен, поскольку здесь скорости волн заранее неизвестны и зависят не только от параметров среды вне слоя, но также от частот волн, которые, в свою очередь, определяются частотой падающей волны и скоростью движения неоднородности. Изложенный выше метод сопоставления оказывается удобным для исследования этих вопросов.

Введём безразмерные переменные  $p_{\pm} = \omega_p/\omega_{\pm}$  и  $p' = \omega'_p/\omega'$ . Подставляя в (9)  $h' = (\omega'/c) n' \sqrt{1 - p'^2}$ , нетрудно найти соотношение между этими переменными

$$p_{\pm} = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{p'}{1 \pm \beta \sqrt{1 - p'^2}}, \quad (10)$$

в которое параметры слоя  $\omega_p$  и  $\omega'_p$  уже явно не входят\*. Двузначность зависимости  $p(p')$  соответствует тому, что одному значению  $\omega'$  отвечают, вообще говоря, две различные частоты  $\omega_{\pm}$  с каждой стороны от слоя. На рис. 2 приведен график этой зависимости, типичный в «досве-

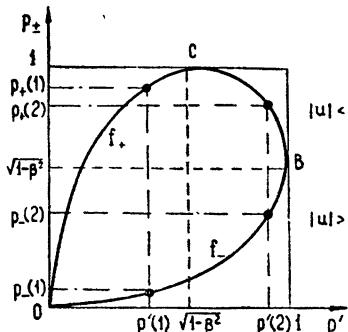


Рис. 2.

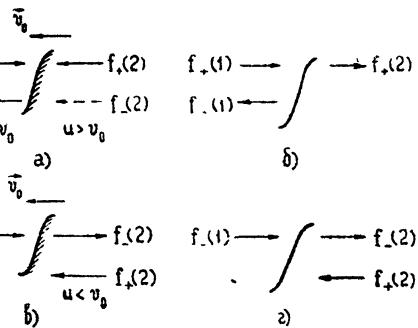


Рис. 3.

товом» случае ( $|p| < 1$ ). Для групповой скорости волн  $u_{\pm} = \frac{d\omega_{\pm}}{dk_{\pm}}$  в тех же переменных нетрудно получить выражение

$$\frac{u_{\pm}}{v_0} = \frac{\beta \pm \sqrt{1 - p'^2}}{\beta \pm \beta^2 \sqrt{1 - p'^2}}, \quad (11)$$

причем  $|u_{\pm}| = (c/n) \sqrt{1 - p_{\pm}^2}$ ; фазовая скорость  $v_{\pm} = \omega_{\pm}/k_{\pm}$  тогда определяется обычным для изотропной плазмы соотношением:  $uv = c^2/n^2$ .

Пусть для определенности  $\beta < 0$ , т. е. неоднородность плазмы движется влево. В этом случае верхняя ветвь кривой (участок  $OCB$  на рис. 2) соответствует волне  $f_+$ , а нижняя—волне  $f_-$ , причем, как ясно из (11), волна  $f_-$  всегда распространяется влево ( $u_- < 0$ ), тогда как направление распространения волны  $f_+$  может быть различным ( $u_+ > 0$  при  $p' > \sqrt{1 - \beta^2}$  и  $u_+ < 0$  при  $p' < \sqrt{1 - \beta^2}$ ). По модулю групповые скорости равны  $u_{\pm} = (c/n) \sqrt{1 - p_{\pm}^2}$ , поэтому  $|u_{\pm}| \geq v_0$ , если  $p_{\pm} \leq \sqrt{1 - \beta^2}$ .

Этих данных достаточно, чтобы найти частоты, а также величину и направления групповых скоростей, взаимодействующих с движущимся слоем волн, и, тем самым, выяснить число возможных вторичных волн. Пусть, например, навстречу слою падает волна с частотой  $\omega_0 = \omega_+(1)$  (рис. 3 а)\*\*, соответствующей некоторому значению  $p_+(1)$  (см. рис. 2); по графику тогда легко найти значение  $p'(1) = \omega'_p(1)/\omega'$  для вспомогательной задачи и величину  $p_-(1)$ , определяющую частоту

\* Если по одну сторону слоя плазма отсутствует ( $N = 0$ ), то здесь  $p_{\pm} = p' = 0$  и формула (10) неудобна; для пересчета частот в этом случае непосредственно из (9) следует формула  $\omega_{\pm} = \omega'/1 \mp \beta$ .

\*\* Заметим, что схематическое изображение неоднородности на рис. 3 не обязательно соответствует ее действительному профилю.

$\omega_{-}(1)$  отраженной волны слева от движущегося слоя. По известной частоте  $\omega'$  далее находится  $p'(2) = \omega_p'(2)/\omega'$  (в указанном на рис. 2 примере  $p'(2) > p'(1)$ ), что соответствует повышенной концентрации электронов за неоднородностью, а также значения  $p_+(2)$  и  $p_-(2)$ , определяющие частоты проникающих через движущийся слой волн. Однако волна  $f_-(2)$  в данном случае не удовлетворяет условиям излучения, так как для нее  $|u_-(2)| > v_0$  (см. рис. 3 а), и не может возбуждаться на движущейся неоднородности.

Нетрудно показать, что этот вывод о невозможности более чем двух вторичных волн имеет общий характер и справедлив при любых значениях параметров  $\omega_0$ ,  $v_0$ ,  $\omega_p(1, 2)$ : как следует из рис. 2, независимо от положения точек  $p'(1)$  и  $p'(2)$  из четырех значений  $p_{\pm}(1)$  и  $p_{\pm}(2)$  два соответствуют волнам, приносящим энергию к слою; если источник волн находится с одной стороны от слоя, то по другую сторону такая волна будет отсутствовать.

Что касается «сверхсветового» случая ( $v_0 > c/h$ ), то здесь невозможность трех вторичных волн очевидна с самого начала. Поскольку всегда групповая скорость  $|u| < c/n$ , то  $|u| < |v_0|$ , т. е. спереди от движущегося слоя может существовать лишь падающая по отношению к нему волна (рис. 3 в), а сзади—две прошедшие волны (в лабораторной системе отсчета обе эти волны могут бежать вдогонку слою).

Вместе с тем случай «сверхсветового» движения неоднородности имеет некоторые особенности. В самом деле, при  $\beta > 1$  параметры вспомогательного слоя  $n'$  и  $\omega_p'^2$  становятся отрицательными. Правда, знак  $n'$  не играет принципиальной роли, так как «энергетический» смысл имеет лишь проницаемость  $\epsilon' = n'^2$  (именно она входит в выражение для плотности энергии). В то же время  $\omega_p'^2 < 0$  означает отрицательную концентрацию электронов, что, конечно, физически нереализуемо. Однако это обстоятельство не препятствует применению формального метода сопоставления и, фактически, приводит лишь к тому, что сопоставляемой средой является теперь не слой плазмы в диэлектрике, а некоторая искусственная среда с дисперсионным уравнением

$$\frac{c^2 k'^2}{n'^2} = \omega'^2 + \Omega_p'^2,$$

где

$$\Omega_p'^2 = \omega_p^2(\beta^2 - 1) = -\frac{4\pi e^2 N'}{m\epsilon} > 0.$$

Указанные особенности приводят к тому, что области прозрачности исходной среды ( $\omega > \omega_p$ ) здесь соответствует неограниченная снизу область частот во вспомогательном слое ( $k'$  вещественно при любых вещественных  $\omega'$ ). Это означает, в частности, что сколь угодно низкочастотная волна, падающая навстречу движущемуся слою, всегда «пролезает» через него. (При этом, конечно, частота прошедших волн остается больше, чем плазменная частота за слоем.) В результате может иметь место большой коэффициент преобразования низкочастотных волн.

4. Рассмотрим теперь некоторые энергетические соотношения. Учитывая, что согласно определению вектор-потенциала амплитуды полей  $E$  и  $H$  равны соответственно  $(\omega/c)f$  и  $hf$ , чисто выразить коэффициенты трансформации по мощности первичной волны в каждую из вторичных волн через соответствующие коэффициенты для вспомогательного слоя.

Например, для изображенного на рис. 3 а «досветового» случая направления распространения волн во вспомогательном слое указаны

на рис. 3 б\*, так что величины  $f_+(1)$ ,  $f_-(1)$  и  $f_+(2)$  суть амплитуды падающей, отраженной и преломленной волн соответственно. Тогда отношения мощностей вторичных волн к первичной, т. е. коэффициенты отражения и проникновения, для стационарного вспомогательного слоя (на частоте  $\omega'$ ) равны

$$R' = \left| \frac{f_-(1)}{f_+(2)} \right|^2, \quad T' = \left| \frac{f_+(2)}{f_+(1)} \right|^2 \frac{n'_{\text{эфф}}(2)}{n'_{\text{эфф}}(1)}.$$

В исходной задаче коэффициенты  $R$  и  $T$  будут отличаться от  $R'$  и  $T'$  за счет различия множителей  $\omega h$  для движущегося слоя:

$$R = R' \frac{\omega_-(1) h_-(1)}{\omega_+(1) h_+(1)}, \quad T = T' \frac{n'_{\text{эфф}}(1)}{n'_{\text{эфф}}(2)} \frac{\omega_+(2) h_+(2)}{\omega_+(1) h_+(1)}. \quad (12)$$

Заметим, что согласно закону сохранения энергии, справедливому для стационарного слоя, имеем  $R' + T' = 1$ .

Значения  $R'$  и  $T'$  зависят прежде всего от профиля вспомогательного слоя, который согласно (5) отличается от исходного только масштабом; кроме того, они могут сложным образом зависеть от частоты  $\omega'^{**}$ . Остальные же множители в (12) описывают эффекты, связанные с движением неоднородности. В результате на некоторых частотах возможно  $T = 0$  или  $R = 0$ , даже если соответствующие коэффициенты  $T'$  или  $R'$  отличны от нуля. При этом в (12) обращаются в нуль волновые векторы  $h_+(2)$  или  $h_-(1)$ . Хотя групповые скорости таких волн в лабораторной системе отсчета равны нулю, но амплитуды полей конечны, так что эти волны по-прежнему уносят энергию из области неоднородности.

При «сверхсветовом» движении слоя (рис. 3 в), как уже говорилось, отраженной волны нет, зато будет две преломленных волн (причем в лабораторной системе отсчета обе они могут бежать вдогонку слою). Направления распространения соответствующих волн во вспомогательном слое могут быть найдены из формул (9), (11); для данного случая они приведены на рис. 3 г. Здесь две волны являются падающими по отношению к слою ( $f_-(1)$  и  $f_+(2)$ ) и лишь одна уносит энергию ( $f_-(2)$ ). Если через  $P'$  обозначить поток энергии в соответствующей волне, то из сказанного выше следует

$$\begin{aligned} T' P'_-(1) + R' P'_+(2) &= P'_-(2), \\ R' P'_-(1) + T' P'_+(2) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда также нетрудно выразить отношения амплитуд вторичных и первичной волн через  $R'$  и  $T'$ ; для коэффициентов трансформации в движущемся слое ( $T_-$  и  $T_+$ ) тогда имеем

$$\begin{aligned} T_- &= \left( 1 + \frac{R'}{T'} \right) \frac{n'_{\text{эфф}}(1)}{n'_{\text{эфф}}(2)} \frac{\omega_-(2) h_-(2)}{\omega_-(1) h_-(1)}, \\ T_+ &= \frac{R'}{T'} \frac{n'_{\text{эфф}}(1)}{n'_{\text{эфф}}(2)} \frac{\omega_+(2) h_+(2)}{\omega_+(1) h_+(1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

\* Во вспомогательном слое для этого случая ветвь  $f_-$  соответствует волнам, бегущим влево, ветвь  $f_+$  — волнам, бегущим вправо.

\*\* Если концентрация плазмы за слоем достаточно велика ( $\omega_p' > \omega'$ ), возможен эффект полного отражения ( $R' = 1, T' = 0$ ).

Здесь  $R'$  и  $T'$ —по-прежнему коэффициенты отражения и преломления для вспомогательного слоя ( $R' + T' = 1$ ), зависящие от профиля неоднородности, но, как указывалось, по дисперсионным свойствам вспомогательная среда теперь отличается от плазмы. В частности, полное отражение здесь невозможно (коэффициент  $T'$  всегда отличен от нуля).

Как и при  $\beta < 1$ , возможен случай, когда один из коэффициентов трансформации в движущемся слое  $T_- = 0$  (при этом в формуле (14)  $h_-(2) = 0$ ). Однако второй коэффициент ( $T_+$ ) в нуль не обращается, т. е. всегда существует хотя бы одна прошедшая волна.

5. Обычно при рассмотрении энергетических соотношений для волн на движущихся границах исследуются лишь коэффициенты отражения и преломления по амплитуде и мощности. Между тем, для сигналов в виде волновых пакетов представляет интерес также изменение их полной энергии; при этом нужно учесть преобразование длительности сигналов (импульсов). Насколько нам известно, этот вопрос в литературе специально не обсуждался; в работе [5], например, неявно предполагалось, что длительность импульса меняется обратно пропорционально несущей частоте. На самом же деле преобразование длительности квазимохроматического сигнала в среде с дисперсией определяется, очевидно, групповыми скоростями волн, тогда как изменение частоты—фазовыми скоростями\*.

Рассматривая движение «групповых» фронтов, нетрудно найти, что длительность падающего ( $\tau_0$ ) и преобразованного (т. е. отраженного или преломленного) импульса ( $\tau$ ) связаны соотношением

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{1 - v_0/u_0}{1 - v_0/u}, \quad (15)$$

где  $u_0$ ,  $u$ —групповые скорости соответствующих волн, причем  $u > 0$ , если волна бежит в ту же сторону, что и неоднородность\*\*. Учитывая, что в изотропной плазме  $uv = c^2/n^2$ , из соотношений (9) нетрудно найти  $h' = \pm h_\pm/(1 - \beta^2)(1 - v_0/u_\pm)$ . Тогда (15) можно переписать в виде

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{h'_0 h}{h' h_0}. \quad (15a)$$

Если  $P_0$ —плотность потока энергии в падающей волне, то полные энергии отраженного и прошедшего сигналов равны соответственно  $W_r = P_0 R \tau_0$  и  $W_t = P_0 T \tau_t$ . Учитывая (12) и (15a), из равенства  $R' + T' = 1$  в «досветовом» случае ( $\beta < 1$ ) получаем следующее соотношение между полными энергиями трех взаимодействующих волн:

$$\frac{W_+(1)}{\omega_+(1)} = \frac{W_+(2)}{\omega_+(2)} + \frac{W_-(1)}{\omega_-(1)}, \quad (16)$$

которое означает, что полное число квантов в волновом пакете при взаимодействии с движущейся неоднородностью не изменяется—происходит лишь перераспределение квантов падающей волны между отраженной и прошедшей волнами. В отсутствие отражения ( $W_-(1) = 0$ ) отсюда вытекает полученный ранее результат [6], что число квантов в волновом пакете является адиабатическим инвариантом.

\* Как одно из следствий этого факта при отражении и преломлении амплитудно-модулированной волны частоты модуляции и заполнения изменяются по-разному (для случая плазмы — в противоположные стороны).

\*\* Ясно, что «групповой» подход справедлив лишь в случае достаточно длинных импульсов, когда можно пренебречь их расплыванием вследствие переотражений в слое.

Иной результат получается в «сверхсветовом» случае. Здесь из (14) и (15) следует

$$\frac{W_{-}(1)}{\omega_{-}(1)} = \frac{W_{-}(2)}{\omega_{-}(2)} - \frac{W_{+}(2)}{\omega_{+}(2)}, \quad (17)$$

т. е. постоянной является не сумма квантов в преломленных волнах, а их разность. Иначе говоря, возникновение волны  $f_{+}(2)$  из-за неоднородности среды приводит не к уменьшению, а, наоборот, к увеличению числа квантов в волне  $f_{-}(2)$ , т. е. к рождению новых квантов\*.

Соотношения (16), (17) обобщают результаты, полученные ранее в [1], для недиспергирующей среды.

Авторы признательны М. А. Миллеру за интерес к задаче.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Ostrovskii, N. S. Stepanov, Selected papers from the URSI Symp. electromag. waves, Streza—Italy, June, 1968; Alta Frequenza, 38, Maggio, 1969, p. 204.
2. Л. А. Островский, Б. А. Соломин, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 8, 1183 (1967).
3. Н. С. Степанов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 5, № 5, 908 (1962).
4. Ю. А. Кравцов, Н. С. Степанов, ЖЭТФ, № 11, 57, 1730 (1969).
5. Г. И. Фрейдман, ЖЭТФ, 41, № 7, 226 (1961).
6. Н. С. Степанов, ЖЭТФ, 53, № 12, 2186 (1967).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
3 ноября 1969 г.

#### REFLECTION AND REFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A MOVING INHOMOGENEOUS PLASMA

*Yu. M. Sorokin, N. S. Stepanov*

The interaction of electromagnetic waves with the density inhomogeneity uniformly moving in an isotropic plasma placed in a nondispersive dielectric is considered. It is shown the reflection and refraction coefficients for such a layer may be expressed through the corresponding coefficients for the immovable layer of a similar profile. The frequencies and group wave velocities have been found. It is clear that as distinct from the nondispersive medium, there cannot arise more than two secondary waves in the considered system. The expressions are obtained which relate the full energies with and frequencies of the interacting waves for different velocities of the inhomogeneity motion.

\* Вообще говоря, при  $\beta = (v_0/c) n > 1$  в плазме могут возникать неустойчивости, которые здесь не учитываются. Для применимости результатов данной работы достаточно, чтобы профиль движущейся неоднородности не изменялся существенно за время взаимодействия ее с сигналом.

УДК 538.56 : 533.9.02

## ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ДИПОЛЕЙ, ПОМЕЩЕННЫХ В ПОЛОСТЬ, ОБРАЗОВАННУЮ ПЛАЗМЕННЫМ СЛОЕМ

*М. С. Ковнер, В. А. Лапидус, Г. А. Лупанов*

Рассматривается излучение антенны из диэлектрического шара, окруженного слабоионизированным слоем плазмы. Исследуются некоторые характеристики антенн в зависимости от параметров плазмы.

В последнее время все более актуальным становится исследование работы антennы в плазме [1], в частности, представляет интерес задача об излучении антenn из полости, образованной плазменной оболочкой конечной толщины.

Для выяснения ряда характерных черт такого излучения можно воспользоваться сравнительно простой моделью. В качестве последней мы рассматриваем излучение электрического и магнитного диполей из диэлектрического шара, окруженного однородной плазменной оболочкой заданной толщины.

Заметим, что общее исследование излучения из полости, образованной слоистой оболочкой, проведено в работе [2], излучение магнитного и электрического диполей, расположенных в центре диэлектрического шара, рассматривалось в [3].

В настоящей работе рассматривается излучение электрического  $p^e$  и магнитного  $p^m$  диполей, помещенных в центр диэлектрического шара радиуса  $R_1$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ , окруженного сферическим плазменным слоем толщины  $R_2 - R_1$  с проницаемостью  $\epsilon_2$ , равной [4]

$$\epsilon_2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + v^2} - i \frac{v}{\omega} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + v^2},$$

где  $\omega_0$  — плазменная частота,  $v$  — эффективное число соударений электронов с тяжелыми частицами (см. рис. 1).

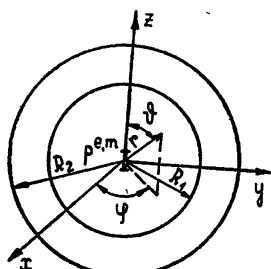


Рис. 1.

### 1. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ

Ищем решение в предположении заданного дипольного момента  $p^e = Il/i\omega$ , где  $I = I_0 e^{i\omega t}$  — ток на входе антennы,  $l$  — эффективная длина вибратора.

Исходными уравнениями являются волновые уравнения для векторного потенциала

$$\nabla^2 \mathbf{A}^l + k_l^2 \mathbf{A}^l = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^l, \quad (1)$$

где  $i = I, II, III$  — индекс, означающий номер области,  $j$  — плотность тока в антенну,  $k_i = (\omega/c)\sqrt{\epsilon_i}$  — волновое число.

Электрическое  $E$  и магнитное  $H$  поля выражаются через  $A$  следующим образом:

$$H = \operatorname{rot} A; \quad (2)$$

$$E = -\frac{ic}{\epsilon\omega} \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \frac{i\omega}{c} A. \quad (3)$$

Отметим, что  $j$  имеет только одну компоненту  $j_z$  и уравнение (1) сводится к скалярному для компоненты  $A_z$ . С учетом симметрии модели будем решать уравнение (1) в сферической системе координат  $(r, \vartheta, \phi)$ .

В области I уравнение (1) неоднородное, и его решение ищется в виде суммы частного решения  $A_h$  неоднородного и общего решения  $A_o$  однородного уравнений [5]:

$$A_h = \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{j(r) \exp(-ikr)}{r} dv', \quad (4)$$

где  $V'$  — область заданных токов.

Однородные уравнения для всех трех областей при учете азимутальной симметрии удовлетворяются решением вида

$$A_o^l = \frac{C_l}{V_{\rho_l}} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{n+1/2}(\rho_l) P_n(\cos \vartheta), \quad (5)$$

где  $\rho_l = k_l r$ ,  $C_l$  — константы, определяемые из граничных условий и условий на бесконечности,  $P_n(\cos \vartheta)$  — полиномы Лежандра степени  $n$ ,  $Z_{n+1/2}$  — цилиндрические функции полуцелого порядка.

Общее решение однородного уравнения конструируется в виде линейной комбинации двух линейно независимых цилиндрических функций соответствующего порядка. Конкретный выбор определяется условиями задачи и соображениями удобства. В области I условиям задачи удовлетворяет только функция Бесселя  $J_{n+1/2}(\rho_1)$ , так как решение однородного уравнения не должно иметь особенностей в начале координат. Во второй области удобно взять линейную комбинацию функций Ганкеля 1-го и 2-го рода  $H_{n+1/2}^{(1)}(\rho_2)$  и  $H_{n+1/2}^{(2)}(\rho_2)$ . В области III, удовлетворяя условиям на бесконечности, выбираем  $Z_{n+1/2}(\rho) = H_{n+1/2}^{(2)}(\rho)$ .

Подстановка соответствующих цилиндрических функций позволяет при помощи (2), (3) определить значения  $E$  и  $H$  в каждой из областей.

Ограничивааясь дипольным приближением, которому в (5) соответствуют  $n = 0$ , получаем:

а) в области I —

$$H_\vartheta = -\frac{i\sqrt{\epsilon_1} \sin \vartheta}{r} \left\{ -ik_0^2 p_e \left[ -\frac{ie^{-ip_1}}{\rho_1} + e^{-ip_1} \right] + \Gamma_e \left[ -\frac{\sin \rho_1}{\rho_1} + \cos \rho_1 \right] \right\},$$

$$E_r = \frac{2 \cos \vartheta}{r} \left\{ -ik_0^2 p_e \left[ \frac{ie^{-ip_1}}{\rho_1^2} - \frac{e^{-ip_1}}{\rho_1} \right] + \Gamma_e \left[ \frac{\sin \rho_1}{\rho_1^2} - \frac{\cos \rho_1}{\rho_1} \right] \right\}, \quad (6)$$

$$E_\vartheta = \frac{\sin \vartheta}{r} \left\{ -ik_0^2 p_e \left[ ie^{-ip_1} \left( \frac{1}{\rho_1^2} - 1 \right) - \frac{e^{-ip_1}}{\rho_1} \right] + \Gamma_e \left[ \sin \rho_1 \left( \frac{1}{\rho_1^2} - 1 \right) - \frac{\cos \rho_1}{\rho_1} \right] \right\};$$

б) в области II —

$$\begin{aligned} H_\varphi &= -\frac{i\sqrt{\epsilon_2} \sin \vartheta}{r} \left\{ T_e \left[ -\frac{ie^{-i\rho_2}}{\rho_2} + e^{-i\rho_2} \right] + E_e \left[ \frac{ie^{i\rho_2}}{\rho_2} + e^{i\rho_2} \right] \right\}, \\ E_r &= \frac{2 \cos \vartheta}{r} \left\{ T_e \left[ \frac{ie^{-i\rho_2}}{\rho_2^2} - \frac{e^{-i\rho_2}}{\rho_2} \right] + E_e \left[ -\frac{ie^{i\rho_2}}{\rho_2^2} - \frac{e^{i\rho_2}}{\rho_2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$E_\theta = \frac{\sin \vartheta}{r} \left\{ T_e \left[ ie^{-i\rho_2} \left( \frac{1}{\rho_2^2} - 1 \right) - \frac{e^{-i\rho_2}}{\rho_2} \right] + E_e \left[ -ie^{i\rho_2} \left( \frac{1}{\rho_2^2} - 1 \right) - \frac{e^{i\rho_2}}{\rho_2} \right] \right\};$$

в) в области III —

$$\begin{aligned} H_\varphi &= -\frac{i \sin \vartheta}{r} F_e \left[ -\frac{ie^{-i\rho}}{\rho} + e^{-i\rho} \right], \\ E_r &= \frac{2 \cos \vartheta}{r} F_e \left[ \frac{ie^{-i\rho}}{\rho^2} - \frac{e^{-i\rho}}{\rho} \right], \\ E_\theta &= \frac{\sin \vartheta}{r} F_e \left[ ie^{-i\rho} \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - \frac{e^{-i\rho}}{\rho} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Gamma_e$ ,  $T_e$ ,  $E_e$ ,  $F_e$  — коэффициенты, определяемые из граничных условий

$$\begin{aligned} E_{\varphi I} &= E_{\varphi II}|_{r=R_1}, & E_{\varphi III} &= E_{\varphi III}|_{r=R_3}, \\ H_{\theta I} &= H_{\theta II}|_{r=R_1}, & H_{\theta III} &= H_{\theta III}|_{r=R_3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выпишем выражения для интересующих нас коэффициентов  $T_e$ ,  $E_e$ ,  $F_e$ :

$$T_e = \frac{-ik_0^2 p^e (a_2 b_1 - a_1 b_2) (b_4 c_3 - \sqrt{\epsilon_2} b_3 c_4)}{L_e}; \quad (10)$$

$$E_e = \frac{-ik_0^2 p^e (a_2 b_1 - a_1 b_2) (c_4 a_3 \sqrt{\epsilon_2} - a_4 c_3)}{L_e}; \quad (11)$$

$$F_e = \frac{-ik_0^2 p^e (a_2 b_1 - a_1 b_2) (b_4 a_3 - b_3 a_4)}{L_e}, \quad (12)$$

$$L_e = (b_4 c_3 - \sqrt{\epsilon_2} c_4 b_3) (b_1 c_2 - \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1} c_1 b_3) - (b_2 d_1 \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1} - d_2 b_1) (c_4 a_3 \sqrt{\epsilon_2} - c_3 a_4).$$

В (10) — (12) использованы следующие обозначения:

$$a_1 = -\frac{ie^{-i\rho_{11}}}{\rho_{11}} + e^{-i\rho_{11}}, \quad b_1 = -\frac{\sin \rho_{11}}{\rho_{11}} + \cos \rho_{11}, \quad c_1 = a_1 (\rho_{21}),$$

$$d_1 = \frac{ie^{i\rho_{11}}}{\rho_{21}} + e^{i\rho_{11}}, \quad a_2 = e^{-i\rho_{11}} \left( \frac{i}{\rho_{11}^2} - \frac{1}{\rho_{11}} - i \right), \quad b_2 = \frac{\sin \rho_{11}}{\rho_{11}^2} - \frac{\cos \rho_{11}}{\rho_{11}} - \sin \rho_{11},$$

$$c_2 = a_2 (\rho_{21}), \quad d_2 = -e^{-i\rho_{11}} \left( \frac{i}{\rho_{21}^2} + \frac{1}{\rho_{21}} - i \right), \quad a_3 = e^{-i\rho_{22}} \left( -\frac{i}{\rho_{22}} + 1 \right),$$

$$b_3 = e^{i\rho_{22}} \left( \frac{i}{\rho_{22}^2} + 1 \right), \quad c_3 = a_3 (\rho_{32}), \quad a_4 = e^{-i\rho_{22}} \left( \frac{i}{\rho_{22}^2} - \frac{1}{\rho_{22}} - i \right),$$

$$b_4 = e^{i\rho_{22}} \left( -\frac{i}{\rho_{22}^2} - \frac{1}{\rho_{22}} + i \right), \quad c_4 = a_4 (\rho_{33}),$$

причем

$$\rho_{ij} = k_i R_j \quad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2),$$

$$\rho_{32} = k_0 R_2, \quad k_0 = \omega/c.$$

Знание полей в областях II и III позволяет определить некоторые характеристики антенны, а именно: сопротивление излучения, характеризующее мощность излучения, уходящую в свободное пространство,—

$$R_{\Sigma, e} = \frac{c}{4\pi} \frac{\int_{III} \sigma \operatorname{Re}[EH^*] ds}{I^*}. \quad (13)$$

сопротивление потерь  $R_{Q, e}$ , равное отношению мощности тепловых потерь в плазменном слое к квадрату тока в антенне,—

$$R_{Q, e} = \frac{\int_{II} \sigma E E^* dv}{I^*}, \quad (14)$$

здесь  $\sigma$  — проводимость плазменного слоя. Реальную же часть входного импеданса антенны полагаем равной

$$\operatorname{Re} Z_{bx} = R_Q + R_\Sigma. \quad (15)$$

Удобно ввести также коэффициент распределения энергии

$$\eta = \frac{R_\Sigma}{R_Q + R_\Sigma}, \quad (16)$$

который в некотором смысле является КПД системы.

Выражения для  $R_\Sigma$ ,  $R_Q$ ,  $\eta$  в общем виде довольно громоздки, в связи с этим рассмотрим приближения, упрощающие (13) — (16).

1. *Квазистатическое приближение.* Квазистатическое приближение, как известно, справедливо для длин волн, много больших размеров областей, в которых ищется решение, т. е.

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_1}} \gg R_1, \quad \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_2}} \gg R_2 - R_1. \quad (17)$$

Последнее условие, в свою очередь, эквивалентно двум требованиям:

$$\frac{\lambda}{n_2} \gg R_2 - R_1, \quad \delta \gg R_2 - R_1, \quad (18)$$

где  $n_2$  — показатель преломления плазмы [4],  $\delta$  — толщина скин-слоя.

При выполнении условий (17), (18) формулы (13), (14), (16) принимают следующий вид:

$$R_{\Sigma, e} = BB^* R_{\Sigma, s}, \quad (19)$$

$$R_{\Sigma, s} = (2/3c)(k_0 l)^3,$$

где

$$B = \frac{9\epsilon_2}{(2 + \epsilon_2)(\epsilon_1 + 2\epsilon_2) + 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_2 - 1)\alpha^3} \quad \left( \alpha = \frac{R_1}{R_2} \right),$$

$$R_{Q, e} = 36\pi\sigma \frac{c^3}{\omega^4} \frac{(1 - \alpha^3)[2|\epsilon_2 - 1|^2 + |\epsilon_2 + 2|^2\alpha^{-3}]R_{\Sigma, s}}{R_2^3 |(2 + \epsilon_2)(\epsilon_1 + 2\epsilon_2) + 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_2 - 1)\alpha^3|^3}; \quad (20)$$

$$\eta_e = \{1 + (4\pi/9)(\sigma c^3/\omega^4 R_2^3) (1 - \alpha^3)[2|\varepsilon_2 - 1|^2 + |\varepsilon_2 + 2|^2 \alpha^{-3}]|\varepsilon_2|^{-2}\}^{-1}. \quad (21)$$

2. Волновое приближение. При длинах волн  $\lambda \ll R_1$ ,  $|R_2 - R_1|$  выражения для  $R_{\Sigma, e}$ ,  $R_{Q, e}$ ,  $\eta$  можно заметно упростить в следующих предельных случаях.

а) Сильное поглощение ( $2\kappa k_0(R_2 - R_1) \gg 1$ ,  $\kappa$  — показатель поглощения плазмы) —

$$R_{\Sigma, e} = \frac{4(n^2 + x^2)\varepsilon_1 \exp[-2\kappa k_0(R_2 - R_1)]}{[(1+n^2+x^2)[(\kappa \sin \rho_{11} + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \rho_{11})^2 + n^2 \sin^2 \rho_{11}]]} R_{\Sigma, s}; \quad (22)$$

$$R_{Q, e} = \frac{\varepsilon_1[n(1+n^2+x^2)+2n^2]}{[(1+n^2+x^2)[(\kappa \sin \rho_{11} + \sqrt{\varepsilon_1} \cos \rho_{11})^2 + n^2 \sin^2 \rho_{11}]]} R_{\Sigma, s}; \quad (23)$$

$$\eta_e = \frac{4(n^2 + x^2) \exp[-2\kappa k_0(R_2 - R_1)]}{n(1 + n^2 + x^2) + 2n^2}. \quad (24)$$

б) Прозрачная плазма ( $2\kappa k_0(R_2 - R_1) \ll 1$ ,  $\omega_0 < \nu \ll \omega$ ). При этом

$$R_{Q, e} = 0, \quad (25)$$

$$R_{\Sigma, e} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 \cos^2 \rho_{11} + \sin^2 \rho_{11}} R_{\Sigma, s}.$$

Формула (25) совпадает с результатами работы [3], в которой исследовано излучение электрического и магнитного диполей из диэлектрического шара.

Заметим, что рассмотренные приближения дают удовлетворительные результаты и в области  $\rho_{11} \sim 1$  ( $\lambda \sim 2\pi R_1$ ), причем вычисления по квазистатическим и волновым формулам приводят к совпадающим по порядку величинам.

## 2. МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ

Решая уравнение (1) для магнитного потенциала  $\mathbf{A}^m$  и используя соотношения

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{A}^m; \quad (26)$$

$$\mathbf{H} = \frac{c}{i\omega\epsilon} (\operatorname{grad} \operatorname{div} + \mathbf{k}^2) \mathbf{A}^m, \quad (27)$$

получим следующие выражения для полей:

а) в области I —

$$E_\varphi = -\frac{i k_0 \sin \vartheta}{\rho_1} \left[ -i k_1^2 p^m e^{-i\rho_1} \left( \frac{i}{\rho_1} - 1 \right) + \Gamma_m \left( \frac{\sin \rho_1}{\rho_1} - \cos \rho_1 \right) \right],$$

$$H_r = \frac{2 \cos \vartheta}{r} \left[ -i k_1^2 p^m e^{-i\rho_1} \left( \frac{i}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_1} \right) + \Gamma_m \left( \frac{\sin \rho_1}{\rho_1^2} - \frac{\cos \rho_1}{\rho_1} \right) \right], \quad (28)$$

$$H_\theta = \frac{\sin \vartheta}{r} \left[ -i k_1^2 p^m e^{-i\rho_1} \left( \frac{i}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_1} - i \right) + \Gamma_m \left( \frac{\sin \rho_1}{\rho_1^2} - \frac{\cos \rho_1}{\rho_1} - \sin \rho_1 \right) \right];$$

б) в области II —

$$E_\varphi = -\frac{i k_0 \sin \vartheta}{\rho_2} \left[ T_m e^{-i\rho_2} \left( \frac{i}{\rho_2} - 1 \right) + E_m e^{i\rho_2} \left( -\frac{i}{\rho_2} - 1 \right) \right],$$

$$H_r = \frac{2\cos \vartheta}{r} \left[ T_m e^{-i\rho_2} \left( \frac{i}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_2} \right) + E_m e^{i\rho_2} \left( -\frac{i}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_2} \right) \right], \quad (29)$$

$$H_\theta = \frac{\sin \vartheta}{r} \left[ T_m e^{-i\rho_2} \left( \frac{i}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_2} - i \right) + E_m e^{i\rho_2} \left( -\frac{i}{\rho_2^2} - \frac{1}{\rho_2} + i \right) \right];$$

в) в области III —

$$E_\phi = -ik_0 \sin \vartheta F_m e^{-i\rho} \left( \frac{i}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \right),$$

$$H_r = \frac{2\cos \vartheta}{r} F_m e^{-i\rho} \left( \frac{i}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \right), \quad (30)$$

$$H_\theta = k_0 \sin \vartheta F_m \frac{e^{-i\rho}}{\rho} \left[ i \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - \frac{1}{\rho} \right].$$

Используя непрерывность  $E_\phi$ ,  $H_\theta$  на границах раздела, находим выражения для интересующих нас коэффициентов  $T_m$ ,  $E_m$ ,  $F_m$ :

$$E_m = \frac{-ik_1^2 p^m (a_2 b_1 - a_1 b_2) (c_4 a_3 / V \varepsilon_2 - c_3 a_4)}{L_m}; \quad (31)$$

$$T_m = \frac{-ik_1^2 p^m (a_2 b_1 - a_1 b_2) (b_4 c_3 - c_4 b_3 / V \varepsilon_2)}{L_m}; \quad (32)$$

$$F_m = \frac{-ik_1^2 p^m (a_2 b_1 - a_1 b_2) (1 / V \varepsilon_2) (b_4 a_3 - b_3 a_4)}{L_m}, \quad (33)$$

$$L_m = \left( b_1 c_2 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} b_2 c_1 \right) \left( c_3 b_4 - \frac{1}{V \varepsilon_2} b_3 c_4 \right) - \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} d_1 b_2 - d_2 b_1 \right) \times \\ \times \left( c_4 a_3 - \frac{1}{V \varepsilon_2} c_3 a_4 \right),$$

где  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  имеют тот же вид, что и для электрического диполя.

Введем по аналогии с (13), (14), (16) сопротивление излучения  $R_{\Sigma, m}$ , сопротивление потерь  $R_{Q, m}$  и коэффициент распределения по энергиям  $\eta_m$ .

1) В квазистатическом приближении эти параметры равны

$$R_{\Sigma, m} = R_{\Sigma, m, s},$$

$$R_{\Sigma, m, s} = \frac{2c}{3} k_0^4 \pi^2 a^4, \quad \pi a^2 = \frac{p^m}{I} c; \quad (34)$$

$$R_{Q, m} = \frac{c \omega_0^2 v}{(\omega^2 + v^2) \omega^2} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} R_{\Sigma, m, s}; \quad (35)$$

$$\eta_m = \frac{1}{1 + [c \omega_0^2 v / (\omega^2 + v^2) \omega^2] [(R_2 - R_1) / R_2 R_1]}. \quad (36)$$

2) В волновом приближении, во избежание излишней громоздкости, приведем выражения (так же, как и для электрического диполя) в двух предельных случаях.

а) Область сильного поглощения ( $2\kappa k_0(R_2 - R_1) \gg 1$ ) —

$$R_{\Sigma, m} = \frac{4(n^2 + x^2)\varepsilon_1^2 \exp[-2\kappa k_0(R_2 - R_1)]}{[(1+n)^2 + x^2][(V\varepsilon_1 \sin \rho_{11} - x \cos \rho_{11})^2 + n^2 \cos^2 \rho_{11}]} R_{\Sigma, s, m}; \quad (37)$$

$$R_{Q, m} = \frac{\varepsilon_1^2 [n(1+n^2+x^2) + 2n^2]}{[(1+n)^2 + x^2][(V\varepsilon_1 \sin \rho_{11} - x \cos \rho_{11})^2 + n^2 \cos^2 \rho_{11}]} R_{\Sigma, s, m}; \quad (38)$$

$$\eta_m = \frac{4(n^2 + x^2) \exp[-2\kappa k_0(R_2 - R_1)]}{n(1+n^2+x^2)+2n^2}. \quad (39)$$

б) Область прозрачности, в которой наличие плазменного слоя несущественно ( $2\kappa k_0(R_2 - R_1) \ll 1$ ,  $\omega_0 < v \ll \omega$ ) —

$$R_{\Sigma, m} = \frac{\varepsilon_1^2}{\cos^2 \rho_{11} + \varepsilon_1 \sin^2 \rho_{11}} R_{\Sigma, s, m}. \quad (40)$$

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2 приведен график зависимости  $\gamma = -10 \lg \eta$  от частоты для электрического диполя. Вычисления проводились для случая  $R_1 = 1 \text{ м}$ ,  $R_2 = 1,1 \text{ м}$ ,  $\nu_{\text{эфф}} = 4 \cdot 10^{12} \text{ сек}^{-1}$ ,  $N_e = 10^{14} \text{ см}^{-3}$  ( $\omega_0 \ll v$ ), что соответствует значениям параметров равновесной ионизации на прямом скачке ударной волны при числах Маха порядка 10 и давлении в невозмущенном газе  $p = 0,8 \text{ кг} \cdot \text{см}^{-2}$  [6, 7].

Качественно характер зависимости  $\gamma(\omega)$  можно объяснить следующим образом. Линейный участок отвечает квазистатическому приближению ( $\lambda \ll R$ ). При этом в предельном случае  $\omega \rightarrow 0$  имеет место полное электростатическое экранирование и поле не проникает через слой. С ростом частоты, из-за наличия трения заряженных частиц о нейтралы, электроны оболочки «не успевают» перераспределиться так, чтобы заэкрантировать внешнее воздействие и ослабление уменьшается. В области длин волн  $\lambda \gg R$

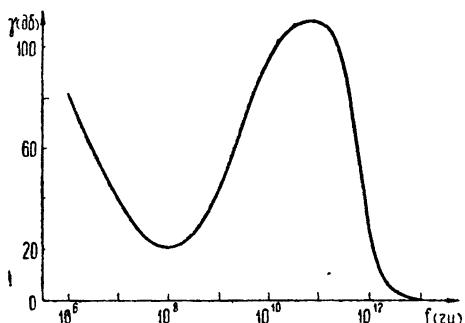


Рис. 2.

взаимная мощность  $N \propto v^2$ , где  $v$  — скорость, приобретаемая электроном в электрическом поле волны за время  $v^{-1}$ . Если  $\omega \ll v$ , то при равных амплитудах за время между столкновениями большую скорость наберет электрон в поле волны большей частоты. Следовательно, потери и  $\gamma(\omega)$  будут расти с ростом частоты. Когда  $\omega$  становится больше эффективного числа соударений  $v$ , проводимость, как известно, начинает падать с частотой.

Количественные соотношения можно найти, рассмотрев зависимость  $\gamma$  от  $\omega$  для плазмы [4]:

$$\gamma \sim \omega \left[ -\operatorname{Re} \varepsilon_2 + \sqrt{(\operatorname{Re} \varepsilon_2)^2 + (\operatorname{Im} \varepsilon_2)^2} \right]^{1/2},$$

где

$$\operatorname{Re} \varepsilon_2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + v^2}, \quad \operatorname{Im} \varepsilon_2 = -\frac{v}{\omega} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + v^2}, \quad \omega_0^2 = 3,2 \cdot 10^9 N_e.$$

Для рассматриваемого численного примера в диапазоне частот  $10^8 \text{ Гц} < \omega < 10^{11} \text{ Гц}$  ( $< \nu$ )  $\gamma \propto \omega^{1/2}$ ; когда  $10^{11} \text{ Гц} < \omega \leq 4 \cdot 10^{12} \text{ Гц}$   $\gamma$  достигает наибольшего значения (при  $\nu/\omega_0 \sim 10$ ,  $(R_2 - R_1)/R_1 = 0.1$ ,  $\gamma \approx 100 \text{ дБ}$ ). В области  $\omega \gg \nu$  ( $\text{Im } \epsilon_2 \ll 1$ ) величина  $\gamma$  спадает по закону  $\omega^{-2}$ ,  $\gamma \propto \exp(-\nu^2/\omega^2)$ .

Авторы признательны А. А. Андронову и Ю. В. Чугунову за обсуждение результатов и интересные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. А н д р о н о в, Диссертация, Госуниверситет, Горький, 1969.
2. В. Ф. Кулько, В. Н. Михайловский, Электромагнитное поле в слоистых проводящих средах, изд. Наукова думка, Киев, 1967.
3. O. S a g e r, F. T i s i, Z. angew. Phys., 22, 121 (1967); 22, 210 (1967).
4. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
5. Дж. А Стрэттон, Теория электромагнетизма, ОГИЗ, М., 1948.
6. Н. М. Кузнецов, Термодинамические функции, изд. Машиностроение, М., 1965.
7. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Физматгиз, М., 1963.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
22 ноября 1969 г.

#### RADIATION FROM ELECTRIC AND MAGNETIC DIPOLES PLACED IN A CAVITY FORMED BY A PLASMA LAYER

*M. S. Kovner, V. A. Lapidus, G. A. Lupanov*

The radiation from an antenna made of the dielectric sphere surrounded by a weakly-ionized plasma layer is considered. Some antenna characteristics depending on the plasma parameters are investigated.

УДК 533.951

## К ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ

*Д. Зюндер, А. А. Рухадзе*

Исследуется параметрическое возбуждение низкочастотных и длинноволновых электростатических колебаний в полностью ионизованной плазме, помещенной в слабое однородное СВЧ поле, частота которого близка к плазменной частоте. Определены пороговые значения напряженности внешнего поля, соответствующие раскачки различных мод колебаний, и получены выражения для частот и инкрементов нарастания колебаний вблизи порогов.

В последние годы в связи с интенсивной разработкой проблем радиационного ускорения, нагрева и удержания плазмы электромагнитными волнами значительно возрос интерес к вопросам устойчивости плазмы во внешних СВЧ полях. Последовательное построение теории устойчивости плазмы в СВЧ полях было начато в работах [1-4] (см. также обзоры [5, 6]). В этих работах в основном исследовалась устойчивость плазмы в сильных СВЧ полях, когда скорость осцилляции электронов намного превосходит их тепловую скорость ( $v_E \gg v_{T_e}$ ). При этом было показано, что в сильном СВЧ поле существуют как гидродинамические (не зависящие от теплового движения частиц) неустойчивости при частотах внешнего поля  $\omega_0$ , меньших или порядка ленгмюровской частоты электронов  $\omega_{L_e}$ , так и кинетические, когда  $\omega_0 \gg \omega_{L_e}$ . Несмотря на большой успех этой теории, проливающей свет на всю проблему радиационного ускорения и нагрева плазмы СВЧ полями, она не могла объяснить целый ряд аномальных эффектов, наблюдавшихся уже при слабых полях, когда  $v_E \ll v_{T_e}$ . В связи с этим в работах [7-10] были предприняты специальные исследования устойчивости плазмы в относительно слабых СВЧ полях и определены пороговые значения напряженности СВЧ полей, выше которых в плазме развиваются неустойчивости. В этих работах, однако, исследовалась либо сравнительно разреженная плазма, когда длина свободного пробега частиц больше длины волны возбуждаемых колебаний [9, 10] (или размеров системы), либо лишь предельный случай слабоионизованной плазмы [8], причем в последнем недостаточно полно учитывались такие диссипативные эффекты, как теплопроводность и диффузия частиц.

В настоящей работе проводится последовательное рассмотрение устойчивости относительно плотной, полностью ионизованной плазмы во внешнем слабом СВЧ поле. Предполагается, что длина волны колебаний значительно меньше размеров системы и неоднородности СВЧ поля, но больше длины свободного пробега частиц, т. е.  $\lambda_0, L_0 \gg \lambda \sim 1/k \gg l \sim v_{T_e}/v_{ei}$ . Рассматривается случай параметрического взаимодействия СВЧ поля с плазмой, когда частота  $\omega_0$  близка к ленгмюровской частоте электронов  $\omega_{L_e}$ , так как именно в этом случае возможна раскачка колебаний в плазме уже при относительно малых напряженностях

СВЧ поля. Основная задача работы как раз и состоит в определении пороговых значений напряженности СВЧ поля, соответствующих возбуждению различных мод электростатических колебаний в плазме, и инкрементов нарастания неустойчивостей вблизи порогов.

### 1. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим полностью ионизованную плазму, помещенную в однородное высокочастотное поле

$$\mathbf{E}(t) = E_0 \sin \omega_0 t, \quad (1.1)$$

частота которого  $\omega_0$  значительно больше эффективной частоты электрон-ионных столкновений  $\nu_{ei}$  и значительно не превосходит ленгмюровскую частоту электронов  $\omega_{L_e}$ . Будем также считать, что поле  $E_0$  является достаточно слабым, так что скорость осцилляции электронов в этом поле меньше их тепловой скорости, т. е.  $v_E = eE_0/m\omega_0 \ll v_{T_e}$ . Принятые ограничения позволяют для описания плазмы пользоваться кинетическим уравнением с интегралом столкновений Ландау [11]

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \sum_\beta J_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta), \quad (1.2)$$

$$J_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = 2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 L \frac{\partial}{\partial p_i} \int dp' \frac{w^2 \delta_{ij} - w_i w_j}{w^3} \left( f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial p_j} - f_\beta \frac{\partial f_\alpha}{\partial p'_j} \right).$$

Индексы  $\alpha$  и  $\beta$  относятся к электронам и ионам,  $L = \ln r_{D_e}/r_{\min}$  — кулоновский логарифм, а  $w = v_\alpha - v_\beta$ .

Учитывая однородность внешнего СВЧ поля, равновесное состояние плазмы также можно считать однородным. Ограничивааясь исследованием достаточно быстрых процессов, времена протекания которых меньше времени нагрева плазмы внешним СВЧ полем и времени обмена энергией между электронами и ионами, т. е.

$$\tau \ll \frac{1}{\nu_{ei}} \left( \frac{v_{T_e}}{v_E} \right)^2; \quad \frac{1}{\nu_{ei}\delta}, \quad (1.3)$$

где  $\delta \sim m/M$ , в качестве равновесных функций распределений частиц примем распределения Максвелла со средней осциллирующей скоростью частиц и с постоянной температурой:

$$f_{0\alpha}(\mathbf{v}, t) = \frac{N_\alpha}{(2\pi m_\alpha T_\alpha)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{m_\alpha (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha E}(t))^2}{2T_\alpha} \right],$$

$$\mathbf{v}_{\alpha E}(t) = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_{-\infty}^t \mathbf{E}(t') dt' = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{E_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t. \quad (1.4)$$

Рассмотрим теперь малые отклонения функций распределения частиц от равновесных (1.4) под действием потенциального поля возмущений  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ . Линеаризуя уравнение (1.2) и записывая возмущения в виде

$$\delta f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = \exp[-i\omega t + ik(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha E}(t))] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_{\alpha n}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha E}(t)) \times$$

$$\times \exp(-in\omega_0 t), \quad (1.5)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n \exp[-i(\omega + n\omega_0)t + ikr],$$

где  $r_{\alpha E}(t) = (-e_\alpha/m_\alpha)(E_0/\omega_0^2) \sin \omega_0 t = r_{\alpha E}^{(0)} \sin \omega_0 t$ , после несложных преобразований получим

$$-i(\omega + n\omega_0 - kv) \Psi_{\alpha n} = i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} k \frac{\partial f_{\alpha M}(v)}{\partial v} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m J_{m-n}(a_\alpha) + (I_\alpha)_n. \quad (1.6)$$

Здесь  $f_{\alpha M}(v)$  — изотропное распределение Максвелла,  $a_\alpha = kr_{\alpha E}^{(0)}$ ,  $(I_\alpha)_n$  —  $n$ -я гармоника разложения линеаризованного интеграла столкновений в ряд Фурье. Следует оговорить, что при написании уравнения (1.6) мы произвели замену  $v \rightarrow \dot{v}_{\alpha E} \rightarrow v$ , т. е. перешли в осциллирующую систему координат. Возникшими при этом в интеграле столкновений членами порядка  $(v_E/v_{T_e})^2$  пренебрегли, учитывая неравенства (1.3).

Уравнение (1.6) отличается от кинетического уравнения в отсутствие внешнего высокочастотного поля заменой  $\Phi_n \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m J_{m-n}(a_\alpha)$ . Очевидно, такой же заменой будут отличаться и решения этого уравнения от соответствующих решений для плазмы без СВЧ поля, которые хорошо известны. Подставляя эти решения в уравнение Пуассона и учитывая разложения (1.5) совершенно так же, как это делалось для бесстолкновительной плазмы [1, 2], получаем систему зацепляющихся уравнений для  $\Phi_n$ :

$$\Phi_n = - \sum_{\alpha} \sum_{p, m=-\infty}^{\infty} J_{n-p}(a_\alpha) J_{m-p}(a_\alpha) \delta \epsilon_\alpha (\omega + n\omega_0, k) \Phi_m, \quad (1.7)$$

где  $\delta \epsilon_\alpha (\omega, k)$  — вклад частиц сорта  $\alpha$  в продольную диэлектрическую проницаемость, учитывающий столкновения частиц в плазме. Благодаря последнему, это уравнение является обобщением соответствующего уравнения для разреженной бесстолкновительной плазмы на случай плазмы с произвольной частотой столкновений частиц, удовлетворяющей лишь единственному требованию  $\omega_0 \gg v_{el}$ .

Вводя теперь стандартное обозначение  $U_\alpha^{(n)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m J_{m-n}(a_\alpha) \times \times \delta \epsilon_\alpha (\omega + n\omega_0, k)$ , из уравнений (1.7) получаем хорошо известную систему для функций  $U_e^{(n)}$  (см. [1, 2]):

$$U_e^{(n)} = R_e^{(n)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(a) R_l^{(m)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{l-m}(a) U_e^{(l)}, \quad (1.8)$$

где  $a = a_e$ ,

$$R_\alpha^{(n)} = \frac{\delta \epsilon_\alpha (\omega + n\omega_0, k)}{1 + \delta \epsilon_\alpha (\omega + n\omega_0, k)}.$$

Как уже отмечалось выше, нас будет интересовать устойчивость плазмы в слабом СВЧ поле, в условиях, когда  $v_E \ll v_{T_e}$ , а  $\omega_0 \sim \omega_{L_e}$  (следовательно,  $a \ll 1$ ). Кроме того, мы рассматриваем предел столкновительной плазмы, обратный исследованному в работе [10]. Поэтому ниже считаются выполнеными неравенства  $\omega_0 \gg v_{el} \gg \omega, kv_{T_e}$ . Все это позволяет из уравнения (1.8) получить дисперсионное соотношение для определения спектра колебаний в виде разложения по степеням  $a^2$ . С точностью до членов  $a^2$  это уравнение имеет вид

$$\frac{1}{1 + \delta\epsilon_e(\omega, \mathbf{k})} + \frac{1}{\delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k})} + \frac{a^2}{4} \left( \frac{1}{\epsilon(\omega + \omega_0, \mathbf{k})} + \frac{1}{\epsilon(\omega - \omega_0, \mathbf{k})} \right) = 0, \quad (1.9)$$

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \delta\epsilon_e(\omega, \mathbf{k}) + \delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k}).$$

## 2. АНАЛИЗ СПЕКТРОВ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ

Приступая к анализу спектров низкочастотных колебаний плазмы в СВЧ поле, учтем неравенства  $\omega_0 \gg v_{ei} \gg \omega$ ,  $k v_{T_e}$  и упростим уравнение (1.9):

$$\frac{1}{1 + \delta\epsilon_e(\omega, \mathbf{k})} + \frac{1}{\delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k})} + K^2 \frac{\omega_0 \Delta k^2 r_{De}^2}{\Delta^2 + v_{ei}^2/4 - i\omega v_{ei}}, \quad (2.1)$$

где

$$K^2 = \frac{1}{4} \frac{a^2}{k^2 r_{De}^2}, \quad \text{а} \quad \Delta = \frac{\operatorname{Re} \epsilon(\omega_0)}{\frac{\partial}{\partial \omega_0} \operatorname{Re} \epsilon(\omega_0)}.$$

При анализе этого уравнения ниже рассматриваются предельные области частот, в которых известны простые аналитические формулы для  $\delta\epsilon_e(\omega, \mathbf{k})$  и  $\delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k})$  (см. работы [12, 13]).

Для электронного вклада в низкочастотную диэлектрическую проницаемость плазмы в области  $\omega v_{ei} \gg k^2 v_{T_e}^2$ , когда теплопроводностью и диффузией можно пренебречь, имеем

$$\delta\epsilon_e(\omega, \mathbf{k}) = i 1,96 \frac{\omega_L^2 e}{\omega v_{ei}}. \quad (2.2)$$

Здесь  $v_{ei} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{m}} \frac{e^2 e_i^2 L N_i}{T_e^{3/2}}$ . В противоположном пределе, когда  $\omega v_{ei} \ll k^2 v_{T_e}^2$ , для  $\delta\epsilon_e(\omega, \mathbf{k})$  справедливо выражение

$$\delta\epsilon_e(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left( 1 + i 1,44 \frac{\omega v_{ei}}{k^2 v_{T_e}^2} \right). \quad (2.3)$$

Что касается ионного вклада в диэлектрическую проницаемость плазмы, то ниже рассматривается кинетическая область частот для ионов, когда либо частота колебаний больше частоты ион-ионных столкновений, либо длина волн меньше длины свободного пробега ионов. При этом в условиях, когда  $k v_{T_i} \gg v_{ii}$ ,  $\omega$ ,

$$\delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 r_{Di}^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{T_i}} \right). \quad (2.4)$$

Если же  $\omega \gg v_{ii} (k^2 v_{T_i}^2 / \omega^2)$ ,  $k v_{T_i}$ , то

$$\delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{\omega_L^2}{\omega^2} \left[ 1 - i \frac{8}{5} \frac{v_{ii} k^2 v_{T_i}^2}{\omega^3} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^3}{k^3 v_{T_i}^3} \times \right. \\ \left. \times \exp \left( -\frac{\omega^2}{2 k^2 v_{T_i}^2} \right) \right], \quad (2.5)$$

где  $v_{ii} = (4/3) \sqrt{\pi/m} (e_i^4 L N_i / T_i^{3/2})$ .

\* Так как ниже показано, что оптимальная расстройка  $\Delta \sim v_{ei}$ , здесь мы пренебрегли членом  $\sim v_{ei} (\omega/v_{ei})$ .

1) Анализ спектров колебаний плазмы в СВЧ поле начнем с области самых низких частот, когда для  $\delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k})$  справедливо выражение (2.4), а для  $\delta\epsilon_e(\omega, \mathbf{k})$  — (2.3). Из уравнения (2.1) при условии  $k r_{D_e} \ll 1$  получаем спектр апериодических колебаний плазмы

$$\omega = -i \frac{1 + (T_i/T_e) + K^2 [\Delta\omega_0/(\Delta^2 + v_{ei}^2/4)]}{1.44 (v_{ei}/k^2 v_{T_e}^2) + \sqrt{\pi/2} (T_i/T_e) (1/k v_{T_i}) + (1 + T_i/T_e) [v_{ei}/(\Delta^2 + v_{ei}^2/4)]}, \quad (2.6)$$

что справедливо при  $\Delta < 0$ , т. е. в области непрозрачности плазмы. Согласно этому выражению, пороговое значение напряженности СВЧ поля, при превышении которого в плазме развивается апериодическая неустойчивость, определяется соотношением

$$K_{\text{pop}}^2 = (K_{\text{pop}}^2)^{(0)} \frac{\Delta^2 + v_{ei}^2/4}{|\Delta| v_{ei}}, \quad (2.7)$$

где  $(K_{\text{pop}}^2)^{(0)} = (v_{ei}/\omega_0) (1 + T_i/T_e)$  получено в работах [8, 10]. Очевидно, что величина расстройки, при которой значение  $K_{\text{pop}}^2$  минимально, равно  $|\Delta|_{\min} = v_{ei}/2$ , и  $K_{\text{pop}}^2 \geq (K_{\text{pop}}^2)^{(0)}$ . При этом максимальный инкремент развития неустойчивости достигается для наиболее коротковолновых колебаний, когда  $k v_{T_e} \rightarrow v_{ei}$ , и равен

$$\gamma_{\max} \sim v_{ei} \left( \frac{K^2}{K_{\text{pop}}^2} - 1 \right) \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{m}{M} \frac{T_i}{T_e}}.$$

Из условий  $v_{ei} \gg k v_{T_e}$  и  $v_u \ll k v_{T_i}$  следует, что в столкновительной плазме применимость выражения (2.4), а следовательно, и формул (2.6) и (2.7) связана с требованием  $T_i^2/T_e^2 \gg 1$ . При еще больших значениях этого отношения, когда  $T_i^2/T_e^2 \gg (M/m)^2$ , в плазме, помещенной в СВЧ поле, возможно развитие еще одной ветви апериодической неустойчивости, спектр которой находится из уравнения (2.1) при подстановке в него выражений (2.4) и (2.2):

$$\omega = -i \frac{1 + (T_e/T_i) K^2 [\Delta\omega_0/(\Delta^2 + v_{ei}^2/4)]}{\sqrt{\pi/2} (1/k v_{T_i}) + [v_{ei}/(\Delta^2 + v_{ei}^2/4)]}. \quad (2.8)$$

Пороговая напряженность СВЧ поля здесь также определяется соотношением (2.7) (с учетом неравенства  $T_i \gg T_e$ ), а поэтому  $|\Delta|_{\min} = v_{ei}/2$ . Отличается лишь выражение для максимального инкремента развития неустойчивости  $\gamma_{\max} \sim (2/\pi) v_{ei} (m/M) (T_e/T_i) (K^2/K_{\text{pop}}^2 - 1)^2$ , который достигается при большей надпороговости.

2) Перейдем теперь к рассмотрению более высокочастотных колебаний плазмы в СВЧ поле, когда выполнены неравенства  $\omega \gg k v_{T_i}$ ,  $v_{ii} (k^2 v_{T_i}^2)/\omega^2$  и для  $\delta\epsilon_i(\omega, \mathbf{k})$  справедливо выражение (2.5). Оговорим сразу же, что в полностью ионизованной столкновительной плазме, в отличие от разреженной, бесстолкновительной, невозможны ионно-звуковые колебания со спектром  $\omega = \omega_s = k v_s$ , где  $v_s = \sqrt{T_e/M}$  — скорость звука. Это следует из противоречивости неравенств  $T_e/T_i \gg 1$ ,  $v_{ei} \gg k v_{T_e}$  и  $\omega_s \gg v_u (T_i/T_e)$ , которые приводят к требованию  $\omega \gg \omega_s$ . Данное обстоятельство существенно облегчает анализ спектров колебаний плазмы в условиях как малой, так и большой электронной тепло-

проводности. В обоих предельных случаях черенковским поглощением волн на ионах можно пренебречь\* по сравнению с диссипацией, обусловленной ион-ионными соударениями, и записать спектр колебаний плазмы единой формулой

$$\begin{aligned} \omega^2 &= K^2 \frac{\omega_0 \Delta}{\Delta^2 + v_{ei}^2/4} \omega_s^2, \\ \gamma &= -\frac{1}{2} \left( \xi \frac{m}{M} v_{ei} + \frac{8}{5} v_{ii} \frac{k^2 v_{T_i}^2}{\omega^2} - v_{ei} \frac{\omega^2}{\Delta^2 + v_{ei}^2/4} \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $\xi$  равно 0,51; 1,44 соответственно при  $\omega v_{ei} \gg k^2 v_{T_e}^2$  и  $\omega v_{ei} \ll k^2 v_{T_e}^2$ . Дальнейшая задача состоит в анализе выражений (2.9) и определений пороговых значений напряженностей СВЧ поля, при которых возможно развитие рассматриваемых высокочастотных неустойчивостей.

Прежде всего заметим, что, согласно требованию  $\omega \gg \omega_s$ , колебания со спектром (2.9) возможны лишь при достаточно больших напряженностях СВЧ поля, в несколько раз превосходящих пороговую напряженность (2.7) для развития низкочастотной апериодической неустойчивости. При этом, если  $\Delta < 0$ , т. е. по отношению к СВЧ полю плазма непрозрачна, то  $\omega^2 < 0$  и спектр (2.9) описывает апериодически нарастающие колебания, причем независимо от длины волны возбуждаемых колебаний порог неустойчивости определяется выражением (2.7). Поэтому для низкочастотных апериодических неустойчивостей также  $|\Delta|_{\min} = v_{ei}/2$ , а  $K_{\text{пор}}^2 > (K_{\text{пор}}^2)^{(0)}$ . Отличие, однако, состоит в том, что для развития такой неустойчивости необходимо значительное превышение порогового значения (2.7) (по крайней мере, в 2–3 раза). В действительности, очевидно, имеет место плавный переход от формул (2.6) и (2.8) к формулам (2.9). Плавно должен меняться также и порог для развития рассмотренных выше апериодических неустойчивостей при  $\Delta < 0$  в противоположных пределах. Выше мы не смогли проследить за этим переходом из-за отсутствия простой аналитической формулы для  $\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})$  в промежуточной области частот. Из проведенного анализа, однако, следует весьма важный вывод о том, что с ростом отношения  $T_e/T_i$  порог развития апериодических неустойчивостей растет: при  $T_e/T_i < 1$  порог определяется соотношением (2.7), в то время как при  $T_e/T_i > 1$  он в несколько раз выше.

Пороговое значение напряженности СВЧ поля для развития периодических неустойчивостей находится из условия  $\gamma = 0$ . Вводя обозначение

$$x = \frac{\omega^2}{k^2(v_{T_i}^2 + v_s^2)} = K^2 \frac{\omega_0 \Delta}{\Delta^2 + v_{ei}^2/4} \left( \frac{T_e}{T_e + T_i} \right),$$

для величины  $x \gg 1$  при этом получаем уравнение

$$x^2 - Ax - B = 0, \quad (2.10)$$

где

$$A = \xi \frac{T_e}{T_e + T_i} \frac{\Delta^2 + v_{ei}^2/4}{k^2 v_{T_e}^2}, \quad B = \frac{8}{5} \frac{v_{ii}}{v_{ei}} \frac{M}{m} \frac{T_i}{T_e + T_i} \frac{A}{\xi}$$

\* Заметим, однако, что это сказывается на условиях применимости некоторых полученных ниже формул.

—минимальное значение величины  $x$  и определяет пороговую напряженность СВЧ поля. Оно должно быть значительно больше единицы. А это означает, что пороговое поле всегда больше для развития периодических неустойчивостей, чем для возбуждения апериодических. Поэтому кинетические неустойчивости не представляли бы особого интереса, если бы не одно обстоятельство. Именно, все рассмотренные выше апериодические неустойчивости развиваются лишь при  $\Delta = \omega_0 - \omega_{L_e} < 0$ , т. е. в области непрозрачности плазмы, в то время как периодические неустойчивости могут развиваться при  $\Delta > 0$ , когда плазма прозрачна для СВЧ излучения.

Из уравнения (2.10) находим

$$K_{\text{пор}}^2 = (K_{\text{пор}}^2)^{(0)} \frac{\Delta^2 + v_{ei}^2/4}{\Delta v_{ei}} \left( \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + B} \right). \quad (2.11)$$

Отсюда видно, что с ростом  $k$  при заданной расстройке  $\Delta$  порог неустойчивости падает. С другой стороны, с изменением  $\Delta$  величина  $K_{\text{пор}}^2$  имеет минимум при некотором  $\Delta = \Delta_{\min}$ . Исходя из выражения (2.11), ниже проводится анализ минимального порогового поля для развития периодической неустойчивости в двух противоположных предельных случаях.

а) В условиях, когда поглощение волн в плазме обусловлено столкновениями электронов с ионами (т. е.  $A^2 \gg B$ ), минимальное значение пороговой напряженности поля в зависимости от расстройки  $\Delta$  определяется выражением

$$(K_{\text{пор}}^2)_{\min} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \xi \frac{v_{ei}}{\omega_0} \frac{v_{ei}^2}{k^2 v_{T_e}^2} \quad (2.12)$$

и достигается при  $\Delta_{\min} = v_{ei}/2\sqrt{3}$ ; частота возбуждаемых колебаний при этом равна  $\omega_{\text{пор}} = v_{ei} \sqrt{(\xi/3)(m/M)}$ . С ростом волнового числа  $k$ , как уже отмечалось выше, порог неустойчивости падает. Анализ показывает, однако, что  $k$  не может быть сколь угодно большим и ограничен условиями применимости рассматриваемого нами приближения. оказывается, что такие колебания практически возможны лишь при условии\*  $\omega v_{ei} \gg k^2 v_{T_e}^2$ , причем максимальное значение  $k$  определяется соотношением  $k_{\max}^2 v_{T_e}^2 = v_{ei}^2 0,07 [(m/M)(T_i/T_e)]^{1/2}$ .

б) Если же поглощение волн в плазме определяется ион-ионными столкновениями ( $A^2 \ll B$ ), то

$$(K_{\text{пор}}^2)_{\min} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{6}{5} \frac{M}{m}} \frac{\sqrt{\omega_{ei} \omega_{ii}}}{\omega_0} \frac{v_{ei}}{kv_{T_e}}, \quad (2.13)$$

причем  $\Delta_{\min} = v_{ei}/2\sqrt{2}$ ; частота возбуждаемых при этом колебаний равна  $\omega_{\text{пор}}^2 = \omega_s \sqrt{(3/5)(T_i/T_e)} \omega_{ii} v_{ei}$ . Анализ показывает, что в области частот  $\omega v_{ei} \ll k^2 v_{T_e}^2$  максимальная величина волнового числа  $k$  может достигать своего предельного значения  $k_{\max} \rightarrow v_{ei}/v_{T_e}$ , если в плазме выполнено условие  $T_e/T_i > 2(m/M)^{1/5} [\ln(M/m)]^{4/5}$ . В области же  $\omega v_{ei} \gg k^2 v_{T_e}^2$  максимальное значение  $k$  определяется соотноше-

\* В обратном предельном случае колебания возможны в очень узкой области при  $T_i/T_e \gg 1$ , причем порог развития неустойчивости существенно выше, чем определяемый формулой (2.7).

нием  $k_{\max}^2 v_{T_e}^2 = v_{ei}^2 (3/5 \sqrt{2})^{1/3} [(m/M)(T_e^{1/3}/T_i^{1/3})]^{1/2}$  и достигается лишь в плазме, в которой  $T_e/T_i \leq (M/m)^{1/3}$ .

Проведенный выше анализ устойчивости плазмы, помещенной в относительно слабое СВЧ поле, показал, что в гидродинамической области колебаний, так же как и в кинетической, рассмотренной в работах [9, 10], возможны как апериодические, так и периодические неустойчивости. При этом апериодические неустойчивости могут развиваться лишь при  $\Delta = \omega_0 - \omega_{L_e} < 0$ , т. е. в области непрозрачности плазмы, в то время как периодические неустойчивости развиваются при  $\Delta > 0$ , когда плазма прозрачна для СВЧ излучения. Пороговое значение напряженности СВЧ поля для возбуждения апериодических неустойчивостей определяется формулой (2.7), и его минимальное значение, достигающееся при  $T_e/T_i < 1$ , совпадает с полученным в работе [8]:  $K_{\text{пор}}^2 \geq (K_{\text{пор}}^2)^{(0)} = = (\omega_{ei}/\omega_0) (1 + T_i/T_e)$ ; с ростом отношения  $T_e/T_i$  его величина растет. Для возбуждения периодических неустойчивостей в гидродинамической области колебаний необходимы большие поля, по крайней мере, в 2—3 раза превосходящие порог возбуждения апериодических неустойчивостей. В этом, собственно, и состоит существенное отличие колебаний в гидродинамической области от кинетической, где в случае сильной неизотермичности плазмы  $T_e \gg T_i$ , как показано в работе [10], для развития периодических неустойчивостей типа ионного звука необходимы поля, значительно меньшие, чем для развития апериодических неустойчивостей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, ЖЭТФ, 48, 901 (1965).
2. В. П. Силин, ЖЭТФ, 48, 1679 (1965).
3. Л. М. Горбунов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 49, 1973 (1965).
4. E. A. Jackson, Phys. Rev., 153, 235 (1967).
5. Yu. M. Aliev, L. M. Gorbunov, V. P. Silin, IAEA, v. I, Vienna, 1968, p. 659.
6. V. P. Silin, IAEA, v. I, Vienna, 1968, p. 203.
7. D. F. Dubois, M. V. Goldmann, Phys. Rev., 164, 207 (1967).
8. K. Nishikawa, J. Phys. Soc. Japan, 24, 916, 1152 (1968).
9. В. П. Силин, Письма в ЖЭТФ, 7, 242 (1968).
10. Н. Е. Андреев, А. Ю. Кирий, В. П. Силин, ЖЭТФ, 57, 1024 (1969).
11. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ, 7, 206 (1937).
12. Л. С. Богданевич, Б. Милич, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ, 37, 1936 (1967).
13. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН, 96, 87 (1968).

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
4 октября 1969 г.

#### TO THE THEORY OF PARAMETRIC EXCITATION OF ELECTROSTATIC WAVES IN A FULLY IONIZED PLASMA

D. Zyunder, A. A. Rukhadze

The authors investigate the parametric excitation of low-frequency and long wave electrostatic oscillations in a fully ionized plasma placed in a weak uniform UHF field the frequency of which is close to the plasma frequency. The threshold values of the external field intensity corresponding to pumping of different modes are determined. Expressions are derived for the oscillation frequencies and increments near the thresholds.

УДК 533.922

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ КВАЗИЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ ИСТОЧНИКОВ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Ю. В. Чугунов

В рамках учета теплового движения заряженных частиц среды рассматриваются особенности, содержащиеся в решении уравнения (2), для квазиэлектростатического поля источников в магнитоактивной плазме. Определена область параметров, в которой пространственная дисперсия несущественна. Для модели цилиндрического зонда подсчитаны дробовые потери, связанные с бесстолкновительным затуханием квазиэлектростатического поля, и показано, что в ряде случаев эти потери вносят основной вклад в величину действительной части импеданса на частотах, где плазменный резонанс отсутствует.

Как известно (см., например, [1]), квазиэлектростатическое поле заданного распределения заряда  $\rho(t, x_z) = \rho(x_z) e^{-i\omega t}$  в магнитоактивной плазме можно описать с помощью уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_z} \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial \varphi(x_\beta)}{\partial x_\alpha} = -4\pi\rho(x_z), \quad (1)$$

где  $\varphi(x_z)$  — квазиэлектростатический потенциал электрического поля  $E$  ( $E = -\nabla\varphi$ ),  $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$  — оператор диэлектрической проницаемости.

Когда пространственная дисперсия отсутствует и среда однородна, уравнение (1) упрощается и имеет вид (ось  $z$  направлена вдоль внешнего магнитного поля  $H_0$ )

$$\varepsilon_1(\omega) \left( \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_3(\omega) \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial z^2} = -4\pi\rho(r). \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет решения без особенностей в области частот, где  $\varepsilon_1(\omega)\varepsilon_3(\omega) > 0$  (уравнение (2) эллиптического типа). В области частот, где  $\varepsilon_1(\omega)\varepsilon_3(\omega) < 0$  (уравнение (2) гиперболического типа), поле точечного источника расходится на характеристиках  $|\varepsilon_1/\varepsilon_3|z^2 = x^2 + y^2$ . Если взять источник конечных размеров, то указанная особенность поля исчезает [2, 3], однако уже в квазистатике появляется большая действительная часть в импедансе, которая обратно пропорциональна размерам источника. Как показано ниже, учет пространственной дисперсии также устраняет расходимость поля на характеристике, причем становится ясным механизм диссиляции, — это потери на излучение продольных колебаний заряженных частиц среды. Учет пространственной дисперсии, как и введение источника конечных размеров, — это появление у поля некоторого характерного масштаба его изменения с расстоянием. Постановка задачи с «размазанным» источником бывает часто намного проще, чем учет дисперсии. Поэтому желательно знать, когда постановка задачи без учета теплового движения частиц среды справедлива.

Решение уравнения (2) имеет также особенности для полей на границах перехода от эллиптичности к гиперболичности, т. е. в областях,

где:

- а)  $\epsilon_3(\omega) = 0$ , квазидвумерная конфигурация поля;
- б)  $\epsilon_1(\omega) = 0$ , квазиодномерная конфигурация поля;
- в)  $|\epsilon_1(\omega)| \rightarrow \infty$ , электронный и ионный гирорезонансы.

Указанные особенности не всегда снимаются конечными размерами источника, поэтому здесь существен учет пространственной дисперсии. Настоящая работа ставит своей целью анализ всех перечисленных особенностей полей точечных источников в рамках учета теплового движения заряженных частиц плазмы и, где это возможно, применение этих результатов для конкретных моделей источников (зондов) конечных размеров.

При вычислении полей в работе пренебрегается влиянием соударений частиц на диэлектрическую проницаемость и предполагается, что плазма вокруг источника однородна и частицы не взаимодействуют с поверхностью зонда.

## 1. О СТРУКТУРЕ ПОЛЯ В ОКРЕСТНОСТЯХ ХАРАКТЕРИСТИКИ УРАВНЕНИЯ (2)

Применяя к уравнению (1) преобразование Фурье, найдем потенциал  $\varphi(r)$  точечного заряда  $\rho(r) = Q\delta(r)$ :

$$\varphi(r) = \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty J_0(k_\perp \rho) k_\perp dk_\perp \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(ik_z z) dk_z}{k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k) k_\beta}, \quad (3)$$

где  $J_0(k_\perp \rho)$  — функция Бесселя,  $r^2 = \rho^2 + z^2$ , тензор  $k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta}(\omega, k) k_\beta$  равен [5]

$$k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} k_\beta = \frac{1}{D^2} + k_\perp^2 + k_z^2 - \frac{e^{-\beta}}{D^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z_0}{z_n} I_n(\beta) [\varphi(z_n) - i\sqrt{\pi} z_n \exp(-z_n^2)], \quad (4)$$

$D^2 = v_T^2/\omega_0^2$  — дебаевский радиус,  $\beta = k_\perp^2 \rho_H^2$ ,  $\rho_H = v_T/\omega_H$  — гирорадиус электрона,  $z_n = (\omega - n\omega_H)/k_z v_T$ ,  $v_T$  — тепловая скорость,  $\omega_0$  и  $\omega_H$  — плазменная и циклотронная частоты электрона,  $\varphi(z_n) = 2z_n \exp(-z_n^2) \int_0^{z_n} \exp(t^2) dt$ .

Если воспользоваться приближением слабой пространственной дисперсии ( $\beta \ll 1$ ,  $|z_n| \gg 1$ ), что возможно, если размеры излучающей системы много больше характерных параметров пространственной дисперсии  $D$ ,  $\rho_H$  и  $\delta = v_T/\omega$ , то тензор  $k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} k_\beta$  можно записать в виде

$$k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} k_\beta = c\delta^2 k_\perp^4 + b\delta^2 k_\perp^2 k_z^2 + d\delta^2 k_z^4 - \epsilon_1 k_\perp^2 - \epsilon_3 k_z^2, \quad (4a)$$

где

$$c = 3 \frac{\omega_0^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_H^2)(\omega^2 - 4\omega_H^2)}, \quad b = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \left[ 1 - \frac{\omega^2(5\omega^2 - \omega_H^2)}{(\omega^2 - \omega_H^2)} \right],$$

$$d = 3 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

С помощью (4 а), в результате интегрирования по  $k_z$ , потенциал поля определяется следующим образом:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{V \epsilon_1 \epsilon_3} \int_0^\infty J_0(k_\perp \rho) \exp \left[ -\tilde{\mu} k_\perp z \left( 1 + \frac{1}{2} \gamma_0 \delta^2 k_\perp^2 \right) \right] dk_\perp. \quad (5)$$

Здесь

$$\tilde{\mu} = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3}, \quad \gamma_0 = \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} b - \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_3^2} d - c \right) \frac{1}{\varepsilon_1}.$$

Так как  $\delta^2 k_\perp^2 \ll 1$ , то, если  $\varepsilon_1 \varepsilon_3 > 0$ ,  $\tilde{\mu} > 0$ , пространственная дисперсия несущественна и  $\varphi(r)$  определяется по «холодным» формулам. Когда  $\varepsilon_1 \varepsilon_3 < 0$ ,  $\mu = \pm i \tilde{\mu}$  ( $\mu = |\varepsilon_1/\varepsilon_3|^{1/2}$ ), т. е. возможен плазменный резонанс, под интегралом стоят две осциллирующие функции и вблизи характеристики  $\mu^2 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$  ( $r = r \cos \theta$ ,  $\rho = r \sin \theta$ ) малая поправка в экспоненте играет определяющую роль, обеспечивая сходимость интеграла. Вблизи характеристики на расстояниях  $r \gg \delta$ , на которых справедливо приближение слабой дисперсии, интеграл можно вычислить с помощью метода перевала. Рассмотрим, например, случай, когда  $\varepsilon_1 < 0$ ,  $\varepsilon_3 > 0$ . Здесь при  $\sin \theta - \mu \cos \theta > 0$  перевальная точка лежит на действительной оси переменной интегрирования  $k_\perp$ , а при  $\sin \theta - \mu \cos \theta < 0$  — на мнимой оси (в перевальной точке  $k_\perp^n = (1/\delta) [2(\sin \theta - \mu \cos \theta)/3\mu \gamma_0 \cos \theta]^{1/2}$ ). Для  $\varphi(r)$  в результате интегрирования получаем ( $|\sin \theta - \mu \cos \theta| \ll 1$ )

$$\varphi(r) = - \frac{Qi \exp \{i(r/\delta) \sqrt{[(2/3)(\sin \theta - \mu \cos \theta)]^3 / \mu \gamma_0 \cos \theta}\}}{r \sqrt{2 |\varepsilon_1 \varepsilon_3| \sin \theta (\sin \theta - \mu \cos \theta)}}. \quad (6)$$

Из выражения (6) для  $\varphi(r)$  видно, что при  $\sin \theta - \mu \cos \theta > 0$  вблизи характеристики появляется сферическая волна, бегущая от источника. С другой стороны характеристики  $\sin \theta - \mu \cos \theta < 0$  по мере удаления от источника наблюдается экспоненциально затухающее поле. На самой характеристике  $\sin \theta = \mu \cos \theta$  (точнее,  $\sqrt{|\sin \theta - \mu \cos \theta|} r/\delta \ll 1$ ) формула (6) для поля несправедлива, и необходимо дальнейшее разложение по параметру  $|\sin \theta - \mu \cos \theta| r^2/\delta^2$ . Например, на характеристике поле ведет себя следующим образом:

$$\varphi(r) = - \frac{Q\pi i A_i(0)}{\sqrt{|\varepsilon_1 \varepsilon_3|}} \left( \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{\delta^2 \mu \gamma_0 r} \right)^{1/3}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что вдоль указанного направления потенциал убывает медленнее, чем обычное электростатическое поле в вакууме.

По мере удаления от характеристики, когда  $|\sin \theta - \mu \cos \theta| \sim 1$ , как легко видеть из (5), пространственная дисперсия несущественна, и потенциал описывается «холодными» выражениями [3]. Появление продольной волны (6), которая уносит энергию от источника в направлении характеристики уравнения (2), объясняет наличие потерь энергии в квазиэлектростатическом поле источника в прозрачной среде [2, 3]. Энергия стороннего поля перекачивается здесь в энергию плазменных колебаний.

Сравним далее характер убывания поля вдоль резонансного направления от источника конечных размеров [3] и характер изменения поля с расстоянием, определяемый формулой (7). Сравнение показывает, что поле от источника конечных размеров убывает быстрее, чем поле, определяемое выражением (7), при выполнении условия  $L \gg \delta(\delta/r)^{1/3}$ ,  $L$  — размер излучающей системы. Следовательно, при достаточно больших размерах источника  $L \gg \delta$  «холодная» постановка задачи оправдана, и размер излучающей системы определяет в указанном случае характерный масштаб неоднородности поля.

## 2. ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОЛЯ НА ГРАНИЦАХ ПЕРЕХОДА ОТ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ К ГИPERБОЛИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ КВАЗИСТАТИКИ

$\epsilon_3(\omega) = 0$ , плазменный резонанс  $\omega = \omega_0$  (квазидвумерная конфигурация поля). В данном примере характеристики уравнения (2) сливаются попарно в плоскости  $z = 0$ , создавая особые направления, вследствие чего поле источника конечных размеров в «холодной» постановке задачи имеет особенность (обычно в виде слабой расходимости логарифмического типа) [3].

Если учесть тепловое движение частиц среды, то анализ интеграла (3) дает следующий результат. Если точка наблюдения находится достаточно далеко от плоскости  $z = 0$ , где лежат характеристики уравнения (2),  $V|\epsilon_1|/d z^2/8\rho \geq 1$ , то поле описывается формулами без пространственной дисперсии [3]. При  $V|\epsilon_1|/d z^2/8\rho \ll 1$ , т. е. вдоль плоскости особых направлений, потенциал  $\varphi(r)$  равен

$$\varphi(r) = \frac{Q\Gamma(1/4)}{2\Gamma(3/4)(d|\epsilon_1|^3)^{1/4}} \frac{1}{(8\rho)^{1/2}} \quad (\epsilon_1 > 0); \quad (8)$$

$$\varphi(r) = \frac{Q(1-i)\Gamma(1/4)}{2\Gamma(3/4)(d|\epsilon_1|^3)^{1/4}} \frac{1}{(2\rho)^{1/2}} \quad (\epsilon_1 < 0), \quad (9)$$

где  $\Gamma(v)$  — гамма-функция.

Таким образом, в указанном случае пространственная дисперсия существенна лишь только по особым направлениям в плоскости  $z = 0$ , где поле спадает медленнее, чем обычное электростатическое поле заряда в вакууме. Это обусловливает и слабый характер расходимости (логарифмическая расходимость) поля протяженного источника в этом примере в «холодной» постановке задачи за исключением случая, когда сторонний ток ориентирован под углом  $\alpha = \pi/2$  к направлению внешнего магнитного поля\*. Поэтому, когда размер источника (цилиндрический проводник длиной  $2L$ )  $L \cos \alpha \gg \delta, \rho_H$ , параметры пространственной дисперсии вблизи плазменной частоты войдут лишь под знак логарифма в выражении для потенциала, и, следовательно, величина входного сопротивления будет не чувствительна к изменениям этих параметров.

$\epsilon_1(\omega) = 0$ , квазидвумерная структура поля,  $\omega = (\omega_H^2 + \omega_0^2)^{1/2}$ . Решение уравнения (9) как для точечного, так и для источника конечных размеров расходится как  $1/|\epsilon_1(\omega)|^{1/2}$  при  $|\epsilon_1(\omega)| \rightarrow 0$ . Это связано с тем обстоятельством, что все характеристики уравнения (2) при  $\epsilon_1(\omega) \rightarrow 0$  сливаются в одно особое направление  $\rho = 0$ , что приводит к расходимости поля во всем пространстве.

С учетом теплового движения частиц плазмы для потенциала  $\varphi(r)$  из формулы (3) легко найти следующее интегральное представление:

$$\varphi(r) = -\frac{Qi}{\delta V c \epsilon_3} \int_0^\infty \frac{1}{k_\perp} J_0(k_\perp \rho) \exp(-i\sqrt{c/\epsilon_3} \delta z k_\perp^2) dk_\perp. \quad (10)$$

Из (10) видно, что интеграл расходится при малых  $k_\perp$ . Если же подсчитать по (10) выражение для электрического поля  $E = -\nabla\varphi$ , то оно оказывается конечным. Это означает, что «монопольное» приближение

\* Для цилиндрического зонда, ориентированного перпендикулярно  $H_0$ , характерный масштаб неоднородности поля при  $\epsilon_3 \rightarrow 0$  определяется определенным размером, т. е. радиусом цилиндра  $a$  [3]. Если считать, что  $a \gg \delta, \rho_H$ , то указанная логарифмическая расходимость будет иметь место и в этом случае.

некорректно, и в качестве элементарного излучателя в данном случае необходимо выбирать диполь. В дипольном поле происходит компенсация бесконечно большой части потенциала, и оно оказывается годным для описания простейших моделей излучающих систем.

Выпишем выражения для электрического поля, которые легко получить, дифференцируя (10) по параметрам  $z$  и  $\rho$ :

$$E_z = -\frac{Qi}{2\sqrt{c\varepsilon_3}\delta z} \exp\left(-i\frac{\rho^2}{4\sqrt{c/\varepsilon_3}\delta z}\right); \quad (11)$$

$$E_\rho = \frac{Qi}{\sqrt{c\varepsilon_3}\delta\rho} \left[ \exp\left(-i\frac{\rho^2}{4\sqrt{c/\varepsilon_3}\delta z}\right) - 1 \right]. \quad (12)$$

Отметим, что приведенные выражения справедливы на расстояниях  $r \gg \delta$  от источника. На высоких частотах  $\varepsilon_3 > 0$ , а параметр  $c = 3(\omega_0^2 + \omega_H^2)/(\omega_0^2 - 3\omega_H^2)$ . Следовательно, если частота  $\omega > 2\omega_H$ , поле  $E(r)$  заряда носит осциллирующий характер; если же  $\omega < 2\omega_H$ , поле  $E_z$  экспоненциально мало для  $r \gg \delta$ , а  $E_\rho$  определяется выражением

$$E_\rho = -\frac{Q}{\sqrt{|c\varepsilon_3|}\delta\rho}.$$

В области низких частот  $\omega \ll \omega_H$ ,  $\omega^2 = \omega_H \Omega_H$  ( $\Omega_H$  — гирочастота ионов) для полей  $E_z$  и  $E_\rho$  справедливы соотношения:

$$E_z = -\frac{Q\omega_H^2}{\sqrt{3}\omega_0^2\delta z} \exp\left(-\frac{\rho^2 M}{2\sqrt{3}m\delta z}\right); \quad (13)$$

$$E_\rho = \frac{2Q\omega_H^2}{\sqrt{3}\omega_0^2\delta\rho} \left[ \exp\left(-\frac{\rho^2 M}{2\sqrt{3}m\delta z}\right) - 1 \right], \quad (14)$$

где  $m$  и  $M$  — массы электрона и иона соответственно.

Поле  $E_z$  при  $\delta \rightarrow 0$  в основном сосредоточено вдоль линии  $\rho = 0$ . Вблизи этого направления  $E_\rho = Q\rho/4c\delta^2 z$  не зависит от  $r$ , а является лишь функцией угла  $\vartheta$  между  $H_0$  и направлением на точку наблюдения. Поперечная составляющая электрического поля заряда  $E_\rho$  в качественном отношении аналогична функции Грина точечного диполя в изотропной плазме, если частота равна плазменной [4]. Тот факт, что все характеристики уравнения (2) сливаются в одну прямую  $\rho = 0$ , обеспечивает как бы «фокусировку» поля около этого направления, поэтому электрическое поле вблизи  $\rho = 0$  убывает медленнее, чем поле в вакууме.

Квазидномерный характер квазиэлектростатического поля позволяет вычислить входное сопротивление для некоторых моделей антенного зонда. Как легко видеть, функция Грина уравнения (2) при  $\varepsilon_1 = 0$  равна

$$E_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2\pi}{\varepsilon_3} \operatorname{sgn}(z - z') \delta(x - x') \delta(y - y'). \quad (15)$$

Такое же выражение для поля в дипольном приближении получается и с учетом слабой пространственной дисперсии, если в формуле (11) параметр  $\delta \rightarrow 0$ .

В качестве примера с помощью функции Грина (15) вычислим входное сопротивление цилиндрического диполя длиной  $2L$  и радиусом  $a$ , ориентированного вдоль внешнего магнитного поля  $H_0$ . Для компоненты поля  $E_z$  в плазме при этом получаем

$$E_z = \frac{2\pi}{\epsilon_3} \int_{-L}^L \rho(x, y, z') \operatorname{sgn}(z - z') dz'. \quad (16)$$

Так как это равенство справедливо при любых  $x, y$ , а на поверхности проводника, там, где нет сторонней ЭДС,  $E_z = 0$ , то весь заряд сосредоточен на торцах, т. е.  $\rho \sim \delta(z \pm z_0)$ ,  $\delta(z \pm L)$ , где  $2z_0$  — расстояние между усами диполя. Если также считать, что ток на концах диполя  $I(\pm L) = 0$ , то из уравнения (16) сразу следует, что все поле сосредоточено в зазоре антенны.

При условии  $a \gg \delta$ ,  $z_0 \gg \delta$  и выполнении неравенства  $a^2/\delta z_0 \ll 1$  электрическое поле в зазоре будет иметь только  $E_z$ -составляющую, так как при этом поперечная составляющая поля  $E_\rho$ , как видно из формулы (12), равна нулю. Поэтому, если в зазоре задано однородное распределение сторонней ЭДС, то  $E_z$  там однородно, и для входного сопротивления получаем

$$Z = -i \frac{8z_0}{\omega \epsilon_3 a^2}, \quad (17)$$

что соответствует емкости плоского конденсатора с расстоянием  $2z_0$  между пластинами. Если  $a \ll \delta$ , то компонента поля  $E_z$  отлична от нуля на расстоянии порядка  $\delta$ , а поперечная компонента в зазоре мала, если  $z_0 \gg \delta$ . Тогда

$$Z \simeq i \frac{8z_0}{\omega \epsilon_3 \delta^2}. \quad (18)$$

В рассмотренном приближении  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\operatorname{Re} Z = 0$ , т. е. плазменная волна не возбуждается. В случае, когда диполь ориентирован под некоторым углом  $\alpha \neq 0$  к направлению  $H_0$ , поле имеет более сложную структуру и необходимо специальное рассмотрение. Из вышесказанного ясно, что в ряде случаев, даже когда происходит вырождение уравнения (2), «холодная» постановка задачи дает правильный результат и учет пространственной дисперсии не всегда является необходимым.

в)  $|\epsilon_1(\omega)| \rightarrow \infty$ , гирорезонанс  $\omega = \omega_H$ . Решение уравнения (2) на этой частоте как для точечного заряда, так и для источника конечных размеров убывает ( $\varphi(r) \rightarrow 0$ ) как  $1/\sqrt{|\epsilon_1|}$  при  $|\epsilon_1(\omega)| \rightarrow \infty$ . На указанных частотах в тензоре  $k_{\alpha\beta}k_\beta$  (см. (4)) определяющую роль будет играть член  $e^{-\beta} I_1(\beta) i \sqrt{\pi} z_0/D^2$ , связанный с бесстолкновительным затуханием плазменного поля (затуханием Ландау). Пространственная дисперсия здесь также считается слабой:

$$k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} k_\beta = \tilde{\epsilon}_1 k_\perp^2 + \epsilon_3 k_z^2 + \frac{i \sqrt{\pi} \omega_0^2 \operatorname{sgn} k_z}{2\omega_H k_z \rho_H}, \quad (19)$$

где  $\tilde{\epsilon}_1 = 1 + (3/4) \omega_0^2/\omega_H^2$ .

Из (3) легко видеть, что потенциал  $\varphi(r)$  в этом случае определяется уравнением

$$\varphi(r) = -\gamma Q \int_0^\infty H_0^{(1)} \left[ \frac{i - 1}{\sqrt{2}} (\gamma \epsilon_3)^{1/2} k_z^{3/2} \rho \right] \cos(k_z z) k_z dk_z. \quad (20)$$

Здесь  $\epsilon_3 > 0$ ,  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля 1-го рода,  $\gamma = \sqrt{8/\pi} \omega_H^2 \rho_H / \omega_0^2$ . Если  $\epsilon_3 < 0$ , то под интегралом в (17) стоит  $H_0^{(1)}$  аргумента

$[(1+i)/\sqrt{2}] (\gamma |\epsilon_3|)^{1/2} k_z^{3/2} \rho$ . Интеграл при больших  $r \gg \rho_H$  можно вычислить с помощью метода перевала. В итоге получим

$$\varphi(r) = - \frac{4iQ|\cos\theta|}{3\sqrt{3}|\epsilon_3|r\sin^2\theta} \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2\omega_0^2|\cos^3\theta|}{27\omega_H^2|\epsilon_3|\sin^2\theta} \frac{r}{\rho_H}\right). \quad (21)$$

Пределы применимости этой формулы следующие:  $(\omega_0^2\omega/\omega_H^2\rho) \ll 1$  и  $(\omega_0^2/\omega_H^2|\epsilon_3|)|z|^3/\rho^2\rho_H \gg 1$ .

Из (18) следует, что в результате учета теплового движения заряженных частиц полученный потенциал  $\varphi(r)$  точечного заряда экспоненциально мал, следовательно, за исключением плоскости  $z=0$ , поле близко к полю, описываемому «холодными» выражениями. В плоскости  $z=0$   $((\omega_0^2/\omega_H^2|\epsilon_3|)|z|^3/\rho^2\rho_H \ll 1)$

$$\varphi(r) = -i \frac{Q\Gamma(2/3)}{3\pi} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4\omega_H^2\rho_H}{\epsilon_3^2\omega_0^2\rho^4} \right)^{1/3}, \quad (22)$$

т. е. поле также довольно быстро спадает с расстоянием (по крайней мере быстрее, чем электростатический потенциал в изотропной среде).

Отметим, что гидродинамическое рассмотрение при  $\omega = \omega_H$  дает поле дебаевской экранировки, т. е. также экспоненциально спадающее поле с ростом расстояния от источника.

Как видно из (21) и (22), на расстояниях порядка гирорадиуса электронов  $\rho_H$  происходит компенсация части поля, которая синфазна со сторонним зарядом  $Qe^{-iat}$ . Это означает, что мнимая часть импеданса равна нулю, т. е. в этом приближении отсутствует запасенная энергия у системы. Такой же результат дает «холодная» постановка задачи, в которой частотная граница  $|\epsilon_1(\omega)| \rightarrow \infty$  разделяет области с емкостным и индуктивным характером мнимой части импеданса антенны. Это видно и из дисперсионного уравнения (19), где при  $v_T \rightarrow 0$  преобладает член, связанный с бесстолкновительным затуханием электростатического поля. Эти потери создаются заряженными частицами, летящими через неоднородное электростатическое поле.

### 3. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ В НЕРЕЗОНАНСНОЙ ОБЛАСТИ ЧАСТОТ

Рассмотрим импеданс тонкой цилиндрической антенны в нерезонансной области частот, т. е. в области частот, где  $\epsilon_1(\omega)\epsilon_3(\omega) > 0$ . В резонансной области  $\epsilon_1(\omega)\epsilon_3(\omega) < 0$ , далеко от границ  $\epsilon_1(\omega)\epsilon_3(\omega)=0$  и  $|\epsilon_1(\omega)| \rightarrow \infty$ , при  $v_T \rightarrow 0$  ( $L \gg v_T/\omega$ ,  $v_T/\omega_H$ ,  $v_T/\omega_0$ ) импеданс определяется из решения уравнения (2) и имеет как действительную, так и мнимую части [3]. При учете пространственной дисперсии кроме возбуждения продольных колебаний плазмы есть еще один механизм диссипации, связанный с бесстолкновительным затуханием квазиэлектростатического поля (пролетные эффекты). В резонансной области при  $v_T \rightarrow 0$  указанная диссипация меньше или порядка потерь на возбуждение плазменных колебаний, и ее можно в этой области частот не учитывать. В случае отсутствия плазменного резонанса решения уравнения (2) для бесстолкновительной плазмы не содержат диссипативной части поля, и поэтому здесь важен учет кинетических (пролетных) эффектов, которые при известных предположениях определяют потери стороны поля или, другими словами, величину реальной части импеданса диполя. Величи-

ну этих потерь для тонкой цилиндрической антенны можно подсчитать следующим образом. Если принять, что параметр  $\ln L/a \gg 1$ , то распределение тока на квазистатическом источнике определится квазиэлектростатическим полем, полученным в результате решения уравнения (2) [3]. Далее по известному распределению тока из комплексной теоремы Пойтинга можно определить величину импеданса. Для треугольного распределения тока, которое имеет место в случае цилиндрического диполя, тогда получаем

$$Z = -\frac{8}{\pi^2 i \omega L^2} \int dk \frac{J_0^2(a \sqrt{S(k)}) \sin^4 [(1/2)(k_y \sin \alpha + k_z \cos \alpha)L]}{(k_y \sin \alpha + k_z \cos \alpha)^2 k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta}(k) k_\beta}, \quad (23)$$

где  $S(k) = k^2 - (k_y \sin \alpha + k_z \cos \alpha)^2$ ,  $\alpha$  — угол между осью диполя и  $H_0$ ; ось диполя лежит в плоскости  $xy$ .

Вычислим сначала  $\operatorname{Re} Z \equiv R$  для гармоник гирочастоты  $\omega = n\omega_H$  и  $n > 1$ , когда влияние мнимой части  $k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta}(k) k_\beta$  может оказаться наиболее существенным (циклотронное поглощение). На этих частотах при  $v_T \rightarrow 0$  из (4) имеем

$$k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} k_\beta = \epsilon_1 k_\perp^2 + \epsilon_3 k_z^2 + i \sqrt{\pi} \frac{2n\omega_H \omega_0^2}{|k_z| v_T^3} e^{-\beta} I_n(\beta). \quad (24)$$

Вычисление проведем для случая  $\alpha = 0$  (ось диполя параллельна  $H_0$ ). В этом случае частицы плазмы эффективнее всего взаимодействуют с резонансным полем цилиндрического проводника, так как их траектории навиваются на внешнее магнитное поле  $H_0$ . Подставив (24) в (23) и проинтегрировав по  $k_z$  при условии  $\omega_H L/v_T \gg 1$ , получаем

$$R = \frac{R_0}{\pi} \beta \int_0^\infty \frac{e^{-x} I_n(x) dx}{x^2 + \beta^2 e^{-2x} I_n^2(x)}, \quad (25)$$

где

$$R_0 = \frac{\pi}{\omega |\epsilon_1| L}, \quad \beta = \frac{2 \sqrt{\pi} n \omega_0^2 L}{|\epsilon_1| \omega_H^2 \rho_H}.$$

Из этого выражения видно, что, если  $\beta \ll 1$  ( $\omega_0^2 \rightarrow 0$ , разреженная плазма),

$$R = \frac{R_0}{\pi} \beta \frac{2\Gamma(3/2)(n-2)!}{\sqrt{\pi}(n+1)!}, \quad (26)$$

т. е.  $R/R_0 \sim \beta \ll 1$ . В противоположном случае плотной плазмы  $\beta \gg 1$ , так как  $L/\rho_H \gg 1$ . Приближенное вычисление интеграла в (25) показывает, что при  $\beta \gg 1$   $R$  не зависит от  $\beta$  и равно

$$R \approx \frac{1}{3} R_0. \quad (27)$$

Отсюда видно, что при  $\beta \ll 1$   $R$  не зависит от размера зонда, а при  $\beta \gg 1$  в  $R$  не входит тепловая скорость, а все определяет длина диполя. Такая же зависимость от длины получается в «холодной» постановке задачи [3]. Величина  $R$  в «холодной» задаче для резонансной области частот при  $\omega L/v_T \gg 1$  также не зависит от тепловой скорости электронов.

Если  $\alpha \neq 0$ , то величина потерь падает, так как уменьшается эффективность взаимодействия заряженных частиц плазмы с полем антенны. Так, например, при  $\alpha = \pi/2$  оценка интеграла (23) показывает, что

$R \sim R_0/\beta$ , если  $\beta \gg 1$ . Если, однако,  $a\omega_H/v_T \ll 1$ , при  $\alpha = \pi/2$  возрастает роль черенковского поглощения, за которое ответственен член с  $n = 0$  в мнимой части дисперсионного уравнения (4).

Оценим вклад черенковского поглощения для длинной цилиндрической антенны. Если антenna ориентирована вдоль  $H_0$ , то черенковское поглощение при  $\omega L/v_T \gg 1$  мало, так как в интеграл (23) дают вклад малые  $k_z$  ( $k_z \sim 1/L$ ). Если же  $\alpha = \pi/2$ , то при  $a\omega/v_T \ll 1$  вклад в интеграл дают большие  $k_z$ , поэтому член в  $k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta}(k) k_\beta$ , связанный с затуханием Ландау, велик, и черенковское поглощение может внести существенный вклад в величину импеданса. Если  $a\omega/v_T \gg 1$ , то черенковское поглощение, как и в случае  $\alpha = 0$ , здесь также мало.

Подсчитаем в качестве примера величину черенковских потерь при  $\alpha = \pi/2$  в случае низких частот  $\omega \ll \omega_0, \omega_H$  или в замагниченной плазме  $\omega_H \gg \omega, \omega_0$ . Тензор  $k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta}(k) k_\beta$  для этой области частот равен ( $a\omega/v_T \ll 1$ ,  $a\omega_H/v_T \gg 1$ )

$$k_\alpha \epsilon_{\alpha\beta} k_\beta = \epsilon_1 k_\perp^2 + \epsilon_3 k_z^2 + i \sqrt{\pi} \frac{\omega^3 \omega_0^2}{\omega^2 |k_z| v_T^3} \exp(-\omega^2/k_z^2 v_T^2). \quad (28)$$

Подставив (28) в (23), для реальной части  $Z$  при  $\omega L/v_T \gg 1$ ,  $a\omega/v_T \ll 1$  получаем

$$R = \frac{\pi^2 \omega \sqrt{M/m}}{\omega_0^2 L} \quad (29)$$

— на низких частотах  $\omega \ll \omega_0, \omega_H$ ,  $\omega_H \sqrt{m/M} > \omega > \omega_H m/M$  ( $M$  и  $m$  — массы иона и электрона) и

$$R = \frac{\pi^2 \omega_0^2}{\omega^3 \sqrt{|\epsilon_3|} L} \quad (30)$$

— при сильных магнитных полях  $\omega_H \gg \omega_0, \omega$ . Формула (30) справедлива и для разреженной плаэмы  $\omega_0^2/\omega^2 \ll 1$ ,  $\omega_H/\omega \gg 1$ . И в этих выражениях величина потерь при  $\omega L/v_T \gg 1$  также не зависит от  $v_T$ , а определяется лишь размером диполя.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
2. K. Q. Ballmain, IEEE Trans. Ant. Prop., AP-12, 605 (1964).
3. Ю. В. Чугунов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 50 (1968); 11, № 12, 1829 (1968).
4. А. А. Андронов, В. Я. Эйдман, ЖТФ, 39, № 2, 365 (1969).
5. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, Харьков, 1965

**FEATURES OF A QUASI-ELECTROSTATIC FIELD OF SOURCES IN A MAGNETOACTIVE PLASMA***Yu. V. Chugunov*

Taking the thermal motion of charged particles in the medium into account, the features contained in the solution of equation (2) for the quasi-electrostatic field of the sources in the magnetoactive plasma are considered. The parameter region where the spatial dispersion may be neglected is determined. The shot losses associated with collisionless attenuation of the quasi-electrostatic field are calculated for the cylindrical probe model. In some cases these losses are shown to make the main contribution to the value of the real part of the impedance at the frequencies where the plasma resonance is absent.

---

УДК 538.56 : 538.311

**ПОПЕРЕЧНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ  
ПРИ ПАДЕНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ФРОНТ ИОНИЗАЦИИ,  
ДВИЖУЩИЙСЯ СО СКОРОСТЬЮ СВЕТА**

*B. B. Борисов*

В приближении, когда скорость электронов много меньше скорости света, рассмотрены поперечные электромагнитные поля за фронтом ионизации, движущимся со скоростью света. Полученные решения для поперечных компонент полей и скорости частиц позволяют проследить установление режима, согласующегося с результатами работы [2].

1. На плоский фронт ионизации, движущийся со скоростью света в положительном направлении оси  $Ox$  декартовой системы координат, падает плоская электромагнитная волна. На фронте образуются заряженные частицы — электроны и ионы, плотность которых в момент образования одинакова и равна  $n_0$ , а средняя направленная скорость равна нулю. «Точка встречи» —  $t = 0$ . Компоненты вектора магнитной индукции и вектора напряженности электрического поля падающей волны задаем в виде  $E_y = -B_z = E_0 I(\tau + x) u[(1/c)(\tau + x)]$ , где  $E_0$  и  $u[(1/c) \times (\tau + x)] I(\tau + x)$  — амплитуда и форма волны,  $I(\tau + x)$  — функция включения,  $\tau = ct$ . Уравнение фронта определяется условием  $x = \tau$ .

Поперечные электромагнитные поля в ионизованной области будем определять из уравнений движения, сохранения частиц и системы уравнений Максвелла при следующих упрощающих предположениях: после прохождения фронта газ полностью ионизован, столкновения заряженных частиц несущественны, величина средней направленной скорости электронов  $v$  много меньше скорости света, ионы неподвижны. Опустим в уравнении движения слагаемые порядка  $v/c \ll 1$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial \tau}, \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \frac{\partial E_y}{\partial \tau} + \frac{4\pi}{c} j_y, \\ \frac{\partial v_y}{\partial \tau} &= \frac{e}{mc} E_y. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $j_y = en_0v_y$  — плотность тока (плотность электронов  $\approx n_0$ ),  $e$ ,  $m$  — заряд и масса электрона. Уравнения (1) записаны в гауссовой системе единиц. Функции  $E_y$ ,  $B_z$ ,  $v_y$  определяются только падающей волной и не зависят от составляющей вектора скорости вдоль оси  $Ox$  и продольного электрического поля.

Для построения решения системы (1) необходимо задать условия на границе ионизованной области. Начальные условия определяются падающей электромагнитной волной. Особенность задачи связана с дви-

жением границы со скоростью света, что не позволяет перейти к другой инерциальной системе отсчета и получить требуемые условия при  $x = \tau$ .

2. Из системы уравнений Максвелла при  $\tau - x < 0$  и системы (1) для поперечной компоненты вектора напряженности электрического поля получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} E_y - \frac{\partial^2}{\partial \tau_0^2} E_y = I(\tau_0 - x_0) E_y, \quad (2)$$

где  $x_0 = \omega_0 x/c$ ,  $\tau_0 = \omega_0 \tau/c$  — безразмерные переменные,  $\omega_0$  — частота плазменных колебаний. Рассматривая правую часть как источник, построим решение задачи Коши уравнения (2) для  $\tau_0 > 0$ , с начальными условиями

$$E_y|_{\tau_0=0} = V_0(x_0) = \begin{cases} 0, & x_0 < 0 \\ E_0 u(x_0/\omega_0), & x_0 > 0 \end{cases}, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial E_y}{\partial \tau_0} \right|_{\tau_0=0} = E_0 u(0) \delta(x_0) + V_1(x_0), \quad V_1(x_0) = \begin{cases} 0, & x_0 < 0 \\ E_0 \frac{\partial u(x_0/\omega_0)}{\partial x_0}, & x_0 > 0 \end{cases}.$$

Тогда (см. в связи с этим [1])

$$E_y(x, \tau) = \frac{1}{2} [V_0(x_0 - \tau_0) + V_0(x_0 + \tau_0)] + \frac{1}{2} \int_{x_0 - \tau_0}^{x_0 + \tau_0} V_1(x) dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{x_0 - \tau_0}^{x_0 + \tau_0} E_0 u\left(\frac{x}{\omega_0}\right) \delta(x) dx + \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^{\tau_0} d\tau \int_{-\tau + (x_0 - \tau_0)}^{\tau + (x_0 - \tau_0)} dx I(\tau - x) E_y(\tau, x). \quad (4)$$

Если  $u(x_0/\omega_0)$  — непрерывная функция, то  $E_y$  не имеет особенностей больших, чем разрыв первого рода при конечных  $x_0, \tau_0$ . Действительно, допустим существование решений вида  $E = \varphi(x_0) \delta^{(n)}(\tau_0 \pm x_0 + a)$ , где  $\varphi(x_0)$  — непрерывна,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  — порядок производной. Подставляя  $E$  в (4), убедимся, что особенности правой и левой частей различны и сделанное предположение не имеет места.

Пределный переход в правой части выражения (4)  $\xi_1 \rightarrow +0, (-0)$ ,  $\xi_2 \rightarrow +0, (-0)$  при конечных  $x_0, \tau_0$  и непрерывности  $u$  дает

$$E_y(\xi_2, +0) - E_y(\xi_2, -0) = 0, \\ E_y(\xi_1, +0) - E_y(\xi_1, -0) = u(0), \quad (5)$$

$\xi_1 = \tau_0 - x_0$ ,  $\xi_2 = \tau_0 + x_0$ . Из (5) получим следующие условия на характеристиках  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$ :

$$E_y(0, \xi_2) = E_0 u(\xi_2/\omega_0), \\ E_y(\xi_1, 0) = E_0 u(0), \quad (6)$$

что позволяет построить решение характеристической задачи Коши (задачи Гурса) уравнения (2) в области изменения переменных  $\xi_1 > 0$ ,  $\xi_2 > 0$ .

3. Решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (6), будет иметь вид (см. [1])

$$E_y = E_0 J_0 (\sqrt{\xi_1 \xi_2}) u(0) + E_0 \int_0^{\xi_2} J_0 [\sqrt{\xi_1 (\xi_2 - x)}] \frac{\partial u(x/\omega_0)}{\partial x} dx, \quad (7)$$

$J_0(z)$  — функция Бесселя. Формула (7) позволяет получить  $v_y$ -составляющую скорости и поперечную компоненту вектора магнитной индукции. Из последнего уравнения системы (1) находим

$$v_y = \frac{e}{m\omega_0} \int_{|x_0|}^{\tau_0} E_y(x_0, \tau) d\tau. \quad (8)$$

Здесь нижний предел интегрирования определяется временем прихода фронта ионизации в точку  $x_0 > 0$  или фронта  $E_y$  в точку  $x_0 < 0$ .

Из первого уравнения системы (1) следуют соотношения

$$B_z = - \int_{|x_0|}^{\tau_0} \frac{\partial E_y}{\partial x_0} d\tau + B_0, \quad B_0 = \begin{cases} B_z(0, \xi_2), & x_0 > 0, \\ B_z(\xi_1, 0), & x_0 < 0, \end{cases} \quad (9)$$

где  $B_0$  — значения  $B_z$  на характеристиках  $\xi_1 = 0$  или  $\xi_2 = 0$ , которые найдем аналогично условиям (6):

$$\begin{aligned} B_z(0, \xi_2) &= -E_0 u(\xi_2), \\ B_z(\xi_1, 0) &= -E_0 u(0). \end{aligned} \quad (10)$$

Формулы (7), (9), (10) дают в квадратурах выражения для поперечных компонент вектора напряженности электрического и индукции магнитного полей за фронтом ионизации, движущимся со скоростью света при падении на него плоской волны при условии, что при  $\xi_2 = 0$  особенность в форме падающей волны не больше, чем разрыв первого рода.

4. Пусть на фронт ионизации падает плоская волна, форма которой — функция включения, т. е.  $E_y = -B_z = E_0 I(\xi_2)$ . Тогда в области  $\xi_1 > 0, \xi_2 > 0$

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 J_0 (\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2}), \\ B_z &= -E_0 \left[ 1 + x_0 \int_{|x_0|}^{\tau_0} d\tau \frac{J_1 (\sqrt{\tau^2 - x_0^2})}{\sqrt{\tau^2 - x_0^2}} \right] = \\ &= -E_0 \left[ 1 + \operatorname{sgn} x_0 - \frac{x_0}{\tau_0} J_0 (\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2}) - \frac{x_0}{\tau_0^3} \sqrt{\tau_0^2 - x_0^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times J_1 (\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2}) - R' \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{e E_0}{m \omega_0} \int_{|x_0|}^{\tau_0} J_0 (\sqrt{\tau^2 - x_0^2}) d\tau = \frac{e E_0}{m \omega_0} \left[ \frac{\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2}}{\tau_0} J_1 (\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2})^3}{\tau_0^3} J_2 (\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2}) + 3 \frac{(\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2})^5}{\tau_0^5} J_3 (\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2}) + R'' \right], \end{aligned}$$

$$R' \leq \frac{1}{x_0} \left( \frac{\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2}}{\tau_0} \right)^3, \quad R'' \leq 3 \frac{(\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2})^5}{x_0^2 \tau_0^5}.$$

При больших  $\tau_0$ ,  $\sqrt{\tau_0^2 - x_0^2} \gg |x_0|$  можно использовать более наглядные выражения:

$$v_y = \frac{eE_0}{m\omega_0} e^{-|x_0|} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_0}}\right),$$

$$B_z = \begin{cases} -E_0(2 - e^{-\tau_0}) + O\left(\frac{1}{\tau_0}\right), & x_0 > 0 \\ -E_0 e^{-|x_0|} + O\left(\frac{1}{\tau_0}\right), & x_0 < 0 \end{cases}$$

Отметим, что характер поведения поперечных полей при больших  $x_0$ ,  $\tau_0$  ( $x_0 > 0$ ) согласуется с результатами работы [2], если в полученных в последней выражениях для  $E_y$  и  $B_z$  положить  $v/c = 0$ .

5. Рассмотрим поперечную составляющую вектора напряженности электрического поля  $E$  в ионизованной области при падении на фронт ионизации плоской электромагнитной волны, временная зависимость которой — синусоидальные колебания с частотой  $\omega$ .

Задача о сигнале с произвольной фазой на фронте сводится к суперпозиции двух решений, полученных для косинусоидальной

$$E_y^{(1)} = E_0 I(\xi_2) \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} \xi_2\right) \quad (\xi_1 < 0)$$

и синусоидальной

$$E_y^{(2)} = E_0 I(\xi_2) \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} \xi_2\right) \quad (\xi_1 < 0)$$

форм падающей волны. Согласно (7) имеем

$$E_y^{(1)} = E_0 J_0(\sqrt{\xi_1 \xi_2}) + E_0 \int_0^{\xi_2} J_0[\sqrt{\xi_1(\xi_2 - x)}] \frac{\partial}{\partial x} \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} x\right) dx,$$

$$E_y^{(2)} = E_0 \int_0^{\xi_2} J_0[\sqrt{\xi_1(\xi_2 - x)}] \frac{\partial}{\partial x} \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} x\right) dx.$$
(11)

Замена переменной интегрирования  $\tau = (1 - x/\xi_2)^{1/2}$  приводит (11) к виду

$$E_y^{(1)} = E_0 \left\{ J_0(z) - w \int_0^1 J_0(z\tau) \sin\left[\frac{1}{2} w(1 - \tau^2)\right] \tau d\tau \right\},$$

$$E_y^{(2)} = E_0 w \int_0^1 J_0(z\tau) \cos\left[\frac{1}{2} w(1 - \tau^2)\right] \tau d\tau,$$

где  $w = 2\omega\xi_2/\omega_0$ ,  $z = \sqrt{\xi_1\xi_2}$ .

Интегралы, входящие в последние выражения, есть функции Ломмеля для двух переменных  $U_2(w, z)$  и  $U_1(w, z)$  [3], что сводит решение рассматриваемой задачи к известным специальным функциям:

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} &= E_0 [J_0(z) - U_2(w, z)] = E_0 U_0(w, z), \\ E_y^{(2)} &= E_0 U_1(w, z). \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (12) позволяют вычислить значения поперечной составляющей вектора  $E$  в ионизованной области, используя таблицы функций  $U_1(w, z)$  и  $U_2(w, z)$  [4].

Представления функций  $U_n(w, z)$  и  $V_n(w, z)$  в виде рядов [3]

$$U_n(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(z); \quad (13)$$

$$V_n(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{-n-2m} J_{-n-2m}(z) \quad (14)$$

дают возможность проследить поведение  $E_y^{(1)}$ ,  $E_y^{(2)}$  в окрестности фронта ионизации и фронта волны, определить установившийся режим при  $t \gg |x/c|$  в зависимости от соотношения частот  $\omega$  и  $\omega_0$ .

В окрестности фронта волны, уходящей вглубь плазмы  $\xi_2 = 0$ , ограничиваясь первым слагаемым разложения (13), получим

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} &\approx E_0 J_0(\sqrt{\xi_1 \xi_2}), \\ E_y^{(2)} &\approx E_0 2 \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{\frac{\xi_2}{\xi_1}} J_1(\sqrt{\xi_1 \xi_2}). \end{aligned} \quad (15)$$

Используя соотношение

$$U_{n+1}(w, z) - V_{-n+1}(w, z) = \sin\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} - \frac{n\pi}{2}\right)$$

[3] и представление (14), найдем, что в окрестности фронта ионизации ( $\xi_1 = 0$ )

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} &\approx E_0 \cos\left(\frac{\omega}{\omega_0} \xi_2 + \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\xi_1}{4}\right), \\ E_y^{(2)} &\approx E_0 \sin\left(\frac{\omega}{\omega_0} \xi_2 + \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\xi_1}{4}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Приведенные выражения для поперечной составляющей вектора  $E$  (15), (16) справедливы соответственно при выполнении условий  $(2\omega/\omega_0)^2 \xi_2 \ll \xi_1 \sim 2x\omega_0/c$ ,  $(2\omega/\omega_0)^{-2} \xi_1 \ll \xi_2 \sim 2x\omega_0/c$  и в этом случае хорошо описывают поведение поля в окрестности фронтов вне зависимости от соотношения частот плазменных колебаний и падающего поля.

Установившийся режим для больших значений времени  $t \gg |x/c|$ ,  $\xi_1 \approx \xi_2$  определяется отношением частот  $\omega_0/\omega$ . Если частота колебаний падающей волны много больше плазменной,  $\omega \gg \omega_0$ , то временная зависимость  $E_y^{(1)}$  ( $E_y^{(2)}$ ) определяется формулой (16). Поперечные поля в ионизованной области представляют собой гармонические колебания, частота которых мало отличается от частоты падающей волны. При

$\omega_0 \gg \omega$  поперечные колебания затухают, что следует из (13), (15). Критическая частота рассматриваемой задачи  $\omega = \omega_n/2$ .

Автор благодарен А. С. Благовещенскому за помощь при постановке задачи и А. В. Мананковой за интерес к работе и обсуждения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин, Линейные уравнения математической физики, изд. Наука, М., 1964.
- 2 В. В. Борисов, Изв высш уч. зав — Радиофизика, 12, № 8, 1249 (1969)
- 3 Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч 1, ИЛ, М., 1949.
- 4 Е. Н. Деканоидзе, Таблицы цилиндрических функций от двух переменных, АН СССР, М., 1956.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию

17 июля 1969 г.,

после доработки

5 июня 1970 г.

### TRANSVERSE ELECTROMAGNETIC FIELDS ARISING FROM PLANE WAVE INCIDENCE ON IONIZATION FRONT MOVING WITH THE VELOCITY OF LIGHT

V. V. Borisov

Transverse electromagnetic fields behind the ionization front moving with the velocity of light have been considered on the assumption that the electron velocity is much less than the velocity of light. The solutions derived for the transverse components of the fields and the particle velocity make possible to observe setting up process of the regime which agrees with the results of the paper [2].

УДК 538.56

## ИЗЛУЧЕНИЕ ВОЛН ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ СТАТИЧЕСКИМИ ДИПОЛЯМИ, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИМИСЯ ПО ОКРУЖНОСТИ

*В. П. Докучаев*

Рассмотрено излучение звуковых и электромагнитных волн соответственно акустическим и электрическим диполем при равномерном движении по окружности в среде без дисперсии. Определены поля в волновой зоне, распределения интенсивности излучения по углам (диаграммы направленности) и по частотам (энергетический спектр). Получены формулы для полной интенсивности излучения. Показано, что с ростом скорости движения источников по окружности интенсивность излучения сильно возрастает по мере приближения их скорости к фазовой скорости нормальных волн в среде.

1. Теория циклотронного и синхротронного излучения электромагнитных волн электрическими зарядами, равномерно движущимися по окружности — магнитотормозное излучение, — интенсивно развивается в связи с обширными областями ее применения в астрофизике и в лабораторных ускорителях частиц [1—3]. Магнитотормозное излучение электрических зарядов вполне аналогично излучению звуковых волн твердыми телами, движущимися по окружности и в более общем случае по винтовой линии (так называемый «звук вращения») [4—6]. Теория излучения «звука вращения» имеет непосредственное отношение к излучению звука гребными и воздушными винтами различного рода движителей. Аналогия между магнитотормозным излучением и «звуком вращения» обусловлена тем, что в обоих случаях излучение порождается источниками, совершающими равномерно ускоренное движение по окружности или по винтовой линии. Здесь широко используется это обстоятельство. Вначале будет рассмотрен более простой случай излучения звуковых волн, а затем более сложная задача о генерации электромагнитных волн статическими диполями, движущимися с постоянной скоростью по окружности в среде без дисперсии.

2. В акустике и линейной газодинамике широко применяются два подхода к анализу возмущений жидкой среды при движении в ней твердых тел — метод источников и стоков вещества и метод силовых источников [7, 8]. В первом из них движущееся тело заменяется распределением источников и стоков вещества (дипольные слои) [7], а во втором методе взаимодействие тел с жидкостью описывается распределением силовых источников на поверхности тела [8]. Звук вращения, создаваемый элементарным силовым источником, рассмотрен в работе [5]. Анализ ближних полей потенциала скорости, создаваемых вращающимся винтом, замененным системой диполей, содержится в работе [7]. Здесь мы рассмотрим задачу об излучении «звука вращения» распределением элементарных источников массы  $q(R, t)$ , движущихся с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  по окружности радиуса  $a$ .

Возмущения потенциала поля скоростей определяются хорошо известным уравнением

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} q(r, t). \quad (1)$$

Возмущения скорости  $v$ , давления  $p$  и плотности  $\rho$  выражаются через потенциал

$$v = \nabla \Phi, \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \rho = p/c_s^2, \quad (2)$$

где  $c_s$  — скорость звука.

Воспользуемся цилиндрической системой координат  $r, z, \varphi$ , выбрав ось  $z$  в направлении угловой скорости вращения и проходящей через центр окружности, по которой движутся источники. Зададим функцию распределения источников массы в виде

$$q(r, t) = (\mathbf{P} \nabla) \frac{\delta(r - a) \delta(\varphi - \omega_0 t)}{r} \delta(z), \quad (3)$$

где дифференциальный оператор имеет вид

$$(\mathbf{P} \nabla) = P_z \frac{\partial}{\partial z} + P_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + P_a \frac{\partial}{\partial a}. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{P} = Ql$  — дипольный момент, образованный источником и стоком массы интенсивности  $Q \text{ г} \cdot \text{сек}^{-1}$ ,  $l$  — плечо диполя,  $P_z, P_\varphi, P_a$  — проекции дипольного момента на оси цилиндрической системы координат. Как видно из (3), диполи движутся по окружности радиуса  $a$  в плоскости  $z = 0$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$ . В формуле (3)  $\delta$  — функция Дирака и, вследствие периодичности по углу

$$\delta(\varphi - \omega_0 t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in(\varphi - \omega_0 t)).$$

Распределение  $q(r, t)$  считается элементарным, или точечным, при условии, что его характерные размеры  $l_z, l_\varphi$  и  $l_a$  много меньше радиуса окружности  $a$  и тех длин волн, на которые приходится основная часть излучаемой энергии. Укажем, что излучение акустического монополя, движущегося по окружности, было рассмотрено в работе [6].

Решение уравнения (1) для источников возмущений (3) можно получить либо с помощью функции Грина, которая хорошо известна для уравнения (1), либо непосредственно применяя преобразование Фурье—Ханкеля к уравнениям (1), (3), как это сделано в работах [5, 6]. Не приводя промежуточных вычислений, дадим окончательное выражение для потенциала  $\Phi$  в волновой зоне излучателя:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2\pi a \rho_0 R} \sum_{n=1}^{\infty} n [(P_\varphi + MP_z \cos \theta) J_n(nM \sin \theta) \sin(n\gamma) + \\ & + MP_a \sin \theta J'_n(nM \sin \theta) \cos(n\gamma)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\gamma = \omega_0(t - R/c_s) - \varphi - \pi/2,$$

где  $J_n$  — функция Бесселя порядка  $n$ ,  $J'_n$  — производная этой функции,  $M = a \omega_0/c_s$  — акустическое число Маха. В формуле (5) использованы также сферические координаты  $(R, \theta, \varphi)$ ,  $z = R \cos \theta$ ,  $r = R \sin \theta$ .

Как видно из выражения (5), излучение содержит дискретный спектр частот звука вращения  $\omega_n = n\omega_0$  [4]. Основной интерес представляют энергетические характеристики излучения. Интенсивность излуче-

ния звука  $I$  в телесный угол  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  связана с потенциалом скорости  $\Phi$  известным соотношением [4]

$$\frac{dI}{d\Omega} = R^2 p v_R = - \rho_0 R^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \quad (6)$$

Подставим в формулу (6) выражение для потенциала  $\Phi$  (5) и усредним интенсивность  $I$  по периоду вращения источника  $T = 2\pi/\omega_0$ . В результате этого получим

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega} = & \frac{\omega_0^2}{8\pi^2 \rho_0 c_s a^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 [(P_\varphi + MP_z \cos \theta)^2 J_n^2(nM \sin \theta) + \\ & + M^2 P_a^2 \sin^2 \theta J_n'^2(nM \sin \theta)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Воспользуемся значением сумм (см. Приложение):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 J_n^2(nx) = \frac{x^3 [8(8 + 74x^2 + 59x^4) + 27x^6]}{256 (1 - x^2)^{13/2}}, \quad (8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 J_n'^2(nx) = \frac{8(8 + 78x^2 + 79x^4) + 45x^6}{256 (1 - x^2)^{11/2}}. \quad (9)$$

В результате суммирования из соотношения (7) находим распределение интенсивности излучения по углу  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega} = & \frac{\omega_0^2 M^2 \sin^2 \theta}{2048 \pi^2 \rho_0 a^2 c_s} \times \\ & \times \left\{ \frac{(P_\varphi + P_z M \cos \theta)^2 [8(8 + 74M^2 \sin^2 \theta + 59M^4 \sin^4 \theta) + 27M^6 \sin^6 \theta]}{(1 - M^2 \sin^2 \theta)^{13/2}} + \right. \\ & \left. + \frac{P_a^2 [8(8 + 78M^2 \sin^2 \theta + 79M^4 \sin^4 \theta) + 45M^6 \sin^6 \theta]}{(1 - M^2 \sin^2 \theta)^{11/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражение (10) дает представление о диаграмме направленности излучателя.

Полная интенсивность излучения звука получается интегрированием выражения (10) по телесному углу  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ :

$$I = \frac{\omega_0^2 M^2}{60\pi\rho_0 a^2 c_s} \left[ P_\varphi^2 \frac{5 + 33M^2 + 12M^4}{(1 - M^2)^6} + P_z^2 \frac{M^2(1 + 4M^2)}{(1 - M^2)^5} + P_a^2 \frac{5 + 36M^2 + 24M^4}{(1 - M^2)^5} \right]. \quad (11)$$

Как видно из формулы (11), при  $M \rightarrow 1$  интенсивность излучения диполя быстро возрастает по сравнению с излучением монополя  $I_m \sim (1 - M^2)^{-3}$  (см. в связи с этим [6])\*. Особенно велик рост интенсивности для диполя, ориентированного по касательной к окружности, т. е. для компоненты диполя  $P_\varphi$ .

Определим распределение интенсивности излучения по частотному

\* Следует иметь в виду, что при  $M \sim 1$  сильно уменьшается длина волны  $\lambda_c$ , на которую приходится основная часть излучаемой энергии. Как будет показано ниже, при этом может нарушаться условие элементарности диполя  $l_\varphi, l_z, l_a \ll \lambda_c$ .

спектру. Для этого необходимо проинтегрировать общий член ряда в формуле (7) по телесному углу  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ . Рассмотрим подробно случай диполя, ориентированного по оси  $z$ , т. е. считаем  $P_\varphi = P_a = 0$ . Воспользовавшись преобразованием интеграла

$$\int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta J_n^2(nM \sin\theta) d\theta = \frac{1}{M} \int_0^M \left(1 - \frac{\xi^2}{M^2}\right) J_{2n}(2n\xi) d\xi \quad (12)$$

и интегрируя (7) по телесному углу, получим следующее выражение для интенсивности излучения гармоники номера  $n$ :

$$I_n = \frac{n^4 \omega_0 P^2}{4\pi\rho_0 a^3} \int_0^M (M^2 - \xi^2) J_{2n}(2n\xi) d\xi. \quad (13)$$

Рассмотрим два предельных случая формулы (13), аналогично тому, как это обычно делается в теории магнитотормозного излучения. В случае малых скоростей движения диполя при  $M \ll 1$  можно использовать известное приближенное выражение  $J_{2n}(2n\xi) \approx (n\xi)^{2n}/(2n)!$  Интегрируя в формуле (13) по  $\xi$ , имеем

$$I_n \approx \frac{\omega_0^2 P^2}{2\pi\rho_0 a^3 c_s} \frac{n^2 (nM)^{2(n+1)}}{(2n+3)(2n+1)!} \quad (M \ll 1). \quad (14)$$

Из формулы (14) следует, что в этом случае максимальная интенсивность излучения звука приходится на первую гармонику «звука вращения»  $\omega_0$  и быстро падает с ростом номера гармоники  $n$ .

Иной характер имеет спектральное распределение излучения при больших дозвуковых скоростях движения диполя по окружности, т. е. в случае  $M \gtrsim 1$ . Для анализа выражения (13) в этом случае воспользуемся асимптотическим представлением [3]

$$J_{2n}(2n\xi)_{n \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}} (1 - \xi^2)^{1/2} K_{1/3} \left[ \frac{2n}{3} (1 - \xi^2)^{3/2} \right], \quad (15)$$

где  $K_{1/3}$  — функция Макдональда с индексом  $1/3$ , которая может быть также записана через функцию Эйри [1, 3]. Пользуясь представлением (15), вводя новую переменную интегрирования  $3x = 2n(1 - \xi^2)^{3/2}$  и следуя работам [1–3], представим выражение (13) в виде

$$I_n \approx \frac{\omega_0 P^2 (1 - M^2) n^3}{8\sqrt{3}\pi^2 \rho_0 a^3} \int_{(n/n_c)}^{\infty} \left[ \left( \frac{n_c x}{n} \right)^{2/3} - 1 \right] K_{1/3}(x) dx. \quad (16)$$

Здесь введено обозначение

$$n_c = \frac{3}{2(1 - M^2)^{3/2}}. \quad (17)$$

Покажем, что спектральное распределение (16) имеет максимум при  $n \approx n_c$ . При условии  $(n/n_c) \rightarrow 0$  интеграл в (16) легко вычисляется:

$$I_n \approx \frac{3^{1/6} \Gamma(2/3) \omega_0 P^2}{16\pi^2 \rho_0 a^3} n^{7/3} \quad (1 < n \ll n_c), \quad (18)$$

где  $\Gamma$  — символ гамма-функции. С другой стороны, при  $n \gg n_c$ , когда нижний предел в интеграле (16) значительно больше единицы, можно полож-

жить  $K_{1/3}(x) \approx (\pi/2x)^{1/2} \exp(-x)$  во всей области изменения  $x$ . При этом интеграл в (16) дает

$$I_n \approx \frac{\omega_0 P^2 n^{3/2}}{16 \pi^{3/2} \rho_0 a^3 (1 - M^2)^{5/4}} e^{-n/n_c} \quad (n \gg n_c). \quad (19)$$

Сопоставляя (18) и (19), видим, что интенсивность излучения увеличивается с ростом  $n$  на гармониках  $1 < n \ll n_c$  и быстро уменьшается при  $n > n_c$ . Следовательно, при  $n \sim n_c$  энергия излучения максимальна, как и в случае излучения монополя [6]\*.

Частота, соответствующая номеру гармоники  $n_c$ , определяется соотношением

$$\omega_c = n_c \omega_0 = \frac{3 \omega_0}{2(1 - M^2)^{3/2}}. \quad (20)$$

Так как  $\omega_c \gg \omega_0$ , вследствие условия  $M \sim 1$ , а расстояние между двумя соседними гармониками  $\Delta\omega = \omega_0 \ll \omega_c$ , то спектр излучения можно считать квазинепрерывным. Следовательно, можно положить  $dI = I_n dn$ . Выполняя интегрирование приближенного выражения (16) по  $dn$ , получим полную интенсивность излучения  $I$  при  $M \leq 1$ . Промежуточный интеграл

$$\int_0^\infty K_\nu(x) x^{2\mu+1-\nu} dx = 2^{2\mu-\nu} \Gamma(\mu + 1) \Gamma(\mu + 1 - \nu)$$

$$(\mu + 1 > \nu > 0)$$

является табличным, и окончательно для интенсивности излучения при  $M \sim 1$  получим

$$I \approx \frac{\omega_0^2 P^2}{12 \pi \rho_0 a^2 c_s (1 - M^2)^5}. \quad (21)$$

Это выражение можно также получить из (11) для диполя с моментом  $P = P_z$  при  $M \sim 1$ .

Обсудим вопрос о границах применимости понятия элементарного диполя. При  $M \ll 1$  основная энергия излучения приходится на первую гармонику (14), соответствующую частоте  $\omega_0$ . Следовательно, плечо диполя  $l_z$  должно быть много меньше длины волны  $\lambda_0 = 2\pi c_3/\omega_0 = 2\pi a/M$ , т. е.  $l_z \ll 2\pi a/M$ . В случае  $M \rightarrow 1$  основная энергия приходится на гармонику  $n_c$  с длиной волны  $\lambda_c \sim 2\pi a(1 - M^2)^{3/2}$ . Таким образом, должно выполняться условие  $l_z \ll 2\pi a(1 - M^2)^{3/2}$  при  $M \sim 1$ . Кроме этого, следует иметь в виду, что, когда  $M \rightarrow 1$ , акустические возмущения становятся большими, и необходимо контролировать условие применимости линейного подхода к задаче об излучении звуковых волн (см., например, [6]).

3. В работах [9, 10] рассматривалось черенковское излучение элементарных электрических и магнитных диполей при прямолинейном равномерном движении в среде. Излучение заряда, движущегося по окружности как в изотропной, так и в анизотропной среде, рассматривалось в работах [11–13]. Здесь будет рассмотрено излучение электромагнитных волн элементарным электрическим диполем, движущимся по окружности радиуса  $a$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_0$  в однородной среде без дисперсии. Дизэлектрическая постоянная  $\epsilon$  и магнитная проницаемость среды  $\mu$  считаются постоянными. В лабораторных условиях

\* Эта характерная особенность в спектральном распределении излучения при больших скоростях движения источников по окружности известна в теории синхротронного излучения движущихся зарядов [1, 2].

примерами таких излучателей могут служить тяжелые ионы и поляризованные заряженные сгустки плазмы, движущиеся по окружности в магнитных полях ускорителей. В космических условиях ионы и заряженные частицы космической пыли, движущиеся в магнитных полях звезд и галактик, являются другим примером сложных излучателей, обладающих электрическим дипольным моментом. Так как поставленная здесь задача аналогична предыдущей акустической (см. п. 2), то большая часть промежуточных вычислений будет опущена.

Зададим элементарную систему электрических зарядов, обладающую дипольным моментом  $p$  и общим зарядом  $q$ , в виде следующих распределений плотности зарядов и электрического тока:

$$\rho(r, t) = (q + p \nabla) \frac{\delta(r - a) \delta(\varphi - \omega_0 t)}{r} \delta(z); \quad (22)$$

$$j(r, t) = \omega_0 r e_\varphi \rho(r, t). \quad (23)$$

Здесь использована цилиндрическая система координат  $r, z, \varphi$ ,  $e_\varphi$  — единичный вектор координаты  $\varphi$ ,  $p = q_1 l$  — дипольный момент системы зарядов  $\pm q_1$  с плечом диполя  $l$ ,  $q$  — полный заряд распределения. Как легко убедиться, распределение (22), (23) удовлетворяет уравнению непрерывности  $\operatorname{div} j = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ . Все заряды в распределении (22), (23) движутся с одинаковой угловой скоростью  $\omega_0$ .

Уравнение для вектор-потенциала  $A$  хорошо известно:

$$\Delta A - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} j. \quad (24)$$

Для решения уравнения (24) с электрическим током (23) удобно поступить следующим образом. Запишем уравнение (24) в цилиндрических координатах для  $A_x$  — компоненты вектор-потенциала:

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi \mu}{c} \omega_0 r \sin \varphi \rho(r, t). \quad (25)$$

Решение уравнения (25) в волновой зоне системы электрических зарядов  $\rho(r, t)$  (22) имеет вид

$$A_x = -\frac{i \mu \beta}{a R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [aq + in(p_\varphi + \sqrt{\epsilon \mu} \beta p_z \cos \theta)] J'_n(n \sqrt{\epsilon \mu} \beta \sin \theta) \exp(in\gamma) - \\ - \frac{ip_a}{a R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} n \left( \frac{1 - \epsilon \mu \beta^2 \sin^2 \theta}{\sin \theta} \right) J_n(n \sqrt{\epsilon \mu} \beta \sin \theta) \exp(in\gamma). \quad (26)$$

Аналогично получаем

$$A_y = \frac{1}{a R \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [aq + in(p_\varphi + \sqrt{\epsilon \mu} \beta p_z \cos \theta)] J_n(n \sqrt{\epsilon \mu} \beta \sin \theta) \times \\ \times \exp(in\gamma) + \frac{\omega_0 p_a}{c R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu n J'_n(n \sqrt{\epsilon \mu} \beta \sin \theta) \exp(in\gamma). \quad (27)$$

В формулах (26), (27) использованы сферические координаты  $z = R \cos \theta$ ,  $r = R \sin \theta$ , а также обозначения  $\gamma = \omega_0(t - \sqrt{\epsilon\mu} R/c) - \varphi - \pi/2$ ,  $\beta = a \omega_0/c$ . По-прежнему,  $p_\varphi$ ,  $p_z$  и  $p_a$  — проекции дипольного момента на оси цилиндрической системы координат.

Интересно отметить, что проекции  $A_x$ ,  $A_y$  можно получить из соответствующих выражений для одиночного заряда, движущегося по окружности. Для этого следует взять  $A_x$  и  $A_y$ , создаваемые двумя зарядами с противоположными знаками, а при сближении этих зарядов на малое расстояние по радиусу  $a$ , углу  $\varphi$  и координате  $z$  получим формулы (26), (27).

Интенсивность излучения на гармонике номера  $n$  с частотой  $n\omega_0$ , усредненная по периоду вращения зарядов  $T = 2\pi/\omega_0$ , находится по известным формулам теории синхротронного излучения [1]. Таким образом, окончательно получим

$$\frac{dI_1}{d\Omega} = \frac{\omega_0^2}{2\pi a^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} n^2 [a^2 q^2 + n^2 (p_\varphi + \beta_1 p_z \cos \theta)^2] \times \\ \times [\operatorname{ctg}^2 \theta J_n^2(n \beta_1 \sin \theta) + \beta_1^2 J_n'^2(n \beta_1 \sin \theta)], \quad (28)$$

$$\frac{dI_2}{d\Omega} = \frac{\omega_0^2 p_a^2}{2\pi a^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} n^4 \left[ \left( \frac{1 - \beta_1^2 \sin^2 \theta}{\sin \theta} \right)^2 J_n^2(n \beta_1 \sin \theta) + \right. \\ \left. + \beta_1^2 \cos^2 \theta J_n'^2(n \beta_1 \sin \theta) \right], \quad (29)$$

где введено обозначение  $\beta_1 = \sqrt{\epsilon\mu} \beta$ . Здесь для удобства выделено выражение для интенсивности излучения  $I_2$  диполя  $p_a$ , ориентированного по радиусу. Соотношение (28) при  $p_\varphi = p_z = 0$  переходит в известную формулу Шотта [1-3].

Полезно иметь в виду, что, как показал расчет, для диполей конечных размеров формула (28) значительно усложняется. Так, вместо слагаемого  $n^2(p_\varphi + \beta_1 p_z \cos \theta)^2$  в (28) будем иметь

$$\left[ 2aq_1 \sin \left( \frac{n\varphi_0}{2} \right) + 2aq_2 \sin \left( \frac{n\omega_0 \sqrt{\epsilon\mu} l_z \cos \theta}{2c} \right) \right]^2,$$

где  $\varphi_0$  — угловое расстояние между двумя зарядами  $\pm q_1$ , движущимися по окружности радиуса  $a$  с угловой скоростью  $\omega_0$ ,  $l_z$  — расстояние по оси  $z$  между зарядами  $\pm q_2$ . При малых  $\varphi_0$  и  $l_z$  получаем формулу (28),  $p_\varphi = a \varphi_0 q_1$ ,  $p_z = l_z q_2$ . Провести достаточно полный анализ интенсивности излучения для диполей конечных размеров не удается.

Угловое распределение излучения получается из формул (28), (29) путем суммирования рядов. Будем считать, что  $\epsilon$  и  $\mu$  не зависят от частоты  $n\omega_0$  (среда без дисперсии). Воспользуемся известными суммами [1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(nx) = \frac{x^2(4+x^2)}{16(1-x^2)^{7/2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n'^2(nx) = \frac{4+3x^2}{16(1-x^2)^{5/2}}, \quad (30)$$

а также суммами (8), (9). Таким образом, из (28), (29) получаем

$$\frac{dI_1}{d\Omega} = \frac{\omega_0^2 q^2 \beta_1^2}{32\pi c} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{8 - 4 \sin^2 \theta - \beta_1^2 \sin^4 \theta - 3\beta_1^4 \sin^4 \theta}{(1 - \beta_1^2 \sin^2 \theta)^{7/2}} +$$

$$+ \frac{\omega_0^2 \beta_1^2 (p_\varphi + \beta_1 p_z \cos \theta)^2}{512 \pi c a^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \times \\ \times \left\{ \frac{\cos^2 \theta [8(8 + 74 \beta_1^2 \sin^2 \theta + 59 \beta_1^4 \sin^4 \theta) + 27 \beta_1^6 \sin^6 \theta]}{(1 - \beta_1^2 \sin^2 \theta)^{13/2}} + \right. \\ \left. + \frac{8(8 + 78 \beta_1^2 \sin^2 \theta + 79 \beta_1^4 \sin^4 \theta) + 45 \beta_1^6 \sin^6 \theta}{(1 - \beta_1^2 \sin^2 \theta)^{11/2}} \right\}; \quad (31)$$

$$\frac{dI_2}{d\Omega} = \frac{\omega_0^2 \beta_1^2 p_a^2}{512 \pi c a^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[ \frac{8(8 + 74 \beta_1^2 \sin^2 \theta + 59 \beta_1^4 \sin^4 \theta) + 27 \beta_1^6 \sin^6 \theta}{(1 - \beta_1^2 \sin^2 \theta)^{9/2}} + \right. \\ \left. + \cos^2 \theta \frac{8(8 + 78 \beta_1^2 \sin^2 \theta + 79 \beta_1^4 \sin^4 \theta) + 45 \beta_1^6 \sin^6 \theta}{(1 - \beta_1^2 \sin^2 \theta)^{11/2}} \right]. \quad (32)$$

Формулы (31), (32) дают представление о сложном характере диаграмм направленности излучения диполей. При  $\beta_1 \rightarrow 1$  излучение сильно концентрируется в плоскости, в которой движется диполь ( $\theta = \pi/2$ ). Исключение составляет диполь, ориентированный по оси  $z$ . Из формулы (31) видно, что для него  $\frac{dI}{d\Omega} \sim \cos^2 \theta$ .

Полная интенсивность излучения получается из формул (31), (32) интегрированием по телесному углу  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ :

$$I = \frac{2 \omega_0^2 \beta_1^2}{3 a^2 c (1 - \beta_1^2)^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[ a^2 q_0^2 + p_z^2 \beta_1^2 \frac{2 + 3 \beta_1^2}{5(1 - \beta_1^2)^2} + \right. \\ \left. + p_\varphi^2 \frac{5 + 21 \beta_1^2 + 9 \beta_1^4}{5(1 - \beta_1^2)^3} + p_a^2 \frac{5 + 22 \beta_1^2 + 8 \beta_1^4}{5(1 - \beta_1^2)^2} \right]. \quad (33)$$

Таким образом, при  $\beta_1 = \sqrt{\epsilon \mu} \beta \rightarrow 1$  роль дипольного излучения сильно возрастает по сравнению с излучением одиночного заряда. По-видимому, эта тенденция существует и для мультиполей более высокого порядка. Условие  $\beta_1 \rightarrow 1$  означает приближение скорости движения зарядов к фазовой скорости нормальных волн в среде. Случай  $\beta_1 > 1$ , когда дополнительно возникает черенковское излучение, здесь не рассматривается.

Выясним характер спектрального распределения интенсивности излучения, т. е. определим интенсивность излучения на частоте  $\omega = n\omega_0$ . Для этого необходимо проинтегрировать общий член каждого ряда (28), (29) по телесному углу  $\Omega$ . В общем случае не удается получить простые выражения для  $I_{n1}$  и  $I_{n2}$ . Тем не менее после ряда преобразований с использованием известных свойств функций Бесселя из (28), (29) получим

$$I_{n1} = \frac{2 \omega_0 n}{\epsilon a^3} (a^2 q_0^2 + n^2 p_\varphi^2) \left[ \beta_1^2 J'_{2n}(2n \beta_1) - n(1 - \beta_1^2) \int_0^{\beta_1} J_{2n}(2nx) dx \right] + \\ + \frac{\omega_0^3 \mu n^2}{ac^2} p_z^2 \left\{ \beta_1 J_{2n}(2n \beta_1) - \int_0^{\beta_1} \left[ 1 + n^2(1 - \beta_1^2) \left( 1 - \frac{x^2}{\beta_1^2} \right) \right] J_{2n}(2nx) dx \right\}; \quad (34)$$

$$I_{n2} = \frac{\omega_0 n^2 p_a^2}{a^3 \epsilon} \left\{ \beta_1 J_{2n}(2n \beta_1) - \int_0^{\beta_1} [1 - n^2(1 - \beta_1^2)(2 - \beta_1^2 - x^2)] \times \right. \\ \left. \times J_{2n}(2nx) dx \right\}. \quad (35)$$

Проанализируем подробно выражение  $I_{n1}$ . При малых скоростях движения, когда  $\beta_1 \ll 1$ , из формулы (34) следует

$$I_{n1} \approx \frac{2\omega_0}{\varepsilon a^3} \frac{(n\beta_1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \left[ (n+1)(a^2 q^2 + n^2 p_\varphi^2) + (\beta_1 n p_z)^2 \frac{n+3}{2n+3} \right]. \quad (36)$$

Основная часть излучаемой энергии в этом случае приходится на первую гармонику

$$I_{11} \approx \frac{2\omega_0^4 \mu \sqrt{\varepsilon \mu}}{3 c^3} \left( a^2 q^2 + p_\varphi^2 + \frac{2}{5} \beta_1^2 p_z^2 \right). \quad (37)$$

Это выражение можно также получить из формулы (33) при  $\beta_1 \rightarrow 0$ .

В случае больших скоростей движения зарядов, когда выполняется соотношение  $\beta_1 \leq 1$ , удобно воспользоваться известными представлениями бесселевых функций при больших значениях индекса и аргумента (см. формулу (15), а также [1, 3]). Формулы (34), (35) преобразуются при  $\beta_1 \leq 1$  к виду

$$\begin{aligned} I_{n1} &\approx \frac{3\mu\omega_0^3 u}{2\pi\sqrt{3}ac^2(1-\beta_1)^{1/2}} \left[ a^2 q^2 + \frac{9u^2 p_\varphi^2}{4(1-\beta_1^2)^3} \right] \left[ 2K_{2/3}(u) - \right. \\ &- \left. \int_u^\infty K_{1/3}(x) dx \right] + \frac{9\mu\omega_0^3 p_z^2 u^2}{4\pi\sqrt{3}ac^2(1-\beta_1^2)^{5/2}} \left\{ K_{1/3}(u) + \frac{3}{4} u \int_u^\infty \left[ 1 - \right. \right. \\ &-\left. \left( \frac{x}{u} \right)^{2/3} \right] K_{1/3}(x) dx - \frac{1-\beta_1^2}{3u} \int_u^\infty K_{1/3}(x) dx \right\}; \\ I_{n2} &= \frac{9\omega_0 p_a^2 u^2}{4\pi\sqrt{3}\varepsilon a^3(1-\beta_1^2)^{5/2}} \left\{ K_{1/3}(u) + \frac{3}{4} u \int_u^\infty \left[ 1 + \right. \right. \\ &+\left. \left( \frac{x}{u} \right)^{2/3} \right] K_{1/3}(x) dx - \frac{1-\beta_1^2}{3u} \int_u^\infty K_{1/3}(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь введены обозначения  $u = n/n_c$  и  $n_c = 3/2(1-\beta_1^2)^{3/2}$ . Как показал анализ частных случаев  $u \gg 1$  и  $u \ll 1$ , третьими членами в фигурных скобках (38), (39) можно пренебречь. При  $u \ll 1$ , т. е. для гармоник  $1 \ll n \ll n_c$ , пользуясь известной асимптотикой функций Макдональда

$$K_v(x) \approx \frac{2^{v-1} \Gamma(v)}{x^v},$$

из формулы (38) получаем

$$\begin{aligned} I_{n1} &\approx \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3) \mu \omega_0^3}{2^{1/3} \pi ac^2(1-\beta_1^2)^{1/2}} u^{1/3} \left[ a^2 q^2 + \frac{9}{4} \frac{u^2 p_\varphi^2}{(1-\beta_1^2)^3} \right] + \\ &+ \frac{3\sqrt{3}\mu\omega_0^3 p_z^2 \Gamma(1/3)}{2^{8/3} ac^2(1-\beta_1^2)^{5/2}} u^{5/3} \quad (1 \ll n \ll n_c). \end{aligned} \quad (40)$$

С другой стороны, при  $u \gg 1$ , что соответствует условию  $n \gg n_c$ , из формулы (38) следует

$$I_{n_1} \approx -\frac{\sqrt{3} \mu \omega_0^3}{2^{3/2} ac^2 (1 - \beta_1^2)^{1/2}} u^{1/2} \left[ a^2 q^2 + \frac{9 u^2 p_z^2}{4(1 - \beta_1^2)^3} \right] e^{-u} + \\ + \frac{9 \mu \omega_0^3 p_z^2}{8 \sqrt{6\pi} ac^2 (1 - \beta_1^2)^{5/2}} u^{3/2} e^{-u} \quad (n \gg n_c). \quad (41)$$

При выводе формулы (41) из (38) использованы соотношения

$$K_v(x) \approx \sqrt{\pi/2x} e^{-x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

$$\int_u^\infty x^{v-1} e^{-x} dx = \Gamma(v, u), \quad \Gamma(v, u)_{u \gg 1} \approx u^{v-1} \left(1 - \frac{1-v}{u}\right) e^{-u},$$

где  $\Gamma(v, u)$  — неполная гамма-функция.

Таким образом, из формул (40), (41) следует, что при  $1 \ll n \ll n_c$  интенсивность  $I_{n_1}$  растет с увеличением номера гармоники  $n$ , а при  $n \gg n_c$   $I_{n_1}$  экспоненциально убывает с ростом  $n$ . Следовательно, при  $n \sim n_c$  имеет место максимум интенсивности излучения как заряда  $q$ , так и дипольного момента  $p_z^*$ . Аналогичный результат получается при анализе формулы для  $I_{n_2}$ . Из условия  $\epsilon \mu \beta^2 \leq 1$  следует, что  $\omega_c \gg \omega_0$  и спектральное распределение (38) можно считать квазинепрерывным [1-3]:

$$dI \approx \frac{3 I_n}{2(1 - \beta_1^2)^{3/2}} du. \quad (42)$$

Если подставить в формулу (42) распределение интенсивности  $I_{n_1}$  и проинтегрировать по переменной  $u$  в пределах от 0 до  $\infty$ , то получим

$$I \approx \frac{2 \mu \omega_0^3}{3 ac^2 (1 - \beta_1^2)^2} \left[ a^2 q^2 + \frac{p_z^2}{(1 - \beta_1^2)^2} + \frac{7 p_z^2}{(1 - \beta_1^2)^3} \right]. \quad (43)$$

Этот результат можно получить независимо из формулы (33) при  $\epsilon \mu \beta^2 \approx 1$ .

Таким образом, в акустическом случае при околозвуковых скоростях движения диполей по окружности, а в электромагнитном случае — при скоростях, близких к черенковскому пределу, излучение диполей быстро возрастает с увеличением скорости. Однако следует иметь в виду, что, когда длина волны, на которую приходится основная часть излучения  $\lambda_c = \pi c (1 - \epsilon \mu \beta^2)^{3/2} / \omega_0 \sqrt{\epsilon \mu}$ , становится сравнимой с плечом диполя, условие элементарности излучателя нарушается. Из этого условия и непосредственно из формул (33), (43) следует, что интенсивность излучения элементарного диполя с зарядами  $\pm q$  всегда меньше интенсивности излучения одиночного заряда  $q$  при одних и тех же величинах  $a$  и  $\omega_0$ . Тем не менее, как это видно из соотношений (33), (43), излучение диполей с ростом скорости увеличивается быстрее, чем излучение одиночного заряда  $q$ .

В заключение выражаю благодарность Г. Г. Гетманцеву, С. А. Каплану и особенно В. Я. Эйдману за ценные замечания.

\* Как показано в [15], для диполя максимум интенсивности должен быть смешен в сторону более высоких частот по сравнению с максимумом для заряда  $q$  при одной и той же угловой скорости вращения  $\omega_0$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Просуммируем ряды

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 J_n^2(n\varepsilon), \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 J_n'^2(n\varepsilon). \quad (\text{П.1})$$

Эти ряды относятся к классу рядов Каптейна [14]. Абсолютная сходимость  $S_1$  и  $S_2$  при  $\varepsilon < 1$  устанавливается так же, как это сделано для аналогичных рядов в монографии Ватсона [14]. Удобный способ суммирования подобных рядов, содержащих бесселевы функции и полиномиальные коэффициенты, был предложен в работе [6]. Пользуясь абсолютной сходимостью рядов (П.1) при  $\varepsilon < 1$ , перепишем первый из них в виде

$$S_1 \equiv \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 J_n^2(nx) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^4 J_{2n}(2n\varepsilon \cos \varphi) \right] d\varphi. \quad (\text{П.2})$$

Просуммируем вспомогательный ряд Каптейна, также абсолютно сходящийся:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^4 J_{2n}(2nx) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^4 \exp[-2in(\theta - x \sin \theta)] \right\} d\theta = \\ &= \frac{1}{32\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{1-x \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \frac{1}{1-x \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \frac{1}{1-x \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \frac{1}{1-x \cos \theta} \frac{d}{d\theta} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-2in(\theta - x \sin \theta)] \right\} d\theta. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Ряд в выражении (П.3) есть по определению периодическая обобщенная функция

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp[-2in(\theta - x \sin \theta)] = \delta[2(\theta - x \sin \theta)] \quad (-\pi \leq \theta \leq +\pi). \quad (\text{П.4})$$

Из свойств периодической обобщенной функции Дирака (П.4) следует, что

$$\delta[2(\theta - x \sin \theta)] = \frac{\delta(\theta) + (\theta - \pi) + \delta(\theta + \pi)}{2(1 - x \cos \theta)} \quad (x < 1, \quad -\pi \leq \theta \leq +\pi). \quad (\text{П.5})$$

Заменяя сумму в (П.3) функцией Дирака (П.4), (П.5) и пользуясь известными правилами дифференцирования и интегрирования обобщенных функций, получим\*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^4 J_{2n}(2nx) = x^2 \frac{1 + 14x^2 + 21x^4 + 4x^6}{(1 - x^2)^7}. \quad (\text{П.6})$$

\* При интегрировании следует иметь в виду, что углы  $\theta = \pm \pi$  принадлежат концам интервала интегрирования и  $\int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) \delta(\theta \pm \pi) d\theta = 0,5 F(\pm \pi)$ .

Подставляя значение суммы (П.6) в выражение (П.2) и выполняя интегрирование по углу  $\varphi$  ( $x = \varepsilon \cos \varphi$ ,  $\varepsilon < 1$ ), окончательно будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 J_n^2(n\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 [8(8 + 74\varepsilon^2 + 59\varepsilon^4) + 27\varepsilon^6]}{256(1 - \varepsilon^2)^{13/2}}. \quad (\text{П.7})$$

Значение суммы  $S_2$  (П.1) находится с помощью известного функционального соотношения

$$J_n'^2(n\varepsilon) = \left[ \frac{1}{2n^2\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} + \frac{1}{2n^2} \frac{d^2}{d\varepsilon^2} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \right] J_n^2(n\varepsilon). \quad (\text{П.8})$$

С помощью (П.8) сумму  $S_2$  (П.1) можно записать в виде

$$S_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{d\varepsilon} + \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \right) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(n\varepsilon) + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) S_1. \quad (\text{П.9})$$

Суммы в правой части соотношения (П.9) известны (см. (30) и (П.7)). Таким образом, окончательно получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 J_n'^2(n\varepsilon) = \frac{8(8 + 78\varepsilon^2 + 79\varepsilon^4) + 45\varepsilon^6}{256(1 - \varepsilon^2)^{11/2}}. \quad (\text{П.10})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1967.
2. В. Л. Гинзбург, С. И. Сыроватский, Происхождение космических лучей, изд. АН СССР, М., 1963.
3. Синхротронное излучение, сб. под редакцией А. А. Соколова, И. М. Тернова, изд. Наука, М., 1966.
4. Д. И. Блохинцев, Акустика неоднородной движущейся среды, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
5. В. П. Докучаев, Акуст. ж., 11, 324 (1965), 13, 192 (1967).
6. В. П. Докучаев, Акуст. ж., 15, 361 (1969).
7. Ф. И. Франкль, Е. А. Карпович, Газодинамика тонких тел, Гостехиздат, 1948.
8. В. П. Докучаев, ПММ, 30, 1006 (1966).
9. И. М. Франк, сб. памяти С. И. Вавилова, изд. АН СССР, 1952, стр. 172.
10. В. Л. Гинзбург, В. Я. Эйдман, ЖЭТФ, 35, 1508 (1958).
11. В. Н. Цытович, Вестник МГУ, № 11, серия физ.-мат. наук, № 7, 27 (1951).
12. А. Г. Ситенко, Диссертация, ХГУ, Харьков, 1952.
13. М. И. Каганов, Ученые записки ХГУ, 49, 67 (1953).
14. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, М., 1949.
15. С. А. Каплан, В. Я. Эйдман, Астрофизика (в печати).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
4 декабря 1969 г.

## WAVE RADIATION BY ELEMENTARY STATIC DIPOLES UNIFORMLY MOVING ALONG A CIRCLE

V. P. Dokuchaev

The author considers the radiation of sonic and electromagnetic waves by an acoustic and electric dipole uniformly moving along a circle in a medium without dispersion. The fields in a wave zone have been found, as well as the distribution of the radiation intensity over the angles (the radiation pattern) and frequencies (the energy spectrum). The formulas are derived for the full radiation intensity. It is shown that with increasing the motion velocity of the source along the circle the radiation intensity greatly increase as far as their velocity approaches the phase velocity of normal waves in the medium.

УДК 538.56

## СРЕДНЕЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ПЛОСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ СЛОЕ

*Г. А. Пономарев, Н. А. Симакова, В. П. Якубов*

Предлагается строгий метод решения интегрального уравнения Дайсона для средней функции Грина плоского случайно неоднородного диэлектрического слоя. Для массового оператора используется приближение Бурре. Выясняются условия, при которых для анализа среднего поля в дальней зоне можно рассматривать турбулентный слой как однородный, но с некоторым поглощением.

В данной работе найдена средняя функция Грина плоского турбулентного слоя как решение интегрального уравнения Дайсона, полученного в общей теории многократного рассеяния [1]. Эта задача в приближении Бурре для массового оператора уже рассматривалась в [2], где было получено приближенное решение, справедливое при ряде упрощений. В отличие от [2] здесь предлагается строгое решение интегрального уравнения. Это позволяет получить новые результаты и, в частности, с должным обоснованием сформулировать условия, при которых, рассматривая среднее поле, можно турбулентный слой считать однородным слоем с некоторым поглощением. Предлагаемый метод решения интегрального уравнения основан на исследовании аналитических свойств трансформанты Фурье искомой функции в плоскости комплексного переменного и применим не только в случае плоского турбулентного слоя. Без существенных изменений он может быть использован, например, при рассмотрении среднего поля в случайно неоднородном бесконечном цилиндре, в случайно неоднородной диэлектрической сфере.

Рассмотрим поле точечного скалярного источника в диэлектрическом слое толщиной  $2d (|x| \leq d, -\infty < y, z < \infty)$ . Диэлектрическую проницаемость слоя будем считать случайной функцией координат  $\epsilon(x, y, z)$  с постоянным для всех точек слоя средним значением  $\bar{\epsilon}$ . В этом случае скалярная функция Грина будет решением дифференциального уравнения

$$\{ \Delta + k_0^2 [1 + F(r) \Delta \epsilon(r)] \} U(r, r_0) = \delta(r - r_0), \quad (1)$$

где  $\Delta \epsilon(r) = \epsilon(r) - 1$ ,  $\Delta \epsilon = \bar{\Delta \epsilon} + \delta \epsilon(r)$  и  $F(r)$  есть характеристическая функция слоя:

$$F(r) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq d) \\ 0 & (|x| > d) \end{cases}. \quad (2)$$

Из (1) после усреднения можно получить интегральное уравнение Дайсона для средней функции Грина  $\bar{U} \equiv J$  [1], которое имеет вид (интегрирование ведется по всему бесконечному пространству)

$$\begin{aligned} J(r, r_0) = G_0(r - r_0) - k_0^2 \bar{\Delta \epsilon} \int G_0(r - r') dr' F(r') \times \\ \times J(r', r_0) + k_0^4 \iint G_0(r - r') dr' M(r', r'') dr'' J(r'', r_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  — функция Грина в случае бесконечного однородного пространства,

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{\exp(i\mathbf{k}_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \quad (4)$$

а  $M(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$  — ядро массового оператора, которое в приближении Бурре и при условии  $\Delta\varepsilon \ll 1$  выражается через корреляционную функцию флюктуаций показателя преломления и функцию  $G_0$ :

$$M(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = G_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') B(\mathbf{r}', \mathbf{r}''). \quad (5)$$

Будем считать, что функция  $B(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$  может быть выбрана в виде

$$1) F(\mathbf{r}') B_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \text{ или } 2) F(\mathbf{r}') B_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') F(\mathbf{r}''), \quad (6)$$

где  $B_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')$  — корреляционная функция флюктуаций  $\delta\varepsilon$  для безграничного пространства. Для определенности положим

$$B_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') = \sigma^2 \exp(-\alpha|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|), \quad \sigma^2 = \overline{\delta\varepsilon^2}. \quad (7)$$

Полностью совпадая внутри слоя, функции (6.1) и (6.2) по-разному описывают, по сути дела, лишь область вблизи границы слоя толщиной в несколько радиусов корреляции  $b = \alpha^{-1}$ . Ниже мы рассмотрим решение уравнения (3) как в первом, так и во втором случае, поскольку сопоставление результатов позволит судить о роли переходного слоя в формировании поля.

Применим к каждому члену уравнения Дайсона (3) преобразование Фурье вида

$$U(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} U(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_x^2 + k_{\perp}^2. \quad (8)$$

В результате получим два уравнения, соответствующие определениям (6.1) и (6.2):

$$\begin{aligned} J(\mathbf{k}, x_0) &= G_0(\mathbf{k}) \left\{ \exp(i\mathbf{k}_x x_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{k}_x - \mathbf{k}'_x) \times \right. \\ &\quad \left. \times [k_0^2 \overline{\Delta\varepsilon} - M_0(\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{k}'_x)] J(\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{k}_x, x_0) \right\}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$J(\mathbf{k}, x_0) = G_0(\mathbf{k}) \left\{ \exp(i\mathbf{k}_x x_0) - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{k}_x - \mathbf{k}'_x) \times \right. \quad (10)$$

$$\left. \times [k_0^2 \overline{\Delta\varepsilon} 2\pi\delta(\mathbf{k}'_x - \mathbf{k}''_x) - M_0(\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{k}_x) F(\mathbf{k}''_x - \mathbf{k}'_x)] J(\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{k}''_x, x_0) dk'_x dk''_x \right\},$$

$$M_0(\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{k}_x) = -k_0^4 \sigma^2 / (k^2 - q^2), \quad q = \mathbf{k}_0 + i\alpha.$$

Рассмотрим аналитические свойства трансформанты Фурье  $J(\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{k}_x, x_0)$  как функции комплексной переменной  $k_x$ . Будем считать для определенности, что  $|x_0| < d$ . Выделяя преобразование по координате  $x$ , запишем формулу (8) для  $J(\mathbf{k}, x_0)$  в виде

$$J(\mathbf{k}, x_0) = \left\{ \int_{-\infty}^{-d} + \int_{-d}^d + \int_d^{\infty} \right\} J(\mathbf{k}_{\perp}, x, x_0) e^{ik_x x} dx. \quad (11)$$

Интеграл в конечных пределах  $(-d, d)$  есть целая функция комплексной переменной  $k_x$ , асимптотическое поведение которой в верхней и нижней полуплоскостях комплексной плоскости определяется функциями  $\exp(|\operatorname{Im} k_x|d)$  и  $\exp(|\operatorname{Im} k_x| |x_0|)$ , но поскольку  $|x_0| < d$ , то члены, содержащие вторую экспоненту, можно не принимать во внимание.

При  $|x| > d$  функция  $J(k_\perp, x, x_0)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + p_1^2 \right) J(k_\perp, x, x_0) = 0, \quad p_1^2 = k_0^2 - k_\perp^2, \quad \operatorname{Im} p_1 > 0$$

и может быть записана в виде

$$A_+(k_\perp) e^{ip_1 x} \quad (x > d); \quad A_-(k_\perp) e^{-ip_1 x} \quad (x < -d). \quad (12)$$

Следовательно, функция, представляемая первым интегралом в (11) и аналитическая в нижней полуплоскости  $\operatorname{Im} k_x < \operatorname{Im} k_0$ , в верхней имеет полюс в точке  $k_x = p_1$  и растет при  $\operatorname{Im} k_x \rightarrow \infty$  не быстрее  $\exp |\operatorname{Im} k_x| d$ . Аналогично, третий интеграл—функция, регулярная в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} k_x > -\operatorname{Im} k_0$ , имеет полюс в точке  $k_x = -p_1$  и при  $\operatorname{Im} k_x \rightarrow -\infty$  растет не быстрее  $\exp(|\operatorname{Im} k_x| d)$ . Таким образом, в целом из (11) и (12) следует, что функция  $J(k_\perp, k_x, x_0)$  может быть записана в виде

$$J(k_\perp, k_x, x_0) = \frac{Q(k_\perp, k_x, x_0)}{k_x^2 - p_1^2}, \quad (13)$$

где  $Q(k_\perp, k_x, x_0)$  — целая функция переменной  $k_x$  с известным асимптотическим поведением при  $|\operatorname{Im} k_x| \rightarrow \infty$ .

Указанные свойства трансформанты Фурье  $J(k_\perp, k_x, x_0)$  позволяют вычислить интегралы в уравнениях (9) и (10) с точностью до неопределенных не зависящих от  $k_x$  коэффициентов. Покажем это на примере уравнения (9). Используя (13), запишем его в следующей форме:

$$J(k_\perp, x_0) = G_0(k) \left\{ \exp(i k_x x_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(k_x - k'_x)d] - \exp[-i(k_x - k'_x)d]}{i(k_x - k'_x)} \times \right. \\ \left. \times \left( k_0^2 \overline{\Delta\varepsilon} + \frac{k_0^4 \sigma^2}{k'^2_x - q_x^2} \right) \frac{Q(k_\perp, k'_x, x_0)}{k'^2_x - p_1^2} dk'_x \right\}, \quad (14)$$

$$q_x = [(k_0 + i\alpha)^2 - k_\perp^2]^{1/2}, \quad \operatorname{Im} q_x > 0.$$

Несобственный интеграл в правой части (14) разобьем на сумму двух интегралов, определяя их в смысле главного значения по Коши:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(k_x - k'_x)d]}{i(k_x - k'_x)} \left( k_0^2 \overline{\Delta\varepsilon} + \frac{k_0^4 \sigma^2}{k'^2_x - q_x^2} \right) \frac{Q(k_\perp, k'_x, x_0)}{k'^2_x - p_1^2} \times \\ \times dk'_x - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i(k_x - k'_x)d]}{i(k_x - k'_x)} \left( k_0^2 \overline{\Delta\varepsilon} + \frac{k_0^4 \sigma^2}{k'^2_x - q_x^2} \right) \times \\ \times \frac{Q(k_\perp, k'_x, x_0)}{k'^2_x - p_1^2} dk'_x.$$

В первом интеграле устраним разрыв контура, соединяя его концы в точках  $k'_x = k_x - \delta$  и  $k'_x = k_x + \delta$  дугой радиуса  $\delta$  с обходом точки  $k'_x = k_x$  снизу, и деформируем затем его в нижнюю полуплоскость; аналогично дополним контур во втором интеграле дугой радиуса  $\delta$  с обходом точки  $k'_x = k_x$  сверху и деформируем его в верхнюю полуплоскость. При этом вычисление интегралов сводится к нахождению вычетов в полюсах  $k'_x = \pm p_1, \pm q_x$  подынтегральных функций и учету дополнительных вкладов, вносимых интегрированием по двум дугам окружностей радиуса  $\delta$ . Эти вклады в сумме равны вычету подынтегральной функции в точке  $k'_x = k_x$ . В результате получим

$$\begin{aligned} J(\mathbf{k}, x_0) = & -\frac{1}{k^2 - k_2^2 - M_0(\mathbf{k})} \left[ \exp(i\mathbf{k}_x \cdot \mathbf{x}_0) + \exp(ik_x d) \left( \frac{C_1}{k_x + p_1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{C_3}{k_x + q_x} \right) + \exp(-ik_x d) \left( \frac{C_2}{k_x - p_1} + \frac{C_4}{k_x - q_x} \right) \right], \\ k_2^2 = & k_0^2(1 + \bar{\Delta}\epsilon), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $C_{1-4}$  — неизвестные функции от  $\mathbf{k}_\perp$ , которые связаны со значениями функции  $Q$  в точках  $k'_x = \pm p_1, \pm q_x$  и не зависят от  $k_x$ .

Заметим теперь, что при произвольных  $C_{1-4}$  функция в правой части (15) имеет полюса в корнях уравнения

$$k^2 - k_2^2 - M_0(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{или} \quad (k^2 - k_2^2)(k^2 - q^2) - k_0^4 \sigma^2 = 0. \quad (16)$$

Обозначим эти корни через  $\pm x_1, \pm x_2$ . Тогда в соответствии с (13) коэффициенты  $C_{1-4}$  должны быть подобраны так, чтобы функция  $J(\mathbf{k}, x_0)$  не имела полюсов в точках  $k_x = \pm x_{1x}, \pm x_{2x}$  ( $x_{1,2x}^2 = x_{1,2}^2 - k_\perp^2$ ,  $\operatorname{Im} x_{1,2x} > 0$ ), что приводит к системе четырех алгебраических уравнений, определитель которой

$$\Delta(\mathbf{k}_\perp) = \begin{vmatrix} C_{p_1}^{x_{1x}} & -C_{p_1}^{-x_{1x}} & C_{q_x}^{x_{1x}} & -C_{q_x}^{-x_{1x}} \\ -C_{p_1}^{-x_{1x}} & C_{p_1}^{x_{1x}} & -C_{q_x}^{-x_{1x}} & C_{q_x}^{x_{1x}} \\ C_{p_1}^{x_{2x}} & -C_{p_1}^{-x_{2x}} & C_{q_x}^{x_{2x}} & -C_{q_x}^{-x_{2x}} \\ -C_{p_1}^{-x_{2x}} & C_{p_1}^{x_{2x}} & -C_{q_x}^{-x_{2x}} & C_{q_x}^{x_{2x}} \end{vmatrix}, \quad (17)$$

$$C_l = e^{i\gamma d}/(l + \gamma).$$

По правилу Крамера

$$C_n(\mathbf{k}_\perp) = \Delta_n/\Delta, \quad n = 1, 2, 3, 4, \quad (18)$$

причем определители  $\Delta_n$  получаются из  $\Delta$  заменой  $n$ -го столбца на столбец

$$\begin{bmatrix} -\exp(+ix_{1x}x_0) \\ \exp(-ix_{1x}x_0) \\ -\exp(-ix_{2x}x_0) \\ \exp(-ix_{2x}x_0) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Таким образом, трансформанта Фурье искомой функции Грина полностью определена выражениями (15) — (18), и решение уравнения Дай-

сона (3) можно найти из (15) с помощью обратного преобразования Фурье. При этом, например, для области  $x > d$  в случае, соответствующем определению (6.1), найдем

$$J(r, r_0) = -\frac{i}{(2\pi)^2} \frac{(k_0^2 - q^2)}{(k_0^2 - x_1^2)(k_0^2 - x_2^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_1(k_{\perp}) \times \\ \times \exp [ip_1(x-d) - ik_y(y-y_0) - ik_z(z-z_0)] dk_y dk_z, \quad (20)$$

где  $C_1(k_{\perp})$  определяется формулами (17)–(19).

Метод, во многом аналогичный описанному, приводит при выборе корреляционной функции в виде (6.2) к несколько иному выражению для  $C_1(k_{\perp})$  в (20), поскольку определитель (17) в этом случае имеет вид

$$\Delta(k_{\perp}) = \begin{vmatrix} (C_{p_1}^{x_{1x}} + DC_{-q_x}^{x_{1x}}) & - (C_{p_1}^{-x_{1x}} + DC_{-q_x}^{-x_{1x}}) & C_{q_x}^{x_{1x}} & - C_{q_x}^{-x_{1x}} \\ - (C_{p_1}^{-x_{1x}} + DC_{-q_x}^{-x_{1x}}) & (C_{p_1}^{x_{1x}} + DC_{-q_x}^{x_{1x}}) & - C_{q_x}^{-x_{1x}} & C_{q_x}^{x_{1x}} \\ (C_{p_1}^{x_{2x}} + DC_{-q_x}^{x_{2x}}) & - (C_{p_1}^{-x_{2x}} + DC_{-q_x}^{-x_{2x}}) & C_{q_x}^{x_{2x}} & - C_{q_x}^{-x_{2x}} \\ - (C_{p_1}^{-x_{2x}} + DC_{-q_x}^{-x_{2x}}) & (C_{p_1}^{x_{2x}} + DC_{-q_x}^{x_{2x}}) & - C_{q_x}^{-x_{2x}} & C_{q_x}^{x_{2x}} \end{vmatrix}, \quad (21)$$

где

$$D = \frac{k_0^4 \sigma^2 (p_1 - q_x)}{2q_x [k_0^2 \Delta \epsilon (p_1^2 - q_x^2) + k_0^4 \sigma^2]}. \quad (22)$$

Выражение (20) можно значительно упростить, если рассматривать поле в дальней зоне. В этом случае основной вклад в интеграл по  $k_{\perp}$  вносит интегрирование по участку перевального контура в окрестности перевальной точки. Как обычно, можно ожидать, что в дальней зоне будут присутствовать наряду с полем излучения поля поверхностных волн, которым при вычислении интеграла в (20) будут соответствовать вычеты в полюсах подынтегральной функции, обусловленных корнями уравнения

$$\Delta(k_{\perp}) = 0. \quad (23)$$

Ограничимся изучением корней  $k_{\perp m}$  уравнения (23), иммажная часть которых мала по сравнению с  $k_0$  и которые, таким образом, соответствуют волнам, слабо затухающим в направлении вдоль слоя.

Будем требовать также малости дисперсии флюктуаций показателя преломления ( $\sigma^2 \ll 1$ ). При этом корни  $\pm \omega_1, \pm \omega_2$  уравнения (16) легко вычислить приближенно:

$$\omega_1^2 = k_2^2 + \frac{k_0^4 \sigma^2}{k_2^2 - q^2} + O(\sigma^4), \quad \omega_2^2 = q^2 + \frac{k_0^4 \sigma^2}{q^2 - k_2^2} + O(\sigma^4). \quad (24)$$

Нетрудно убедиться в том, что при условии

$$\sigma d \gg 1 \quad (25)$$

неравенства  $\text{Im } q_x d \gg 1$  и  $\text{Im } \omega_{2x} d \gg 1$  выполняются в области  $k_{\perp}^1 k_{\perp}^2 < c \ll \ll \sigma k_0$  комплексной плоскости  $k_{\perp} = k_{\perp}^1 + ik_{\perp}^2$ . Внутренними точками этой области при соответствующем выборе  $c$  оказываются как точка пе-

ревала, так и корни  $k_{\perp m}$  уравнения (23), соответствующие слабо затухающим поверхностным волнам, точнее, волнам, длина экстинкции  $l$  для которых многое больше радиуса корреляции  $\alpha^{-1}$

$$l \equiv \frac{1}{2k_{\perp m}} \gg \alpha^{-1}.$$

Это обстоятельство позволяет пренебречь в определителях (17) и (21) членами, содержащими  $\exp(i\chi_{2x}d)$ .

Представим далее определитель (17) в виде

$$-\left(C_{q_x}^{-x_{2x}}\right)^2 \begin{vmatrix} C_{p_1}^{x_{1x}} & -C_{p_1}^{-x_{1x}} \\ -C_{p_1}^{-x_{1x}} & C_{p_1}^{x_{1x}} \end{vmatrix} - 2\left(C_{q_x}^{-x_{2x}} \quad C_{p_1}^{-x_{2x}}\right) \begin{vmatrix} -C_{p_1}^{-x_{1x}} & C_{q_x}^{x_{1x}} \\ C_{p_1}^{x_{1x}} & -C_{q_x}^{-x_{1x}} \end{vmatrix} - \quad (26) \\ -\left(C_{p_1}^{-x_{2x}}\right)^2 \begin{vmatrix} C_{q_x}^{x_{1x}} & -C_{q_x}^{-x_{1x}} \\ -C_{q_x}^{-x_{1x}} & C_{q_x}^{x_{1x}} \end{vmatrix},$$

введем обозначения

$$\nu = (\alpha/k_0), \quad \gamma^2 = \sigma^2/\nu^2 \ll 1$$

и рассмотрим уравнение  $\Delta(k_{\perp}) = 0$  при  $\nu \leq 1$ . В этом случае можно сделать следующие оценки:

$$\chi_{2x} - q_x \sim \gamma^2 \nu, \quad \chi_{1x} - q_x \sim \nu, \quad \chi_{2x} - p_1 \sim \nu, \quad \chi_{1x} - p_1 \sim \bar{\Delta}\varepsilon$$

при условии  $\bar{\Delta}\varepsilon \gg \gamma^2 \nu$ . В результате оказывается, что первый член в (26) имеет порядок  $[\gamma^2 \nu]^{-2} \bar{\Delta}\varepsilon^{-2}$ , второй —  $[\gamma^2 \nu^3]^{-1} \bar{\Delta}\varepsilon^{-1}$  и, наконец, третий —  $\nu^{-4}$ ; в целом же выражение (26) есть разложение определителя (17) по степеням величины  $\gamma^2 \bar{\Delta}\varepsilon / \nu \ll 1$ .

В случае мелкомасштабных неоднородностей  $\nu > 1$  справедливы следующие оценки:

$$\chi_{2x} - q_x \sim \gamma^2 / \nu, \quad \chi_{1x} - q_x \sim \nu, \quad \chi_{2x} - p_1 \sim \nu, \quad \chi_{1x} - p_1 \sim \bar{\Delta}\varepsilon$$

при условии  $\bar{\Delta}\varepsilon \gg \gamma^2$ . При этом определитель оказывается расположенным по степеням величины  $\gamma^2 \bar{\Delta}\varepsilon / \nu^3$ . Заметим, что отношения первых из отброшенных членов ядра массового оператора  $M(k)$  к двум удержанным ( $k_0^2 \bar{\Delta}\varepsilon$  и  $M_0$ ) в нашем случае имеют соответственно порядок  $\gamma^2$ ,  $\bar{\Delta}\varepsilon / \nu$  при  $\nu \leq 1$  и  $\gamma^2 / \nu$ ,  $\bar{\Delta}\varepsilon / \nu$  при  $\nu > 1$ , что делает необходимыми условия

$$\gamma^2 \ll 1, \quad \bar{\Delta}\varepsilon / \nu \ll 1 \quad (\nu \leq 1), \quad (27) \\ \gamma^2 / \nu \ll 1, \quad \bar{\Delta}\varepsilon / \nu \ll 1 \quad (\nu > 1).$$

В пределах этого приближения в (25) достаточно удержать лишь первый член. Тогда уравнение  $\Delta(k_{\perp}) = 0$ , определяющее волновые числа поверхностных волн, сводится к системе уравнений

$$ip_1 = \chi_{1x} \operatorname{tg} \chi_{1x} d, \quad ip_1 = \chi_{1x} \operatorname{ctg} \chi_{1x} d, \quad (28)$$

которые по форме полностью совпадают с характеристическими уравнениями для четных и нечетных магнитных волн диэлектрического слоя без флуктуаций [3], но с эффективной постоянной распространения  $\chi_1$ , определенной в (24).

Описанные преобразования можно без каких-либо существенных изменений применить и к определителю  $\Delta_1(k_{\perp})$ , получаемому из (17).

Это приводит нас к следующему выражению для функции  $C_1(k_\perp)$  в интеграле (20) в окрестности перевальной точки:

$$C_1(k_\perp) = -\frac{k_0^2 - x_1^2}{2} \times \\ \times \frac{x_{1x} \cos x_{1x}(x_0 + d) - ip_1 \sin x_{1x}(x_0 + d)}{(x_{1x} \cos x_{1x}d - ip_1 \sin x_{1x}d)(p_1 \cos x_{1x}d - ix_{1x} \sin x_{1x}d)},$$

что позволяет в дальней зоне в пределах принятых приближений (25) и (27) искомую функцию  $J(r, r_0)$  рассматривать в целом как поле точечного источника в плоском слое с эффективной постоянной распространения  $x_1$ .

Заметим, однако, что при этом оказывается важным вместе с (25), (27) соблюдение условий

$$\bar{\Delta}\epsilon \gg \gamma^2 \nu \quad (\nu \leqslant 1) \text{ или } \bar{\Delta}\epsilon \gg \gamma^2 \quad (\nu > 1). \quad (29)$$

Они следуют, во-первых, из тех соображений, чтобы в уравнениях

$$C_{p_1}^{x_{1x}} - C_{p_1}^{-x_{1x}} = 0, \quad C_{p_1}^{x_{1x}} + C_{p_1}^{-x_{1x}} = 0,$$

которые эквивалентны уравнениям (28), отношения первых членов ко вторым были по модулю больше, чем  $\gamma^2$  при  $\nu \leqslant 1$  и  $\gamma^2/\nu$  при  $\nu > 1$ . Иначе в принятом приближении уравнение  $\Delta(k_\perp) = 0$  не будет иметь корней, которые можно сопоставить с волновыми числами нормальных волн плоского турбулентного слоя.

Условие (29), таким образом, говорит о том, что турбулентный слой может обладать волноводными свойствами лишь тогда, когда его границы, создаваемые резким изменением  $\epsilon$ , не размываются флюктуациями. Во-вторых, при одинаковых предположениях выражения (17) и (21) для  $\Delta(k_\perp)$ , а значит и соответствующие выражения для  $\Delta_1(k_\perp)$ , будут близкими, как следует из рассмотрения (22), лишь при выполнении наряду с (25) и (27) условий (29). В противном случае различия могут быть существенными не только при описании поля внутри слоя, но и поля в дальней зоне вне слоя. Это можно объяснить лишь тем, что с уменьшением  $\bar{\Delta}\epsilon$  все сильнее начинает сказываться на результатах характер флюктуаций показателя преломления среды в области шириной в несколько радиусов корреляции вдоль границ плоского слоя. Указанное обстоятельство ставит под сомнение возможность сопоставления среднего поля источника в турбулентном слое, границы которого мало выражены изменением  $\epsilon$ , с полем источника в диэлектрическом слое с поглощением.

В заключение авторы выражают свою искреннюю благодарность В. И. Татарскому и Ю. Н. Барабаненкову за обсуждение работы и ряд ценных советов. Работа докладывалась на семинаре в НИРФИ в июне 1969 года, и авторы, пользуясь случаем, выражают свою признательность всем участникам семинара, в том числе Н. Г. Денисову, Ю. А. Рыжкову и В. В. Тамойкину за внимание и полезное обсуждение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
2. Ю. Н. Барабаненков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 4, 580 (1968).
3. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов. радио, М., 1957.

THE AVERAGE FIELD OF A POINT SOURCE IN A PLANE  
TURBULENT LAYER

*G. A. Ponomarev, N. A. Simakova, V. P. Yakubov*

An exact method is suggested to solve the Dyson's integral equation for the average Creen's function of a plane random-inhomogeneous dielectric layer. For the mass operator, the Burre's approximation is used. The conditions are clarified under which one may consider a turbulent layer as a uniform one with some absorption for analysing the average field in a far zone.

---

УДК 538.56 : 621.371

## КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ПОЛЯ, РАССЕЯННОГО ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ, ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ РАСПРОСТРАНЕНИИ

Э. П. Гулин

Рассчитана пространственно-временная и частотная корреляционная функция волнового поля при скользящем распространении вдоль взволнованной водной поверхности с низкими квазигармоническими неровностями.

1. В работе [1] методом малых возмущений получено общее выражение для частотно-пространственно-временной корреляционной функции поля, рассеянного гравитационными волнами на поверхности водного бассейна, и рассмотрен случай малых углов рассеяния, когда существенная для рассеяния область сосредоточена в окрестности точки зеркального отражения от средней плоскости. В то же время на практике нередко реализуются такие условия, когда ответственные за рассеяние участки поверхности расположены в окрестности источника и приемника, а другие участки, включая окрестность точки зеркального отражения, не играют заметной роли в формировании рассеянного поля, наблюдаемого в точке приема. Подобная картина обычно имеет место при малых углах скольжения зеркально-отраженной волны и является следствием квазигармонического характера волнения. В настоящей заметке мы остановимся на рассмотрении этого случая.

Предположим, что источник излучения и приемник расположены соответственно в точках с координатами  $(0, 0, z)$  и  $(X, Y, Z)$ , а возвышение поверхности  $F$  зависит лишь от одной координаты  $u$  и от времени  $t$  ( $z = F(u, t)$ , где  $u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ ). В соответствии с характеристиками реальной взволнованной поверхности будем считать, что пространственный спектр возвышений поверхности  $S(\sigma)$  сосредоточен в интервале от  $\sigma_{\min}$  до  $\sigma_{\max}$ , за пределами которого значения  $S(\sigma)$  пренебрежимо малы.

Для оценки интегралов, приведенных в [1], воспользуемся методом стационарной фазы, рассматривая интересующую нас область изменения параметров. В результате для корреляционной функции рассеянного поля получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Gamma_P (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta t, \Delta k) = & \frac{\Phi_1 \Phi_2}{X_1 X_2} \int_0^\infty S(\sigma) \left\{ \frac{Z_1 Z_2}{(z + Z_1)(z + Z_2)} \times \right. \\ & \times \exp \left[ -i\Omega(\sigma) \Delta t + i\sigma z \left( \sqrt{\frac{1 - \gamma_1}{\gamma_1}} - \sqrt{\frac{1 - \gamma_2}{\gamma_2}} \right) + \right. \\ & + iz \sin \alpha \left( k_1 \frac{Y_1}{X_1} \sqrt{\frac{\gamma_1}{1 - \gamma_1}} - \right. \\ & \left. \left. - k_2 \frac{Y_2}{X_2} \sqrt{\frac{\gamma_2}{1 - \gamma_2}} \right) + i(f_{R1} - f_{R2}) \right] + \frac{z^2}{(z + Z_1)(z + Z_2)} \times \end{aligned} \quad (1)$$

$$\times \exp \left[ i\Omega(\sigma) \Delta t - i\sigma \left( \Delta U - Z_1 \sqrt{\frac{1-\gamma_1}{\gamma_1}} + Z_2 \sqrt{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}} \right) + i \sin \alpha \left( k_1 Z_1 \frac{Y_1}{X_1} \sqrt{\frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}} - k_2 Z_2 \frac{Y_2}{X_2} \sqrt{\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2}} \right) + i(f_{p1} - f_{p2}) \right] d\sigma.$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\Phi = 2k \sin \psi \sqrt{\langle F^2 \rangle}$ ,  $k = \omega_0/c$ ,  $\sin \psi = (z+Z)/\sqrt{X^2+Y^2+(z+Z)^2}$ ,  $\Omega(\sigma) = \sqrt{g \sigma \operatorname{th}(\sigma h)}$ ,  $g = 9,81 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}$ ,  $h$  — глубина бассейна,  $U = X \cos \alpha + Y \sin \alpha$ ,  $f_R = -\omega_0 t + kR_z$ ,  $f_p = -\omega_0 t + kp_z$ ,  $R_z = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ,  $p_z = \sqrt{X^2 + Y^2 + z^2}$ ,  $\gamma = \sigma/2k \cos \alpha$ . Индексы 1 и 2 соответствуют «разнесенным» значениям параметров. Через  $\Delta Q$  обозначено приращение некоторого параметра  $Q$  ( $\Delta Q = Q_1 - Q_2$ ).

Выражение (1) справедливо при выполнении условий

$$\sigma_{\max}/k \cos \alpha \ll 1, \quad \sqrt{2k\sigma_{\min} \cos \alpha} \min(z, Z) \gg 1, \quad \max(x_-, x_+)/X \ll 1, \quad (2)$$

$$[k \max(Y^2, z^2, Z^2, Y^3/z, Y^3/Z)/X] [\max(x_-, x_+)/X] \ll 1,$$

где  $x_- = \sqrt{k/2\sigma \cos \alpha} z$ ,  $x_+ = \sqrt{k/2\sigma \cos \alpha} Z$ . Согласно (2), длина волны падающего излучения не должна превосходить проекцию длины гравитационной волны на ось  $x$ . Кроме того, накладываются ограничения снизу на расстояние между источником и приемником и на их удаление от поверхности. Неравенства (2) нарушаются в окрестности значения  $\cos \alpha = 0$ . В этом случае ответственные за рассеяние участки поверхности лежат в окрестности точки зеркального отражения, и для описания корреляционных свойств рассеянного поля можно пользоваться результатами работы [1].

2. Переидем к анализу выражения (1). При  $z = Z$  временная корреляционная функция рассеянного поля с точностью до фазового множителя  $\exp(-i\omega_0 \Delta t)$  совпадает с корреляционной функцией волнения. При  $z \neq Z$  имеет место более сложная зависимость. Частотный спектр рассеянного поля  $G_p(\omega)$  оказывается несимметричным относительно частоты излучения  $\omega_0$ :  $G_p(\omega) \sim G(\omega - \omega_0) Z^2/(z+Z)^2$  при  $\omega > \omega_0$ ,  $G_p(\omega) \sim G(\omega_0 - \omega) z^2/(z+Z)^2$  при  $\omega < \omega_0$ , где  $G$  — частотный спектр волнения. Асимметрию спектра качественно можно объяснить следующим образом. Как известно, при рассеянии на гравитационных волнах наблюдается допплеровское смещение частоты, причем в рассматриваемом случае участки поверхности, лежащие в окрестности излучателя и приемника и ответственные за рассеяние, обусловливают допплеровские сдвиги с противоположными знаками. Переизлучатели, расположенные в окрестности источника и приемника, рассеивают волны с амплитудами, пропорциональными соответственно  $\sin \tilde{\phi}/zX$  и  $\sin \tilde{\phi}/ZX$ , где  $\tilde{\sin \phi} = 2 \cos \alpha \sqrt{\gamma(1-\gamma)}$ . При  $z \neq Z$  будет преобладать рассеяние с тем или иным знаком допплеровского смещения, что и приводит к асимметрии частотного спектра. Отметим, что этот эффект наблюдается лишь в условиях бегущих гравитационных волн. В случае стоячих волн частотный спектр остается симметричным при любых значениях  $z/Z$ . При несвязанном падении на поверхность (см., например, [1]) ответственная за рассеяние область сосредоточена в достаточно малой окрестности точки зеркального отражения, поэтому практически все переизлучатели рассеивают волны с одинаковыми амплитудами, пропорциональными  $\sin^2 \tilde{\phi}/zZ$ , и частотный спектр всегда оказывается симметричным.

Пространственная корреляционная функция рассеянного поля при разнесении приемников по горизонтали представляется суммой двух

слагаемых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , имеющих разные масштабы (интервалы) корреляции. Для функции  $\Gamma_1$  масштаб корреляции определяется из соотношения  $|\Delta U| \approx a$  ( $a$ —пространственный интервал корреляции волнения)\*. Для функции  $\Gamma_2$  масштаб корреляции по порядку величины равен  $\Delta Y_0 \approx aX/x \sin \alpha$ . В случае  $\sin \alpha \approx 0$  корреляция спадает еще медленнее и определяется неучтенными при выводе (1) членами в показателе экспоненты подынтегрального выражения. Если ограничиться пространственными сдвигами, не слишком сильно превосходящими величину  $a$  ( $\Delta X, \Delta Y \ll aX/x$ ), то можно считать, что корреляция спадает до некоторого практически постоянного уровня, который определяется отношением  $z^2/Z^2$ . При  $Z \ll z$  корреляция спадает практически до нуля, а при  $Z \gg z$  почти полностью сохраняется вплоть до больших разнесений. Весьма медленный спад корреляции имеет место и при разнесении приемников поперек трассы распространения гравитационных волн (при  $\Delta U = \Delta X \cos \alpha + \Delta Y \sin \alpha \approx 0$ ).

3. Для определения масштабов корреляции при разнесении приемников по вертикали, масштабов частотной корреляции, а также характера спада пространственно-временной (ПВ) корреляции зададимся узкополосным спектром  $S(\sigma)$ , соответствующим корреляционной функции  $r(\xi) = r_1(\xi/a) \cos(q\xi) - r_2(\xi/a) \sin(q\xi)$  ( $q=2\pi/\Lambda$ ,  $\Lambda$ —средняя длина гравитационных волн,  $r_1$ —четная, а  $r_2$ —нечетная функции аргумента,  $qa \gg 1$ ), и проинтегрируем (1) в случаях мелкого и глубокого бассейнов.

Ограничиваясь при интегрировании линейными относительно  $\sigma = (\sigma - q)/q$  членами, получим

$$\Gamma_P = \frac{\Phi_1 \Phi_2}{2X_1 X_2} \left\{ \frac{Z_1 Z_2}{(z + Z_1)(z + Z_2)} \exp(iq\Delta\tilde{U}_1) [r_1(\xi_1) - ir_2(\xi_1)] + \right. \\ \left. + \frac{z^2}{(z + Z_1)(z + Z_2)} \exp(-iq\Delta\tilde{U}_2) [r_1(\xi_2) + ir_2(\xi_2)] \right\}, \quad (3)$$

где

$$\Delta\tilde{U}_1 = z \left( \sqrt{\frac{1 - \gamma_{01}}{\gamma_{01}}} - \sqrt{\frac{1 - \gamma_{02}}{\gamma_{02}}} \right) - v\Delta t + \frac{z \sin \alpha}{q} \left( k_1 \frac{Y_1}{X_1} \sqrt{\frac{\gamma_{01}}{1 - \gamma_{01}}} - \right. \\ \left. - k_2 \frac{Y_2}{X_2} \sqrt{\frac{\gamma_{02}}{1 - \gamma_{02}}} \right) + \frac{1}{q} (f_{R1} - f_{R2}),$$

$$\Delta\tilde{U}_2 = \Delta U - v\Delta t - \left( Z_1 \sqrt{\frac{1 - \gamma_{01}}{\gamma_{01}}} - Z_2 \sqrt{\frac{1 - \gamma_{02}}{\gamma_{02}}} \right) - \\ - \frac{\sin \alpha}{q} \left( k_1 Z_1 \frac{Y_1}{X_1} \sqrt{\frac{\gamma_{01}}{1 - \gamma_{01}}} - k_2 Z_2 \frac{Y_2}{X_2} \sqrt{\frac{\gamma_{02}}{1 - \gamma_{02}}} \right) - \frac{1}{q} (f_{p1} - f_{p2}),$$

$$\xi_1 = \frac{1}{a} \left\{ \frac{v\Delta t}{n} - \frac{z}{2} \left[ \frac{1 - 2\gamma_{01}}{\sqrt{\gamma_{01}(1 - \gamma_{01})}} - \frac{1 - 2\gamma_{02}}{\sqrt{\gamma_{02}(1 - \gamma_{02})}} \right] - \right. \\ \left. - \frac{z \sin \alpha}{2q} \left[ k_1 \frac{Y_1}{X_1} \frac{\sqrt{\gamma_{01}}(1 - 2\gamma_{01})}{(1 - \gamma_{01})^{3/2}} - k_2 \frac{Y_2}{X_2} \frac{\sqrt{\gamma_{02}}(1 - 2\gamma_{02})}{(1 - \gamma_{02})^{3/2}} \right] \right\},$$

\* В частном случае при  $\Delta U = \Delta X$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\sigma/k \ll 1$ ,  $z \approx Z$  пространственная корреляционная функция рассеянного поля была рассчитана в работе [2].

$$\begin{aligned}\xi_2 = \frac{1}{a} & \left\{ \frac{v\Delta t}{n} - \Delta U + \frac{1}{2} \left[ \frac{Z_1(1-2\gamma_{01})}{\sqrt{\gamma_{01}(1-\gamma_{01})}} - \frac{Z_2(1-2\gamma_{02})}{\sqrt{\gamma_{02}(1-\gamma_{02})}} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\sin \alpha}{2q} \left[ \frac{k_1 Y_1 Z_1}{X_1} \frac{\sqrt{\gamma_{01}}(1-2\gamma_{01})}{(1-\gamma_{01})^{3/2}} - \frac{k_2 Y_2 Z_2}{X_2} \frac{\sqrt{\gamma_{02}}(1-2\gamma_{02})}{(1-\gamma_{02})^{3/2}} \right] \right\},\end{aligned}$$

$\gamma_0 = q/2k \cos \alpha$ ,  $v = \Omega_0/q$ ,  $\Omega_0$  — средняя частота в спектре волнения,  $n=1$  и  $2$  соответственно для мелкого и для глубокого бассейнов.

Рассмотрим вначале корреляцию по вертикали. Как и при разнесении приемников по горизонтали, корреляция спадает до некоторого медленно убывающего уровня, определяемого отношением  $z^2/Z_1 Z_2$ . Интервал корреляции  $\Delta Z_0$  по спаду до этого уровня равен  $\Delta Z_0 \approx \sqrt{\gamma_0(1-\gamma_0)} / \times 2a/(1-2\gamma_0)$ . При условии  $\gamma_0 \ll 1$  (этот случай был рассмотрен в [2]) корреляция по вертикали спадает значительно быстрее, чем по горизонтали. В области  $\gamma_0 \approx 1/2$  интервал корреляции по вертикали заметно увеличивается, причем для его оценки нужно учесть квадратичные относительно  $\sigma$  члены в подынтегральном выражении (1). «Линейное» (по  $\sigma$ ) приближение, даваемое формулой (3), недостаточно также для описания корреляции при  $\Delta U \approx \Delta Z(1-2\gamma_0)/\sqrt{\gamma_0(1-\gamma_0)}$ , когда смещение ответственного за рассеяние участка вдоль оси  $u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$  при изменении положения приемника близко к нулю. Оценки с учетом членов  $\sim \sigma^2$  приводят к значению  $\Delta Z_0 \approx 8 aqa \sqrt{\gamma_0(1-\gamma_0)^3}$ . Поскольку при узкополосном волнении  $qa \gg 1$ , в рассматриваемых областях будем иметь  $\Delta Z_0 \gg a$ . Интересно отметить, что в отличие от случая малых углов рассеяния увеличение интервала корреляции происходит при разнесении приемников по направлению на ближний к ним участок, ответственный за рассеяние, а не по направлению зеркального отражения.

Остановимся теперь на ПВ корреляции поля. Прежде всего заметим, что временные корреляционные функции рассеянного поля и волнения отличаются лишь характером осцилляций, а быстрота их спада одинакова. ПВ корреляционная функция описывается суммой двух слагаемых. Одно из них при  $\Delta Y, \Delta X \ll X$  пропорционально временной корреляционной функции волнения и заметно спадает при  $\Delta t = \tau_0$ , где  $\tau_0 = an/v$ . Второе слагаемое при разнесении приемников по горизонтали пропорционально ПВ корреляционной функции волнения. Максимальные значения  $\Gamma(\Delta U, \Delta t)$  наблюдаются при  $\Delta t = n\Delta U/v$ , а спад корреляции (согласно результатам расчетов с учетом членов  $\sim \sigma^2$ ) характеризуется множителем  $b_\tau^{-1/2}$ , где  $b_\tau = v\Delta t(n-1)/2aqa$ . Для мелкого бассейна ( $n=1$ ) частичная корреляция сохраняется вплоть до весьма больших значений  $\Delta U$  и  $\Delta t$  при  $\Delta U \approx v\Delta t$ . Если приемники разнесены по вертикали, то спад корреляции в максимумах определяется множителем  $\tilde{b}^{-1/2}$ , где  $\tilde{b} = b_\tau - b_z$ ,  $b_z = \Delta Z/2aqa \sqrt{\gamma_0(1-\gamma_0)}$ . При  $\gamma_0 \approx 1/2$ , а также при разнесении приемников в области  $\Delta U \approx \Delta Z(1-2\gamma_0)/\sqrt{\gamma_0(1-\gamma_0)}$  ПВ корреляция существенно отлична от нуля лишь при  $\tau < \tau_0$ .

Частотная корреляционная функция рассеянного поля при  $z \neq Z$  имеет два масштаба корреляции. Они определяются приближенными формулами  $\Delta k_0/k \approx a_1/z$  и  $\Delta k_0/k \approx a_1/Z$ , где  $a_1 = 4a\sqrt{\gamma_0(1-\gamma_0)^3}$ ,  $k \approx (k_1 + k_2)/2$ ,  $\Delta k/k \ll 1$ . Величина  $\Delta k_0$  уменьшается с удалением источника и приемника от поверхности и с ростом отношения  $k/q$ . Как и в случае несользящего падения волны на поверхность, наименьший интервал корреляции соответствует «продольной» шероховатости ( $\alpha=0$ ). Качественно

частотную декорреляцию поля можно объяснить изменением положения ответственных за рассеяние участков поверхности при изменении частоты.

Формула (3) позволяет также проанализировать характер корреляции поля при наличии одновременно частотного, пространственного и временного сдвигов.

В заключение отметим, что результаты приведенных расчетов подтверждаются данными модельных измерений [3, 4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э. П. Гулин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 3, 401 (1970).
2. Э. П. Гулин, Акуст. ж., 8, № 4, 426 (1962).
3. В. П. Акуличева, Э. П. Гулин, Тр. Акуст. ин-та, вып II, 83 (1967).
4. В. П. Акуличева, Э. П. Гулин, Тр. VI Всесоюзной акустической конференции, А' В 5, 1968.

Акустический институт

Поступила в редакцию  
27 февраля 1969 г.,  
после доработки  
28 апреля 1970 г.

#### THE CORRELATION FUNCTION OF THE FIELD SCATTERED BY A RUFFLED SURFACE AT SLIDING PROPAGATION

*E. P. Gulin*

The space time and frequency correlation of the wave field at sliding propagation along the ruffled water surface with low quasi-harmonic roughnesses has been calculated.

УДК 538.574.6

## ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА СИЛЬНО ПРЕЛОМЛЯЮЩЕМ СЛУЧАЙНОМ ФАЗОВОМ ЭКРАНЕ

*В. И. Шишов*

Рассматривается дифракция плоской волны на случайному фазовому экране с большим средним квадратом флюктуаций набега фазы ( $\overline{\Delta s^2} \gg 1$ ). Найдено аналитическое выражение для спектра корреляционной функции флюктуаций интенсивности на расстоянии  $z$  от экрана, близком к фокальному расстоянию  $z_{\text{фок}}$ . При  $z = z_{\text{фок}}$  индекс мерцаний  $F = \overline{\Delta I^2}/I^2$  имеет максимум. Показано, что максимальное значение индекса мерцаний определяется формулой  $F = F_{\text{фок}} = (1/\sqrt{\pi}) e^{-2} \ln \overline{\Delta s^2}$  — в случае одномерного фазового экрана и  $F_{\text{фок}} = (1/\pi) e^{-1} \ln \overline{\Delta s^2}$  — в случае двумерного статистически изотропного фазового экрана.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В теории распространения волн в средах со случайными флюктуациями показателя преломления наиболее изученной является модель фазового экрана с одним характерным масштабом неоднородностей. В этой модели получены аналитические выражения для корреляционной функции флюктуаций интенсивности в случае малых флюктуаций набега фазы в экране:  $\overline{\Delta s^2} < 1$ . Если  $\overline{\Delta s^2} > 1$ , аналитические выражения для корреляционной функции флюктуаций интенсивности получены только при достаточно малых и достаточно больших расстояниях наблюдателя от фазового экрана [1–3]. Для умеренных значений  $\overline{\Delta s^2}$  имеются численные расчеты [1, 2, 4]. В частности, численными расчетами было получено, что фазовый экран при  $\overline{\Delta s^2} > 1$  обладает фокусом, т. е. на некотором расстоянии  $z_{\text{фок}}$  от экрана имеется максимум среднего квадрата флюктуаций интенсивности.

Ниже будет рассмотрено поведение корреляционной функции флюктуаций интенсивности плоской волны, прошедшей через случайный фазовый экран с очень большим средним квадратом флюктуаций набега фазы ( $\overline{\Delta s^2} \gg 1$ ), с удалением наблюдателя от экрана. Основное внимание будет уделено поведению корреляционной функции флюктуаций интенсивности вблизи фокальной точки.

### 2. ОДНОМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ЭКРАН

Рассмотрим следующую задачу. На случайный фазовый экран падает плоская волна единичной амплитуды, причем фронт волны параллелен плоскости фазового экрана. Вначале мы рассмотрим одномерный фазовый экран, т. е. будем считать, что флюктуации набега фазы зависят только от одной координаты в плоскости фазового экрана. Полученные результаты будут далее обобщены и на случай двумерного фазового экрана.

Для корреляционной функции флюктуаций интенсивности

$$B_I(x, z) = \langle I(x_1, z) I(x_1 + x, z) \rangle - (\langle I \rangle)^2$$

имеем в соответствии с [1]

$$B_I(x, z) = (1/2\pi z) \int \int \{ \exp [-\overline{\Delta s^2} f(x', x'')] - 1 \} \times \\ \times \exp \left[ \frac{i}{z} (x - x') x'' \right] dx' dx'', \quad (1)$$

$$f(x', x'') = 2 - 2R(x') - 2R(x'') + R(x' + x'') R(x' - x''), \quad (2)$$

где  $\overline{\Delta s^2}$  — средний квадрат флуктуаций набега фазы в фазовом экране,  $R(x)$  — нормированная корреляционная функция флуктуаций набега фазы,  $z$  — расстояние от фазового экрана,  $x$  — координата в плоскости, параллельной плоскости фазового экрана, координаты  $x$  и  $z$  выражены в волновых числах.

Преобразуя (1) по Фурье, получаем

$$M(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_I(x) e^{-ixq} dx = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \exp [-\overline{\Delta s^2} f(x', x'' = qz)] - 1 \} e^{-iqx'} dx'. \quad (3)$$

Представим  $f(x', qz)$  в виде суммы двух слагаемых:

$$f = f_1 - f_2, \\ f_1 = 2 - 2R(qz), \\ f_2 = 2R(x') - R(x' + qz) - R(x' - qz). \quad (4)$$

Рассмотрим выражение для

$$\overline{M}(q) = M(q) \exp [\overline{\Delta s^2} f_1(qz)]; \quad (5)$$

$$\overline{M}(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \exp [\overline{\Delta s^2} f_2(x', qz)] - \exp [\overline{\Delta s^2} f_1(qz)] \} e^{-iqx'} dx'. \quad (6)$$

Разлагая подынтегральное выражение в (6) по степеням  $\overline{\Delta s^2}$ , получаем

$$\overline{M}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\overline{\Delta s^2})^n}{n!} \overline{M}_n(q), \\ \overline{M}_n(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(x', qz)]^n e^{-ix'q} dx'. \quad (7)$$

Введем новые функции

$$J_n(q, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(x', l)]^n e^{-ix'q} dx'. \quad (8)$$

Функции  $\overline{M}_n$  связаны с  $J_n$  соотношением

$$M_n(q, z) = J_n(q, l = qz). \quad (9)$$

Для  $J_1(q, l)$  имеем:

$$J_1(q, l) = 4 \widetilde{R}(q) \sin^2\left(\frac{ql}{2}\right), \quad (10)$$

где  $\widetilde{R}(q)$  — преобразование Фурье нормированной корреляционной функции флюктуаций фазы:

$$\widetilde{R}(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{-iqx} dx. \quad (11)$$

Для  $J_n$  справедливо соотношение

$$J_n(q, l) = \int_{-\infty}^{\infty} J_{n-1}(q - q_1, l) J_1(q_1, l) dq_1. \quad (12)$$

Интегралы типа (12) исследовались в теории предельных законов распределения сумм большого числа независимых случайных величин. Для полной аналогии с интегралами, исследуемыми в теории предельных законов распределения, введем величины

$$m(l) = \int_{-\infty}^{\infty} J_1(q, l) dq = 2 - 2R(l) = f_1(l); \quad (13)$$

$$j_n(q, l) = \frac{1}{[m(l)]^n} J_n(q, l). \quad (14)$$

Функцию  $j_n(q)$  можно рассматривать как дифференциальную функцию распределения суммы  $n$  независимых случайных величин, имеющих одинаковые дифференциальные функции распределения  $j_1(q)$ .

Если величина  $q_0$ , определяемая равенством

$$q_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 j_1(q, l) dq = \frac{2}{f_1(l)} \left[ \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} - \frac{\partial^2 R(l)}{\partial l^2} \right], \quad (15)$$

конечна и, начиная с некоторого  $n$ , функция  $j_n(q)$  ограничена, то по локальной предельной теореме (см., например, [5, 6]) при достаточно больших  $n$

$$j_n \rightarrow j_{ac} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n} q_0} \exp \left[ -\frac{q^2}{2n q_0^2} \right]. \quad (16)$$

Если кроме того существует конечная величина  $\beta_3$ ,

$$\beta_3^3 = \int_{-\infty}^{\infty} |q|^3 j_1(q, l) dq, \quad (17)$$

то уклонение  $j_n$  от  $j_{ac}$  в соответствии с [6] не превышает

$$|\Delta j_n| = |j_n - j_{ac}| \leq C \frac{\beta_3}{q_0} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (18)$$

где  $C$  — абсолютная константа.

Итак, ряд (7) можно представить в виде

$$\bar{M}(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\Delta s^2 m(qz)]^n}{n!} j_n(q, l = qz). \quad (19)$$

При  $\overline{\Delta s^2 m}(qz) < 1$  основной вклад в ряд дает первый член и для  $\bar{M}(q)$  имеем известное выражение (см., например, [3]):

$$\bar{M}(q) = \overline{\Delta s^2 m}(qz) j_1(q, qz) = 4 \overline{\Delta s^2} \widetilde{R}(q) \sin^2 \left( \frac{q^2 z}{2} \right). \quad (20)$$

Выражение (20) справедливо также и для  $M(q)$ . При  $\overline{\Delta s^2} \gg 1$  равенство (20) выполняется только для частот

$$q < q_1 = \frac{a}{\sqrt{2 \overline{\Delta s^2} z}}, \quad (21)$$

где  $a$  — характерный масштаб неоднородностей, определяемый равенством

$$a^{-2} = \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0}. \quad (22)$$

Рассмотрим случай больших значений  $\overline{\Delta s^2 m}(qz)$ . Поскольку члены ряда (19) положительны и  $j_n$  зависит от  $n$  существенно слабее, чем  $(\Delta s^2 m)^n / n!$ , то при больших значениях  $\overline{\Delta s^2 m}$  основной вклад в ряд дают члены с большими  $n$ . Используя формулу Стирлинга, дающую асимптотическое выражение  $n!$ , получаем при  $|n - n_1| \ll n_1 = E[\Delta s^2 m]$  ( $E[x]$  — целая часть  $x$ ) следующее выражение для  $n$ -го члена ряда (19):

$$\exp[n_1 - (n - n_1)^2/2n_1] \frac{1}{\sqrt{2\pi n_1}} j_n(q, qz).$$

Из этого выражения видно, что основной вклад в ряд (19) дают члены с  $n$ , лежащими в пределах

$$\overline{\Delta s^2 m} - \sqrt{\overline{\Delta s^2 m}} \leq n \leq \overline{\Delta s^2 m} + \sqrt{\overline{\Delta s^2 m}}. \quad (23)$$

Малость вклада членов с  $n$ , лежащими вне области (23), обеспечивается множителем  $\exp[-(n - n_1)^2/2n_1]$ , который зависит от  $n$  много сильнее, чем множитель  $j_n$ . Ряд (19) очень близок к ряду экспоненты.

Заменяя в выражении (16), определяющем  $j_n$ ,  $n$  на  $\overline{\Delta s^2 m}$  и подставляя  $j_n$  в (19), получаем после суммирования

$$\bar{M}(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m q_0^2 \overline{\Delta s^2}}} \exp \left[ - \frac{q^2}{2m q_0^2 \overline{\Delta s^2}} + \overline{\Delta s^2 m} \right]. \quad (24)$$

Относительная ошибка выражения (24), вызванная заменой  $n$  на  $\overline{\Delta s^2 m}$  в выражении для  $j_n$ , имеет порядок  $1/\sqrt{2\overline{\Delta s^2 m}}$ .

Учитывая (5) и (13), получаем

$$M(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m q_0^2 \overline{\Delta s^2}}} \exp \left[ - \frac{q^2}{2m q_0^2 \overline{\Delta s^2}} \right]. \quad (25)$$

На основании (14) и (15) имеем

$$m(qz) q_0^2 = -2 \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + 2 \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \Big|_{x=qz}. \quad (26)$$

Если существует конечная производная  $\frac{\partial^4 R(x)}{\partial x^4} \Big|_{x=0}$ , то, разлагая  $R(qz)$  по степеням  $qz$ , получаем при  $qz \ll a$ :

$$m(qz) q_0^2 = c \frac{(qz)^2}{a^4}, \quad (27)$$

где  $a$  определяется соотношением (22), а

$$c = \frac{1}{6} \frac{\partial^4 R(x)}{\partial x^4} \left( \frac{\partial^2 R(x)}{\partial x^2} \right)^{-2} \Big|_{x=0}. \quad (28)$$

Итак, при

$$\frac{a}{\sqrt{2\Delta s^2 z}} = q_1 \ll q \ll q_2 = \frac{a}{z\sqrt{c}} \quad (29)$$

имеем

$$M(q) = \frac{a^2}{qz\sqrt{2\pi c \Delta s^2}} \exp \left[ -\frac{a^4}{2cz^2 \Delta s^2} \right]. \quad (30)$$

При

$$q > q_2 \quad (31)$$

$$mq_0^2 = 2/a^2 \quad (32)$$

и

$$M(q) = \frac{a}{\sqrt{4\pi}} \exp \left[ -\frac{a^2 q^2}{4} \right]. \quad (33)$$

Вычислим индекс мерцаний

$$F = \frac{\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle}{(\langle I \rangle)^2} = B_I(0, z) = \int_{-\infty}^{\infty} M(q) dq. \quad (34)$$

Представим  $F$  в виде суммы:

$$F = F_1 + F_2 + F_3, \quad (35)$$

где  $F_1$  — интеграл по области (21),  $F_2$  — интеграл по области (29) и  $F_3$  — интеграл по области (31).

Интеграл по области (21) равен

$$F_1 = 8 \overline{\Delta s^2} \int_0^{q_1} \widetilde{R}(q) \sin^2 \left( \frac{q^2 z}{2} \right) dq. \quad (36)$$

При

$$z < z_1 = \frac{a^2}{\sqrt{2\Delta s^2}} \quad (37)$$

$$F_1 = 8 \overline{\Delta s^2} \int_0^{\infty} \widetilde{R}(q) \sin^2 \left( \frac{q^2 z}{2} \right) dq = \quad (38)$$

$$= 4 \overline{\Delta s^2} z^2 \int_0^\infty \widetilde{R}(q) q^4 dq = 4 \Delta s^2 z^2 \frac{\partial^4 R(x)}{\partial x^4} \Big|_{x=0} < 1.$$

При  $z > z_1$

$$\begin{aligned} F_1 &= 4 \overline{\Delta s^2} z^2 \int_0^{q_1} \widetilde{R}(q) q^4 dq \approx \\ &\approx \frac{8}{5(2\sqrt{2})^5} \frac{a^5}{z^3 (\Delta s^2)^{3/2}} \int_0^\infty R(x) dx \ll 1. \end{aligned} \quad (39)$$

Интеграл по области (29) равен

$$\begin{aligned} F_2 &= 2 \int_{q_1}^{q_2} \frac{a^2}{\sqrt{2\pi c \Delta s^2} q z} \exp \left[ -\frac{a^2}{2cz^2 \Delta s^2} \right] dq = \\ &= \frac{2a^2}{\sqrt{2\pi c \Delta s^2}} \frac{1}{z} \exp \left[ -\frac{a^4}{2cz^2 \Delta s^2} \right] \ln \sqrt{\frac{2 \Delta s^2}{c}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Хотя подынтегральная функция  $M(q)$  имеет вид (30) только в области (29), расширение пределов интегрирования до  $q_1, q_2$  при больших значениях  $\Delta s^2$  не вносит большой ошибки. Интеграл по области (31) равен

$$F_3 = 2 \int_{q_1}^\infty \frac{a}{\sqrt{4\pi \Delta s^2}} \exp \left[ -\frac{a^2 q^2}{4 \Delta s^2} \right] dq = 1 - \Phi \left( \frac{aq_2}{\sqrt{2}} \right), \quad (41)$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности. При  $z < z_1$   $F_3 < 1$ , причем  $F_3$  зависит от  $1/z$  экспоненциально. При  $z > z_1$   $F_3 = 1$ .

Таким образом, при  $z < z_1$  индекс мерцаний определяется известным выражением, полученным ранее методом плавных возмущений. Вблизи фокуса поведение индекса мерцаний определяется  $F_2$ . Максимальное значение  $F$  равно

$$F_{\text{фок}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-2} \ln \left( \frac{2 \Delta s^2}{c} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-2} \ln \Delta s^2, \quad (42)$$

а фокальное расстояние —

$$z_{\text{фок}} = \frac{a^2}{\sqrt{c \Delta s^2}}. \quad (43)$$

При  $z > z_{\text{фок}}$   $F_2$  падает, как  $1/z$ , и  $F$  стремится асимптотически к единице.

### 3. ДВУМЕРНЫЙ ФАЗОВЫЙ ЭКРАН

Выход выражений для спектральной функции флуктуаций интенсивности в случае двумерного фазового экрана совершенно аналогичен выводу выражений в случае одномерного фазового экрана, поэтому мы приведем только результаты, ограничившись случаем статистически изотропных неоднородностей:

$$R(x, y) = R(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Под  $q$  далее будем понимать абсолютную величину вектора  $q = (q_x, q_y)$ . Итак, при

$$q < q_1 = \frac{a}{\sqrt{2 \Delta s^2 z}} \quad M(q) = 4 \overline{\Delta s^2} \widetilde{R}(q) \sin^2 \left( \frac{q^2 z}{2} \right). \quad (44)$$

При  $q_1 \ll q \ll q_2 = a/\sqrt{c} z$

$$M(q) = \frac{a^4}{2\pi c \overline{\Delta s^2} z^2 q^2} \exp \left[ -\frac{a^4}{2cz^2 \overline{\Delta s^2}} \right]. \quad (45)$$

При  $q > q_2$

$$M(q) = \frac{a^2}{4\pi} \exp \left[ -\frac{a^2 q^2}{4} \right]. \quad (46)$$

Поведение  $F$  вблизи фокальной точки по-прежнему определяется  $F_2$ . Максимальное значение  $F$  равно

$$F_{\text{фок}} = \frac{1}{\pi} e^{-1} \ln(2 \overline{\Delta s^2}/c) \approx \frac{1}{\pi} e^{-1} \ln \overline{\Delta s^2}. \quad (47)$$

Фокальное расстояние определяется выражением

$$z_{\text{фок}} = \frac{a^2}{\sqrt{2 c \Delta s^2}}. \quad (48)$$

При  $z > z_{\text{фок}}$   $F_2$  падает как  $1/z^2$  и  $F$  асимптотически стремится к единице.

В заключение отметим, что соотношение

$$F_{\text{фок}} \sim \ln \overline{\Delta s^2}$$

для одномерного фазового экрана было получено Салпитером полуколичественным методом [3].

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Писарева, Астрон. ж., 36, № 1, 112 (1958).
2. R. P. Mercier, Proc. Cambridge Philos. Soc., 58, 382 (1962).
3. E. E. Salpeter, Ap. J., 147, № 2, 433 (1967).
4. Я. И. Альбер, Л. М. Ерухимов, В. А. Рыжов, В. П. Урядов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 11, № 9, 1371 (1968).
5. Б. В. Гнedenko, Курс теории вероятностей, Физматгиз, М., 1961.
6. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, изд. Наука, М., 1965.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
30 декабря 1969 г.

## WAVE DIFFRACTION ON A STRONGLY REFRACTED RANDOM PHASE SCREEN

V. I. Shishov

The diffraction of a plane wave on a random phase screen with the large mean square of the phase shift ( $\overline{\Delta s^2} \gg 1$ ) is considered. An analytical expression is found

for the spectrum of the correlation function of intensity fluctuations at the distance of  $z$  from the screen close to the focal length  $z_{\text{foc}}$ . At  $z = z_{\text{foc}}$  the scintillation index  $F = \overline{\Delta I^2}/I^2$  has a maximum and is determined by the formula  $F = F_{\text{foc}} = (1/\sqrt{\pi}) e^{-2} \ln \overline{\Delta s^2}$  for a unidimensional phase screen and by  $F_{\text{foc}} = (1/\pi) e^{-1} \ln \overline{\Delta s^2}$  for a two-dimensional statistically isotropic screen.

---

УДК 621.378.325.2

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЧАСТОТНОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ОКГ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ НА ОДНОРОДНО УШИРЕННОМ АКТИВНОМ ВЕЩЕСТВЕ

*H. D. Миловский*

Исследована устойчивость одночастотного стационарного режима одномерной модели ОКГ бегущей волны на однородно уширенном активном веществе по отношению к широкому классу возмущений поля, поляризации и инверсной разности населенности, распространяющихся вместе с волной и произвольным образом зависящих от координаты и времени. Показано, что при учете сосредоточенных потерь резонатора (на излучение через полупрозрачное зеркало) возникает эффективное неоднородное усиление активного вещества. Оно приводит к дополнительному (по сравнению со случаем распределенных потерь) увеличению критической накачки, при которой возникает неустойчивость. Сделаны оценки критического превышения накачки над порогом для рубинового ОКГ.

В работах [1, 2] исследовалась устойчивость одночастотной стационарной генерации лазера бегущей волны  $E_0 \cos [\omega_0 t - (\omega_0 x/v) + \varphi_0] = E_0 \cos [\Omega_0(\tau - \zeta) + \varphi_0] = E_0 \cos [+]$ , которая осуществлялась на центральной частоте линии однородно уширенного активного вещества ( $\Omega_0 = \omega_0/\gamma_{\perp}$ ,  $\gamma^2 = \gamma_{\parallel}/\gamma_{\perp}$ ,  $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ ), совпадающей с собственной частотой одной из мод холодного резонатора  $\Omega_0 = \Omega_{q_0}^{\text{хол}} = 2\pi q_0/\bar{l}$ . При этом сосредоточенные потери на излучение через зеркала заменялись распределенными потерями (добротность  $q_0$ -моды холодного резонатора —  $Q_0 = \Omega_0/2\Gamma_0 = \omega_0/2k_0 = \omega_0 \epsilon/4\pi\sigma$ ), в связи с чем амплитуда стационарной генерации ( $E_0 = \sqrt{\lambda_s} = \text{const}$ ) оказывалась не зависящей от координаты резонатора ( $\zeta = (x/v)\gamma_{\perp}$ ). В качестве возмущений рассматривались возмущения поля  $\text{Re}[(e(\tau) - i\Phi'(\tau)) e^{-iq\zeta+i(+)}]$ , поляризации  $[ip(\tau) + + \psi(\tau)] e^{-iq\zeta+i(+)}$  и инверсной разности населенности активной среды  $\delta(\tau)$ , имеющие фиксированную пространственную структуру  $a_q = 2\pi q/\bar{l}$  ( $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и бегущие вдоль резонатора  $\bar{l}$  вместе с основной волной.

Было показано, что некоторые корни характеристического уравнения (3.7) в [1], возникающего в результате решения системы дифференциальных уравнений (3.3) для медленных (по сравнению с  $\cos[+]$ ) амплитуд возмущений ( $e, \Phi, p, \psi, \delta$ ) —  $(e_0, \Phi_0, p_0, \psi_0, \delta_0) e^{-\beta\tau}$ , могут оказаться в правой полуплоскости комплексного  $\beta$ , если превышение  $\lambda_s = (n^0/n_n^0) - 1$  накачки  $n^0$  над пороговым значением  $n_n^0 = (2\Gamma_0/\Omega_0)\gamma$  будет больше критической величины  $\bar{\lambda}_c$  (см. формулу (3.10) в [1]).

В настоящей работе рассматривается устойчивость одночастотного стационарного режима одномерной модели лазера бегущей волны на однородно уширенном активном веществе, потери в резонаторе которого предполагаются сосредоточенными [3]\*.

\* Предполагается также, что резонатор длины  $\tau_0 + l$  лишь частично ( $l$ ) заполнен активным веществом:  $\xi = l/(\tau_0 + l)$  — коэффициент заполнения.

Исходная система уравнений в этом случае состоит из уравнений для матрицы плотности двухуровневой молекулы

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} - i\Omega_0 + 1 \right) \rho = 2iE_n; \quad (1a)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma^2 \right) n = \gamma^2 (\lambda_r + 1) \xi^{-1} + i\gamma^2 \lambda_r E (\rho - \rho^*); \quad (1b)$$

и волнового уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) E = \frac{\Gamma_r}{\Omega_0} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\rho + \rho^*), \quad (1c)$$

которое в отличие от волнового уравнения работы [1] не содержит члена  $\left( 2\Gamma \frac{\partial E}{\partial \tau} \right)$ , учитывающего распределенные потери. Система (1) записана в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\Omega_0}{\Gamma_r \sqrt{\lambda_r}} \frac{4\pi |d_{12}|^2 N}{\hbar \sqrt{\gamma_\perp \gamma_\parallel \epsilon}} \rho_{12}, \quad n = \frac{\Omega_0 \gamma}{2\Gamma_r} \frac{4\pi |d_{12}|^2 N}{\hbar \sqrt{\gamma_\perp \gamma_\parallel \epsilon}} (\rho_{22} - \rho_{11}), \\ E &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} \frac{(d_{12} E)}{\hbar \sqrt{\gamma_\perp \gamma_\parallel}} \end{aligned} \quad (2)$$

и полностью эквивалентна исходным уравнениям работы [1]. В (2) использованы общепринятые обозначения, кроме нормировочного коэффициента  $\Gamma_r = |\ln r^{-1}/(\tau_0 + l)|$ , характеризующего добротность  $\Omega_0 = (\Omega_0/2\Gamma_r)$  мод холодного резонатора, в котором одно зеркало полупрозрачное ( $r^2$  — коэффициент отражения по мощности), и параметра  $\lambda_r$ , характеризующего превышение накачки над пороговым значением.

Стационарное решение  $E = E_0(\zeta) \cos [\Omega_0(\tau - \zeta)] = E_0 \cos [+]$  системы (1), которое описывает процесс одночастотной генерации лазера бегущей волны на центре линии активного вещества, хорошо известно [3] в том смысле, что известно уравнение для интенсивности

$$\frac{dE_0^2}{d\zeta} = 2\Gamma_r \xi^{-1} \frac{(1 + \lambda_r) E_0^2}{1 + \lambda_r E_0^2}, \quad (3)$$

его первый интеграл

$$\lambda_r E_0^2(\zeta) + \ln E_0^2(\zeta) = 2\Gamma_r \xi^{-1} (\lambda_r + 1) \zeta + \lambda_r E_0^2(0) + \ln E_0^2(0) \quad (4)$$

и величина генерируемой мощности

$$P = \lambda_r E_0^2(l) (1 - r^2) = \Omega_0 \gamma l \frac{4\pi |d_{12}|^2 N}{\hbar \sqrt{\gamma_\perp \gamma_\parallel \epsilon}} (\rho_{22}^0 - \rho_{11}^0) + \ln r^2 = \lambda_r \ln r^{-2}. \quad (5)$$

В качестве возмущений рассматриваются возмущения поля  $\text{Re} \{ [e(\tau, \zeta) - i\Phi(\tau, \zeta)] e^{i[+]} \}$ , поляризации  $[ip(\tau, \zeta) + \psi(\tau, \zeta)] e^{i[+]}$  и инверсной разности населенности  $\delta(\tau, \zeta)$ , амплитуды которых являются медленными по сравнению с  $\cos [\Omega_0(\tau - \zeta)]$  функциями времени  $\tau$  и координаты  $\zeta$  [4, 5].

Приближая систему (1) вблизи стационарного решения, можно получить [4, 5] уравнения для медленных амплитуд возмущений

$$\dot{p} + p - e [(1 + \lambda_r)/(1 + \lambda_r E_0^2)] \xi^{-1} - \delta E_0 = 0; \quad (6a)$$

$$\lambda_r \gamma^2 p E_0 + \lambda_r \gamma^2 e [(1 + \lambda_r)/(1 + \lambda_r E_0^2)] E_0 \xi^{-1} + \delta + \gamma^2 \delta = 0; \quad (66)$$

$$-\Gamma_r p + e'_\zeta + \dot{e} = 0; \quad (6b)$$

$$\dot{\psi} + \psi - \Phi [(1 + \lambda_r)/(1 + \lambda_r E_0^2)] \xi^{-1} = 0; \quad (6g)$$

$$-\Gamma_r \psi + \Phi'_\zeta + \dot{\Phi} = 0, \quad (6d)$$

которые имеют переменные по координате коэффициенты. Переходя в (6а) — (6в) к изображениям с помощью преобразования Лапласа ( $e^{-\beta t}$ ), используя уравнение (3) и граничные условия на входе активного слоя ( $\zeta = 0$ ) [5] для лапласовских изображений возмущений поля

$$e(0, \beta) = r e(l, \beta) e^{-\beta \tau_0 - i 2 \pi q}, \quad (7)$$

можно получить характеристическое уравнение

$$\theta(\beta)_q = \beta^2 + \beta(1 + \Gamma_r + i \alpha_q) + i \alpha_q + \frac{\beta + 2}{2(\tau_0 + l)} \ln \left[ \frac{\beta^2 + \beta(1 + \gamma^2) + \gamma^2 + \gamma^2 \lambda_r E_0^2(l)}{\beta^2 + \beta(1 + \gamma^2) + \gamma^2 + \gamma^2 \lambda_r E_0^2(0)} \right]_0 = 0, \quad (8)$$

аналогичное по смыслу уравнению (3.7) работы [1]\*.

Комплексная функция  $\ln \{ \cdot \}$  определена лишь на одном листе римановой поверхности, а параметр  $i \alpha_q = i 2 \pi q / (\tau_0 + l)$  принимает любое возможное значение ( $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). С помощью теоремы Руше [6] можно показать, что при любом значении параметров  $i \alpha_q, \gamma^2, \Gamma_r, r^2, \tau_0 + l$  уравнение (8) имеет два корня, каждый из которых определяет собственную частоту  $(\Omega_{q+q}^r)_{1,2} = \Omega_0 + \text{Im}(\beta_q)_{1,2}$  и коэффициент затухания —  $\text{Re}(\beta_q)_{1,2}$ , соответствующего нормального типа колебаний «горячего» резонатора (резонатора для возмущений)\*\*. Собственные частоты мод одной ветви  $(\Omega_{q+q}^r)_1$  оказываются близкими к частоте центра линии вещества  $\Omega_0$ , а другой — к соответствующим частотам мод холодного разонатора  $(\Omega_{q+q}^{x_0}) = \Omega_0 + 2\pi q / (\tau_0 + l)$ . При каждом фиксированном значении  $q$  ситуация оказывается аналогичной известному смещению нормальных частот двух связанных колебательных контуров относительно их парциальных частот. Добротности мод первой ветви оказываются хуже добротности линии вещества: —  $\text{Re}(\beta_q)_1 > 1$ , а добротности мод второй ветви — выше добротностей мод холодного резонатора. С ростом превышения  $\lambda_r$  накачки над пороговым значением добротности мод второй ветви растут, и при некоторых превышениях могут появиться нарастающие типы колебаний.

На рис. 1 изображено  $D$ -разбиение  $i \alpha_q$ -плоскости функции  $\theta(\beta)_q$  на области устойчивости и неустойчивости [6, 7]. Границей  $D$ -разбиения служит частотный годограф —

$$2w(\tau_0 + l) = \frac{-1}{\Omega^2 + 1} \left\{ \Omega^2 (\ln r^{-2}) - \right.$$

\* Уравнение (3.7) работы [1] может быть получено из (6а) — (6в) в приближении постоянного поля в резонаторе:  $E_0^2(0) \approx E_0^2(\zeta) \approx E_0^2(l) \approx 1$ .

\*\* В рассматриваемом «горячем» резонаторе имеет место взаимодействие полей возмущений на частотах  $\Omega_0 + \Omega$  и  $\Omega_0 - \Omega$  [8]. Поэтому под термином нормальный тип колебаний «горячего» резонатора следует понимать связное колебание двух слабых электромагнитных полей на частотах  $(\Omega_{q_0-q}^r)_1$  и  $(\Omega_{q_0+q}^r)_1$ , взаимодействующих друг с другом через посредство сильного поля на частоте  $\Omega_0$ .

$$\begin{aligned}
 & -\Omega \operatorname{Arctg} \left[ \frac{\Omega \gamma^2 (1 + \gamma^2) (1 - r^2) \lambda_r E_0^2(l)}{[\Omega^2 - \gamma^2 - \gamma^2 \lambda_r E_0^2(0)] [\Omega^2 - \gamma^2 - \gamma^2 \lambda_r E_0^2(l)] + \Omega^2 (1 + \gamma^2)^2} \right]_A + \\
 & + \frac{\Omega^2 + 2}{2} \ln \left[ \frac{[\Omega^2 - \gamma^2 - \gamma^2 \lambda_r E_0^2(l)]^2 + \Omega^2 (1 + \gamma^2)^2}{[\Omega^2 - \gamma^2 - \gamma^2 \lambda_r E_0^2(0)]^2 + \Omega^2 (1 + \gamma^2)^2} \right]_l \} ; \\
 & 2\alpha(\tau_0 + l) = -\Omega (\ln r^{-2}/\Gamma_r) - \\
 & - \frac{1}{\Omega^2 + 1} \left\{ \Omega (\ln r^{-2}) - (\Omega^2 + 2) \operatorname{Arctg} [ ]_A - \frac{\Omega}{2} \ln [ ]_l \right\}
 \end{aligned} \quad (9)$$

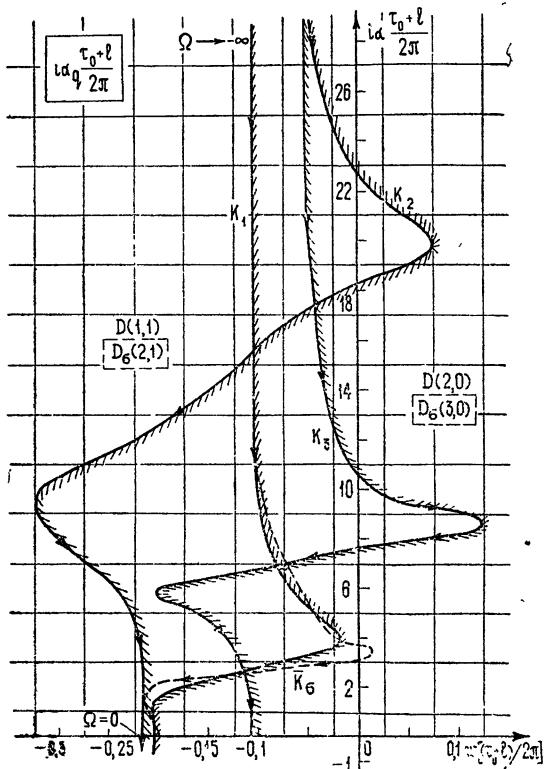


Рис. 1.  $D$ -разбиение  $i\alpha_q$ -плоскости функций  $\theta(\beta)_q$  на области устойчивости и неустойчивости: в области  $D(n-k, k)$  находится  $k$  корней с положительной действительной частью. В случае распределенных потерь  $n = 3$ , и области обозначаются  $D_6(3-K, K)$ .  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  и  $K_6$  — параметрические кривые (частотные годографы) уравнения (8) и характеристического уравнения (3.7) работы [1] соответственно:  $\Gamma_{r1} = \Gamma_{r2} = \Gamma_{r3} = \Gamma_r = 0,1$ ;  $24\lambda_{r1} = 24\lambda_r = \lambda_{r2} = \lambda_{r3} = 360$ ;  $r_1^2 = r_2^2 = 0,5 r_3^2 = 0,25$ ;  $(\tau_0 + l)_1 = (\tau_0 + l)_2 = (\tau_0 + l)_6 = 2(\tau_0 + l)_3 = 10 \ln 2$ ;  $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = \gamma_r^2 = 0,5$ .

—симметричная относительно действительной оси кривая, полученная из (8) для  $i\alpha_q(\Omega) = i\alpha(\Omega) + w$ .  $\beta = i\Omega$ . Два варианта  $D$ -разбиения представлены кривыми  $K_1$  и  $K_2$ , которые построены для двух разных превышений накачки над порогом:  $\lambda_{r1} = 15$ ,  $\lambda_{r2} = 360$  (остальные параметры  $K_1$  и  $K_2$  идентичны:  $\gamma^2 = 0,5$ ,  $\Gamma_r = 0,1$ ,  $r^2 = 0,25$ ). Как видно из рисунка, во втором случае в области неустойчивости оказываются восемь истинных значений параметра  $i\alpha_q$  ( $q = \pm 19, \pm 20, \pm 21, \pm 22$ ), и, следовательно, столько же нормальных типов колебаний горячего резонатора оказываются в этом случае нарастающими.

Как известно [8], в присутствии сильного поля  $E$  частоты  $\omega$  поляризация на частоте слабого поля  $\omega + \Omega$  зависит не только от комплексной амплитуды этого поля, но и от комплексной амплитуды слабого поля на симметричной частоте  $\omega - \Omega$ . Если амплитуды слабых полей действительны и одинаковы, а частота сильного поля  $\omega$  совпадает с частотой перехода  $\omega_0$ , то отклик на частоте  $\omega + \Omega$  становится симметричной функцией относительно  $\omega_0$ . При достаточно мощном поле  $E$  эта функция имеет минимум на частоте  $\omega_0$  и два симметрично расположенных максимума. Симметричная форма отклика является причиной симметрии частотного годографа, а положение максимумов совпадает с положением центров диапазонов неустойчивых типов колебаний.

Изображенная на рис. 1 кривая  $K_3$  представляет собой частотный годограф, у которого все параметры, за исключением одного  $r_3^2 = 0,5$ , совпадают с параметрами кривой  $K_2$ , а пунктирная кривая  $\bar{K}_c$  — частотный годограф ( $\lambda_c = 15$ ,  $\gamma_c^2 = 0,5$ ,  $\Gamma_c = 0,1$ ) уравнения (3.7) работы [1]. Сравнение  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $\bar{K}_c$  позволяет установить, что положение центра диапазона неустойчивых типов колебаний зависит от степени изменения поля в резонаторе, которую характеризует параметр  $r^2$ . Эта зависимость отражена на рис. 2, на котором построено параметрическое семейство

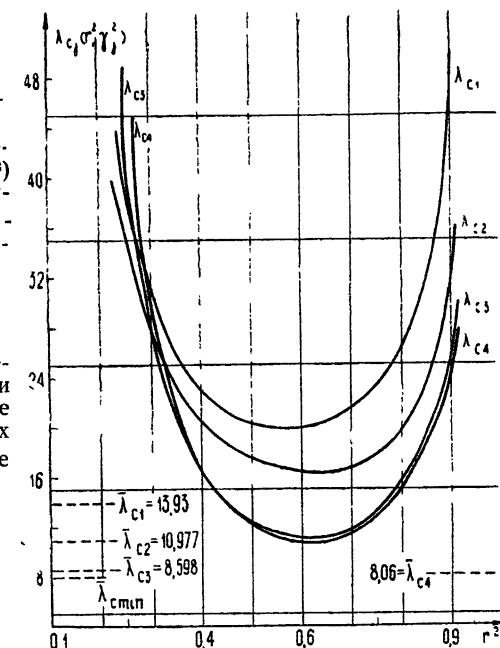


Рис. 2. Зависимость критического превышения накачки над порогом  $\lambda_c(r^2, \gamma_j^2)$  от величины обратной связи  $r^2$ , характеризующей перепад ( $r^{-2}$ ) интенсивности поля внутри резонатора. Параметры  $\gamma_j^2$  принимают значения:

$$\gamma_1^2 = 1; \gamma_2^2 = 0,5; \gamma_3^2 = 0,1; \gamma_4^2 = 0,01.$$

Ординаты  $\bar{\lambda}_{cj}$  — критические превышения для модели с распределенными потерями, вычисленные по формуле (3.10) работы [1] для соответствующих  $\gamma_j^2$  ( $\bar{\lambda}_{c\min} = 8$  — минимальное значение  $\bar{\lambda}_c$ , достигающееся при  $\gamma^2 \rightarrow 0$ ).

кривых критического превышения накачки над порогом\*  $\lambda_{cj}(r^2, \gamma_j^2)$  ( $\gamma_1^2 = 1; \gamma_2^2 = 0,5; \gamma_3^2 = 0,1; \gamma_4^2 = 0,01$ ) и для сравнения указаны  $\bar{\lambda}_{cj}$  для ОКГ с распределенными потерями. При  $r^2 \rightarrow 0$  рост  $\bar{\lambda}_c$  происходит вследствие эффективного неоднородного уширения активного вещества, возникающего из-за сильно меняющегося по координате поля, за которым

\* Каждой точке любой кривой на рис. 2 в  $i\alpha_q$ -плоскости соответствует определенный частотный годограф, касающийся мнимой оси.

«следят» собственные частоты («возмущенных») двухуровневых систем\*.

Как видно из рис. 1 (см., например, поведение  $\bar{K}_0$ ), реализация критического превышения является необходимой, но не достаточной гарантией появления неустойчивости, так как нужно, чтобы в области неустойчивости на плоскости  $i\alpha_q$  находилось хотя бы одно истинное значение этого параметра. Оценки для рубинового ( $|d_{12}| \simeq 10^{-20}$  эрг/ед. CGSE  $\omega_0/2\pi \simeq 4,32 \cdot 10^{14}$  Гц) ОКГ бегущей волны с резонатором  $L = 150$  см и  $r^2 = 0,5$  при комнатной температуре ( $\gamma_\parallel \simeq 10^3$  сек $^{-1}$ ,  $\gamma_\perp = 10^{11}$  сек $^{-1}$ ,  $\Gamma \simeq 7 \cdot 10^{-4}$ ,  $Q \simeq 2 \cdot 10^7$ ) показывают, что для возникновения неустойчивости на  $(q_0 \pm q)$ -типа колебаний «горячего» резонатора необходимо превышение накачки над порогом

$$\lambda_q \gtrsim \frac{c^2}{L^2} q^2 \frac{4\pi^2(1-r^2)}{\gamma_\perp \gamma_\parallel (\ln r^{-2})} \simeq 1,13 \cdot 10^4 q^2, \quad (10)$$

значительно большее того критического  $\lambda_c$  ( $0,5; 10^{-8} \simeq 10$ ), при котором годограф касается мнимой оси  $i\alpha_q$ -плоскости где-то вблизи точки  $i\alpha_q = 0$ . Превышением  $\lambda_q$  соответствует недостижимая в настоящее время в одночастотном режиме мощность генерации  $P \simeq 0,3 q^2 \cdot 10^5$  вт (сечение пучка  $\Sigma = \pi \cdot 10^{-2}$  см $^2$ ). Поэтому рассмотренный тип неустойчивости, вероятно, не является причиной образования пичков в рубиновом ОКГ, хотя в иных однородно уширенных средах, где  $\gamma_\perp \gamma_\parallel \simeq 10^{16} \div 10^{18}$  сек $^{-2}$ , такая возможность не исключена.

В заключение необходимо отметить, что

1) характеристическое уравнение системы (6г) — (6д) совпадает с соответствующим уравнением (3.8) работы [1];

2) характеристическое уравнение для возмущений, распространяющихся навстречу основной волне, совпадает с (8) с точностью до одной замены:  $E_0^2(I)$  в (8) нужно заменить на  $E_0^2(I)/2$ ;

3) при учете распределенных и сосредоточенных потерь соответствующее характеристическое уравнение становится достаточно сложным, но не безнадежным для анализа на ЭВМ;

4) наличие в резонаторе поглощающего участка нелинейной среды не меняет характеристического уравнения и, следовательно, характера устойчивости стационарной генерации.

Автор выражает искреннюю признательность В. И. Таланову за ценные замечания и постоянный интерес к работе, а также В. И. Беспалову, Я. И. Ханину, Е. И. Якубовичу и Г. Л. Гуревичу за полезную дискуссию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. H. Risken, K. Nummedal, J. Appl. Phys., **39**, 4662 (1968).
2. H. Risken, K. Nummedal, Phys. Let., **26A**, 275 (1968).
3. Н. Д. Миловский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, **7**, № 6, 1095 (1964).
4. Н. Д. Миловский, Об устойчивости РОКУ и ОКГ бегущей волны, Научно-техническая конференция по квантовой электронике, сб. докладов, М., 1967

\* В области  $r^2 \rightarrow 1$  увеличение  $\lambda_c$  сопровождается уменьшением критической накачки  $n_c^0 \sim \lambda_c (\ln r^{-2})$ , которая, монотонно убывая во всем диапазоне  $0 < r^2 < 1$ , стремится к  $n_c^0 \min > 0$  при  $r^2 = 1$ . Так как в области малых потерь ( $\ln r^2 \rightarrow 0$ ) при любом конечном  $n^0$  сильно возрастает стационарное поле, то становится необходимым учесть распределенных потерь [3]. Последний, по-видимому, мог бы существенно изменить поведение  $\lambda_c(r^2)$  вблизи  $r^2 = 1$ .

5. Н. Д. Миловский, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 13, № 2, 257 (1970).
6. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, изд. Наука, М., 1965.
7. Ю. И. Неймарк, Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА, 1949
8. Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутян, ЖЭТФ, 49, 1605 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
16 февраля 1970 г.

ON THE STABILITY OF A SINGLE-FREQUENCY STATIONARY REGIME  
OF A TRAVELING-WAVE LASER ON UNIFORMLY BROADENED  
ACTIVE MATERIAL

*N. D. Milovskii*

There has been investigated the stability of a single-frequency stationary regime of a one-dimensional traveling-wave laser model on the uniformly broadened active material with respect to a wide class of perturbations the field polarization and inversion difference of population propagating together with a wave and arbitrarily depending on the coordinate and the time. It is shown that when the reflection losses in the cavity are taken into account, the effective inhomogeneous broadening of the active material occurs. It leads to additional (as compared with distributed losses) increase of the critical pump at which the instability arises. The estimations of the critical threshold pump are made for the ruby laser.

*Примечание при корректуре.* Физической причиной, ответственной за нарушение устойчивости одночастотной стационарной генерации, нужно считать процессы многофотонных (в частности, четырехфотонного [1]) взаимодействий, в результате которых два фотона сильного поля накачки  $2\hbar\omega$  образуют два фотона слабых полей.  $\hbar(\omega + \Omega)$  и  $\hbar(\omega - \Omega)$ . Вероятности таких взаимодействий зависят от интенсивности сильного поля  $|E|^2$  и от расстройки  $\Omega$  частоты сильного поля  $\omega$  от частот  $\omega \pm \Omega$  слабых полей. Именно этим можно объяснить появление положительного инкремента нарастания возмущений для интенсивностей  $|E|^2$ , превышающих критическую  $|E_c|^2$ , в фиксированной области частот:  $\Omega \in [\Omega_1, \Omega_2]$ .

1: В. М. Арутюнян, Е. Г. Конецян, В. О. Чалтыкян, ЖЭТФ, 52, вып 1(7), 195 (1970).

УДК 621.373.42

## ДИНАМИКА ДВУХКОНТУРНОГО АВТОГЕНЕРАТОРА С НЕЛИНЕЙНЫМ КВАРЦЕВЫМ РЕЗОНАТОРОМ

*Н. Н. Солин*

Рассмотрена динамика двухконтурного кварцевого генератора, в котором кварц эквивалентен нелинейному колебательному контуру. Получено решение задачи для случаев, когда лампа и кварц нелинейны и когда лампа линейна, а кварц нелинейен. Показано, что в рассматриваемых условиях функция, выражающая зависимость частоты установившихся колебаний от относительной расстройки анодного контура, имеет максимум.

Известно, что при достаточно больших амплитудах колебаний кварцевая пластинка ведет себя как нелинейная колебательная система [1, 2]. Это свойство кварцевой пластинки уже используется в настоящее время при создании параметрических усилителей и генераторов электрических колебаний [3].

Представляет интерес рассмотреть динамику процессов в двухконтурном автогенераторе с нелинейным кварцевым резонатором, которая, как нам кажется, к настоящему времени еще никем не изучалась.

Схема кварцевого генератора представлена на рис. 1. Предполагается, что от напряжения на кварце зависят как сопротивление (см. [4]), так и емкость его эквивалентного контура. Принимая эту зависимость полиноминальной, ограничившись лишь квадратичными членами соответствующих полиномов, т. е. будем считать, что  $r_k = r_{k0}(1 + \beta_k y^2)$  и  $C_k = C_{k0}(1 - \gamma y^2)$ . Можно показать, что линейный член не дает никаких новых физических эффектов, а членами порядков выше второго можно пренебречь при достаточно малой нелинейности кварца.

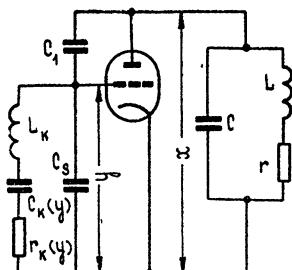


Рис. 1. Принципиальная схема кварцевого генератора.

Для рассматриваемой схемы генератора уравнения движения для напряжения на анодном контуре  $x(t)$  и напряжения на кварцевом контуре  $y(t)$  будут следующими:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= F(x, \dot{x}, y, \dot{y}), \\ \ddot{y} + \omega_1^2 y &= H(x, \dot{x}, y, \dot{y}), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= h_a \omega_1^2 x - \Pi_a \dot{x} - s_1 \omega_1^2 y - \omega_1 l \dot{y} (1 - 3 \beta_l y^2), \\ H(x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= -\frac{\omega_1}{Q_k} \dot{y} (1 + \beta_k y^2) + s_2 F(x, \dot{x}, y, \dot{y}) - \\ &- s_2 h_a \omega_1^2 x - \omega_1^2 \gamma y^3. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= L_k^{-1} [C_{k0}^{-1} + (C_1 + C_s)^{-1}], \quad \omega_k^2 = (L_k C_{k0})^{-1}, \quad \omega_a^2 = L^{-1} (C + C_1)^{-1}, \\ s_1 &= C_1/(C + C_1), \quad s_2 = C_1/(C_s + C_1), \quad h_k = C_{k0}/(C_{k0} + C_1 + C_s), \\ h_a &= (\omega_1^2 - \omega_a^2)/\omega_1^2,\end{aligned}$$

$l = S/\omega_1(C + C_1)$  — безразмерная крутизна,  $\Pi_a = \omega_1/Q_a = r/L$  — полюса анодного контура,  $\beta_n$  — коэффициент нелинейности лампы,  $\gamma, \beta_k$  — коэффициенты нелинейности соответственно емкости и сопротивления кварца.

Если за параметр малости возьмем  $\mu = 1/Q_a$ , то можно считать, что  $\mu^2 = 1/Q_k \gamma$ . При этом коэффициенты  $s_1, s_2, h_a, h_k$  и  $l$  будут иметь порядок малости  $\mu$ . Кроме того, считаем, что  $\gamma y^2 \sim \mu^2$ . В этом случае функция  $F(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ , стоящая в правой части первого уравнения системы (1), будет иметь порядок величины  $\omega_1^2 \mu$ , а функция  $H(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ , стоящая в правой части второго уравнения системы (1), будет иметь порядок величины  $\omega_1^2 \mu^2$ . Следовательно, система (1) является системой двух нелинейных дифференциальных уравнений с неравноценными правыми частями. Поэтому будем решать ее методом усреднения аналогично тому, как это сделано в [5] для автогенератора с линейным кварцевым резонатором.

Решение системы (1) ищем в виде

$$\begin{aligned}y &= R \cos \psi, \quad y = -\omega_1 R \sin \psi, \quad x = P \cos \psi + B \sin \psi, \\ \dot{x} &= -\omega_1 P \sin \psi + \omega_1 B \cos \psi, \quad \psi = \omega_1 t + \vartheta.\end{aligned}$$

Тогда из системы (1), следуя методике, изложенной в [5], нетрудно получить уравнения для стационарных амплитуд

$$\begin{aligned}h_a B_0 + Q_a^{-1} P_0 + l R_0 \left( 1 - \frac{3}{4} \beta_n R_0^2 \right) &= 0, \\ h_a P_0 - Q_a^{-1} B_0 - s_1 R_0 &= 0, \\ -s_2 h_k B_0 + Q_a^{-1} R_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \beta_k R_0^2 \right) &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

и выражение для поправки на частоту

$$\Delta \omega_0 = \frac{\omega_1}{2} \left( s_2 h_k \frac{P_0}{B_0} + \frac{3}{4} \gamma R_0^2 \right).\tag{3}$$

Из двух последних уравнений системы (2) получим

$$\begin{aligned}P_0 &= \frac{1 + [(1/4) \beta_k R_0^2] + s_1 s_2 h_k Q_k Q_a}{s_2 h_k h_a Q_a Q_k} R_0 \equiv \frac{R_0}{g_1}, \\ B_0 &= \frac{1 + [(1/4) \beta_k R_0^2]}{s_2 h_k Q_k} R_0 \equiv \frac{R_0}{g_2}.\end{aligned}\tag{4}$$

Подставляя выражение для  $P_0$  в (3), находим, что

$$\Delta \omega_0 = \frac{\omega_1}{2} \left( s_1 s_2 \frac{h_k}{h_a} + \frac{1}{h_a Q_a Q_k} + \frac{\beta_k R_0^2}{4 h_a Q_a Q_k} + \frac{3}{4} \gamma R_0^2 \right),\tag{5}$$

а затем, подставляя выражения (4) для  $P_0$  и  $B_0$  в первое уравнение (2), получим уравнение для  $R_0^2$ :

$$\frac{1}{4} R_0^2 = \frac{s_2 h_k Q_k (s_1 Q_a^{-1} + h_a l) + h_a^2 + Q_a^{-2}}{3 \beta_l l s_2 h_k h_a Q_k - \beta_k (h_a^2 + Q_a^{-2})}. \quad (6)$$

Если в (5) и (6) положить  $\beta_k = 0$  и  $\gamma = 0$ , то приедем к рассмотренному ранее в [5] случаю двухконтурного генератора с линейным кварцевым резонатором. Зависимость  $(3/4) \beta_l l R_0^2$  от  $h_a$ , приведенная в [5] на рис. 7.3, получается тогда из (6), а зависимость  $\omega_0/\omega_1 = (\omega_1 + \Delta\omega_0)/\omega_1$  от  $h_a$ , приведенная в [5] на рис. 7.4, — из (5).

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть  $\beta_l = 0$ ,  $\beta_k \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$ , т. е. лампа выполняет роль линейного активного элемента, а кварц — нелинейен. Тогда из (6) получаем следующее уравнение для  $R_0^2$ :

$$\frac{1}{4} \beta_k R_0^2 = - \frac{s_2 h_k Q_k (s_1 Q_a^{-1} + h_a l) + h_a^2 + Q_a^{-2}}{h_a^2 + Q_a^{-2}}. \quad (7)$$

Исследование устойчивости установившихся значений амплитуд, проведенное при помощи критерия Рауса — Гурвица, показало, что в данном случае решение устойчиво по амплитудам для всех  $h_a$ , для которых существует  $R_0^2 > 0$ , при  $\beta_k > 0$ . Построив зависимость  $(1/4) \beta_k R_0^2$  от  $h_a$  (см. рис. 2), соответствующую уравнению (7), можно видеть, что решение существует только в узком диапазоне  $h_{a1} < h_a < h_{a2}$ .

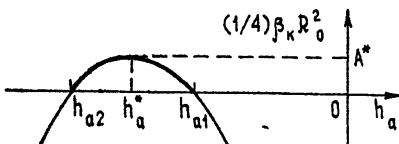


Рис. 2.

Необходимо отметить, что значения  $h_{a1}$  и  $h_{a2}$  совпадают с соответствующими  $h_{a1}$  и  $h_{a2}$ , полученными в случае линейного кварца ( $\beta_k = 0$ ) и нелинейной лампы ( $\beta_l \neq 0$ ) ([5], § 7.2). Из (5) в том и другом случае получаются одинаковые уравнения для определения области существования амплитуды колебаний на кварце  $R_0$ . Таким образом, в эксперименте трудно определить по зависимостям  $R_0^2$  от  $h_a$ , какая нелинейность (лампы или кварца) ответственна за установление амплитуды колебаний на кварце, поскольку обе эти зависимости похожи.

Условие самовозбуждения остается тем же, что и для линейного кварца (см. [5]).

Подставив (7) в (5), получим зависимость поправки на частоту  $\Delta\omega_0$  от расстройки  $h_a$ . График такой зависимости  $\omega_0/\omega_1$  от  $h_a$  для различных значений  $\gamma/\beta_k$  приведен на рис. 3. По сравнению со случаем линейного кварцевого резонатора ( $\gamma/\beta_k = 0$ ) эта зависимость является более сложной.

Если для линейного кварцевого резонатора (см. рис. 7.4 в [5]) отношение  $\omega_0/\omega_1$  монотонно возрастало с изменением расстройки от

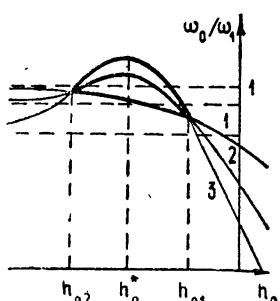


Рис. 3. 1)  $(\gamma/\beta_k)_1 = 0$ ; 2)  $(\gamma/\beta_k)_2$ ; 3)  $(\gamma/\beta_k)_3$ , причем  $(\gamma/\beta_k)_1 < (\gamma/\beta_k)_2 < (\gamma/\beta_k)_3$ .

$h_{a1}$  к  $h_{a2}$ , то для нелинейного кварцевого резонатора в рассматриваемом диапазоне расстроек  $[h_{a1}, h_{a2}]$  имеется максимум функции  $\omega_0/\omega_1 = f(h_a)$ .

Это объясняется тем, что  $\Delta\omega_0$  в случае автогенератора с нелинейным кварцевым резонатором более сильно (по сравнению со случаем линейного кварца) зависит от амплитуды колебаний  $R_0$ , которая в свою очередь зависит от относительной расстройки  $h_a$  (см. рис. 2).

Это явление может иметь практическое значение. Если настроить анодный контур автогенератора так, чтобы относительная расстройка имела значение  $h_a^*$ , которому соответствует максимум  $\omega_0/\omega_1(h_a)$ , то частота кварцевого генератора не будет зависеть от флуктуаций параметров, входящих в выражение для  $h_a$ .

2. Пусть  $\beta_l \neq 0$ ,  $\beta_k \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$ , т. е. и лампа и кварц являются нелинейными.

Уравнение для установившейся амплитуды колебаний на кварце дается теперь выражением (5). Можно показать, что при  $\beta_l \gg \beta_k$  так же, как и для линейного кварца, решение будет устойчиво по амплитудам для всех  $h_a < 0$ . При  $\beta_l \gg \beta_k$  получается результат, аналогичный предыдущему. Поэтому остается проанализировать случай  $\beta_k \approx \beta_l \approx \beta_0$ . Здесь остается тот же интервал допустимых расстроек  $[h_{a1}, h_{a2}]$ , в котором  $R_0^2 > 0$ , и, следовательно, существуют колебания в автогенераторе.

Выражение для поправки на частоту можно получить, если подставить (5) в (4). В рассматриваемом диапазоне расстроек зависимость этой поправки от  $h_a$  аналогична соответствующей зависимости  $\omega_0/\omega_1(h_a)$ , приведенной на рис. 3. Надо отметить, что интервал расстроек  $[h_{a1}, h_{a2}]$ , в которых генератор возбуждается, для всех трех случаев один и тот же.

Кроме рассмотренного диссипативного механизма ограничения амплитуды колебаний, в двухконтурном генераторе с нелинейным кварцевым резонатором возможен также и расстроочный механизм ограничения. Очевидно, что этот механизм начинает работать, когда  $\gamma y^2 \sim \mu$ , т. е. когда величина  $\gamma y^2$ , характеризующая нелинейность емкости кварца, становится соизмеримой с расстройками  $h_k$  и  $h_a$ . Здесь могут играть большую роль параметрические явления, поэтому данный механизм требует специального рассмотрения.

Автор считает своим долгом выразить благодарность В. А. Маркелову, А. И. Чикину, А. Н. Малахову и А. В. Якимову за ценные замечания, сделанные при обсуждении работы.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 А. Г. Смагин, Пьезоэлектрические резонаторы и их применение, изд. Стандартов, М., 1967.
- 2 Е. А. Герберг, R. A. Sykes, Proc. IEEE, 54, № 2 (1966).
- 3 В. С. Самойлов, Л. З. Русаков, Электронная техника, сер. IX, Радиокомпоненты, вып. 4, 3 (1967).
- 4 С. Ф. Травкина В. Шин, Электронная техника, сер. IX, Радиокомпоненты, вып. 5, 32 (1968).
- 5 А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968

## THE DYNAMICS OF TWO-CIRCUIT SELF-OSCILLATOR WITH NONLINEAR QUARZ RESONATOR

*N. N. Solin*

The dynamics of two-circuit quartz generator has been considered in which quartz is equivalent to the nonlinear oscillatory circuit. The solution is derived for the cases when the tube and quartz are nonlinear and when the tube is linear and the quartz is nonlinear. Under the conditions considered the function expressing the frequency dependence of steady-state oscillations on the relative detuning of the circuit anode is shown to have a maximum.

---

УДК 538.56 : 519.25

## О ДЕНОРМАЛИЗАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ДИСПЕРСИОННОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

*И. П. Бсброва, Л. П. Зичепицкая, И. Н. Созинов*

Рассматривается вопрос об изменении коэффициента эксцесса вероятностного распределения случайных процессов при прохождении через фильтр с квадратичной фазовой характеристикой, являющейся согласованным для сигнала с линейной частотной модуляцией. Показано, что случайные процессы некоторого вида при этом могут претерпевать существенную денормализацию (например, для практически используемых систем коэффициент эксцесса может возрасти в  $10^2 - 10^3$  раз). Эта весьма существенная денормализация происходит несмотря на то, что фильтр в этом случае является системой инерционной в том смысле, что его постоянная времени  $\tau_c$  значительно превышает время корреляции  $\tau_{\text{корр}}$  входного процесса,  $\tau_c \gg \tau_{\text{корр}}$ .

1. Настоящая работа посвящена рассмотрению одного примера денормализации случайных процессов в инерционных линейных системах с постоянными параметрами\*. Возможность денормализации случайных процессов инерционными линейными системами была показана в работе [1]. Однако при обсуждении исследований, посвященных денормализации, нередко высказываются возражения по поводу принципиальной возможности денормализации не только в инерционных, но и вообще в линейных системах. В связи с этим данная статья имеет целью на конкретном примере дополнительно разъяснить вопросы, связанные с денормализацией случайных процессов в инерционных линейных системах.

Прежде чем приступить к изложению конкретного примера, сформулируем коротко основные положения работы [1], в которой рассматривалось прохождение через линейную систему случайного процесса.

$$x(t) = \sum a_i F_{\text{вх}}(t - t_i), \quad (1)$$

являющегося суперпозицией одинаковых элементарных импульсов  $F_{\text{вх}}(t)$ , возникающих в случайные независимые моменты времени  $t_i$  со случайными независимыми амплитудами  $a_i$ .

Процесс на выходе линейной системы

$$y(t) = \sum a_i F_{\text{вых}}(t - t_i) \quad (2)$$

также является суперпозицией одинаковых элементарных импульсов, форма которых  $F_{\text{вых}}(t)$  дается интегралом свертки

$$F_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{вх}}(\theta) h(t - \theta) d\theta, \quad (3)$$

где  $h(t)$  — импульсная характеристика линейной системы.

\* Систему называем инерционной, если ее постоянная времени значительно превышает время корреляции входного процесса.

Относительное временное расположение элементарных импульсов, определяемое случайными моментами времени  $t_i$ , и их амплитуды  $a_i$  остаются при этом неизменными. Линейная система преобразует лишь форму элементарных импульсов и может, кроме того, внести временную задержку, одинаковую для всех импульсов,—и то, и другое полностью описывается соотношениями (2) и (3).

В работе [1] производилось сравнение степени отклонения от гауссовой кривой одномерных законов вероятностного распределения входного (1) и выходного (2) случайных процессов. Степень отклонения вероятностного распределения от нормального характеризовалась величиной четвертого нормированного кумулянта распределения, называемого коэффициентом эксцесса\*. Принималось, что линейная система нормализует вероятностное распределение, если коэффициент эксцесса уменьшается при прохождении случайного процесса через линейную систему. Если же коэффициент эксцесса возрастает при прохождении случайного процесса через систему, это означает, что система увеличивает степень отклонения закона вероятностного распределения от нормального. В этом случае можно сказать, что система денормализует проходящий через неё случайный процесс.

Математически условия нормализации и денормализации можно сформулировать, воспользовавшись выражением для отношения коэффициентов эксцесса выходного  $\gamma_{\text{вых}}$  и входного  $\gamma_{\text{вх}}$  случайных процессов\*\*:

$$\frac{\gamma_{\text{вых}}}{\gamma_{\text{вх}}} = \frac{\left( \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{вых}}^4(\theta) d\theta \right)}{\left( \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{вх}}^2(\theta) d\theta \right)^2} \cdot \frac{\left( \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{вх}}^2(\theta) d\theta \right)^2}{\left( \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{вх}}^4(\theta) d\theta \right)}. \quad (4)$$

При этом случай

$$\frac{\gamma_{\text{вых}}}{\gamma_{\text{вх}}} < 1 \quad (6)$$

соответствует нормализации, а

\* Известно, что для нормального распределения все высшие кумулянты, начиная с 3-го, тождественно равны нулю. Если же распределение отлично, но близко к нормальному, то наиболее существенными оказываются 3-й и 4-й кумулянты, нормированные значения которых называются соответственно коэффициентами асимметрии и эксцесса. Если ограничиться рассмотрением узкополосных процессов, то коэффициент асимметрии окажется пренебрежимо малым, и отличие закона вероятностного распределения от нормального можно характеризовать, в первом приближении, только коэффициентом эксцесса. Заметим, что в случае значительной денормализации вероятностное распределение выходного процесса может стать настолько отличным от нормального, что для достаточно полной характеристики вероятностного распределения выходного процесса могут потребоваться более высокие кумулянты.

\*\* Для того, чтобы получить (4), нужно воспользоваться следующим выражением  $m$ -го кумулянта распределения для пуссоновских импульсных случайных процессов (1) и (2) (см., например, [1]):

$$z_m = n_0 \langle a^m \rangle \int_{-\infty}^{\infty} F^m(\theta) d\theta, \quad (5)$$

где  $n_0$  — средняя частота появления импульсов в случайном процессе,  $\langle a^m \rangle$  —  $m$ -й момент вероятностного распределения амплитуд,  $F(\theta)$  — форма элементарного импульса. Записывая в виде (5) кумулянты входного и выходного случайных процессов и учитывая, что коэффициент эксцесса  $\gamma$  равен  $\gamma = z_4/z_2^2$ , получим (4).

$$\frac{\gamma_{\text{вых}}}{\gamma_{\text{вх}}} > 1 \quad (7)$$

— денормализации случайного процесса.

В работе [1] условия нормализации (6) и денормализации (7) были выражены через эффективные длительности элементарных импульсов  $T_{\text{вх}}$  и  $T_{\text{вых}}$  и имели вид

$$T_{\text{вых}} > T_{\text{вх}} — \text{условие нормализации}, \quad (6a)$$

$$T_{\text{вых}} < T_{\text{вх}} — \text{условие денормализации}, \quad (7a)$$

где эффективные длительности  $T_{\text{вх}}$  и  $T_{\text{вых}}$  означают следующее:

$$T_{\text{вх}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{вх}}^2(\theta) d\theta}{\tilde{F}_{\text{вх}}^2}, \quad T_{\text{вых}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{вых}}^2(\theta) d\theta}{\tilde{F}_{\text{вых}}^2} \quad (8)$$

( $\tilde{F}_{\text{вх}}$  и  $\tilde{F}_{\text{вых}}$  — экстремальные значения элементарных импульсов).

Условие (6 а) означает, что в линейной системе происходит явление нормализации, если эффективная длительность  $T_{\text{вых}}$  элементарного импульса выходного случайного процесса превышает эффективную длительность  $T_{\text{вх}}$  элементарного импульса процесса на входе. В противоположном случае (условие (7 а)) система денормализует проходящий через нее случайный процесс.

Отметим, что при переходе от условий (6) и (7) к условиям (6 а), (7 а) было сделано упрощающее предположение о том, что величины

$$T_4 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F^4(\theta) d\theta}{\tilde{F}^4} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\theta) d\theta}{\tilde{F}^2}$$

(соответственно для входного и выходного элементарных импульсов) имеют одинаковый порядок:  $T_2 \approx T_4$ . Для практических важных видов элементарных импульсов это предположение является оправданным, что иллюстрируется табл. 1.

Таблица 1

Вид импульса $F(t)$	$1(t + T/2) - 1(t - T/2)$	$\exp(-b^2/t^2)$	$\frac{\sin(bt)}{bt}$	$\exp(-b t )$
$T_2/T_4$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1,5	2

По существу, вывод о том, что укорочение эффективной длительности элементарного импульса процесса (1) должно сопровождаться денормализацией вероятностного распределения, представляется нам очевидным. Однако именно это положение и вызывает иногда возражения, существование которых сводится к тому, что условие нормализации должно определяться якобы не эффективной, а полной длительностью\*.

\* Под полной длительностью импульса  $F(t)$  имеется в виду интервал значений аргумента, начиная с момента, когда  $F(t)$  становится отличным от нуля, и до тех пор, пока  $F(t)$  не обратится в тождественный нуль.

элементарного импульса. Полная же длительность элементарного импульса при прохождении через линейную систему может только возрасти. (Это, действительно, следует из представления элементарного импульса на выходе линейной системы через интеграл свертки (3).) Поэтому линейные системы всегда должны нормализовать проходящие через них случайные процессы. В пользу этой точки зрения приводятся обычно следующие аргументы. Полной длительностью элементарного импульса определяется среднее число слагаемых в суммах (1) и (2), одновременно отличных от нуля. Поскольку полная длительность при прохождении через линейную систему может только возрасти, то среднее число слагаемых, одновременно отличных от нуля, в выходном процессе оказывается больше, чем во входном. А дальше апеллируют к центральной предельной теореме, согласно которой с ростом числа слагаемых суммы распределение суммы стремится к нормальному, и делают вывод, что денормализация в линейной системе невозможна.

В действительности же, несмотря на увеличение полной длительности элементарного импульса, а значит, и увеличение числа независимых слагаемых суммы, одновременно отличных от нуля, в определенных случаях может происходить денормализация и денормализация весьма значительная. Это связано с тем, что на основании точного выражения (4) отношение коэффициентов эксцесса (так же, как и отношение нормированных кумулянтов более высокого порядка) определяется не полной, а эффективной длительностью элементарного импульса. Последняя же может уменьшаться в линейной системе, несмотря на возрастание полной длительности элементарного импульса. Ниже, после рассмотрения точных количественных соотношений, на материале конкретного примера будет показано, почему приведенные выше рассуждения со ссылкой на центральную предельную теорему, кажущиеся весьма правдоподобными, оказываются некорректными.

В настоящей работе рассматривается денормализация случайного процесса, являющегося суперпозицией линейно-частотно-модулированных импульсов, при прохождении через линейный дисперсионный укорачивающий фильтр. Заметим, что этот пример описывает, в частности, следующую реальную ситуацию, когда на приемное устройство радиолокационной станции с линейно-частотно-модулированным зондирующим сигналом воздействует пассивная помеха. Последняя, как известно, представляет собой случайный процесс, являющийся суперпозицией эхо-сигналов, отраженных от большого количества рассеивателей, случайно распределенных в пространстве, и описывается в первом приближении (без учета перемещения рассеивателей) процессом типа (1).

Будет показано, что в зависимости от параметров линейной системы и входного случайного процесса коэффициент эксцесса выходного процесса может стать во много раз больше коэффициента эксцесса процесса на входе. Это означает, что система внесет существенную денормализацию в проходящий через нее случайный процесс.

**2.** Пусть элементарный импульс входного случайного процесса имеет следующий вид:

$$F_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t + \alpha t^2/2) & (|t| \leq T_0/2) \\ 0 & (|t| > T_0/2) \end{cases}. \quad (9)$$

Другими словами,  $F_{\text{вх}}(t)$  является импульсом с прямоугольной огибающей длительностью  $T_0$  и с линейно-частотно-модулированным заполнением. Как следует из (9), девиация частоты  $\Delta f_0$  в элементарном импульсе равна  $\Delta f_0 = \alpha T_0$ .

В качестве линейной инерционной системы рассмотрим дисперсионный фильтр, который обладает импульсной характеристикой (откликом на дельта-функцию) вида

$$h(t) = \begin{cases} B \cos \left[ \omega_0 (t_0 - t) + \frac{\beta}{2} (t_0 - t)^2 \right] & \left( |t_0 - t| \leq \frac{T_c}{2} \right) \\ 0 & \left( |t_0 - t| > \frac{T_c}{2} \right) \end{cases}. \quad (10)$$

Здесь  $T_c$  — длительность огибающей импульсной переходной характеристики фильтра,  $t_0$  — время задержки в фильтре, удовлетворяющее условию  $t_0 \geq T_c/2$ , которое вытекает из требования физической осуществимости фильтра.

Как видно из (10), импульсная переходная характеристика системы представляет собой также линейно-частотно-модулированный импульс с прямоугольной огибающей и отличается от элементарного импульса (9) по длительности огибающей и скорости изменения частоты. Если считать  $\alpha$  и  $\beta$  положительными, то частота в импульсе (9) нарастает со временем, в то время как в (10) — уменьшается. Девиация частоты отклика (10) равна  $\Delta f_c = \beta T_c$ . На рис. 1 схематически изображены элементарный импульс входного случайного процесса и импульсная переходная характеристика системы.

Заметим, что если  $T_0 = T_c$ , а  $\alpha = \beta$ , то отклик (10) будет, очевидно, зеркален во времени импульсу (4) относительно момента времени  $t = t_0/2$ , т. е.

$$h(t) = BF_{\text{вх}}(t_0 - t).$$

Это означает, что рассматриваемый фильтр окажется согласованным с элементарным импульсом  $F_{\text{вх}}(t)$  входного процесса. В этом случае, как известно (см., например, [3]), элементарный импульс будет укорачиваться в фильтре по своей эффективной длительности, причем степень укорочения будет определяться значением параметра  $m = \Delta f T$ , где  $\Delta f = \Delta f_0 = \Delta f_c$ , а  $T = T_c = T_0$ . Вид элементарного импульса случайного процесса на выходе фильтра в этом случае хорошо известен [3]. Для того, чтобы еще раз наглядно проиллюстрировать укорочение элементарного импульса при прохождении случайного процесса (1) через фильтр (10), когда фильтр является согласованным, на рис. 2 приводится сравнительный вид огибающей элементарного импульса процессов на входе и выходе фильтра.

Итак, при прохождении через согласованный фильтр каждый из элементарных импульсов процесса (1) претерпевает укорочение. Для того, чтобы дать наглядное представление о том, как в этом случае изменяется случайный процесс при прохождении через фильтр, на рис. 3 изображен ряд импульсов входного стационарного процесса и вид тех же самых импульсов после прохождения этого процесса через согласованный фильтр (для упрощения рисунка изображены только огибающие импульсов; время задержки в фильтре  $t_0$  взято равным  $T_c/2$ ).

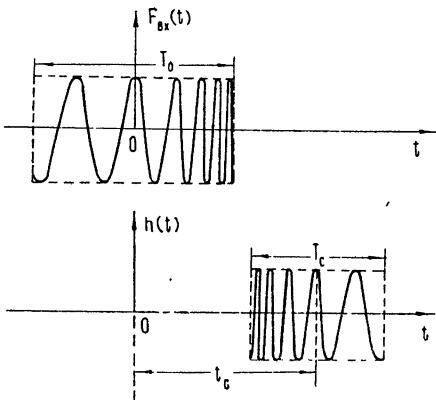


Рис. 1.

В общем случае, когда  $T_0, T_c$  и  $\alpha, \beta$  не равны соответственно друг другу, в фильтре также будет происходить укорочение элементарных импульсов (в последнем случае степень укорочения будет зависеть от конкретного соотношения параметров  $T_0, T_c$  и  $\alpha, \beta$ ).

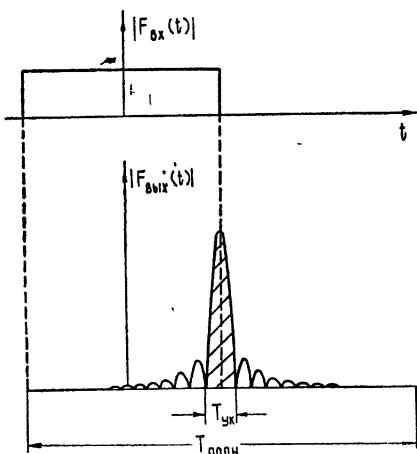


Рис. 2.

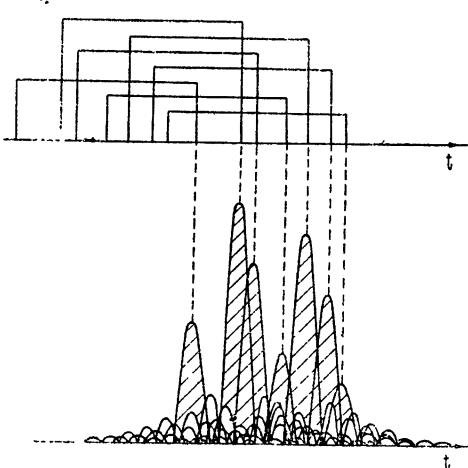


Рис. 3.

Как указывалось выше, нашей задачей является проследить на конкретном примере зависимость степени денормализации от укорочения элементарного импульса. Для этого не обязательно рассматривать случайный процесс и фильтр при произвольном соотношении параметров. Мы ограничимся частным случаем, когда девиация частоты импульса и отклика фильтра равны между собой:

$$\Delta f_0 = \Delta f_c, \quad \text{или} \quad \alpha T_0 = \beta T_c. \quad (11)$$

В этом случае степень укорочения будет определяться отношением  $T_c/T_0$ . При  $T_c/T_0 = 1$  (следовательно, при  $\alpha = \beta$ , согласно (11)), когда  $h(t) = BF_{\text{вх}}(t_0 - t)$ , т. е. когда фильтр является согласованным с элементарным импульсом  $F_{\text{вх}}(t)$ , будет происходить наибольшее укорочение. При  $T_0 \neq T_c$  степень укорочения эффективной длительности будет частичная и будет уменьшаться по мере отличия  $T_c/T_0$  от единицы. Изменяя отношение  $T_c/T_0$ , мы проследим влияние укорочения на денормализацию.

Будем считать, что входной процесс и фильтр с откликом (10) являются узкополосными, т. е. предположим, что

$$\alpha T_0 \ll \omega_0, \quad \beta T_c \ll \omega_0,$$

$$1/T_0 \ll \omega_0, \quad 1/T_c \ll \omega_0.$$

В этом случае коэффициенты асимметрии как входного, так и выходного процессов будут пренебрежимо малыми. Поэтому о степени денормализации будем судить, как и в работе [1], по величине отношения коэффициентов эквивалентного процесса  $\gamma_{\text{вых}}/\gamma_{\text{вх}}$ . Согласно (4), для нахождения  $\gamma_{\text{вых}}/\gamma_{\text{вх}}$  нужно получить выражение  $F_{\text{вых}}(t)$ , которое является сверткой (3) функций (9) и (10). Для используемых в данной работе функций  $F_{\text{вх}}(t)$  и  $h(t)$  эта свертка рассчитывается в [2] для произвольного соотношения параметров функций  $F_{\text{вх}}(t)$  и  $h(t)$ . В нашем случае результат свертки на основании [2] может быть записан в следующем виде:

1)  $\alpha = \beta$ ,

$$F_{\text{вых}}(\theta) = \begin{cases} \frac{B}{\alpha \theta} \sin[1/2 \alpha \theta (T - |\theta|)] \cos \omega_0 \theta & (0 \leq |\theta| \leq T_0); \\ 0 & (|\theta| > T_0) \end{cases} \quad (12a)$$

2)  $\alpha \geq \beta$ ,

$$F_{\text{вых}}(\theta) = \frac{B}{\sqrt{2|\alpha - \beta|}} \{[C(y_2) - C(y_1)]^2 + [S(y_2) - S(y_1)]^2\}^{1/2} \cos \varphi(\theta), \quad (12b)$$

где  $\theta = t - t_0$ ,

$$\varphi(\theta) = \omega_0 \theta - \frac{\beta}{2} \theta^2 - \frac{\beta^2 \theta^2}{2(\alpha - \beta)} \pm \operatorname{arctg} \frac{S(y_1) - S(y_2)}{C(y_2) - C(y_1)},$$

$C(y)$  и  $S(y)$ —соответствующие интегралы Френеля,

$$y_{1,2} = \left( \frac{|\alpha - \beta|}{2} \right)^{1/2} \left( x_{1,2} + \frac{\beta \theta}{\alpha - \beta} \right).$$

Переменные  $x_1$  и  $x_2$  принимают различные значения в зависимости от области изменения  $\theta$ . Соответствие значений  $x_1$  и  $x_2$  различным областям изменения  $\theta$  отражено в табл. 2.

Таблица 2

Номер интервала	Интервал изменений $\theta$	Значения $x_1$ и $x_2$	Примечания
I	$\theta < -(T_0/2 + T_c/2)$		$F_{\text{вых}}(\theta) = 0$
II	$-\left(\frac{T_0}{2} + \frac{T_c}{2}\right) < \theta \leq \min \left\{ \frac{T_0/2 - T_c/2}{T_c/2 - T_0/2} \right\}$	$x_1 = -\frac{T_0}{2}, \quad x_2 = \theta + \frac{T_c}{2}$	
III	$\frac{T_c}{2} - \frac{T_0}{2} < \theta \leq \frac{T_0}{2} - \frac{T_c}{2}$	$x_1 = \theta - \frac{T_c}{2}, \quad x_2 = \theta + \frac{T_c}{2}$	$T_0 \geq T_c$
	$\frac{T_0}{2} - \frac{T_c}{2} < \theta \leq \frac{T_c}{2} - \frac{T_0}{2}$	$x_1 = -\frac{T_0}{2}, \quad x_2 = \frac{T_0}{2}$	$T_0 \leq T_c$
IV	$\max \left\{ \frac{T_0/2 - T_c/2}{T_c/2 - T_0/2} \right\} \leq \theta \leq \frac{T_0}{2} + \frac{T_c}{2}$	$x_1 = \theta - \frac{T_c}{2}, \quad x_2 = \frac{T_0}{2}$	
V	$\frac{T_0}{2} + \frac{T_c}{2} < \theta$		$F_{\text{вых}}(\theta) = 0$

Для импульса, даваемого выражениями (12a) и (12b), аналитически получить значение интегралов, входящих в выражение (4) для  $\gamma_{\text{вых}}/\gamma_{\text{вх}}$ , не представляется возможным. Поэтому соответствующие вычисления были произведены на ЭВМ.

Полученные в результате точных вычислений графики зависимости отношения коэффициентов экссесса входного и выходного процессов как функции параметра  $T_c/T_0$  приведены на рис. 4 для трех значений параметра  $m = \Delta f_0 T_0$ : Из графиков видно, что область существенной денормализации ( $\gamma_{\text{вых}}/\gamma_{\text{вх}} \gg 1$ ) лежит в узком интервале значений  $T_c/T_0$ , непосредственно примыкающих к единице. Это объясняется тем, что именно в этом районе происходит существенное укорочение элементар-

ных импульсов. Из графиков ясно также, что с увеличением параметра  $m$  степень денормализации возрастает. Это связано с тем, что с ростом  $m$  возрастает степень укорочения элементарного импульса в согласованном фильтре. При достаточно большом  $m$  денормализация становится весьма значительной. Так, при  $m = 10^3$  коэффициент эксцесса возрастает по сравнению с входным примерно в 10 раз (при  $T_c/T_0=1$ ).

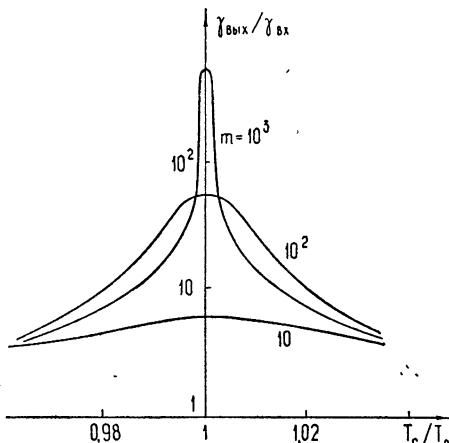


Рис. 4.

мится к единице, так как при этом быстродействующий и не меняет эффективной длительности элементарного импульса, а следовательно, и степень близости распределения к нормальному.

Заметим, что согласованный фильтр при условии  $m \gg 1$  является системой инерционной, поскольку время корреляции входного процесса  $\tau_{\text{корр}} \approx 1/\Delta f_0$ , а постоянная времени согласованного фильтра равна протяженности  $T_0$  элементарного импульса на входе. Это означает, что условие  $m \gg 1$  (напомним, что  $m = \Delta f_0 T_0$ ) переходит в условие  $\tau_c \gg \tau_{\text{корр}}$ . Отсюда, учитывая изложенное выше, можно сделать вывод, что чем больше инерционность согласованного фильтра, тем большую денормализацию он вносит в проходящий через него случайный процесс.

3. Как же объяснить с точки зрения центральной предельной теоремы тот факт, что в данной системе, несмотря на возрастание полной длительности элементарного импульса, а значит, и числа слагаемых в сумме (2), одновременно отличных от нуля, процесс денормализуется.

Известно, что с увеличением числа независимых слагаемых вероятностное распределение суммы стремится к нормальному только тогда, когда слагаемые остаются равнозначными в среднем по своему вкладу в значение суммы. В нашем случае именно это условие и не выполняется. Хотя число слагаемых и возрастает, они становятся существенно неравнозначными. Действительно, в выходном процессе есть слагаемые, обвязанные перекрытию главных максимумов укороченных элементарных

Для того, чтобы показать изменение отношения коэффициентов эксцесса при изменении параметра  $T_c/T_0$  в более широких пределах, приведем качественный график на рис. 5. При неограниченном возрастании  $T_c/T_0$  система становится настолько инерционной, что эффективная длительность выходного импульса  $T_{\text{вых}}$  становится значительно больше эффективной длительности входного импульса  $T_{\text{вх}}$ . И, как следует из рис. 5, система при этом будет нормализовать проходящий через нее процесс. Если же параметр  $T_c/T_0$  стремится к нулю, то коэффициент эксцесса, как можно видеть из рис. 5, стремится к бесконечности.

система становится достаточно

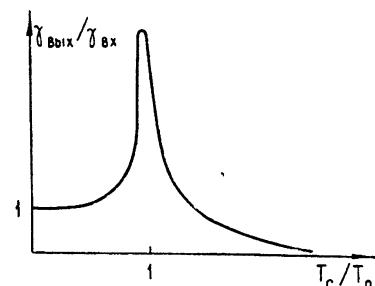


Рис. 5

импульсов (на рис. 2 и 3 главные максимумы выходных импульсов отмечены штриховкой), и есть слагаемые, обязаные наложению их побочных лепестков.

Вклад тех и других слагаемых в значение суммы (2) существенно неравнозначен. Для того, чтобы пояснить это, запишем выражение средней мощности процесса (2) на выходе системы:

$$\langle y^2(t) \rangle = x_2 = \langle a^2 \rangle n_0 \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{вых}}^2(\theta) d\theta. \quad (13)$$

Далее, разобьем условно процесс (2) на 2 части так, что первую часть будем считать состоящей только из главных максимумов элементарных импульсов, а ко второй части отнесем то, что обязано наличию побочных максимумов. Из выражения (13) можно получить, что для случая  $T_c/T_0 = 1$ , когда происходит наибольшая денормализация в фильтре, в первой части сосредоточено более 90% всей мощности процесса (2) и лишь менее 10% всей мощности приходится на вторую часть.

Наряду с этим в первой части процесса (2) среднее число слагаемых, одновременно отличных от нуля, равно произведению  $n_0 T_{\text{ук}}$ , где  $T_{\text{ук}} \approx 1/\Delta f_0$  — протяженность главного максимума укороченного выходного импульса (см. рис. 2). Это число слагаемых значительно меньше, чем соответствующее число слагаемых во входном процессе, поскольку последнее равно  $n_0 T_0$ , а при большом значении параметра  $m = \Delta f_0 T_0$ ,  $T_{\text{ук}} \ll T_0$ . Поэтому вероятностное распределение первой части выходного случайного процесса значительно сильнее отличается от нормального, чем распределение входного процесса. Что же касается второй части, которая обязана наличию побочных максимумов элементарных импульсов, то каково бы ни было здесь число слагаемых (заметим, оно больше, чем число слагаемых на входе), оказать сколь-нибудь заметное влияние на вероятностное распределение всего процесса она не может. Это легко понять, поскольку во второй части процесса, как уже отмечалось, сосредоточено менее 10% всей мощности.

Отсюда понятна ошибочность качественных рассуждений, когда на основании увеличения полной длительности элементарного импульса, делается вывод о том, что в линейной системе должна происходить нормализация. Чтобы пользоваться центральной предельной теоремой, нужно сравнивать эффективное эквивалентное число равнозначных в среднем слагаемых, которое определяется как произведение параметра  $n_0$  на эффективную длительность импульса  $T$  (соответственно  $T_{\text{вх}}$  или  $T_{\text{вых}}$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

- Л. П. Зачепицкая, Радиотехника и электроника, № 8 (1968).
- А. С. Протопопов, Радиотехника и электроника, № 10 (1967).
- В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1966.
- С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
3 октября 1969 г.

#### DENORMALIZATION OF RANDOM PROCESSES IN A DISPERSIVE LINEAR SYSTEM

*N. P. Bobrova, L. P. Zacheptskaya, I. N. Sozinov*

The change is considered of the excess coefficient of the probability distribution of random processes when passing through the filter with a quadratic phase characteristics being matched for a signal with a linear frequency modulation. It is shown that the certain random processes of some kind may undergo a considerable denormalization (for example for a practical system the excess coefficient may be increased in  $10^2$ — $10^3$  times). This highly essential denormalization takes place despite the fact that the filter in this case is an inertial system in a sense that the time constant  $\tau_s$  considerably increases the correlation time  $\tau_{\text{corr}}$  of the input process  $\tau_s \gg \tau_{\text{corr}}$ .

УДК 538.56 : 621.396.67

## ВЛИЯНИЕ ШУМОВ ФОТОПЛЕНКИ В СИСТЕМАХ ОПТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ АНТЕНН С СИНТЕЗИРУЕМОЙ АПЕРТУРОЙ

*A. A. Богданов, И. Я. Брусин, В. Д. Скворцов*

Рассматриваются ограничения динамического диапазона и числа различимых уровней интенсивности сигналов, а также ухудшение разрешающей способности, которые возникают из-за шумов фотопленок при оптическом преобразовании записанных на них сигналов в радиолокационных системах с синтезируемой апертурой. Описываются измерения указанных величин. Результаты представляют интерес также с точки зрения голограммии.

В антенных с синтезируемой апертурой, описанных в [1], кроме радиотехнических операций над сигналом (фильтрация, детектирование и т. д.) применяются еще алгоритмы преобразования с помощью оптических средств и с записью сигнала на фотопленке. Однако пленка становится источником специфического шума, ухудшающего информационную способность системы в целом, причем здесь оказываются существенными и такие параметры шумов пленки, которые не представляют интереса и не изучались для целей обычной фотографии. В частности, в настоящей статье показывается, что шумы фотопленок накладывают ограничения на динамический диапазон и число различимых уровней для интенсивностей сигналов, а также ведут к ухудшению разрешающей способности. Указанные величины выражаются через некоторые параметры шумов фотопленок. В работе описана методика измерения этих параметров и приводятся количественные результаты для пленки «Микрат-300». На основании этих данных делаются выводы о возможных значениях указанных выше величин.

Полученные результаты представляют интерес с точки зрения голограммии, поскольку рассматриваемое оптическое преобразование радиолокационного сигнала имеет много общего с восстановлением объемного изображения с голограммами.

В рассматриваемой в [1] системе сигнал от точечного объекта записывается на фотопленке вдоль строки изменением амплитудной прозрачности. При идеальной пленке прозрачность будет изменяться по закону [1]

$$\tau_{\text{ид}}(x, y) = A + a_* \cos [p(x - x_*)^2 + \varphi_*], \quad (1)$$

где  $a_*$  — величина, пропорциональная интенсивности объекта, причем  $a_* \neq 0$  только при  $|y - y_*| < h/2$ ,  $h$  — ширина строки,  $x_*, y_*$  — пропорциональны соответствующим координатам объекта на местности,  $\varphi_*$  — случайная фаза, зависящая от длины волны радиолокатора и случайного значения высоты самолета над местностью,  $p$  — параметр, зависящий от длины волны, высоты и  $y_*$ .

Целью последующей обработки является определение  $a_*, x_*, y_*$ . Это легко достигается с помощью оптической системы, подробно описанной в [2]; схема ее показана на рис. 1. Пленка  $\Pi_1$  с записью сигнала (1) ( $\Pi_1$  и фотопленка  $\Pi_2$  протягиваются в направлении оси  $x$ ) фактически

играет роль френелевской голограммы точки. Свет, прошедший через нее, разлагается, как обычно в голографии, на три пучка. Два из них создают изображения точек, каждое из которых содержит всю необходимую информацию. Для работы используется одна из точек, она фиксируется на пленке  $\Pi_2$ , когда попадает на щель  $\mathbb{III}$ . Третий пучок создает паразитный дифракционный фон в месте расположения этих точек. В математическом отношении преобразование, при котором сигнал (1) переводится в изображение точки, эквивалентно преобразованию с помощью оптимального фильтра при условии, что сигнал (1) сопровождается аддитивным белым шумом [3]. Однако шумы пленки носят более сложный характер.

Фактически сигнал (1) должен быть записан следующим образом:

$$\tau(x, y) = \tau_{\text{ид}}(x, y) G(x, y),$$

где

$$G(x, y) = [1 + g(x, y)] \exp [i\Theta(x, y) + i\psi(x, y)], \quad (2)$$

$g$  — случайная функция  $x$  и  $y$ , описывающая колебания прозрачности из-за неоднородности фотоэмulsionии, царапинок, пылинок и т. д.,  $\Theta$  и  $\psi$  — случайные функции  $x$  и  $y$ , описывающие искажения фазы проходящей световой волны из-за колебания коэффициента преломления и толщины, причем функция  $\Theta$  относится в основном к мелкомасштабным неоднородностям фотоэмulsionии и должна быть коррелирована с  $g$ ;  $\psi$  связана главным образом с медленными изменениями основы. Ниже считается, что  $G$  — стационарная случайная функция; зависимость между  $G$  и  $\tau_{\text{ид}}$  не рассматривается.

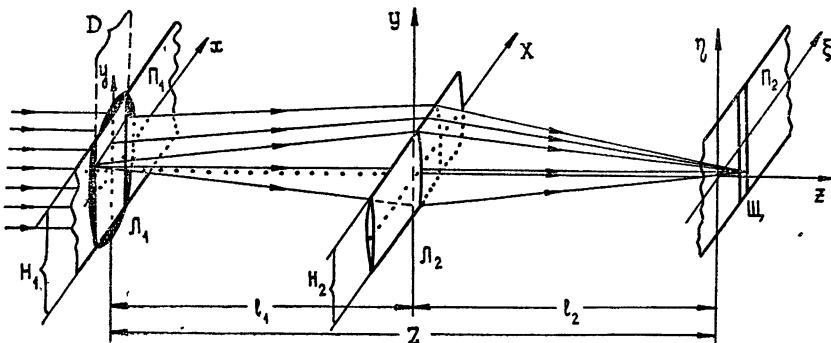


Рис. 1. Схема оптической установки для преобразования сигнала.

На выходе оптической системы в плоскости фокусировки одного из информационных пучков, совпадающей с пленкой  $\Pi_2$  (рис. 1), световые поля указанного пучка и паразитного дифракционного фона описываются соответственно уравнениями

$$E_-(\alpha) = \frac{a_*}{2} C \exp [-i(px_*^2 + \varphi_*)] \int_{-D/2}^{D/2} \tilde{G}(x, y') e^{-i\alpha x} dx; \quad (3)$$

$$E_0(\beta) = AC \int_{-D/2}^{D/2} \tilde{G}(x, y') \exp [i(px^2 - \beta x)] dx, \quad (4)$$

где  $C$  — комплексная постоянная,

$$\beta = k\xi/z, \quad \alpha = \beta - 2px_*,$$

$k$  — волновое число света,

$$\tilde{G}(x, y') = \int_{-H_2/2}^{H_2/2} G(x, y) \frac{\sin [kH_2(y-y')]/2l_1}{\pi (y-y')} dy. \quad (5)$$

Интеграл (5) отражает конечную разрешающую способность цилиндрической линзы  $L_2$ . На  $\tilde{G}(x, y')$  можно смотреть как на среднее  $G(x, y)$  по отрезку  $\Delta y \approx 2l_1/H_2$  около точки  $y' = -l_1\eta/l_2$  (все размеры показаны на рис. 1). Такое усреднение сглаживает неоднородности пленки меньшие, чем  $\Delta y$ . Интегрирование в (3) и (4) производится только по  $x$ , поэтому ниже будем писать  $G(x)$  и  $G$  вместо  $\tilde{G}(x, y')$ .

Выясним, насколько точно можем определить  $a_*$  по максимуму освещенности  $I(\alpha) = |E_-(\alpha) + E_0(\beta)|^2$ , принимая во внимание шумы фотопленки и случайный характер фазы  $\varphi_*$ .

Чтобы яснее представить влияние разных факторов (интенсивности сигнала и шумов пленки), введем обозначения

$$I_a = \left| \frac{a_*}{2} CD \right|^2; \quad (6)$$

$$I_A = \left| \frac{A}{2} CD \right|^2. \quad (7)$$

Согласно (3)  $I_a$  есть максимум  $I_-(\alpha) = |E_-(\alpha)|^2$ , который получается при идеальной пленке ( $G = 1$ ) в точке  $\alpha = 0$ . Определение  $a_*$  фактически эквивалентно определению  $I_a$ , что ниже и имеется в виду. Поскольку  $a_* \ll A$ , то  $I_A$  есть максимально возможное значение  $I_a$ .

Введем случайные параметры

$$m(\alpha) = \frac{I_-(\alpha)}{I_a} = \frac{1}{D^2} \iint_{-D/2}^{D/2} G(x_1) G^*(x_2) \exp [-i\alpha(x_1-x_2)] dx_1 dx_2; \quad (8)$$

$$\mu(\beta) = \frac{I_0(\beta)}{4 I_A} = \frac{1}{D^2} \iint_{-D/2}^{D/2} G(x_1) G^*(x_2) \exp [i(p(x_1^2 - x_2^2) - \beta(x_1 - x_2))] dx_1 dx_2; \quad (9)$$

на которых сказывается только шум данного участка строки. При использовании этих обозначений освещенность на щели выражается следующим образом:

$$I(\alpha) = I_a m(\alpha) + 2 \operatorname{Re}[E_-(\alpha) E_0^*(\beta)] + 4 I_A \mu(\beta). \quad (10)$$

Максимум освещенности, по которому следует определить  $I_a$ , получается при некотором значении  $\alpha = \alpha_{\max}$ , зависящем от вида реализации  $G$  и фазы  $\varphi_*$ . Информация о  $I_a$  заключена в первых двух членах (10), однако второй (интерференционный) член может иметь любой знак в зависимости от случайной фазы  $\varphi_*$ , входящей в (3). Поэтому он ведет себя как аддитивный шум, коррелированный с величиной сигнала  $I_a$  (ниже он называется интерференционным шумом). Сомножителем в первый член входит случайный параметр  $m(\alpha)$ ; он создает дополнительный шум — мультипликативный. Третий член меняется при протягивании пленки  $\Pi_1$ . Среднее значение его описывает постоянную составляющую. За полезный сигнал на выходе нужно принимать освещенность, за вычетом этой составляющей, что ниже и имеется в виду. Для количественной оценки помех нужно найти математическое ожидание и стан-

дарт колебания  $I(\alpha_{\max})$ . Мы ограничиваемся упрощенным решением: нахождением  $\overline{I(0)}$  и  $\sigma[I(0)]$ , где  $I(0)$  — освещенность в точке  $\alpha = 0$ , в которой получается максимум  $I_-(\alpha)$  при идеальной пленке ( $G = 1$ ). Некоторые поправки к этому решению вводятся ниже. На основании (10) для полезной освещенности получаем

$$\overline{I(0)} = I_a \overline{m(0)}. \quad (11)$$

Интерференционный член здесь дает нуль, так как  $\exp i\varphi_* = 0$ ; заметим, что для  $\overline{I(\alpha_{\max})}$  получился бы вклад от этого члена, не существенный при больших  $I_a$ . При нахождении  $\sigma[I(0)]$  при больших  $I_a$  можно не учитывать вклад третьего члена в (10). Тогда для относительной ошибки получаем

$$\frac{\sigma^2[I(0)]}{\overline{I(0)}^2} = \frac{\sigma^2[m]}{\overline{m}^2} + 6 \frac{I_A}{I_a} \frac{\mu}{\overline{m}}. \quad (12)$$

Первый член выражает мультипликативный шум, второй — интерференционный.

Обратим внимание, что только один интерференционный шум будет давать вклад, равный единице, в отношение шум-сигнал при средней полезной освещенности  $I_a \overline{m(0)}$ , превышающей в два раза постоянную составляющую фона  $4I_A \mu$ . Измерение более слабых сигналов становится еще менее точным. Обнаружение же более слабых сигналов хотя и оказывается возможным (оно зависит от флуктуаций фона), однако надежность обнаружения быстро падает. Поэтому за пороговый сигнал  $I_n$  принимаем сигнал  $I_a$ , при котором второй член в (12) равен единице.

При этом условии динамический диапазон обнаруживаемых сигналов будет равен

$$\Delta = 10 \lg \frac{I_A}{I_n} = 10 \lg \frac{\overline{m}}{16 \mu}. \quad (13)$$

Не меньший интерес представляет и число уровней  $\overline{I(0)}$ , которые можно получить через интервал  $\sigma[I(0)]$  (ошибка измерения) при изменении  $I_a$  от  $I_n$  до  $I_A$ . Это число (при  $8 \mu/m \ll \sigma^2[m]/m^2 \ll 1$ ) приблизительно равно

$$n = \int_{I_n}^{I_A} \frac{\overline{m} dI_a}{\sigma[I(0)]} \approx \frac{\Delta}{4,34} \frac{\overline{m}}{\sigma[m]}. \quad (14)$$

При выводе (14) использованы (10) и (11).

Для оценки влияния шумов пленки на разрешающую способность за меру последней принята эффективная ширина пучка

$$\Delta\alpha = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |E_-(\alpha)|^2 d\alpha}{|E(\alpha_{\max})|^2}. \quad (15)$$

Из теоремы Парсеваля [4] и выражений (3) и (1) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E_-(\alpha)|^2 d\alpha = 2\pi \left| \frac{a_*}{2} C \right|^2 \int_{-D/2}^{D/2} |G(x)|^2 dx = 2\pi \left| \frac{a_*}{2} C \right|^2 D[1 + \bar{g}^2],$$

где  $\bar{g}^2$  — дисперсия амплитудных шумов фотопленки. Используя еще (8) и (6), получим из (15)

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{D} \frac{1 + \bar{g}^2}{m(\alpha_{\max})}. \quad (16)$$

При идеальной пленке  $g = 0$ ,  $m(\alpha_{\max}) = 1$  и, следовательно,

$$\Delta\sigma_{\text{ил}} = \frac{2\pi}{D}.$$

Можно показать, что эта величина является мерой разрешающей способности по Рэлею. Следовательно, чем меньше

$$\frac{\Delta\sigma_{\text{ил}}}{\Delta\alpha} = \frac{m(\alpha_{\max})}{1 + \bar{g}^2},$$

тем хуже разрешающая способность. Дисперсия  $\bar{g}^2$  значительно меньше единицы, поэтому основным показателем ухудшения разрешающей способности является параметр  $m(\alpha_{\max})$ .

Ниже для  $m$  при больших  $D$  установлена оценка (21), на основании которой из (16) получается

$$\Delta\alpha \approx \pi/u_{kp}, \quad (17)$$

т. е. разрешающая способность зависит только от критического размера  $u_{kp}$ .

Параметры  $\overline{m(0)}$  и  $\overline{\mu(\varphi)}$  получаются из (8) и (9) заменой  $G_1 G_2^*$  на  $\overline{G_1 G_2^*}$ .

На основании (2) имеем

$$\overline{G_1 G_2^*} = (1 + r_{12}) \overline{\exp[i(\psi_1 - \psi_2)]}, \quad (18)$$

где

$$r_{12} = r(x_1 - x_2) = (\overline{1 + g_1 g_2} \exp[i(\theta_1 - \theta_2)]) - 1.$$

Измерения [5] и описанные ниже показывают, что  $(\psi_1 - \psi_2)$  имеют распределение, близкое к нормальному, при котором

$$\overline{\exp[i(\psi_1 - \psi_2)]} = \exp\left[-\frac{1}{2} S_{12}\right].$$

Здесь  $S_{12} = S(x_1 - x_2) = (\psi_1 - \psi_2)^2$  — структурная функция крупномасштабного фазового шума. При  $x_1 - x_2 = 0$   $S_{12} = 0$ , при  $|x_1 - x_2| = \infty$   $S_{12} = 2\bar{\psi}^2$ . По техническим условиям [6] допускаются колебания толщины фотопленки до 0,01 мм, по одной этой причине  $\psi$  может достигать десятков радиан для видимого света и поэтому значение  $\exp(-\bar{\psi}^2)$  должно быть на много порядков меньше единицы.

Используя (8) и (18), введя переменные  $u = x_1 - x_2$ ,  $u' = x_1 + x_2$  и интегрируя по  $u'$ , получим, не учитывая  $r(u)$ ,

$$\overline{m(0)} = \frac{2}{D} \int_0^D \exp\left[-\frac{1}{2} S(u)\right] \left(1 - \frac{u}{D}\right) du. \quad (19)$$

Обратим внимание на критический размер  $u_{kp}$ , определяемый уравнением

$$\frac{1}{2} S(u_{kp}) = 1. \quad (20)$$

Очевидно, что  $u_{kp}$  — это расстояние между двумя точками пленки, случайные фазы которых  $\phi$  отличаются в среднеквадратичном на  $\sqrt{2} \approx \pi/2$  (четверть периода). Если  $D \ll u_{kp}$ , то  $m(0) \approx 1$ , как при идеальной пленке. Если же, наоборот,  $D \gg u_{kp}$ , то по порядку величины

$$\overline{m(0)} \approx 2 \frac{u_{kp}}{D} < 1. \quad (21)$$

При аппроксимации  $S(u) = 2bu^2$  получаем

$$\overline{m(0)} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{bD^2}} \Phi(\sqrt{2bD^2}) - \frac{1 - \exp(-bD^2)}{bD^2}, \quad (22)$$

где  $\Phi(U)$  — интеграл вероятности [4]. Обратим внимание на аналогию в действии на освещенность в фокусе линзы шумов фотопленки и турбулентности атмосферы. Последняя рассматривалась в [7]; там также фигурирует структурная функция, но вид ее получается на основе теории. Отметим еще, что по аналогии с числом Штреля, которым характеризуют качество оптических систем [8],  $\overline{m(0)}$  можно рассматривать как среднее число Штреля для пленки; такой же параметр вводится и в [7] для атмосферы.

Аналогично на основании (9) получается

$$\mu(\beta) = \frac{2}{D} \int_0^D [1 + r(u)] \exp\left[-\frac{1}{2} S(u)\right] \frac{\sin[p\beta(D-u)]}{p\beta u D} \cos(\beta u) du, \quad (23)$$

причем при больших  $\beta$  главный вклад вносит мелкомасштабный шум, учитывающийся членом  $r(u)$ . При идеальной пленке и  $\beta = pD \gg 1$  с помощью асимптотической формулы для интегралов Френеля [4] получаем

$$\mu(\beta) = \frac{1}{D^2} \left[ \frac{1}{(\beta - pD)^2} + \frac{1}{(\beta + pD)^2} - \frac{2 \cos(\beta D)}{\beta^2 - p^2 D^2} \right]. \quad (24)$$

Здесь член с  $\cos(\beta D)$  определяет расположение дифракционных максимумов и минимумов. Очевидно, что крупномасштабный фазовый шум при больших  $\beta$  перераспределяет энергию между соседними максимумами и минимумами, влияя на дисперсию, но практически не отражаясь на среднем уровне освещенности. Этот средний уровень и выражается первыми двумя членами в (24), следовательно, от них должен получаться результат, совпадающий с (23), но без учета  $r(u)$  — мелкомасштабного шума. Этот вывод используется ниже при сравнении экспериментальных результатов.

Без учета амплитудного шума дисперсия  $m(0)$  оказывается равной

$$\begin{aligned} \sigma^2[m(0)] = & \frac{1}{D^4} \int_{-D/2}^{D/2} \int_{-D/2}^{D/2} \int_{-D/2}^{D/2} \int_{-D/2}^{D/2} \left\{ \exp\left[\frac{1}{2}(S_{13} + S_{24} - S_{14} - S_{23})\right] - 1 \right\} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2}(S_{12} + S_{34})\right] dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $S_{ij} = S(x_i - x_j)$ . Здесь интересно следующее: если фигурную скобку в (25) разложить в ряд по степеням  $(S_{13} + S_{24} - S_{14} - S_{23})$ , то после интегрирования сохранятся только члены с четными степенями, начиная со второй (при обмене значениями  $x_1$  и  $x_2$  или  $x_3$  и  $x_4$  у членов с нечетными степенями меняется только знак). Этот вывод полезен при оценке иммерсии, которая применяется для устранения фазовых шумов [5].

Когда коэффициенты преломления пленки и иммерсионной жидкости  $n$  и  $n_{\text{им}}$  не совпадают, то набег фазы  $\psi$ , если он вызывается колебаниями толщины, уменьшается в

$$M = \frac{n - 1}{n - n_{\text{им}}} \quad \text{раз} \quad (26)$$

и, следовательно, структурная функция  $S$  — в  $M^2$  раз. Например, в опытах, описанных ниже с пленкой «Микрат-300»,  $n = 1,515$ , использовался керосин,  $n_{\text{им}} = 1,456$ ; при этом получается  $M = 8,7$ ,  $M^2 = 76$ .

Поскольку  $\sigma^2[m(0)]$ , как показано выше, зависит от четных степеней  $S$ , то введение иммерсии уменьшает  $\sigma^2[m]$  не меньше чем в  $M^2$  раз. Аналогичные рассуждения относительно  $m(0)$  показывают, что иммерсия уменьшает больше чем в  $M^2$  раз отрицательную добавку к идеальному значению  $m(0) = 1$ . В связи с этим подчеркнем, что иммерсия особенно эффективна при  $D \geq u_{\text{кр}}$ , когда указанная добавка существенно оказывается на величине  $m(0)$ .

Набег фазы измерялся на интерферометре Жамена (как и в работе [5]). Интерферирующие пучки ограничивались диафрагмами с отверстиями диаметром по 1 мм. Измерения производились через одинаковые интервалы  $d = 2,1$  мм или  $d = 4,2$  мм вдоль пленки сериями, содержащими около 300 отсчетов.

По каждой серии находилась статистическая функция распределения вероятностей по формуле

$$P(\psi) = n/N,$$

где  $N$  — общее число измерений в серии,  $n$  — число измерений, при которых набег фазы оказался меньшим или равным  $\psi$ .

По этим данным строился график по методу вероятностной бумаги: по оси абсцисс откладывалась фаза  $\psi$ , а по оси ординат — величина  $z$ , связанная с вероятностью  $P$  уравнением

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

При нормальном распределении точки должны ложиться на прямую

$$z = \frac{\psi - \bar{\psi}}{\sigma[\psi]}, \quad (27)$$

где  $\bar{\psi}$  — математическое ожидание,  $\sigma[\psi]$  — стандарт колебания.

На рис. 2 показано несколько кривых, получившихся для пленки «Микрат-300». Резко отличается от прямой только одна кривая: на соответствующем куске пленки длиной 63 см оказалась как бы ступенька; такой случай встретился только один раз из более чем 7 м промеренных пленок разных типов.

Уравнение (27) позволяет по наклону получившихся прямых найти стандарт колебания  $\sigma[\psi]$ . По исходным же данным дисперсия была рассчитана на ЭВМ по формуле

$$\sigma^2[\psi] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\psi_k - \tilde{\psi})^2, \quad (28)$$

где  $k$  и  $\tilde{\psi}$  — номер измерения фазы и ее среднее значение в данной серии. Несколько результатов для одних и тех же кусков пленки, получен-

ных обоими методами, приводится в табл. 1, где указана также длина промеренных кусков.

Таблица 1

Длина куска (см)	63			126			график
	13	15	19	31	33	30	
$\sigma^2[\psi]$	17	12	18	35	31	28	ЭВМ

Отличие значений, найденных по графикам и вычисленных по формуле (28), редко превышает 10—15% — это та ошибка, которую можно получить, принимая, что  $\psi$  распределена по нормальному закону. По значениям  $\psi_k$  каждой серии была рассчитана на ЭВМ структурная функция по формуле

$$S(u_n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=1}^{N-n} (\psi_k - \psi_{k+n})^2,$$

где  $u_n = nd$ ,  $d$  — интервал между отсчетами.

На рис. 3 представлен получившийся результат. Кривая 1 относится к среднему результату по 15 сериям, охватывающим около 7 метров разных типов пленок. Среднеквадратичное отклонение от среднего по всем 15 сериям составляет 21% при  $u = 10$  мм и возрастает до 26% при  $u = 40$  мм.

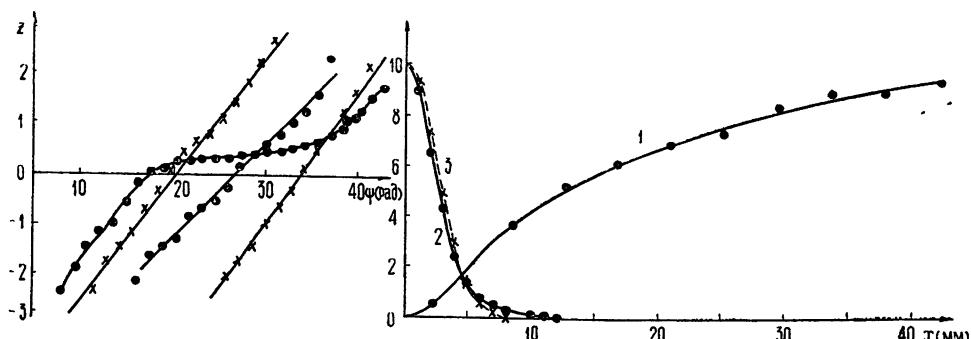


Рис. 2.  
Рис. 2. Распределение вероятностей набега фазы.

Рис. 3. 1—структурная функция  $S(x)$ ; 2—функция  $\exp\left[-\frac{1}{2}S(x)\right]$ ;  
3—функция  $\exp[-bx^2]$ .

Вычисления по некоторым сериям показали, что при  $40 \text{ мм} \leq u \leq 80 \text{ мм}$  наклон кривых становится значительно меньше. Кривые 2 и 3 показывают ход функции  $\exp\left(-\frac{1}{2}S\right)$ , причем для кривой 2 брались значения  $S$  по кривой 1, а для 3 использовалась аппроксимация  $S = 2bu^2$  при  $b = 0,08 \text{ мм}^{-2}$ . Критический размер, определяемый (20), получил равным  $u_{kp} = 3,27 \text{ мм}$ .

Измерения  $m(a)$  производились на упрощенной схеме дифрактометра. Источником света служил газовый лазер ЛГ-75,  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ . Короткофокусной цилиндрической линзой пучок лазера фокусировался на щель, которая находилась в фокальной плоскости объектива  $L_1$ ; ширина щели была около  $1 \text{ мкм}$ . Из объектива  $L_1$  выходил параллельный пучок света — он показан на рис. 4 стрелками. В фокальной плоскости объектива  $L_2$  ( $F = 1500 \text{ мм}$ ) получалось дифракционное изображение входной щели. В середину центрального максимума этого изображения ( $a = 0$ ) помещалась выходная щель шириной  $1 \text{ мкм}$ , за которой располагался фотоумножитель ФЭУ-17, фототок которого усиливался и записывался самописцем ЭПП-09. Исследуемая пленка  $\Pi$ , проявленная без предварительной засветки, помещалась на пути параллельного пучка и протягивалась со скоростью  $1-1,5 \text{ мм} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Пучок ограничивался диафрагмой, помещенной перед пленкой, высота отверстия диафрагмы равнялась  $h = 2 \text{ мм}$ , ширина  $D = 18 \text{ и } 36 \text{ мм}$ .

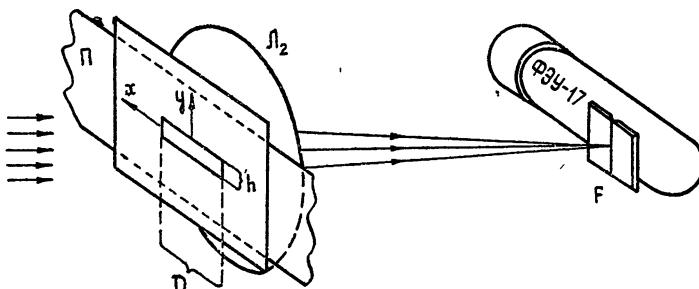


Рис. 4. Схема установки для измерения параметра  $m(a)$ .

Для нанесения на ленту уровней величины  $m$  производилась запись темнового тока ФЭУ и освещенности при вынутой пленке  $I_b$ . Это делалось как до, так и после протягивания исследуемой пленки; тогда при идеальной пленке с прозрачностью  $T$  должна получиться освещенность  $I_{\text{ид}} = TI_b$ . Этому уровню освещенности соответствует значение  $m = 1$ , а темновому току —  $m = 0$ . Для определения прозрачности пленки  $T$  находилась освещенность в отсутствие и в присутствии пленки, но с диафрагмой  $D = 1 \text{ мм}$ . При такой диафрагме крупномасштабные фазовые шумы несущественно отражались на максимуме дифракционной картины. После построения на ленте прямых с определенными значениями  $m$  находилась статистическая функция распределения вероятностей для величины  $m(0)$  по формуле

$$P[m] = l/L,$$

где  $L$  — длина отрезка ленты с записью освещенности, а  $l$  — длина тех участков отрезка  $L$ , для которых линия записи оказалась ниже данного уровня  $m$ . Длина отрезка обычно была около  $0,4 \text{ м}$ , она получалась при протягивании куска пленки длиной  $1,3-1,5 \text{ м}$ .

На рис. 5 показаны получившиеся распределения для куска пленки «Микрат-300» при ширине диафрагмы  $D = 18 \text{ мм}$  (кривая 1),  $D = 36 \text{ мм}$  (кривая 2). Кривая 3 дана для  $D = 18 \text{ мм}$ , но с иммерсией (керосин).

Зависимость  $m$  от  $P$ , которая получается из этих кривых, использовалась для определения

$$\bar{m} = \int_0^1 m dP,$$

$$\sigma^2[m] = \int_0^1 (m - \bar{m})^2 dP$$

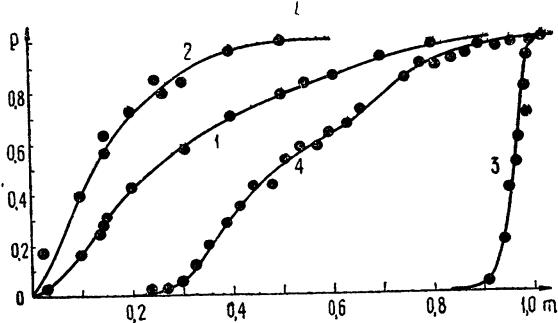
путем численного интегрирования. Средние результаты приведены в табл. 2 и могут быть сформулированы следующим образом.

Таблица 2

	Иммерсия—керосин	Без иммерсии	Примечания
$D(\text{мм})$	18	18	36
$\bar{m}(0)$	$0,96 \pm 0,04$ —	$0,33 \pm 0,02$ 0,32 0,36	0,16 0,17 0,18
$\sigma[m(0)]$ $\sigma[m]/m$	$0,03 \div 0,02$ 0,03	$0,22 \pm 0,04$ 0,67	0,12 0,75

Рис. 5. Распределение вероятностей параметров:

1— $m(0)$ ,  $D=18 \text{ мм}$ , без иммерсии;  
 2— $m(0)$ ,  $D=36 \text{ мм}$ , без иммерсии;  
 3— $m(0)$ ,  $D=18 \text{ мм}$ , иммерсия;  
 4— $m(a_{\max})$ ,  $D=18 \text{ мм}$ , без иммерсии.



а) Указанные ошибки есть максимальные отклонения от среднего, которые наблюдались при измерении с пленками разных типов, в том числе и с пленкой «Микрат-300», с которой был снят фотослой. Следовательно, фотослой не играет существенной роли в создании крупномасштабного фазового шума.

б) Теоретические значения определялись по формуле (23) при  $b = 0,08 \text{ мм}$ . Она дала хорошее приближение к экспериментальным данным и, следовательно, позволяет находить  $m(0)$  при других значениях  $D$ .

в) Достаточно близкие значения  $m(0)$  дают оценочная формула (21) с  $a_{\max} = 3,27 \text{ мм}$ .

г) Если бы фазовый шум создавался только колебаниями толщины, то стандарт колебания  $\sigma[m(0)]$  при керосиновой иммерсии и пленке «Микрат-300» должен был уменьшаться в  $M^2 = 76$  раз. При  $D = 18 \text{ мм}$  это должно было составить  $0,22/76 = 0,003$ . Получилось больше: от 0,01 до 0,05. Это величина, которую нужно ожидать от амплитудного шума. Значительный эффект от применения иммерсии указывает, что крупномасштабный фазовый шум вызывается в основном колебаниями толщины основы.

д) Необходимо отметить, что при малых отношениях  $\sigma[m]/\bar{m}$ , которые получаются при иммерсии, результаты измерения могут завышаться из-за флуктуаций и уходов усиления в электрической цепи ФЭУ и мощности лазера. Это главная причина разброса значений  $\sigma[m]$  при иммерсии.

Для нахождения  $m(a_{\max})$  и  $\sigma[m(a_{\max})]$  пленка протягивалась ша-

гами, после каждого шага производилось перемещение щели с ФЭУ вдоль оси  $\xi$  (изменялась  $\alpha$ ) и производился отсчет освещенности при максимальном показании выходного прибора. По двум метровым кускам пленки «Микрат-300» (всего 180 отсчетов) при  $D = 18 \text{ мм}$  получилось

$$\overline{m(\alpha_{\max})} = 0,51, \quad \sigma[m(\alpha_{\max})] = 0,19.$$

Распределение вероятности показывает кривая 4 на рис. 5. С иммерсией эти параметры не измерялись, так как отличия их от  $m(0)$  и  $\sigma[m(0)]$  при иммерсии должны лежать за пределами точности измерений.

Для измерения  $\mu(\beta)$  схема, показанная на рис. 4, была дополнена цилиндрической линзой  $L_3$ , которая фокусировала световой пучок на фотопленку, просвечивая участок высотой  $h = 0,1 \text{ мм}$  и шириной  $D = 18 \text{ мм}$ . Другая цилиндрическая линза  $L_4$  направляла пучок на щель перед ФЭУ. Щель помещалась не в фокальной плоскости объектива  $L_2$  ( $F = 1500 \text{ мм}$ ), а ближе на расстоянии  $z = 1300 \text{ мм}$ . Для параметра  $P$  при этом получалось  $P = 0,51 \text{ мм}^{-2}$ . Протягивалось только 150—200 мм пленки со скоростью  $0,16 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$ . Пленка прикреплялась к двигающейся рамке, чтобы избежать появления царапин при сматывании и наматывании в катушку.

Для нахождения  $\mu(\beta)$  согласно (9) нужно знать  $I_0(\beta)$  и  $I_A$ . Для определения  $I_A$  измерялась освещенность  $I_F$  центра главного дифракционного максимума в фокальной плоскости  $F$  (точнее, световой поток через щель, совпадающую с центром максимума) и использовалась зависимость

$$I_A = \frac{F}{4z} I_F.$$

Сравнение  $I_0(\beta)$  и  $I_A$  проводилось в два этапа: вначале перемещением щели с ФЭУ поперек оси пучка сравнивались  $I_0(\beta)$  и  $I_0(0)$ , а затем перемещением вдоль оси  $z$  сравнивались  $I_0(0)$  и  $I_A$ . При измерении  $I_0(0)$  и  $I_F$  вводились ослабители светового пучка.

Определение производилось при следующих значениях  $\xi$  и  $\beta$ :

$\xi (\text{мм})$	2	5	11	20
$\beta (\text{мм}^{-1})$	15	38	84	154
$2\pi/\beta (\text{мм})$	0,21	0,084	0,038	0,020

В табл. 3 приводятся средние результаты измерения по всем пленкам. Здесь же приведены значения, рассчитанные на ЭВМ по формуле (23) без учета  $r(u)$ , с использованием для  $S(u)$  зависимости, которая изображается на рис. 3 кривой 1, а также значение, найденное по формуле (24) для идеальной пленки ( $S = 0$ ), но с опущенным осциллирующим членом, содержащем  $\cos(\beta D)$ .

Таблица 3

$\beta (\text{мм}^{-1})$	15	38	84	154	Примечание	
$\mu(\beta) \cdot 10^{-5}$	40	6,8	3,7	2,4	Без иммерсии	
	24	3,4	2,1	1,5	Иммерсия	
	9,8	0,51	0,092	0,026	$S$ -кривая 1	
	9,7	0,51	0,091	0,028	$S = 0$	Расчет

а) Значения, рассчитанные указанными способами, практически равны, как ожидалось выше. Это создает определенную уверенность в правильности результатов.

б) Экспериментальные данные больше рассчитанных и спадают с ростом  $\beta$  значительно медленнее последних. Это следствие того, что при  $\beta > 15 \text{ мм}^{-1}$  основной вклад в  $\mu(\beta)$  вносит мелкомасштабный шум — функция  $r(u)$  в (23). Размеры соответствующих неоднородностей порядка  $2\pi/\beta$ , они указаны выше вместе с  $\beta$ .

в) Иммерсия уменьшает  $\mu(\beta)$  в 1,6—2,0 раза. Поэтому можно считать, что вклад в  $\mu(\beta)$  мелкомасштабного фазового шума и амплитудного примерно одинаков.

г) Измерения производились с равномерно засвеченными пленками с прозрачностью от  $T = 0,04$  до  $T = 0,9$ , однако зависимость  $\beta$  от  $T$  оказалась за пределами точности измерений. По-видимому, сглаживающее влияние оказывают имеющиеся на пленках царапины и пылинки. Избавившись от них очень трудно, это отмечалось уже в [9].

В табл. 4 даны значения динамического диапазона  $\Delta$  (13) и число уровней освещенности  $n$  (14). Для расчета использовались параметры  $m(a_{\max}) = 0,51$ ,  $\sigma[m(a_{\max})] = 0,19$ .

Таблица 4

$\beta (\text{мм}^{-1})$	15	38	84	154	Иммерсия
$\Delta$	19 24	27 32	29 35	31 36	Нет Есть
$n$	14 200	18 260	20 280	21 290	Нет Есть

а) Приведенные результаты были получены при  $D = 18 \text{ мм}$ , критический размер  $u_{kp} = 3,3 \text{ мм}$ , т. е.  $D \gg u_{kp}$  — выполнено условие для эффективности иммерсии.

б) Иммерсия увеличила динамический диапазон на 5 дБ. Число же различных уровней возросло больше, чем в 10 раз. Именно этот последний результат делает иммерсию очень ценной с информационной точки зрения. Он получился за счет уменьшения  $\sigma[m]/m$  — показателя мультиплексного шума.

в) Указанные характеристики медленно улучшаются с ростом  $\beta$ ; это вызвано соответствующим падением  $\mu$ . Чтобы получить более заметное уменьшение  $\mu$ , нужно снизить мелкомасштабный шум пленки, в частности, нужны особые меры для предотвращения появления царапин и пылинок; необходимо по возможности уменьшить общее количество рассеянного света внутри оптической системы.

г) Под влиянием шумов пленки при  $D = 18 \text{ мм}$  разрешающая способность ухудшается при иммерсии только на 4% ( $m = 0,96$ ), а без иммерсии в 2—3 раза ( $m = 0,33—0,5$ ), причем в последнем случае она, согласно (20), определяется размером  $u_{kp}$ .

За обсуждения и советы выражаем благодарность В. А. Звереву и за полезную дискуссию М. Х. Фридману.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. L. J. Cutrona, E. N. Leith, L. J. Roggall, W. E. Vivian, Proc. IEEE, 54, № 8 (1966).
2. И. Я. Брусин, В. В. Емелин, В. А. Зверев, А. Г. Любина, Ф. А. Маркус, А. М. Черемухин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 4, 553 (1967).

3. И. С. Гоноровский, Радиотехнические цепи и сигналы, ч. 2, изд. Сов. радио, М., 1967.
4. Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике, изд. Наука, М., 1968.
5. А. А. Богданов, И. Я. Брусин, В. В. Емелин, В. А. Зверев, А. Г. Любина, Ф. А. Маркус, А. М. Черемухин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12 № 1, 90 (1969).
6. Д. М. Золотницкий, Контроль процессов обработки кинопленки, изд. Искусство, М., 1967.
7. Н. Г. Денисов, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 488 (1963).
8. А. Марешаль, М. Франсон, Структура оптического изображения, изд. Мир, М., 1964.
9. И. И. Брейдо, Г. А. Гаврилов, С. Б. Гуревич, А. А. Маркелов, Журнал научной и прикладной фотографии, 8, № 4, 284 (1963).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
2 декабря 1969 г.

### INFLUENCE OF FOTOFILM NOISES IN OPTICAL PROCESSING SYSTEMS FOR SIGNALS FROM APERTURE SYNTHESIS ANTENNAS

*A. A. Bogdanov, I. Ya. Brusin, V. D. Skvortsov*

The limitations of the dynamic range and the number of distinguishing levels of the signal intensity are considered, as well as the deterioration of the resolution which arise from photofilm noises at the optical transformation of recorded signals in radar systems with a synthesized aperture. Measurements of the given values are described. The results are of interest from the holography point of view.

УДК 538.571.6

## ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ, РАЗРЕШАЕМОЙ В НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

*М. В. Бутров*

Рассматривается задача о дифракции плоской волны на цилиндре, направляющая которого задана уравнением  $r = a + b \cos(M\varphi)$  ( $M$  — целое число). При решении задачи используется неортогональная система координат, в которой направляющая цилиндра является окружностью. Решение задачи ищется в виде ряда Фурье по угловой координате, для коэффициентов которого получена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Дано строгое решение системы. При  $M \rightarrow \infty$  решение задачи получается в аналитическом виде. Обсуждается вопрос описания рассеянного поля вблизи поверхности цилиндра.

За последние десять лет появился ряд работ, в которых делаются попытки построить эффективный алгоритм для решения задачи дифракции на теле произвольной формы. В частности, в работе [1] предлагается решение на ЭВМ интегрального уравнения для величины, пропорциональной поверхностной плотности тока на цилиндре произвольного сечения. На той же основе в работе Кравцова [2] описан относительно универсальный алгоритм для обширного класса задач дифракции на цилиндре. В работах Эрма [3] метод возмущения приспособлен для построения решения задачи дифракции на теле, отклоняющемся от сферы.

Одним из возможных подходов к указанному классу задач является использование неортогональных координат, в которых поверхность тела произвольной формы совпадает с одной из координатных поверхностей. Идея применения таких координат не нова. Она с успехом была использована Свешниковым [4] (см. также [2]) при исследовании нерегулярных волноводов. Но насколько известно, до сих пор не делалось попыток распространить этот метод на внешние задачи электродинамики\*. Цель настоящей работы — применить указанный метод к задаче дифракции плоской волны на бесконечном цилиндре с сечением частного вида. При этом, как показано в разд. 1, оказывается возможным строгое решение модифицированного волнового уравнения. Результаты разд. 1 используются для обсуждения вопроса о представлении рассеянного поля вблизи поверхности некругового цилиндра (разд. 2) для решения задачи дифракции плоской волны на импедансном идеально проводящем цилиндре (разд. 3). В этом случае удается избежать необходимости решать бесконечную систему алгебраических уравнений.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В соответствии со сказанным выше рассматриваем скалярную задачу дифракции для искомой функции  $\psi$  ( $\psi \equiv E_z$ ). Направляющая цилиндра задана однозначной функцией полярного угла  $\varphi$ ,

$$\rho_c = a + f(\varphi), \quad (1)$$

\* Когда эта статья была уже готова, появилась работа [5], в которой методом, существенно отличным от нашего, идеи работы [4] распространяются на внешние задачи.

причем  $\max |f(\varphi)| < a$ . Предположим также, что сечение цилиндра симметрично относительно направления распространения падающей волны  $\varphi = 0$ . От полярных координат  $(\rho, \varphi)$  перейдем к неортогональным координатам  $(\xi, \varphi)$  по формулам

$$\rho = \xi + f(\varphi), \quad \varphi \equiv \varphi. \quad (2)$$

В системе координат  $(\xi, \varphi)$  цилиндр (1) преобразуется в круговой с направляющей

$$\xi = a. \quad (3)$$

Волновое уравнение для искомой функции

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

в системе координат  $(\xi, \varphi)$  будет иметь вид [6]

$$L\psi + k^2 \psi = 0, \quad (4)$$

где

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi + f} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{(\xi + f)^2} \left[ \dot{f}^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\dot{f} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \ddot{f} \frac{\partial}{\partial \xi} \right],$$

точка над  $f$  обозначает дифференцирование по  $\varphi$ .

Решение (4) для случая  $\dot{f}(\varphi) = b \cos(M\varphi)$  ( $M$  — целое число) и для условия на границе

$$\psi(a, \varphi) + \psi^{\text{пад}}(a, \varphi) = 0 \quad (5)$$

ищем в виде

$$\psi(\xi, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m(\xi) e^{im\varphi}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4) и вводя обозначения  $x = k\xi$ ,  $\beta = kb$ , получим для  $F_m(\xi)$  бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$(\nabla_m + \nabla_1) F_m + \nabla_2 F_{m-M} + \nabla_{-2} F_{m+M} + \nabla_3 (F_{m-2M} + F_{m+2M}) = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_m &= \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \left( 1 - \frac{m^2}{x^2} \right), \\ \nabla_1 &= \frac{\beta^2}{2x^2} \left[ (1 + M^2) \frac{d^2}{dx^2} + 1 \right], \\ \nabla_{\pm 2} &= \frac{\beta}{x} \left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2x} (1 \pm 2mM - M^2) \frac{d}{dx} + 1 \right], \\ \nabla_3 &= \frac{\beta^2}{4x^2} \left[ (1 - M^2) \frac{d^2}{dx^2} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Решение (7) при условии, что (6) удовлетворяет условию излучения, имеет вид

$$F_m(x) = \sum_{\mu, v=-\infty}^{\infty} C_{\mu} J_{\mu} \left( \frac{\beta}{2} \right) J_v \left( \frac{\beta}{2} \right) H_s^{(1)}(x), \quad (8)$$

где  $q = m + M(\mu - \nu)$ ,  $s = m - (1 - M)\mu - (1 + M)\nu$ ,  $C_q$  — произвольные постоянные,  $J_\nu$ ,  $J_\nu$  — функции Бесселя первого рода,  $H_s^{(1)}$  — функция Ганкеля первого рода. Построение решения (7) в форме (8) является отдельной задачей и здесь не рассматривается.

Придадим (8) более удобный вид, перестроив ряды путем замены  $\mu - \nu = l$ . Тогда

$$F_m(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{m+Ml} A_{m,l}(M, \beta, x), \quad (9)$$

где

$$A_{m,l}(M, \beta, x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_\nu\left(\frac{\beta}{2}\right) J_{\nu+l}\left(\frac{\beta}{2}\right) H_l^{(1)}(x), \quad t = m + (M-1)l - 2\nu.$$

Абсолютная сходимость ряда  $A_{m,l}$  при любых конечных  $m, l$  и  $|\beta| < x$  может быть установлена путем рассмотрения общего члена ряда при  $\nu \rightarrow \pm \infty$ . Этот член ряда пропорционален  $(|\nu|)^{-3/2} (\beta/x)^{2|\nu|}$ .

## 2. О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ НЕКРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Распространено мнение (отражение которого можно встретить и в литературе [7, 8]), состоящее в том, что система функций

$$\{H_n^{(1)}(k\rho) \exp(in\varphi)\} \quad (10)$$

считается недостаточной для представления поля вблизи поверхности некругового цилиндра. Обычный довод заключается в том, что в области

$$\min \rho_c \leq \rho \leq \max \rho_c \quad (11)$$

помимо рассеянных расходящихся волн, описываемых (10), существуют также рассеянные сходящиеся волны\*. Результаты разд. 1 дают возможность рассмотреть этот вопрос в общем виде для цилиндра (1).

Для этой цели возьмем интегральное представление (21а), (22) для  $A_{m,l}$  (см. Приложение) и подставим его в (9), а (9) в (6). Тогда

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2\pi} \sum_m e^{im\varphi} \left\{ \sum_l C_{m+Ml} \int_{-\pi}^{\pi} H_{m+Ml}^{(1)}(x + \beta \cos \theta) \cos(l\theta) d\theta \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_p C_p e^{ip\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} H_p^{(1)}(x + \beta \cos \theta) \sum_l \cos(l\theta) e^{-iMl\varphi} d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \sum_p C_p e^{ip\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} H_p^{(1)}(x + \beta \cos \theta) [\delta(\theta - M\varphi) + \delta(\theta + M\varphi)] d\theta = \\ &= \sum_p C_p e^{ip\varphi} H_p^{(1)}[x + \beta \cos(M\varphi)]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что система функций (10) годится для представления рассеянного поля вплоть до поверхности цилиндра (1). Этот результат объясняется тем, что при формальном решении задачи в криволинейных координатах мы допускаем, что падающая волна доходит до по-

\* В работе Баранцева [9] был предложен алгоритм, для проведения которого знание поля в области (11) не обязательно.

верхности цилиндра в невозмущенном виде. Ясно, что для правильного описания полного поля (того, что может быть измерено) к падающему, невозмущенному вблизи цилиндра, полю необходимо добавить «неправдоподобное» с физической точки зрения рассеянное поле.

### 3. ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ИМПЕДАНСНОМ ЦИЛИНДРЕ

«Радиальная» функция (9) становится определенной после нахождения постоянных из граничного условия (5). Разложение плоской падающей волны на контуре (1) можно получить способом, аналогичным указанному в [10]. В принятых обозначениях это разложение имеет вид

$$\exp \{ik[a + b \cos(M\varphi)] \cos \varphi\} = \sum_m \left[ \sum_l i^{m+Ml} B_{m,l}(M, \beta, ka) \right] e^{im\varphi}, \quad (12)$$

где  $B_{m,l}(M, \beta, ka)$  отличается от  $A_{m,l}$  только тем, что вместо функции Ганкеля следует писать функцию Бесселя первого рода от того же аргумента.

Подставляя (12) и (8) в (5), получаем бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\sum_l C_{m+Ml} A_{m,l}(M, \beta, ka) = - \sum_l i^{m+Ml} B_{m,l}(M, \beta, ka) \quad (13)$$

для определения постоянных  $C_m$ .

При любых  $M$  и малых  $\beta$  решение (13) можно искать в форме

$$C_m = \sum_{n=0}^{\infty} C_m^{(n)} \beta^n. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13) и заменяя в (13) функции Бесселя их представлениями в виде рядов, а затем приравнивая члены с одинаковыми  $\beta$ , получаем формулы для  $C_m^{(n)}$ . Как и следовало ожидать, эти формулы совпадают с полученными в работах [8] и [11].

Важным свойством системы (13) является то, что индексы искомых постоянных изменяются с шагом  $M$ . Поэтому с ростом  $M$  система (13) становится все более «редкой», приближаясь к диагональной форме при  $M \rightarrow \infty$  (импедансный цилиндр). В этом предельном случае неизвестные  $C_m$ , которые мы обозначим через  $C_m^{(\infty)}$ , равны ( $l = 0$ )

$$C_m^{(\infty)} = - i^m B_{m,0}/A_{m,0}. \quad (15)$$

По формулам (15), (13) были рассчитаны коэффициенты  $C_m$ , а затем и рассеянные поля для  $M \geq 12$  ( $M \gg 1$ ),  $M = 4$ ,  $\beta = -0,561$  и  $ka = 3,37$ . Результаты вычислений представлены на рис. 1, по оси ординат которого отложена нормированная интенсивность

$$G_k = |\psi(r, \varphi)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi(r, \varphi)|^2 d\varphi. \quad (16)$$

Сплошной кривой на рис. 1 изображена зависимость  $G_k$  для цилиндра с  $M \geq 12$  (вычислялось 12 коэффициентов  $C_m$  по (15)). Крестиками помечены значения  $G_k$  для кругового цилиндра с  $ka = 3,37$ . Штриховой линией на рис. 1 изображена зависимость  $G_k$  от  $\varphi$  для  $M = 4$ . Кружками помечены значения  $G_k$ , заимствованные из [1] для цилиндра квадратного сечения с  $ka = 3,0$ , где  $a$  — половина стороны квадрата.

Качественно и количественно кривая для  $M = 4$  хорошо согласуется с соответствующей кривой из [1].

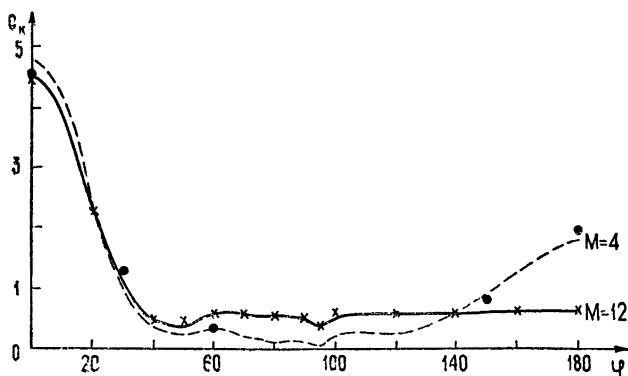


Рис. 1.

Из приведенных данных можно сделать вывод о том, что характер поверхности цилиндра практически не влияет на поле, рассеянное в область «тени», но существенно (до некоторого значения  $M$ ) влияет на интенсивность рассеяния в направлении на источник.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Из простых теорем сложения для любых цилиндрических функций  $Z$  вещественного аргумента и условия  $|x| < |y|$  следует

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} J_{2v+1}(x) Z_{m-(2v+1)}(y) = \frac{1}{2} [Z_m(y+x) - Z_m(y-x)]; \quad (17)$$

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} J_{2v}(x) Z_{m+2v}(y) = \frac{1}{2} [Z_m(y+x) + Z_m(y-x)]. \quad (18)$$

Обозначим интересующую нас сумму

$$S_l = \sum_{v=-\infty}^{\infty} J_v(x) J_{v+l}(x) Z_{m+(M-1)l-2v}(y). \quad (21a)$$

Положим, что  $l = 2L$ ,  $L = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $2|x| < |y|$ . Заменяя  $v+L=p$ , находим

$$\begin{aligned} S_{2L} &= J_{-L} J_L Z_{m+2ML} + \sum_{p=1}^{\infty} J_{p-L} J_{p+L} (Z_{m+2ML-2p} + Z_{m+2ML+2p}) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_0(2x \cos \theta) Z_{m+2L}(y) \cos(2L\theta) d\theta + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{2p}(2x \cos \theta) \times \\ &\quad \times \cos(2L\theta) d\theta [Z_{m+2ML-2p}(y) + Z_{m+2ML+2p}(y)] = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [Z_{m+2L}(y + 2x \cos \theta) + Z_{m+2L}(y - 2x \cos \theta)] \cos(2L\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

При выводе (19) использовано соотношение (18) и формула

$$J_p(x) J_q(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{p+q}(2x \cos \theta) \cos [(p-q)\theta] d\theta, \quad \operatorname{Re}(p+q) > -1.$$

Для  $l = 2L + 1$  аналогичным образом получаем

$$S_{2L+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [Z_{m+M(2L+1)}(y + 2x \cos \theta) - Z_{m+M(2L+1)}(y - 2x \cos \theta)] \times \times \cos [(2L+1)\theta] d\theta. \quad (20)$$

Объединяя (19) и (20), находим

$$S_l = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [Z_{m+Ml}(y + 2x \cos \theta) + (-1)^l Z_{m+Ml}(y - 2x \cos \theta)] \cos(l\theta) d\theta. \quad (21)$$

Заменяя в (21) произведение  $(-1)^l \cos(l\theta) = \cos[l(\theta + \pi)]$ , а  $\theta + \pi = \theta'$ , окончательно получаем

$$S_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Z_{m+Ml}(y + 2x \cos \theta) \cos(l\theta) d\theta. \quad (22)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. K. Mei, Van Bladel, IEEE Trans., AP-11, 185 (1963).
2. В. В. Кравцов, сб. Вычисл. методы и прогр., вып. 5, изд. МГУ, 1965.
3. V. Egma, Phys. Rev., 173, № 3, 1243 (1968).
4. А. Г. Свешников, Методы исследования распространения колебаний в нерегулярных волноводах, Диссертация, МГУ, 1963.
5. А. Г. Свешников, ДАН СССР, 184, № 1, 63 (1969).
6. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, Гос. техиздат, М., 1953.
7. R. Mullin, R. Sandburg et al., IEEE Trans., AP-13, № 1 (1965).
8. М. В. Бутров, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 1, 150 (1967).
9. Р. Г. Баранцев, ДАН СССР, 147, № 3, 569 (1962).
10. М. В. Бутров, Радиотехника, № 4, 94 (1969).
11. R. Clemmow, V. Weston, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 264, № 1317, 246 (1961).

Всесоюзный научно-исследовательский  
институт физико-технических и  
радиотехнических измерений

Поступила в редакцию  
14 апреля 1969 г.,  
после доработки  
7 сентября 1970 г.

#### ON A PLANE PROBLEM OF DIFFRACTION RESOLVED IN NONORTHOGONAL COORDINATES

M. V. Butrov

The author considers the diffraction of a plane wave on a cylinder which directrix is given by the equation  $\rho = a + b \cos(M\phi)$  ( $M$  is the integer). When solving the problem the nonorthogonal coordinate system is used in which the cylinder directrix is a circle. The solution of the problem is sought in the form of Fourier series over the angular coordinates for the coefficients of which an infinite system of ordinary differential 2nd order equation is obtained. A strict solution of the system is given. For  $M \rightarrow \infty$  the solution of the problem is of analytical form. The description of the scattered field near the cylinder surface is discussed.

УДК 539.2

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ В ДИАПАЗОНЕ МИЛЛИМЕТРОВЫХ И СУБМИЛЛИМЕТРОВЫХ ВОЛН

*Л. В. Лубяко*

Описываются метод определения параметров веществ в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах волн и экспериментальная установка. Приведены результаты измерения параметров некоторых веществ в диапазоне волн 1—2 м.м.

Для исследования свойств однородных сред в диапазоне миллиметровых и субмиллиметровых волн может быть применен интерферометр Майкельсона, который в сочетании с шумовым источником излучения дает возможность определять как диэлектрическую  $\epsilon = \epsilon' + j\epsilon''$ , так и магнитную  $\mu = \mu' + j\mu''$  проницаемости данной среды в виде частотных зависимостей  $\epsilon(\omega)$  и  $\mu(\omega)$ , снятых в пределах полосы принимаемых частот. Подобный метод, известный как «метод с асимметричным преобразованием Фурье», был предложен для исследования оптических свойств некоторых веществ в инфракрасном диапазоне волн [1, 2].

В данной работе описывается применение указанного метода в диапазоне 1—2 м.м для определения параметров диэлектриков и магнетиков, экспериментальная установка и результаты проведенных измерений параметров некоторых веществ.

### МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ

Рассмотрим работу интерферометра. На вход интерферометра поступает излучение шумового источника. Волну, идущую от источника, будем считать плоской. Интенсивность излучения на выходе интерферометра, измеряемая квадратичным приемником, зависит от разности хода в плечах интерферометра  $\Delta$  или, другими словами, от задержки  $\tau = \Delta/c$ , где  $c$  — скорость света. Эта зависимость (интерферограмма) может быть представлена в виде

$$I(\tau) = \alpha [\bar{E}(t)^2 + \bar{E}(t - \tau)^2 + 2\bar{E}(t)\bar{E}(t - \tau)], \quad (1)$$

где  $E(t)$  и  $E(t - \tau)$  — мгновенные значения напряженности электрического поля, в интерферирующих волнах, а черта сверху означает усреднение по времени.

Переменная составляющая  $I(\tau)$ , равная  $R(\tau) = 2\bar{E}(t)\bar{E}(t - \tau)$ , есть функция корреляции принимаемого приемником сигнала. Представляет интерес случай, когда спектр имеет полосу  $\Delta\omega \approx 0,2 - 0,3$  от средней принимаемой частоты\*. Переменная составляющая интерферограммы (рис. 1а) представляет собой осцилляцию, затухающую с ростом  $\tau$ ,

\* Для ограничения полосы могут быть использованы соответствующие фильтры или приемник с подходящей частотной характеристикой.

период которой определяется средней принимаемой частотой, а затухание—шириной полосы  $\Delta\omega$ . Существенно, что при  $|\tau| \gg \tau_0 \approx 1/\Delta\omega$   $R(\tau)$  практически можно считать равной нулю.

Поместим теперь вплотную к неподвижному зеркалу интерферометра исследуемый образец, представляющий плоскопараллельный слой тол-

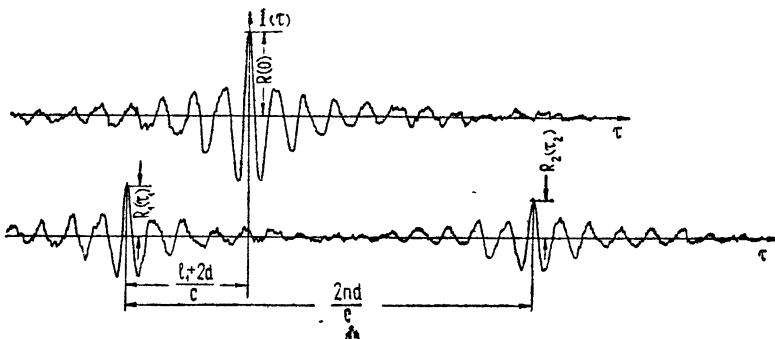


Рис. 1. Примеры экспериментально полученных интерферограмм:  
а) без образца, б) с образцом

щины  $d$ . Волну, идущую из этого плеча интерферометра, можно представить в виде суммы парциальных волн, образовавшихся при последовательных отражениях падающей волны от передней границы образца и зеркала интерферометра. Интерферограмму тогда можно записать следующим образом:

$$I(\tau) = \bar{E}(t - \tau)^2 + \sum_i \bar{E}_i(t + \tau_i)^2 + 2 \sum_i \bar{E}(t - \tau) \bar{E}_i(t + \tau_i) + \\ + \sum_{i \neq j} \bar{E}_i(t + \tau_i) \bar{E}_j(t + \tau_j). \quad (2)$$

Здесь индекс  $i$  относится к соответствующей парциальной волне.

Если в пределах  $\Delta\omega$  исследуемое вещество не имеет сильной дисперсии, то

$$2\bar{E}(t - \tau) \bar{E}_i(t + \tau_i) = R_i(\tau + \tau_i) = a_i R(\tau), \quad (3)$$

где  $a_i$  — коэффициенты, зависящие от параметров исследуемого вещества. Как легко убедиться, они равны

$$\begin{aligned} a_1 &= r, \\ a_2 &= (1 - r^2) \exp(-4\pi k d / \lambda_{cp}), \\ a_3 &= -r(1 - r^2) \exp(-8\pi k d / \lambda_{cp}), \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

где  $r$  — модуль коэффициента отражения,  $k$  — коэффициент затухания, а  $\lambda_{cp}$  — средняя длина волны.

Для образцов достаточной толщины, когда  $\tau_i \gg \tau_0$ , каждый из членов суммы  $\sum_i \bar{E}(t - \tau) \bar{E}_i(t + \tau_i)$  отличен от нуля только при  $\tau \approx \tau_i$ , а  $\sum_{i \neq j} \bar{E}_i(t + \tau_i) \bar{E}_j(t + \tau_j) \approx 0$ . В этом случае интерферограмма (рис. 1 б) состоит из последовательных осцилляций, не перекрывающихся между собой, соответствующих отдельным парциальным волнам. Расстояние между двумя соседними осцилляциями можно принять равным уд-

военной оптической длине пути в образце  $l$ , так как смещения осцилляций, связанные со сдвигом фазы при прохождении волны через границу образца, пренебрежимо малы по сравнению с этой величиной.

Таким образом, непосредственно из сравнения двух интерферограмм (одна калибровочная — без образца, а другая с образцом) определяются следующие величины, которые относятся к средней принимаемой частоте:

$$\begin{aligned} n &= l/d, \\ r &= R_1(\tau_1)/R(0), \\ k &= -\frac{\lambda_{\text{ср}}}{4\pi d} \ln \frac{R_2(\tau_2)}{R(0)(1-r^2)}, \\ \Theta &= \frac{2\pi(l_1-d)}{\lambda_{\text{ср}}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $n$  — показатель преломления,  $l_1$  — смещение первой осцилляции, связанное с фазовым сдвигом  $\Theta$  волны, отраженной от передней границы образца.

По этим величинам могут быть найдены

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{n(1-r^2) + 2rk \sin \Theta}{1+r^2 - 2r \cos \Theta}, \\ \operatorname{tg} \delta_p &= \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{k(1-r^2) + 2rn \sin \Theta}{n(1-r^2) + 2rk \sin \Theta}, \\ \mu' &= \frac{n(1-r^2) - 2rk \sin \Theta}{1+r^2 + 2r \cos \Theta}, \\ \operatorname{tg} \delta_m &= \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{k(1-r^2) - 2rn \sin \Theta}{n(1-r^2) - 2rk \sin \Theta}. \end{aligned}$$

### ИЗМЕРЕНИЯ

Изложенный выше метод был применен для измерений параметров ряда диэлектриков и ферритов в диапазоне волн 1—2 мм. Общий вид установки, на которой проводились измерения, приведен на рис. 2. Шумовым источником являлась ртутная лампа типа ПРК-4. Интерферометр Майкельсона был сконструирован на базе сверхразмерных волноводов

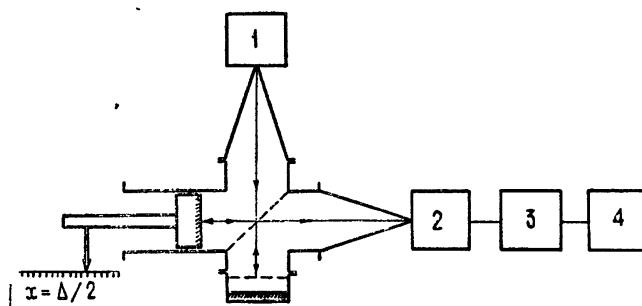


Рис. 2. Блок-схема установки:  
1) ПРК-4, 2) модулятор и квадратичный детектор, 3) узкополосный усилитель и синхронный детектор, 4) самописец.

[3]. В качестве сверхразмерного использовался прямоугольный волновод с сечением  $10 \times 23 \text{ мм}^2$ . Делительная пластинка была изготовлена из слюды. Требуемый коэффициент деления достигался подбором толщины пластиинки. Подвижное зеркало представляло собой плоский поршень, который мог перемещаться вдоль волновода на 25 мм с помощью микрометрического винта либо вручную, либо от специального привода. Гочность отсчета разности хода составляла 0,01 мм. Конструкция интерферометра позволяла измерять параметры не только твердых, но также сыпучих и жидкких веществ.

Для возбуждения в сверхразмерном волноводе преимущественно основного типа волны  $H_{01}$  применялся плавный пирамидальный переход, входное сечение которого являлось запредельным для всех высших типов волн в данном диапазоне.

Прием излучения осуществлялся с помощью детекторного радиометра [4]. Полоса принимаемых частот составляла 25—30% от средней принимаемой частоты.

Измерение параметров диэлектриков проводилось на волнах 1,3 и 1,9 мм. Зависимости параметров этих веществ (табл. 1) от частоты в данном диапазоне обнаружено не было. Значения  $\epsilon$  и  $\operatorname{tg} \delta$  определя-

Таблица 1

Исследуемое вещество	$\epsilon \pm \Delta\epsilon$	$10^4 \operatorname{tg} \delta$
1. Кварц (плавленный)	$4,0 \pm 0,2$	$< 10$
2. Кварц (кристаллический)	$4,4 \pm 0,2$	$< 10$
3. Кварц (крист. искусств.)	$4,4 \pm 0,05$	$< 10$
4. Керамика стеатитовая	$15 \pm 0,5$	$20 \pm 10$
5. Тefлон	$2,05 \pm 0,05$	$< 10$
6. Винилласт	$2,57 \pm 0,06$	$280 \pm 40$
7. Полистирол	$2,56 \pm 0,03$	$15 \pm 10$
8. Парафин	$2,3 \pm 0,06$	$< 10$
9. Полиэтилен	$2,27 \pm 0,06$	$80 \pm 40$
10. Сера (аморфная)	$4,1 \pm 0,15$	$300 \pm 50$
11. Песок кварцевый ( $d_{\text{песч}} \approx 0,2 \text{ мм}$ )	$2,45 \pm 0,06$	$72 \pm 20$
12. Поваренная соль („Экстра“)	$3,46 \pm 0,15$	$230 \pm 50$
13. Плексиглас	$2,52 \pm 0,06$	$150 \pm 40$
14. Масло касторовое	$2,4 \pm 0,05$	$470 \pm 60$

лись по найденным величинам показателя преломления (точность измерения которого составляла 1—2%) и коэффициента поглощения. Минимальная величина коэффициента поглощения, которую можно было измерить, составляла  $\approx 0,001 \div 0,005$ .

Параметры ферритов измерялись только на волне 1,9 мм (табл. 2). Из-за недостаточной точности индикации положения осцилляций фазовый сдвиг  $\Theta$  не определялся и  $\operatorname{tg} \delta$  ферритов вычислялся в предположении  $\Theta = 0$ .

Таблица 2

Марки феррита	$\epsilon \pm \Delta\epsilon$	$\mu \pm \Delta\mu$	$10^4 \cdot \operatorname{tg} \delta$
1. НЦ-10	$14,2 \pm 1,5$	$0,95 \pm 0,15$	$18 \pm 10$
2. НЦ-11	$17,5 \pm 1,5$	$0,8 \pm 0,15$	$15 \pm 10$
3. НЦ-12	$13,5 \pm 1,5$	$0,85 \pm 0,15$	$< 10$
4. К. Н. М.	$15 \pm 1,5$	$0,93 \pm 0,15$	$50 \pm 20$
5. 400 НН	$15,3 \pm 1,5$	$0,7 \pm 0,15$	$180 \pm 50$

В заключение автор выражает благодарность О. А. Рыбушкину, который провел большую часть измерений, а также И. Л. Берштейну, К. А. Горониной и Л. И. Федосееву за обсуждение работы.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. I. E. Chamberlain, J. E. Gibbs, Gebbie, Nature, 198, 874 (1963).
2. E. E. Bell, Infrared Phys., 6, 57 (1966).
3. J. Bled, A. Bresson, R. Papoulař, J G. Weqrowe, L'onde électrique, 44 année № 442, Janvier, 1964.
4. Ю. А. Дрягин, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 12, № 6, 813 (1969).

Научно исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
18 июля 1969 г.

**INVESTIGATION OF ELECTRIC AND MAGNETIC PROPERTIES OF MATERIALS  
IN MILLIMETER AND SUBMILLIMETER WAVE RANGE***L. V. Lubyako*

A method of determining the material parameters in millimeter and submillimeter wave ranges and the experimental equipment are described. The measurement results of the parameters of some materials in 1—2 mm range are given.

УДК 539.2 · 621 318.134

## ИЗМЕНЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ НАВЕДЕНОЙ АНИЗОТРОПИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МАГНИТОМЯГКИХ ФЕРРИТАХ

*Л. И. Кошкин, В. А. Гордеев, Ю. Ф. Стрыгин, А. И. Нагорнов,  
В. П. Васильев*

Проблема миниатюризации волноводных ферритовых СВЧ приборов в настоящее время может успешно разрешаться за счет применения новых материалов при одновременном сокращении числа конструктивных элементов. При этом также ставится задача максимального упрощения технологии изготовления и настройки. Применение ферритов с наведенной направлением анизотропией является одним из путей решения указанных задач. Настоящая статья посвящена результатам экспериментов по изменению направления наведенной анизотропии.

Как известно, для работы волноводных ферритовых устройств (циркуляторов, вентилей, выключателей и т. д.) существенно необходимым условием является наличие внешнего магнитного поля, действующего на ферритовый элемент. Это магнитное поле для каждого единичного устройства, а также в зависимости от рабочего диапазона частот, должно иметь определенное значение, обуславливающее работу феррита в дорезонансной, резонансной или послерезонансной области. Внешние магнитные поля обычно создаются с помощью электромагнитов или постоянных магнитов, причем на долю магнитов приходится почти половина веса устройства.

Принципиально возможна замена внешнего магнитного поля внутренним магнитным полем ферритового элемента. В качестве таких ферритовых элементов широко используются ферроксанды, обладающие достаточным полем анизотропии [1], или тороидальные ферриты с прямоугольной петлей гистерезиса [2].

Авторами статьи была установлена односторонняя анизотропия, наводимая слабым магнитным полем в ферритах-пермниварах [3], и анизотропия того же вида в цилиндрических образцах магнитомягких СВЧ ферритов. При этом внутреннее магнитное поле в феррите, направленное по оси цилиндра и устойчивое во времени и интервале температур  $+30 \div -30^\circ\text{C}$ , оказалось достаточным для работы волноводных ферритовых циркуляторов, выполненных на этих ферритах. Устройства имеют удовлетворительные рабочие характеристики и малый вес.

### 1. НАВЕДЕНИЕ ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ АНИЗОТРОПИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ФЕРРИТЕ ПРИ ТЕРМОМАГНИТНОЙ ОБРАБОТКЕ

Одним из способов наведенной анизотропии в феррите является термомагнитная обработка образца. Ферритовый цилиндр, предварительно обработанный до заданных геометрических размеров, помещается в электрическую печь. Магнитное поле, создаваемое электромагнитом, прикладывается вдоль оси ферритового цилиндра. После того, как ферритовый цилиндр нагрет до температуры  $300^\circ\text{C}$ , устанавливается поле  $50-100$  э и производится охлаждение ферритового образца со скоростью  $2^\circ\text{C}$  в минуту до комнатной температуры. Наличие внутреннего по-

ля анизотропии определяется путем помещения ферритового цилиндра в У-разветвление. При этом устройство работает как обычный У-циркулятор с той разницей, что в данном случае не требуется внешнее подмагничивающее поле. Внутреннее поле анизотропии, полученное в феррите в результате термомагнитной обработки, после полтора годового хранения феррита практически не изменяется.

Чувствительность феррита с наведенной анизотропией к внешним магнитным полям выше 40—50 э иссущественна, поскольку в реальных устройствах можно обеспечить достаточную магнитную экранировку.

## 2. ИЗМЕНЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ НАВЕДЕНОЙ АНИЗОТРОПИИ

Дальнейшее исследование цилиндрических образцов магнитомягких ферритов с наведенной анизотропией показало, что направление наведенной анизотропии можно изменить на обратное, воздействуя на образец импульсным магнитным полем, причем характерно, что передний фронт импульса поля должен иметь, по возможности, большую крутизну.

Схема эксперимента приведена на рис. 1. В отрезке волновода 1, на узкой стенке которого расположен поглотитель 4, установлен цилиндрический феррит 2 с наведенной анизотропией. На ферритовый образец намотана обмотка 3 весьма малой индуктивности, что позволяет получить крутой передний фронт импульса. Обмотка индуктивностью 0,36 мкГн содержит 1,5—2,5 витка медного провода ПЭЛ-0,07 и практически не вносит дополнительных неоднородностей в волноводное пространство.

Для получения импульса тока используется разряд на обмотку 3 конденсатора 5 емкостью 4 мкф.

Для зарядки конденсатора 5 служит регулируемый источник питания 6. Волновод подключается к источнику СВЧ энергии 7. На выход волновода включена детекторная секция с индикатором 8.

В первоначальном состоянии направление наведенной анизотропии в феррите таково, что СВЧ энергия за вычетом потерь (0,3—1 дБ) проходит к нагрузке, что и фиксируется индикатором 8. Переключатель 9 находится в положении «а», и конденсатор заряжен до напряжения источника питания (состояние 1). При переводе переключателя 9 в положение «б» конденсатор разряжается на обмотку 3. При этом в ферритовом образце создается ударное магнитное поле. Если направление поля совпадает с направлением внутреннего поля анизотропии, то устройство остается в первоначальном состоянии. Если же направление ударного магнитного поля противоположно направлению наведенной анизотропии, то устройство переходит во второе состояние. При этом энергия в волноводе не распространяется в сторону нагрузки 8, а поглощается пленкой 4. Если поменять местами генератор 7 и нагрузку 8, то можно зафиксировать прохождение энергии, как в обычном вентиле. Отсюда легко уяснить, что направление внутреннего поля наведенной анизотропии изменилось на обратное по сравнению с первоначальным состоянием. Если теперь зарядить конденсатор напряжением противоположной полярности и разрядить его на обмотку, то схема снова перейдет в первое состояние. Таким образом, чередуя полярность импульсов, можно изменять направление наведенной анизотропии в цилиндрическом фер-

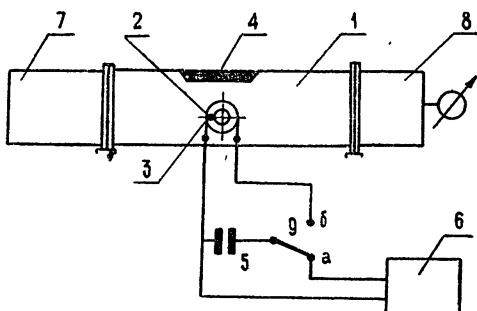


Рис. 1. Схема определения изменения направления наведенной анизотропии.

рите. Оба состояния устойчивы во времени, и схема может находиться в одном из них практически бесконечно длительное время.

Быстродействие схемы  $\tau$  определяется крутизной переднего фронта импульса тока (или магнитного поля), однако оно ограничено релаксационными процессами в феррите и вихревыми токами в стенках волновода [2]. Величина  $\tau$  приближенно может быть определена по формуле

$$\tau \approx \frac{\alpha}{H_i - H_0} (\text{мксек}), \quad (1)$$

где  $\alpha = 0,6$  — постоянная перемагничивания, слабо зависящая от марки феррита,  $H_0$  — поле старта, начиная с которого идет процесс перемагничивания,  $H_i$  — напряженность перемагничивающего поля внутри феррита. Расчетное время переключения, составляющее 1,47 мксек [1], при индуктивности обмотки  $L = 0,36 \text{ мкГн}$ , сопротивлении обмотки постоянному току  $R = 0,05 \text{ ом}$ , емкости конденсатора  $C = 4,0 \text{ мкФ}$ , может быть уменьшено до предела за счет уменьшения постоянной времени  $LC$ -цепи, определяемого (1).

1. Установлено, что при воздействии магнитным полем на цилиндрический образец магнитомягкого феррита с наведенной односторонней анизотропией наблюдается эффект изменения направления анизотропии.

2. Эффект изменения направления анизотропии может быть использован при создании малогабаритных быстродействующих ферритовых СВЧ импульсных модуляторов, выключателей и коммутаторов.

Авторами статьи были изготовлены макеты волноводных переключателей и выключателей в диапазоне 2 и 3 см. Переключатели имеют параметры: полоса частот  $f_0 \pm 250 \text{ Мгц}$ , прямые потери не более 0,9 дБ, обратные потери не менее 17 дБ, время переключения не более 1 мксек, вес не более 30 г, температурный диапазон  $-40 \div +40^\circ\text{C}$ . Выключатели имеют аналогичные параметры и меньший вес.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Лакс, К. Баттон, Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики, изд. Мир, М., 1965
2. Некоторые проблемы антенно-волноводной техники, изд. Наука, М., 1967.
3. Ю. Ф. Стрыгин, Л. И. Кошкин, сб. Исследование по физике ферритов и электронике, Куйбышевский педагогический институт, 1969, стр. 242
4. К. М. Поливанов, Теоретические основы электротехники, изд. Энергия, М., 1965.

Куйбышевский государственный  
педагогический институт

Поступила в редакцию  
22 декабря 1969 г.

#### CHANGE OF INDUCED ANISOTROPY DIRECTION IN CYLINDRICAL MAGNETO-SOFT FERRITES

*L. I. Koshkin, V. A. Gordeev, Yu. F. Strygin, A. I. Nagornov,  
V. P. Vasil'ev*

The miniaturization of waveguide ferrite UHF devices may be successfully resolved at present due to application of new materials at simultaneous shortening of the number of design members. In this cases the problem is also raised on maximum simplification of manufacturing and tuning technology. The application of ferrites with induced directional anisotropy is one of ways to solve the given problems. The present paper is devoted to the experimental results of changing the induced anisotropy direction.

УДК 621.375

## О МИНИМАЛЬНОМ УРОВНЕ СОБСТВЕННЫХ ШУМОВ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ С ЛЕНТОЧНЫМ ЛУЧОМ

*B. A. Ванке, С. П. Крюков, Ю. М. Тимофеев*

Рассмотрены вопросы уменьшения собственных шумов электронного потока в электростатическом усилителе с ленточным лучом. Определена шумовая матрица на поверхности прямоугольного катода. Вычислена минимальная эквивалентная температура собственных шумов усилителя и найден вид матрицы трансформатора, обеспечивающего получение этой температуры. Обсуждается вопрос о преобразовании поперечных волн электронного потока в азимутально-симметричном магнитном и плоском электрическом полях. На ряде конкретных примеров проиллюстрирована возможность реализации рассмотренного трансформатора шума.

Один из способов формирования низкого уровня собственных шумов в электростатическом усилителе основан на существовании статистической связи между амплитудами шумовых волн при их возбуждении на катоде и предполагает использование линейного трансформатора шума без потерь.

Для усилителя с круглым лучом в случае достаточной малости диаметра катода  $D$  эквивалентная шумовая температура оказывается пропорциональной  $\sqrt{D}$  и, в принципе, может быть сделана сколь угодно малой [1]. Однако уменьшение диаметра катода приводит к необходимости увеличивать плотность катодного тока эмиссии, что является заметным препятствием на пути понижения шумовой температуры таким способом.

При использовании в усилителе ленточного пучка механизм возникновения корреляционных связей между волнами на поверхности прямоугольного катода, вообще говоря, остается прежним. Можно ожидать поэтому, что и в этом случае существует трансформатор, минимизирующий шумовую температуру такого усилителя. Требования к плотности тока эмиссии прямоугольного катода становятся уже существенно менее жесткими, что облегчает практическую реализацию подобных устройств.

Применение ленточного луча может также оказаться полезным и с точки зрения расширения динамического диапазона усилителя, ослабления влияния краевых полей, позволяя одновременно использовать технологически более простые плоские периодические системы в области усиления.

### 1. ШУМОВАЯ МАТРИЦА ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО КАТОДА

Шумовые процессы в ленточном электронном пучке,двигающемся вдоль оси  $Z$  в продольном магнитном поле  $H_0$  (рис. 1), могут быть описаны с помощью четырех нормальных волн потока в их обычной форме [2]:

$$\begin{aligned} A_1 &= K(V_y - jV_x), \\ A_2 &= K(V_y + jV_x); \end{aligned} \quad (1)$$

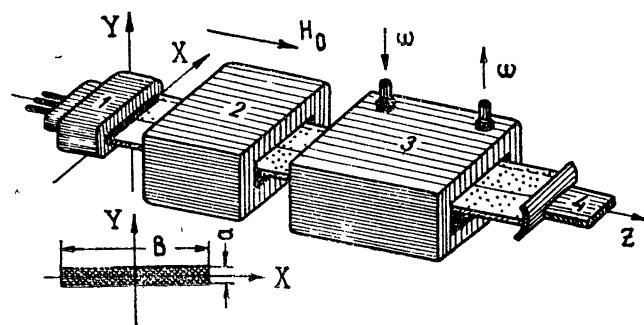


Рис. 1. Схема электростатического усилителя с ленточным лучом:

1) катод с прямоугольной эмиттирующей поверхностью; 2) трансформатор шумов поперечных волн электронного потока, выполняющий одновременно функции электронной пушки; 3) рабочая область (ввод, вывод сигнала, зона усиления и т. д.); 4) коллектор.

$$\begin{aligned} A_3 &= K[\omega_c(X + jY) - (V_y - jV_x)], \\ A_4 &= K[\omega_c(X - jY) - (V_y + jV_x)], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $K = \sqrt{\omega I_0 / 8\omega_c e'}$ ,  $\omega$  — частота, на которой ведется рассмотрение,  $\omega_c = e'H_0$  — циклотронная частота,  $e' = e/m$  — удельный заряд электрона,  $I_0$  — постоянный ток луча,  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $X$ ,  $Y$  — комплексные амплитуды поперечных скоростей и смещений центра инерции сечения луча,  $A_1$ ,  $A_2$  — быстрая и медленная циклотронные волны,  $A_3$ ,  $A_4$  — соответственно медленная и быстрая синхронные.

Для анализа шумовых свойств усилителя удобно, представив волны в виде вектора-столбца

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

ввести шумовую матрицу  $\overline{\mathbf{AA}}^+$  ( $\mathbf{A}^+$  — матрица, эрмитово сопряженная  $\mathbf{A}$ , а черта сверху означает усреднение по ансамблю реализаций). Диагональные элементы матрицы  $\overline{\mathbf{AA}}^+$  представляют собой кинетические мощности волн, а внедиагональные — отражают степень статистической связи между ними.

Аналогично [3], для нахождения шумовой матрицы на поверхности прямоугольного катода можно воспользоваться моделью нитевидного пучка (невозмущенное положение которого совпадает с осью  $Z$ ), считая, что электроны эмиттируются равновероятно из любой точки катода с поперечными скоростями, подчиняющимися закону распределения Максвелла. Тогда выражения для спектральных плотностей комплексных амплитуд  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $X$  и  $Y$  получаются равными

$$\begin{aligned} \overline{|V_x|^2} &= \frac{4e'kT_k}{I_0} \Delta f, \quad \overline{|V_y|^2} = \frac{4e'kT_k}{I_0} \Delta f, \\ \overline{|X|^2} &= \frac{eb^2}{3I_0} \Gamma^2 \Delta f, \quad \overline{|Y|^2} = \frac{ea^2}{3I_0} \Gamma^2 \Delta f \end{aligned} \quad (4)$$

( $k$  — постоянная Больцмана,  $T_k$  — температура катода,  $\Delta f$  — элементарный интервал частот,  $\Gamma$  — коэффициент депрессии дробового шума

пространственным зарядом,  $b$  и  $a$  — соответственно длина и ширина катода), а матрица  $\overline{AA}^+$  принимает вид

$$\overline{AA}^+ = \frac{\omega}{\omega_{ck}} kT_k \Delta f \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} & \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \\ 0 & -1 & \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} & 1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $\omega_{ck}$  — циклотронная частота на катоде. Коэффициенты  $\alpha^2$  и  $\beta^2$  представляют собой отношения шумовой мощности, вызванной разбросом поперечных координат, к шумовой мощности, обусловленной поперечными скоростями:

$$\alpha^2 = \frac{1}{12} \frac{\Gamma^2 m \omega_{ck}^2}{kT_k} a^2; \quad (6)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{12} \frac{\Gamma^2 m \omega_{ck}^2}{kT_k} b^2. \quad (7)$$

Как и для круглого катода, волны с одинаковой поляризацией связаны между собой (элементы  $\overline{A_1 A_3^*}$ ,  $\overline{A_2 A_4^*}$ ,  $\overline{A_3 A_1^*}$ ,  $\overline{A_4 A_2^*}$  отличны от нуля). Корреляционные связи между быстрой и медленной синхронными волнами ( $\overline{A_3 A_4^*} \neq 0$ ,  $\overline{A_4 A_3^*} \neq 0$ ) вызваны спецификой прямоугольной геометрии катода ( $a \neq b$ ).

## 2. МИНИМАЛЬНАЯ ШУМОВАЯ ТЕМПЕРАТУРА. ДИАГНОНАЛИЗУЮЩАЯ МАТРИЦА

Эквивалентная шумовая температура усилителя принимает минимальное значение, когда шумовая матрица волн на входе в область усиления диагональна [1]. Это может быть достигнуто с помощью линейного трансформатора шума без потерь, расположенного между катодом и областью взаимодействия [4]. Иначе говоря, проблема получения минимального коэффициента шума усилителя может быть сведена к поиску трансформатора, осуществляющего диагонализацию шумовой матрицы (5).

Используя методику [1] для вычисления элементов диагональной матрицы  $\overline{BB}^+$  ( $B$  — вектор-столбец волн на выходе шумового трансформатора), получим

$$\overline{B_n B_n^*} = \frac{\omega}{\omega_{ck}} kT_k \Delta f \left[ \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2 \beta^2} \right]^{1/2}, \quad (8)$$

где  $n = 1, 2, 3, 4$ , а два наименьших значения (8) могут быть отнесены к паре либо синхронных (2), либо циклотронных (1) волн.

Минимальная температура собственных шумов усилителя определяется наименьшим значением (8)

$$T_{min} = T_k \frac{\omega}{\omega_{ck}} \left[ \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} - \sqrt{\left( \frac{\alpha^2 \beta^2}{2} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right)^2 - \alpha^2 \beta^2} \right]^{1/2} \quad (9)$$

и зависит как от величины циклотронной частоты, так и от размеров катода  $a$  и  $b$ . Для ряда конкретных значений параметров катода эта зависимость иллюстрируется рис. 2.

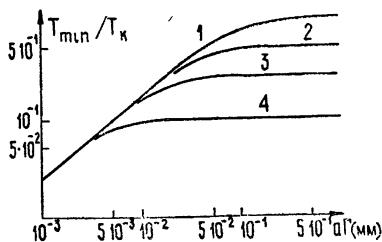


Рис. 2. Зависимость  $T_{\min}$  от ширины катода ( $T_k = 1200^\circ \text{K}$ ,  $f = \omega/2\pi = 1 \text{ кМгц}$ ,  $b\Gamma = 1 \text{ мм}$ ):  
1)  $\omega/\omega_{ck} = 1$ ; 2)  $\omega/\omega_{ck} = 0,5$ ; 3)  $\omega/\omega_{ck} = 0,25$ ;  
4)  $\omega/\omega_{ck} = 0,1$ .

При относительно больших размерах катода ( $\alpha \gg 1$ ,  $\beta \gg 1$ ) выражение под корнем в (9) стремится к единице, и  $T_{\min}$ , как и в случае круглого катода, зависит лишь от температуры катода и величины магнитного поля на его поверхности:

$$T_{\min} = T_k \frac{\omega}{\omega_{ck}}. \quad (10)$$

Это значение температуры обычно реализуется в электростатическом усилителе типа «DIFTRON» [5].

В другом предельном случае, когда только один из размеров катода достаточно мал ( $\alpha \ll 1$ ,  $1 < \beta < 10$ ), выражение (9) принимает вид

$$T_{\min} = T_k \frac{\omega}{\omega_{ck}} \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{m}{k}} \Gamma \omega \sqrt{T_k} a, \quad (11)$$

т. е. минимальная шумовая температура определяется только малым геометрическим размером катода  $a$  и не зависит от значения циклотронной частоты на его поверхности. Это позволяет реализовать низкие значения температуры собственных шумов в электростатическом усилителе, не используя больших магнитных полей (в случае дифтрана  $\omega_{ck} \gg \omega$ ), и до известной степени устраняет требования к высокой плотности тока эмиссии с катода (формула (11) не зависит от размера  $b$ ). Физически возможность снижения коэффициента шума усилителя путем уменьшения ширины катода объясняется возрастанием корреляционных связей между волнами при их возбуждении на катоде.

Чаще всего в процессе электростатического усиления используется активная связь быстрой и медленной циклотронных волн. Минимальные значения (8) в этом случае следует отнести именно к этим волнам. Тогда по известным шумовым матрицам  $\hat{AA}^+$  и  $\hat{BB}^+$  соответственно на входе и выходе трансформатора можно, используя стандартные методы, найти диагонализирующую матрицу  $\hat{S}$  ( $B = \hat{S}A$ ). Эта процедура принципиально не представляет трудностей, однако в общем виде элементы матрицы  $\hat{S}$  оказываются весьма громоздкими. Учитывая, что основной интерес представляет случай тонкого ленточного луча ( $a \ll b$ ,  $\alpha \ll 1$ ), и ограничиваясь в связи с этим первым приближением по  $\alpha$ , получим\*

\* В случае дифтрана (реализуется формула (10)) матрица  $\hat{S}$  имеет единичный вид.

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha}{2\sqrt{\alpha}} e^{i\varphi_1} & -\frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}} e^{i\varphi_1} & \frac{1-\alpha^2}{2\sqrt{\alpha}} e^{i\varphi_1} & -\frac{1-\alpha^2}{2\sqrt{\alpha}} e^{i\varphi_1} \\ -\frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}} e^{i\varphi_2} & \frac{1+\alpha}{2\sqrt{\alpha}} e^{i\varphi_2} & -\frac{1-\alpha^2}{2\sqrt{\alpha}} e^{i\varphi_2} & \frac{1-\alpha^2}{2\sqrt{\alpha}} e^{i\varphi_2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\beta}} e^{i\varphi_3} & \frac{1}{2\sqrt{\beta}} e^{i\varphi_3} & \frac{\beta+1}{2\sqrt{\beta}} e^{i\varphi_3} & -\frac{\beta-1}{2\sqrt{\beta}} e^{i\varphi_3} \\ \frac{1}{2\sqrt{\beta}} e^{i\varphi_4} & \frac{1}{2\sqrt{\beta}} e^{i\varphi_4} & -\frac{\beta-1}{2\sqrt{\beta}} e^{i\varphi_4} & \frac{\beta+1}{2\sqrt{\beta}} e^{i\varphi_4} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где фазы  $\varphi_1 \div \varphi_4$  произвольны.

Для усилителя с круглым катодом шумовой трансформатор, осуществляющий диагонализующее преобразование, можно реализовать, используя азимутально-симметричные электрические и магнитные поля [1]. При использовании ленточного электронного луча решение подобной задачи, по-видимому, наиболее целесообразно искать в виде суперпозиции плоского электрического и азимутально-симметричного магнитного полей.

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В АЗИМУТАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ МАГНИТНОМ И ПЛОСКОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

Плоское электрическое и азимутально-симметричное магнитное статические поля описываются потенциалами вида [7]

$$U(0, U_\varphi, 0), \quad U_\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} H(z); \quad (13)$$

$$\Phi(y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \Phi_0(z), \quad (14)$$

где  $H(z)$  и  $\Phi_0(z)$  — соответственно продольная составляющая напряженности магнитного поля и электрический потенциал на оси системы;  $U(0, U_\varphi, 0)$ ,  $\Phi(y, z)$  — магнитный и электрический потенциалы.

В параксиальном приближении уравнения движения луча в форме связанных волн имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\theta} &= j \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_c} + \varepsilon \right) A_1 - j\varepsilon A_2 + (\mu + j\varepsilon) A_3 - j\varepsilon A_4, \\ \frac{dA_2}{d\theta} &= j\varepsilon A_1 - j \left( 1 + \frac{\omega}{\omega_c} + \varepsilon \right) A_2 + j\varepsilon A_3 + (\mu - j\varepsilon) A_4, \\ \frac{dA_3}{d\theta} &= (\mu - j\varepsilon) A_1 + j\varepsilon A_2 - j \left( \frac{\omega}{\omega_c} + \varepsilon \right) A_3 + j\varepsilon A_4, \\ \frac{dA_4}{d\theta} &= -j\varepsilon A_1 + (\mu + j\varepsilon) A_2 - j\varepsilon A_3 - j \left( \frac{\omega}{\omega_c} - \varepsilon \right) A_4, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\theta = \int_0^z \beta_r(z) dz$  — циклотронный пролетный угол,  $\beta_c = \omega_c(z)/v_0(z)$ ,  $v_0(z) =$

продольная скорость потока,  $2\mu(\theta) = \frac{1}{\omega_c} \frac{d\omega_c}{d\theta}$  — относительное изменение циклотронной частоты на радиан пролетного угла,  $\varepsilon(\theta) = \frac{e'}{2\omega_c^2} \frac{d^2\Phi_0}{dz^2}$  — параметр, характеризующий относительную интенсивность поперечных электрических сил.

Удобно выделить в этих уравнениях амплитуды и фазы волн, т. е. искать решение в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= \gamma \hat{A}_1(z) e^{-i(\varphi-\theta)}, & A_2 &= \gamma \hat{A}_2(z) e^{-i(\varphi+\theta)}, \\ A_3 &= \gamma \hat{A}_3(z) e^{-i\varphi}, & A_4 &= \gamma \hat{A}_4(z) e^{-i\varphi}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\gamma = \sqrt{e' \omega \omega_c I_0 / 2}$ ,  $\varphi = \int_0^z \beta_e(z) dz$  — элекронный пролетный угол,  $\beta_e = \omega/v_0(z)$ .

Тогда для амплитуд  $\hat{A}_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) получим систему

$$\frac{d}{d\theta} \hat{A}(\theta) = \hat{T}(\theta) \hat{A}(\theta), \quad (17)$$

где вектор-столбец  $\hat{A}(\theta)$  и матрица  $\hat{T}(\theta)$  соответственно равны

$$\hat{A}(\theta) = \begin{bmatrix} \hat{A}_1(\theta) \\ \hat{A}_2(\theta) \\ \hat{A}_3(\theta) \\ \hat{A}_4(\theta) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\hat{T}(\theta) = \begin{bmatrix} -\mu(\theta) + j\varepsilon(\theta) & -j\varepsilon(\theta) e^{-2i\theta} & [\mu(\theta) + j\varepsilon(\theta)] e^{-i\theta} & -j\varepsilon(\theta) e^{-i\theta} \\ j\varepsilon(\theta) e^{2i\theta} & -[\mu(\theta) + j\varepsilon(\theta)] & j\varepsilon(\theta) e^{i\theta} & [\mu(\theta) - j\varepsilon(\theta)] e^{i\theta} \\ [\mu(\theta) - j\varepsilon(\theta)] e^{i\theta} & j\varepsilon(\theta) e^{-i\theta} & -[\mu(\theta) + j\varepsilon(\theta)] & j\varepsilon(\theta) \\ -j\varepsilon(\theta) e^{i\theta} & [\mu(\theta) + j\varepsilon(\theta)] e^{-i\theta} & -j\varepsilon(\theta) & -[\mu(\theta) - j\varepsilon(\theta)] \end{bmatrix}.$$

Решение этой системы в общем виде затруднительно, однако для двух классов полей оно может быть получено в достаточно простой форме [6].

*Адиабатические поля.* Для адиабатических полей  $|\varepsilon(\theta)| \ll 1$ ,  $|\mu(\theta)| \ll 1$  во всей области изменения пролетного угла  $\theta$ . Воспользовавшись известными методами усреднения по быстроосциллирующей фазе [8], можно свести (17) к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, интегрирование которых уже не представляет принципиальных трудностей:

$$\frac{d}{d\theta} \hat{A}(\theta) = \langle \hat{T} \rangle \hat{A}(\theta), \quad (19)$$

где  $\langle \hat{T} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{T}(\theta) d\theta$ .

Для иллюстрации возможности синтеза диагонализирующего трансформатора, однако, оказывается достаточным ограничиться рассмотрением лишь ряда простейших случаев.

а)  $\epsilon(\theta) = 2\epsilon_1 \cos \theta$ ,  $\epsilon_1 = \text{const}$ ,  $\mu(\theta) \equiv 0$  (электрическое поле  $E_z$  имеет только первую гармонику по  $\theta$ , магнитное поле  $H$  — постоянно).

Матрица преобразования амплитуд волн имеет вид

$$\hat{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & j\tau_1 & -j\tau_1 \\ 0 & 1 & j\tau_1 & -j\tau_1 \\ -j\tau_1 & j\tau_1 & 1 & 0 \\ -j\tau_1 & j\tau_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где  $\tau_1 = \epsilon_1(\theta - \theta_0)$ , а  $\theta_0$  и  $\theta$  относятся соответственно, ко входу и выходу области преобразования ( $\hat{A} = \hat{S}_1 \hat{A}_0$ ,  $\hat{A}_0$  — вектор-столбец амплитуд волн на входе).

б)  $\epsilon(\theta) = \epsilon_0 = \text{const}$ ,  $\mu(\theta) \equiv 0$  (электрическое поле  $E_z$  линейно зависит от  $z$ , магнитное поле  $H$  — постоянно).

В этом случае

$$\hat{S}_0 = \begin{bmatrix} e^{j\tau_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\tau_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - j\tau_0 & j\tau_0 \\ 0 & 0 & -j\tau_0 & 1 + j\tau_0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где  $\tau_0 = \epsilon_0(\theta - \theta_0)$ .

в)  $\epsilon(\theta) = \epsilon'_0 = \text{const}$ ,  $\mu(\theta) = \mu_0 = \text{const}$  (электрическое поле  $E_z$  зависит от  $\theta$ , магнитное поле  $H$  меняется вдоль  $\theta$  по экспоненциальному закону). Тогда

$$\hat{S}'_0 = \begin{bmatrix} e^{j\tau'_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\tau'_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - j\tau'_0 & j\tau'_0 \\ 0 & 0 & -j\tau'_0 & 1 + j\tau'_0 \end{bmatrix} e^{-v_0}, \quad (22)$$

где  $\tau'_0 = \epsilon'_0(\theta - \theta_0)$ ,  $v_0 = \mu_0(\theta - \theta_0)$ .

Совершенно аналогично можно получить матрицы преобразования амплитуд волн для ряда других гармоник электрического и магнитного полей ( $\epsilon(\theta) = 2\epsilon_2 \cos 2\theta$ ,  $\epsilon_2 = \text{const}$ ,  $\mu(\theta) \equiv 0$ ;  $\epsilon(\theta) = 2\epsilon_1 \cos \theta$ ,  $\epsilon_1 = \text{const}$ ,  $\mu(\theta) = 2\mu_1 \cos \theta$ ,  $\mu_1 = \text{const}$ ;  $\epsilon(\theta) = \epsilon_{n/2}(1 + 2\cos 2\theta)$ ,  $\epsilon_{n/2} = \text{const}$ ,  $\mu(\theta) \equiv 0$  и т. д.), которые также могут служить основой для синтеза диагонализирующей матрицы  $\hat{S}$ , анализа процессов в зоне усиления при использовании плоских периодических структур и т. д.

**Скачки полей.** При скачкообразном изменении полей  $\epsilon(\theta)$  и  $\mu(\theta)$  по величине меняются произвольно, но эти изменения локализованы в узкой области значений пролетного угла  $\theta$  ( $\Delta\theta \ll 1$ ). Это позволяет в (18) исключить вибрационные члены, считая  $\exp(\pm j\theta) = \exp(\pm j\theta_0)$ ,  $\exp(+j\theta) = \exp(+2j\theta_0)$  ( $\theta_0 = \text{const}$  — «средняя координата» скачка), что значительно упрощает решение задачи.

В случае скачков электрического поля ( $\mu(\theta) = 0$ ,  $\epsilon(\theta) \neq 0$ ) матрица преобразования амплитуд волн имеет вид

$$\hat{S}_{\text{ск}} = \begin{vmatrix} 1 + j\tau_{\text{ск}} & -j\tau_{\text{ск}}e^{-2j\theta_0} & j\tau_{\text{ск}}e^{-j\theta_0} & -j\tau_{\text{ск}}e^{-j\theta_0} \\ j\tau_{\text{ск}}e^{2j\theta_0} & 1 - j\tau_{\text{ск}} & j\tau_{\text{ск}}e^{j\theta_0} & -j\tau_{\text{ск}}e^{j\theta_0} \\ -j\tau_{\text{ск}}e^{j\theta_0} & j\tau_{\text{ск}}e^{-j\theta_0} & 1 - j\tau_{\text{ск}} & j\tau_{\text{ск}} \\ -j\tau_{\text{ск}}e^{j\theta_0} & j\tau_{\text{ск}}e^{-j\theta_0} & -j\tau_{\text{ск}} & 1 + j\tau_{\text{ск}} \end{vmatrix}, \quad (23)$$

где  $\tau_{\text{ск}} = \int_{\Delta\theta} \epsilon(\theta) d\theta$ . Для достаточно «быстрых» скачков  $\tau_{\text{ск}} = (e'/2\omega_r v_0(\theta_0)) (E_1 - E_2)$  и определяется лишь начальным  $E_1$  и конечным  $E_2$  значениями электрического поля  $E_z$ .

#### 4. СИНТЕЗ ТРАНСФОРМАТОРА ШУМА

Можно отметить ряд общих соображений, которые целесообразно учитывать при выборе той или иной структуры поля для синтеза шумового трансформатора  $\hat{S}$ .

а) При формировании электронного потока в малошумящих пушках часто используется близкое к параболическому распределение потенциала в прикатодной области. В качестве первого составного элемента искомого трансформатора поэтому наиболее подходящей оказывается система с линейным нарастанием электрического поля ( $\epsilon(\theta) = \epsilon_0 = \text{const}$ ).

б) Поскольку пучок, сформированный электронной пушкой, должен иметь вполне определенное рабочее значение продольной скорости, необходимо, чтобы поле  $E_z$  на выходе трансформатора обращалось в нуль. Кроме того, при реализации систем, выполняющих одновременно функции трансформатора шума и электронной пушки, иногда возникает необходимость в изменении продольной скорости потока. Это может быть достигнуто использованием участка с линейным нарастанием потенциала и единичной матрицей преобразования амплитуд волн.

в) Реализация систем с периодической структурой электрического поля существенно упрощается, если осцилляции поля  $E_z$  в них происходят около нулевого значения.

г) Эквивалентная температура собственных шумов усилителя, процесс усиления в котором основан на активной связи циклотронных волн, определяется лишь уровнем шумов медленной циклотронной волны (шумы быстрой циклотронной волны отбираются во входном устройстве, а связь циклотронных волн с синхронными—величина второго порядка малости). В связи с этим, для минимизации шумовой температуры достаточно синтезировать лишь вторую строку матрицы (12), так как именно эта строка определяет амплитуду медленной циклотронной

волны на выходе трансформатора ( $B_2 = \sum_{i=1}^4 s_{2i} A_i$ , где  $s_{2i}$  — элементы

второй строки матрицы  $\hat{S}$ ). Минимальная шумовая температура  $T_{\min}$  при этом определяется по-прежнему формулой (9).

Используя различные комбинации гармоник электрического и магнитного полей, можно получить несколько вариантов трансформатора

шума, вторая строка матриц преобразования волн которых имеет необходимый вид\*. Два простейших из них показаны на рис. 3, 4\*\*.

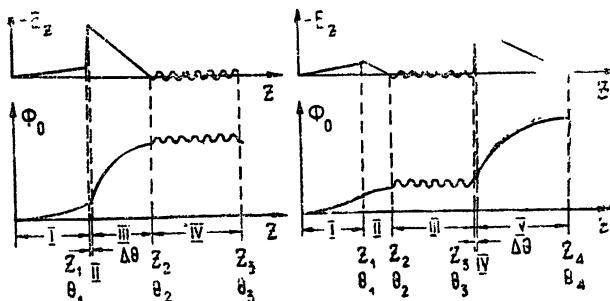


Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 3. Вариант оптимального трансформатора шума ( $H(0)=\text{const}$ ; изображено распределение электрического поля и потенциала на оси системы):

$$\begin{aligned} I - \epsilon(\theta) = \epsilon_{0,1} = \text{const}, |\epsilon_{0,1}| \ll 1, \tau_{0,1} = \epsilon_{0,1}\theta_1 = \arctg(\delta - \tau_{ck})/(1 + \\ + \delta\tau_{ck}) - \tau_{0,3} + \pi k \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots), \delta = (1/\sqrt{\alpha}) [1 + (-1)^{n+k+1} \times \\ \times (1+\alpha)^{3/2}] \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots); II - \tau_{ck} = (1-\alpha)/2\sqrt{\alpha}, \Delta\theta \ll 1, \\ \theta_1 = \arctg(1-\delta\sqrt{\alpha})/(\delta + \sqrt{\alpha}) + \tau_{0,3} + \pi n; III - \epsilon(\theta) = \epsilon_{0,3} = \text{const}, \\ |\epsilon_{0,3}| \ll 1, \tau_{0,3} = \epsilon_{0,3}(\theta_2 - \theta_1) - \text{произвольно}; IV - \epsilon(\theta) = 2\epsilon_{1,4} \cos \theta, \\ |\epsilon_{1,4}| \ll 1, \epsilon_{1,4} = \text{const}, \tau_{1,4} = \epsilon_{1,4}(\theta_3 - \theta_2) = (-1)^{n+k} \tau_{ck} \times \\ \times \sqrt{\alpha} \sqrt{(1+\delta^2)/(1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Рис. 4. Вариант оптимального трансформатора шума ( $H(0)=\text{const}$ ; изображено распределение электрического поля и потенциала на оси системы):

$$\begin{aligned} I - \epsilon(\theta) = \epsilon_{0,1} = \text{const}, |\epsilon_{0,1}| \ll 1, \tau_{0,1} = \epsilon_{0,1}\theta_1 - \text{произвольно}; II - \\ - \epsilon(\theta) = \epsilon_{0,2} = \text{const}, |\epsilon_{0,2}| \ll 1, \tau_{0,2} = \epsilon_{0,2}(\theta_2 - \theta_1), \tau_{0,1} + \tau_{0,2} = \\ = \arctg \delta + \pi k \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots), \delta = \sqrt{\alpha} [1 + (-1)^{n+k+1} (1+\alpha)^{3/2}]; III - \epsilon(\theta) = 2\epsilon_{1,3} \cos \theta, |\epsilon_{1,3}| \ll 1, \epsilon_{1,3} = \text{const}, \tau_{1,3} = \epsilon_{1,3}(\theta_3 - \theta_2) = \\ = (-1)^{n+1} \tau_{ck} \sqrt{(1+\delta^2)/(1+\alpha)} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots); IV - \tau_{ck} = \\ = (1 - \alpha)/2\sqrt{\alpha}, \Delta\theta \ll 1, \theta_3 = \arctg(\sqrt{\alpha} - \delta)/(1 + \delta\sqrt{\alpha}) + \pi n; \\ V - \epsilon(\theta) = \epsilon_{0,5} = \text{const}, |\epsilon_{0,5}| \ll 1, \tau_{0,5} = \epsilon_{0,5}(\theta_4 - \theta_3) - \text{произвольно}. \end{aligned}$$

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Эквивалентная температура собственных шумов электростатического усилителя с ленточным лучом может быть понижена либо путем использования больших магнитных полей на поверхности катода (дифтрон), либо уменьшением ширины катода (усилитель с трансформатором шума).

Применение ленточного луча в дифтронах с точки зрения уменьшения коэффициента шума не дает преимуществ по сравнению с усилителями, имеющими круглый катод, но может оказаться полезным по ряду других причин. Следует иметь в виду, однако, что использование плоского электрического поля  $\epsilon(\theta) = \epsilon_0 = \text{const}$  для ускорения потока в таких приборах приводит, в соответствии с (22), к дополнительной деформации пучка (рис. 5).

В электростатических усилителях, использующих шумовой трансформатор, замена аксиально-симметричного луча ленточным позволяет

\* Используя (16), от матриц (20)–(23) несложно перейти к матрицам преобразования волн.

\*\* В обоих этих случаях одновременно обеспечивается также минимизация шумов быстрой циклотронной волны.

существенно снизить требования к плотности катодного тока эмиссии\*, хотя и приводит к некоторому усложнению формы поля в трансформаторе. Можно, однако, реализовать системы с более простой формой поля, которые обеспечивают получение температур, хотя и не точно равных, но близких к минимальному значению (9).

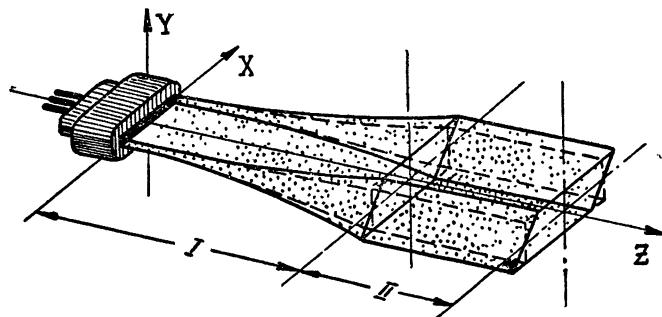


Рис. 5. Деформация ленточного пучка в адиабатических полях  $\epsilon(\theta)=\text{const} > 0$ ,  $\mu(\theta)=\text{const} < 0$ :

I— $\epsilon(\theta)=\text{const}$ ,  $\mu(\theta)=\text{const}$ ; II— $\epsilon(\theta)=0$ ,  $\mu(\theta)=0$ . Сплошными линиями изображена форма пучка в азимутально-симметричном магнитном и плоском электрическом полях, пунктиром — в азимутально-симметричных полях.

Использование трансформатора шума в усилителях с ленточным лучом привлекательно также и с точки зрения снижения веса прибора (простая магнитная система), уменьшения его габаритов и т. д.

Нужно отметить, что изложенный выше анализ справедлив лишь в односкоростной зоне и, строго говоря, не может считаться верным в прикатодной области, где электронный пучок является существенно многоскоростным.

В то же время минимальная шумовая температура экспериментальных дифтронов [5] весьма точно описывается выражением (10). Это дает основания предполагать, что процессы в прикатодной зоне, по-видимому, мало искажают общую картину распространения шумовых поперечных колебаний в потоке.

Не исключено, однако, что существуют режимы многоскоростной зоны, при которых возможно дальнейшее снижение шумовой температуры усилителя. Хотя отдельные исследования в этом направлении уже проводились [9–11], достаточной ясности пока не достигнуто.

Авторы выражают признательность В. М. Лопухину за внимание к работе и ее полезное обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. T. Wessel-Berg, K. Blötekjeag, IRE Trans., ED-9, № 5, 388 (1962).
2. A. E. Siegman, J. Appl. Phys., 31, № 1, 17 (1960).
3. K. Blötekjeag, J. Appl. Phys., 33, № 8, 2409 (1962).
4. F. N. H. Robinson, H. A. Haus, J. Electronics, 1, 373 (1956).
5. G. Hrbek, R. Adler, Tubes pour hyperfréquences, Proc. of 5th Int Congress on microwave tubes (Paris 1964), N. Y.—London, Acad. press, 1965, p. 17.
6. В. А. Ванке, В. Л. Саввин, Радиотехника и электроника, 15, № 11, 2408 (1970).
7. А. Рустерхольц, Электронная оптика, ИЛ, М., 1952.
8. Н. Н. Боголюбов, Ю. М. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.

\* Так, если  $T_k = 1200^\circ\text{K}$ ,  $f = 1 \text{ кГц}$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $a = 0.01 \text{ мм}$ ,  $b = 1 \text{ мм}$ , то  $T_{\min} \approx 160^\circ\text{K}$ . Плотность тока эмиссии круглого катода при таком значении  $T_{\min}$  и тех же  $T_k$ ,  $f$ ,  $\Gamma$  более чем в 20 раз выше.

9. P. A. H. Hart, Proc. IRE, 50, № 2, 266 (1962).
10. C. P. Lea-Wilson, T. J. Bridges, J. C. Vokes, J. Electron. Control, 10, № 4, 261 (1961).
11. P. A. H. Hart, Tubes pour huperfrequencies, Proc. of 5-th Int. Congress on microwave tubes (Paris 1964), N. Y.—London, Acad. press, 1965, p. 29.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
21 ноября 1969 г.

THE MINIMUM LEVEL OF NATURAL NOISES OF DC-PUMPED AMPLIFIER  
WITH A STRIP-SHAPED BEAM

*V. A. Vanke, S. P. Kryukov, Yu. M. Timofeev*

The decrease of natural noises of the electron beam in the dc-pumped amplifier with a strip-shaped beam is considered. The noise matrix at the rectangular cathode surface is determined. The minimum equivalent temperature of natural noises of the amplifier is calculated. The transformation matrix providing this temperature has been found. The transverse wave transformation of the electron beam in azimuthal-symmetrical magnetic and plane electric fields is discussed. By some concrete examples, a possibility of designing the noise transformer considered is illustrated.

---

УДК 538.56

## ИНДУЦИРОВАННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

*Б. К. Селимов*

В работе рассмотрено индуцированное излучение и поглощение электронов, вращающихся в неоднородном электростатическом поле. Обнаружен эффект преобладания излучения над поглощением на одной из собственных частот движения электронов, аналогичный рассмотренному в [12, 13] для неоднородного магнитного поля.

В последнее время в отечественной и зарубежной литературе широко обсуждаются вопросы теории и экспериментальной реализации генераторов и усилителей, в которых используются не атомы и молекулы, а электронные пучки, движущиеся в макроскопических статических полях [1-4].

Ниже мы рассмотрим в свете квантовой теории индуцированное излучение (поглощение) электронов в статическом электрическом поле. Геометрия электронов, создающая такое поле и условия, при которых возможно устойчивое (финитное) движение электрона по координатам  $r$  и  $z$ , приведена в [5, 6].

Следует отметить, что взаимодействие высокочастотных полей с электронными пучками, фокусируемыми неоднородными электростатическими полями, рассматривалось в литературе (см. библиографию в [3]), а индуцированные радиационные процессы в « $E$ »-системе в свете квантовой теории были нами рассмотрены в [7].

### 1. СТАЦИОНАРНОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В СТАТИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Потенциал электрического поля в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$  имеет вид [5, 6]

$$V = a \left( \frac{r^2}{2} - z^2 \right) + b \ln r + c. \quad (1)$$

Здесь  $a, b, c$  — постоянные коэффициенты. Волновую функцию электрона в поле (1) можно найти из уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{P^2}{2m} + eV \right) \psi, \quad (2)$$

где  $P = -i\hbar\nabla$  — оператор импульса,  $m$  и  $e$  — масса и заряд электрона. В нашей задаче потенциальная энергия не зависит от времени  $t$  и азимута  $\varphi$ , поэтому решение уравнения (2) будем искать в виде

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( iL\varphi - i\frac{E}{\hbar} t \right), \quad (3)$$

где  $l$  — орбитальное квантовое число. Радиальная  $R(r)$  и аксиальная  $L(z)$  части волновой функции могут быть определены из уравнений

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \alpha - \frac{e^2}{r^2} - \lambda^2 r^2 \right) R = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d^2L}{dz^2} + \left( \lambda_1^2 \varepsilon^2 - \frac{2m}{\hbar^2} E_2 \right) L = 0, \quad (5)$$

где

$$\alpha = \frac{2m}{\hbar^2} \left( E_1 - \frac{e_0 b}{2} + e_0 c \right), \quad \lambda = \gamma \left( 1 - \frac{a}{b} r_0^2 \right)^{1/2},$$

$$\gamma^2 = e_0 b m / \hbar^2 r_0^2, \quad \lambda_1 = 2 e_0 a m / \hbar^2, \quad z = i \varepsilon, \quad e = -e_0.$$

При выводе (4) и (5) нами учтены условия финитного движения электрона по координатам  $r$  и  $z$  [5, 6] и логарифмическая функция разложена в ряд в окрестности равновесного радиуса  $r_0$ .

Решения уравнений (4) и (5) имеют вид

$$R_{l,s} = \sqrt{2\lambda} J_{ns}(\lambda r^2),$$

$$L_k = \sqrt[4]{\frac{\lambda_1}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} H_k(\sqrt{\lambda_1} \varepsilon) \exp\left(-\frac{\lambda_1 \varepsilon^2}{2}\right),$$

где  $R_{l,s}$  и  $L_k$  — полиномы Лагерра и Эрмита,

$$J_{ns} = \frac{1}{\sqrt{(s+l)! s!}} \exp\left(-\frac{1}{2} \rho\right) \rho^{1/2} Q_s(\rho),$$

$$Q_s'(\rho) = \rho^{-l} \exp(-\rho) \frac{ds}{d\rho^s} [\rho^{s+l} \exp(-\rho)],$$

$$H_k(\varepsilon) = (-1) \exp(\varepsilon^2) \frac{dk}{d\varepsilon^k} \exp(-\varepsilon^2).$$

Так как нижний индекс у полиномов Эрмита и Лагерра должен принимать значения  $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  [8], мы можем найти следующие области изменения квантовых чисел:

аксиального —  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,

орбитального —  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,

радиального —  $s = \begin{cases} l, l+1, l+2, \dots & (l \geq 0) \\ -l, -l+1, -l+2, \dots & (l \leq 0) \end{cases}$ ,

главного —  $n = s + l = \begin{cases} l, l+1, l+2, \dots & (l \geq 0) \\ 0, 1, 2, 3, \dots & (l \leq 0) \end{cases}$ .

## 2. ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Согласно общим методам квантовой электродинамики [9], выражение для вероятности вынужденного перехода под действием внешней электромагнитной волны частоты  $\omega = c\chi$  с волновым вектором  $\chi$ , составляющим угол  $\theta$  с осью  $z$ , имеет вид

$$W_{nn'} = \frac{2\pi e_0^2 c}{\hbar L_0^3 \chi} N(\chi) \frac{1}{m_0^2 c^2} (|P_x|^2 + \cos^2 \theta |P_y|^2 +$$

$$+ \sin^2 \theta |P_z|^2) \frac{1}{\tau} \left| \int_0^\tau \exp \left[ -it(\omega_{nn'} \pm \omega) - \frac{t}{2\tau} \right] dt \right|^2, \quad (6)$$

где  $\tau$  — среднее значение времени пребывания электрона в начальном состоянии, причем перед  $\omega$  необходимо выбрать соответственно знак минус или плюс в зависимости от того, имеем ли мы излучение ( $\omega_{nn'} > 0$ ) или поглощение ( $\omega_{nn'} < 0$ ) фотонов;  $N(\chi)$  — число фотонов в объеме  $L_0^3$ , связанное с амплитудой электрического поля  $E$  внешней электромагнитной волны при помощи соотношения

$$\frac{E^2}{4\pi} = \frac{\hbar\omega N(\chi)}{L_0^3}.$$

Введение обрывающего фактора в интеграл по времени (см. (6)) характеризует наличие затухания, вызванного конечным временем (в среднем равным  $\tau/2$ ) пребывания электрона на начальном энергетическом уровне [10].

Раскрывая квадрат модуля интеграла в правой части равенства (6), для больших промежутков времени  $t \gg \tau$  получим

$$\frac{1}{\tau} \left| \int_0^\tau \exp \left[ -it(\omega_{nn'} \pm \omega) - \frac{t}{2\tau} \right] dt \right|^2 = \frac{4\tau}{4\tau^2(|\omega_{nn'} - \omega|)^2 + 1}.$$

Для вычисления матричных элементов перейдем к цилиндрической системе координат

$$P_x \pm iP_y = -i\hbar \sqrt{\lambda} \exp(\pm i\varphi) \left( \sqrt{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \pm \frac{i}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right),$$

$$P_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}, \quad \rho = \lambda r^2.$$

Ограничиваюсь дипольным приближением ( $\exp(-i\chi r) \approx 1$ ), получим

$$P_{xy} \psi_{nsk} = i\hbar \sqrt{\lambda} [(\sqrt{n+1} \psi_{n+1} \mp \sqrt{n} \psi_{n-1}) + \\ + (\mp \sqrt{s+1} \psi_{s+1} + \sqrt{s} \psi_{s-1})],$$

$$P_z \psi_{nsk} = i\hbar \sqrt{\lambda/2} (\sqrt{k+1} \psi_{k-1} - \sqrt{k} \psi_{k-1}).$$

Верхние знаки относятся к индексу  $x$ , а нижние — к индексу  $y$ .

Далее, учитывая ортонормированность функций, получаем

$$|P_x|^2 = |P_y|^2 = \frac{m^2}{\lambda^2} \left\{ \frac{\omega_H^2}{(1+\gamma/\lambda)^2} [(n+1) \delta_{n', n+1} + n \delta_{n', n-1}] \delta_{ss'} \delta_{k' k} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_E^2}{(1-\gamma/\lambda)^2} [(s+1) \delta_{s', s+1} + s \delta_{s', s-1}] \delta_{nn'} \delta_{k' k} \right\},$$

$$|P_z|^2 = \frac{m^2 \omega_z^2}{2\lambda_1} [(k+1) \delta_{k', k+1} + k \delta_{k', k-1}] \delta_{nn'} \delta_{ss'}.$$

Следовательно, правила отбора и соответствующие частоты будут определяться выражениями

$$\Delta n = \pm 1, \quad \Delta s = 0, \quad \Delta k = 0, \quad \omega_{n, n \mp 1} = \pm \omega_H,$$

$$\begin{aligned} \Delta n = 0, \quad \Delta s = 0, \quad \Delta k = \pm 1, \quad \omega_{k, k \pm 1} = \pm \omega_z, \\ \Delta n = 0, \quad \Delta s = \pm 1, \quad \Delta k = 0, \quad \omega_{s, s \mp 1} = \pm \omega_E, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_H &= (1/2)(\Omega + \Omega_1), \quad \omega_E = (1/2)(\Omega - \Omega_1), \\ \omega_z &= (2e_0 a/m)^{1/2}, \quad \Omega = (e_0 b/m)^{1/2}, \\ \Omega_1 &= \Omega(1 - ar_0^2/b)^{1/2}. \end{aligned}$$

### 3. ИНТЕНСИВНОСТЬ ИНДУЦИРОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ

Так как реально наблюдаемой величиной является полная мощность, излучаемая (или поглощаемая) электроном в результате обоих процессов [11], то с помощью формул (6) и (7) находим:

в случае (7.1) —

$$W_1 = \hbar \omega_H (w_{n, n-1} - w_{n, n+1}) = - \frac{2e_0^2 E^2 \omega_H^2 (1 + \cos^2 \theta)}{\omega^2 m (1 + \gamma/\lambda)} \frac{\tau}{1 + 4\tau^2 (\omega_H - \omega)^2},$$

в случае (7.2) —

$$W_2 = \hbar \omega_z (w_{k, k-1} - w_{k, k+1}) = - \frac{e_0^2 E^2 \omega_z^2 (1 - \cos^2 \theta)}{m \omega^2} \frac{\tau}{1 + 4\tau^2 (\omega_z - \omega)^2},$$

в случае (7.3) —

$$W_3 = \hbar \omega_E (w_{s, s+1} - w_{s, s-1}) = \frac{2e_0^2 E^2 \omega_E^2 (1 + \cos^2 \theta)}{m \omega^2 (1 - \gamma/\lambda)} \frac{\tau}{1 + 4\tau^2 (\omega_E - \omega)^2}.$$

Следовательно, на частоте  $\omega_E$  вынужденное излучение превалирует над поглощением. Аналогичный эффект был рассмотрен в работах по индуцированному излучению и поглощению электрона в неоднородном магнитном поле [12, 13].

### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Schneider, Phys. Rev. Lett., 2, 504 (1959).
2. Синхротронное излучение, под ред. А. А. Соколова, И. М. Тернова, Наука, М., 1966.
3. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юллатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
4. J. Hirshfield, Phys. Rev. Lett., 12, 533 (1964).
5. М. И. Корсунский, Тр. Харьковского политехнического ин-та им. В. И. Ленина, 14, 34 (1958).
6. А. С. Бородкин, ЖТФ, 31, 5 (1961).
7. Б. К. Селимов, Сб. статей молодых ученых (материалы научной конференции, май 1965), Махачкала, 1969, стр. 28.
8. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и приложения, Физматгиз, М.—Л., 1963.
9. А. А. Соколов, Введение в квантовую электродинамику, Физматгиз, М., 1958.
10. А. А. Соколов, И. М. Тернов, ДАН СССР, 166, № 6, 1332 (1966).
11. В. М. Файн, УФН, 79, 641 (1963).

12. А. А. Соколов, В. И. Жуковский, Ю. А. Коровин, ЖЭТФ, 51, 1829 (1966).
13. Д. В. Гальцев, В. И. Жуковский, Ю. А. Коровин, В. Н. Любимов, Ю. Ч. Павленко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 5, 734 (1967).

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию  
20 октября 1969 г.

## INDUCED RADIATION OF ELECTRONS IN AN AXIALLY-SYMMETRIC ELECTROSTATIC FIELD

B. K. Selimov

The induced radiation and absorption of electrons rotating in an inhomogeneous electrostatic field has been considered. The effect is discovered of the prevalence of radiation over absorption at one of the natural frequencies of the electron motion analogous to that considered in [12, 13] for a homogeneous magnetic field.

---

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 523.164.4

**АБСОЛЮТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ КАССИОПЕИ-А,  
ЛЕБЕДЯ-А И ТЕЛЬЦА-А В ДИАПАЗОНЕ ВОЛН 15—30 см**

Л. В. Виноградова, Д. А. Дмитренко, Н. М. Цейтлин

Ниже приводятся результаты абсолютных измерений интенсивности излучения Кассиопеи-А, Лебедя-А и Тельца-А в диапазоне волн 15—30 см, являющихся продолжением работ НИРФИ (см., например, [1—6]) по эталонированию интенсивности наиболее мощных дискретных источников методом сравнения с излучением «черного» диска (см. [7—9]).

Как и в предыдущей работе авторов [6], измерения проводились с использованием 7-метровой параболической антенны и 2-метрового «черного» диска, расположенного на расстоянии 98,2 м от антенны, т. е. в области френелевской дифракции (антенна фокусировалась на диск [8, 9]). Измерения проводились с сентября 1969 по февраль 1970 г. на радиоастрономическом полигоне НИРФИ «Старая Пустынь» по методике, описанной в [6]. Результаты измерений представлены в табл. 1 с указанием средне квадратичных погрешностей измерений, определяемых флуктуационным порогом чувствительности ( $\delta_{\text{фл}}$ ), неточностью внесения дифракционной поправки  $\xi$  и учета коэффициента отражения поглощающего материала  $r^2$  ( $\delta_\xi = \xi/2$ ;  $\delta_r = r^2/4$  [6]), а также неточностью установки облучателя в максимум фокального пятна ( $\delta_{\text{фок}}$ , см. подробнее [6]).

Таблица 1

$\lambda$ (см)	$\delta_\xi$ (%)	$\delta_r$ (%)	$\delta_{\text{фок}}$ (%)	$\delta_{\text{фл}} (\%)$			$\delta_\Sigma = \sqrt{\sum \delta_i^2} (\%)$	$S_v (10^{-24} \text{ вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{гц}^{-1})$		
				Кассиопея-А	Телец-А	Лебедь-А		Кассиопея-А	Телец-А	Лебедь-А
15	2	0,2	3	2	2	—	5	5	—	$18,8 \pm 1$
17	2	0,1	3	4	4	4	5,5	5,5	5,5	$20,0 \pm 1,1$
20	2,5	0,3	6	1	2	2	6,5	6,5	6,5	$24,0 \pm 1,6$
23	3	0,2	5	1	1,5	2	6	6	6	$25,8 \pm 1,6$
25	3,5	0,3	3	1	1,5	1,5	4,5	4,5	4,5	$27,30 \pm 1,2$
27	3,5	0,4	1	1,5	1,5	1	4	4	4	$29,7 \pm 0,45$
30	4	0,1	6	2	4	2	7,5	8	7,5	$28,3 \pm 1,1$
										$19,9 \pm 0,7$
										$30,2 \pm 2,3$
										$9,7 \pm 0,8$
										$19,9 \pm 1,5$

На рис. 1, 2 эти результаты приведены вместе с данными наших измерений в диапазоне 7,5—15 см [6] и данными [4, 3, 5] в диапазоне 30—60 см. Как видно из рис. 1, результаты измерений потока Кассиопеи-А, полученные в 1967—1969 гг. в работах [5, 6], и данные настоящей работы в пределах точности измерений ложатся на прямую со спектральным индексом  $\alpha = -0,82 \pm 0,05$  в диапазоне длин волн 3—60 см\*. Спектральный индекс излучения Лебедя-А (рис. 1) в диапазоне 15—30 см равен  $\alpha \approx 1,05$ .

\* По данным [10, 11] в этом диапазоне волн  $\alpha = -0,77 \pm 0,01$ , а по данным [12]  $\alpha = -0,743 \pm 0,02$ .

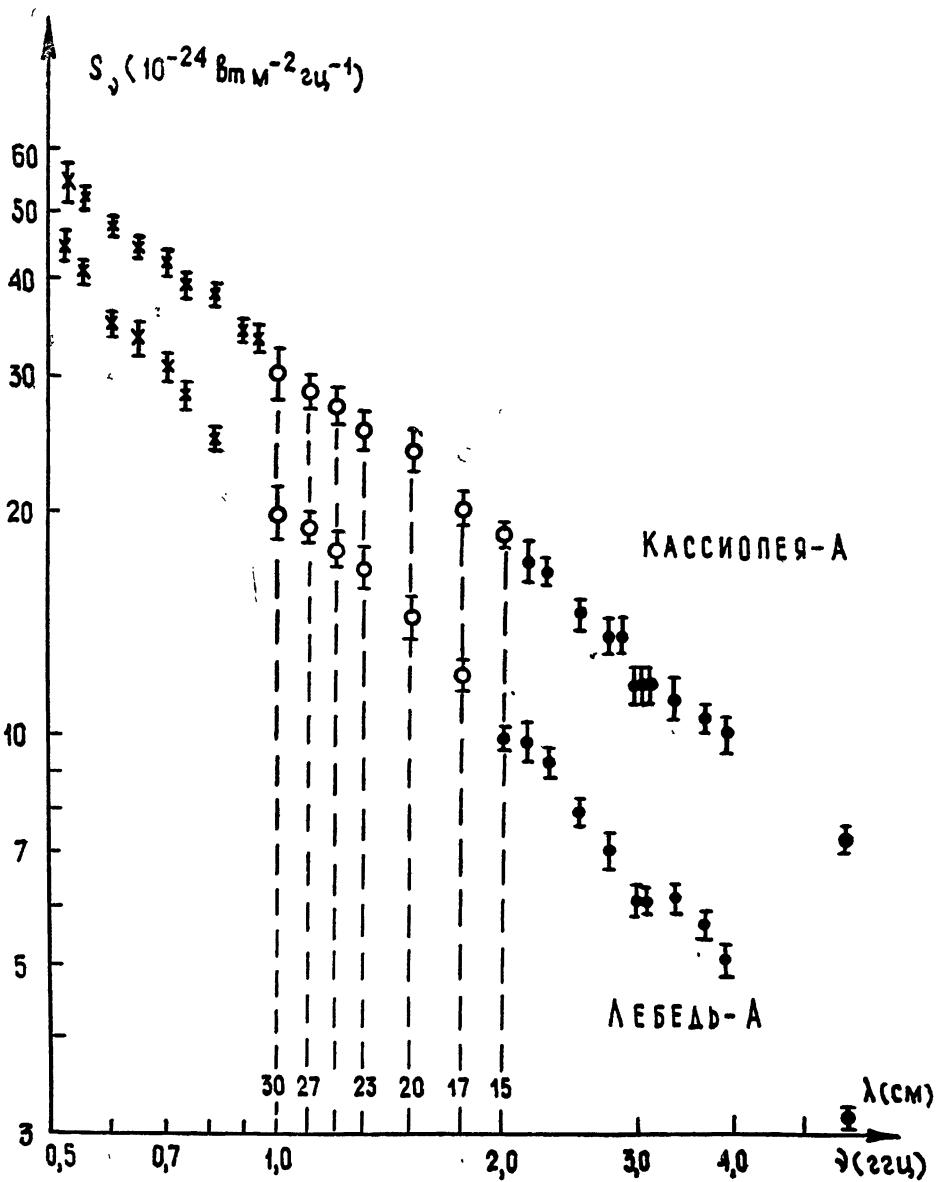


Рис. 1. Спектры Кассиопеи-А и Лебедя-А: ××× — данные работы [8], ●●● — данные работы [6], ○○○ — данные настоящей работы.

Сопоставление результатов измерений потока Тельца-А в диапазоне 15—30 см с нашими измерениями на волнах 7,5—15 см [6] и 30—60 см [2, 3] выявляет две особенности в спектре (см. рис. 2), а именно, уже отмеченную нами ранее [2, 3] «ступеньку» с  $\alpha \approx 0$  в районе 25—40 см (на рис. 2 отчетливо видна высокочастотная граница «ступеньки») и аналогичную особенность с  $\alpha \approx 0$  в районе 12—14 см. Уплотнения в спектре Тельца-А свидетельствуют, по-видимому, о многокомпонентной с разными индексами структуре источника.

При рассмотрении рис. 1, 2 обращает на себя внимание странное падение интенсивности источников в районе 9,5—10 см (см. [6]). Поскольку «провал» наблюдается для всех трех источников, он, по-видимому, является результатом некой систематической погрешности в измерениях. Тем не менее, не исключена возможность влияния условий распространения в этом диапазоне.

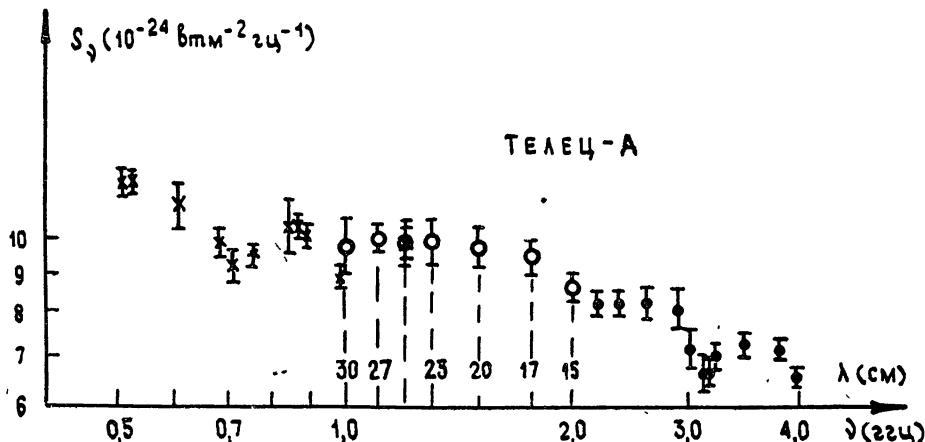


Рис. 2. Спектр Тельца-А:  $\times \times \times$  — данные работ [2, 3], ●●● — данные работы [6], ○○○ — данные настоящей работы.

Авторы признательны О. С. Иванову за помощь в проведении наблюдений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Ласточкин, В. А. Порфириев, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, Н. Н. Холодилов, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 629 (1963).
2. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, В. А. Порфириев, Астрон. ж., 41, № 3, 446 (1964).
3. В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлюк, Д. А. Дмитренко, А. А. Романычев, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 2, 168 (1969).
4. В. П. Ласточкин, Э. С. Планкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 631 (1963).
5. Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, С. А. Каменская, В. А. Порфириев, В. Л. Рахлин, В. М. Родина, К. С. Станкевич, К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 807 (1969).
6. Д. А. Дмитренко, Н. М. Цейтлин, Л. В. Виноградова, Х. Ф. Гитерман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 6, 823 (1970).
7. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 393 (1961); 5, № 4, 623 (1962).
8. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 571 (1964).
9. Д. А. Дмитренко, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 5, 639 (1969).
10. E. A. Palk, Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 138, № 4, 407 (1968).
11. K. I. Kellerman, I. I. K. Pauliny-Toth, P. J. S. Williams, Astrophys. J., 157, № 1, P. 1, 1 (1969).
12. J. W. M. Baars, R. G. Mezger, H. Wendker, Astrophys. J., 142, № 1, 122 (1965).

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию  
14 апреля 1970 г.

УДК 538.56

#### ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЗАРЯДА В ПОЛЕ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

Ф. А. Димаштейн

В настоящее время опубликован ряд работ, посвященных вопросам генерации и детектирования гравитационных волн (см. обзор [1]).

В данной работе рассматривается изменение излучения релятивистского заряда, движущегося по окружности с постоянной по величине скоростью, обусловленное взаимодействием излучения с гравитационной волной.

1. Пусть в плоскости  $YZ$  по окружности радиуса  $R_0$  с постоянной по величине скоростью движется релятивистский заряд. Вдоль оси  $OX$  распространяется гравитационная волна с частотой  $\nu_0$ . Рассмотрим изменение излучения заряда в поле гравитационной волны. Если в точке  $M$  (см. рис. 1) поместить прибор, измеряющий излучение заряда, то можно измерить изменение излучения заряда за счет взаимодействия с гравитационной волной.

Величиной гравитационного излучения самой частицы пренебрегаем [2]. Гравитационную волну, которая является решением уравнений Эйнштейна в пустоте, представим в виде плоской волны с отличными от нуля компонентами [3]:  $h^{22} = h_{(0)}^{22} \sin [\nu \times (t - x/c)]$ ,  $h^{23} = h_{(0)}^{23} \sin [\nu (t - x/c)]$ . Уравнения Максвелла в гравитационном поле имеют вид [3]

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} g^{lm} g^{kn} F_{mn}) = \frac{4\pi}{c} j_l g^{ll} \sqrt{-g}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial F_{mn}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^n} + \frac{\partial F_{nl}}{\partial x^m} = 0. \quad (2)$$

Подставим в уравнение (1) значения компонент метрического тензора

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^2} (h^{22} F_{20} + h^{23} F_{03}) + \frac{\partial}{\partial x^3} (h^{23} F_{02} + h^{22} F_{03}) = 4\pi \rho; \quad (3)$$

$$\frac{\partial F_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^2} (h^{22} F_{21} + h^{23} F_{13}) + \frac{\partial}{\partial x^3} (h^{23} F_{12} + h^{22} F_{13}) = \frac{4\pi}{c} j_1; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^0} (h^{22} F_{02} + h^{23} F_{30}) + \frac{\partial}{\partial x^1} (h^{23} F_{12} + h^{22} F_{31}) = \\ = \frac{4\pi}{c} [j_2 (1 - h^{22}) + j_3 h^{23}]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{30}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^0} (h^{23} F_{20} + h^{22} F_{30}) + \frac{\partial}{\partial x^1} (h^{23} F_{21} + h^{22} F_{31}) = \\ = \frac{4\pi}{c} [j_2 h^{23} + j_3 (1 - h^{22})]. \end{aligned} \quad (6)$$

Для решения системы (3)–(6) выразим значения компонент электромагнитного тензора через потенциалы поля с наложением условий Лоренца  $\frac{\partial A_i}{\partial x^i} = 0$ .

Решение системы уравнений находим методом последовательных приближений, считая амплитуду гравитационной волны малым параметром. Потенциалы поля ищем в виде  $A_i = A_i^{(0)} + A_i^{(1)}$ , где  $A_i^{(0)}$  — нулевое,  $A_i^{(1)}$  — первое приближение.

Рассмотрим решение уравнений для заряда, движущегося по окружности радиуса  $R_0$  в плоскости  $YZ$  с постоянной по величине скоростью  $v_0$ . Решением уравнений (3), (5), (6) в нулевом приближении являются потенциалы Лиенара—Вихерта [3]:

$$\varphi^{(0)} = \frac{e}{R - Rv/c}, \quad A^{(0)} = \frac{ev}{c(R - Rv/c)}, \quad (7)$$

где  $R$  — расстояние от заряда до точки наблюдения. Общим решением (4) являются сферические волны.

Решение первого приближения находится подстановкой решения нулевого приближения в уравнения (3)–(6).

После ряда преобразований находим:

$$\Delta\varphi^{(1)} = (1/c^2) (\partial^2 \varphi^{(1)} / \partial t^2) = [eh^{23} (Rw')/c^3 (R - Rv/c)^4] [(v_y/c) Ry + y^2 - (v_z/c) Ry - 2yz - (v_y/c) Rz - z^2 - (v_z/c) Rz]; \quad (8)$$

$$\Delta A_y^{(1)} = (1/c^2) (\partial^2 A_y^{(1)} / \partial t^2) = [eh^{23} (Rw')/c^3 (R - Rv/c)^4] [Ry + (v_y/c) R^2 - Rz - (v_z/c) R^2]; \quad (9)$$

$$\Delta A_z^{(I)} - (1/c^2) (\partial^2 A_z^{(I)}/\partial t^2) = [eh^{23} (Rw')/c^3 (R - Rv/c)^4] [(-v_y/c) R^2 - Ry - Rz - (v_z/c) R^2], \quad (10)$$

Все величины в правых частях берутся при

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}, \quad w = \frac{dw}{dt'}, \quad w' = \frac{dw}{dt'}.$$

Из уравнений (8) — (10) находим  $\frac{\partial^2}{\partial x'^2} E^{(I)} = \frac{\partial}{\partial x'^2} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial A^{(I)}}{\partial t} - \text{grad } \varphi^{(I)} \right)$  и  $\frac{\partial^2}{\partial x'^2} H^{(I)} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \text{rot } A^{(I)}$ , откуда  $E^{(I)}$  и  $H^{(I)}$  определяются как решения неоднородного волнового уравнения [4]. Релятивистский заряд излучает в узкий интервал углов вокруг направления скорости ( $\beta \sim \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ), поэтому рассмотрим излучение вдоль какой-нибудь касательной, например,  $MN$  (см. рис. 1). После ряда преобразований получаем

$$E_z^{(I)} = -\frac{eh_{(0)}^{23}}{4\pi c^5} \int_0^{ct} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{w_z(nw') \sin(\nu\lambda) r \sin\theta dr d\varphi d\theta}{(1 - nv/c)^5 |R + \alpha r|},$$

$$H_x^{(I)} = \frac{eh_{(0)}^{23}}{4\pi c^5} \int_0^{ct} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{w_z(nw') \sin(\nu\lambda) r \sin\theta dr d\varphi d\theta}{(1 - nv/c)^5 |R + \alpha r|},$$

$$\lambda = t - \frac{x + r \sin\theta \cos\varphi}{c} - \frac{r}{c},$$

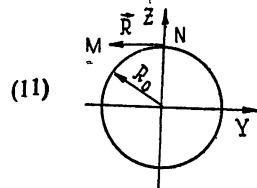


Рис. 1.

$$\alpha = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k, \quad \alpha_1 = \sin\theta \cos\varphi, \quad \alpha_2 = \sin\theta \sin\varphi, \quad \alpha_3 = \cos\theta.$$

Величины в подынтегральных выражениях берутся при  $t'' = t - |R + \alpha r|/c - r/c$ .

Оценим значение  $E_z^{(I)}$  и  $H_x^{(I)}$  снизу. При круговом движении  $w_z = -v_0 \omega \sin(\omega t')$ . Можно показать, что  $\sin(\omega t'') \approx \sin(\omega t') \cos[(\omega r/c)(1 + \sin\theta \sin\varphi)]$  (с учетом того, что  $x, z \ll y$ ) и, кроме того, при  $\cos[(\omega r/c)(1 + \sin\theta \sin\varphi)] > 0$  (это имеет место, если  $\omega r/c < \omega R/c \leq \pi/2$ ) подынтегральное выражение не меняет знак. Поэтому при оценке интегралов снизу ограничимся малой окрестностью вблизи  $\theta = \pi/2$  и  $\varphi = 3\pi/2$ , так как в этой области подынтегральное выражение имеет резкий максимум. Действительно, подкоренное выражение в знаменателе имеет величину  $\sim \sqrt{(y-r)^2 + yr\delta^2}$ , где  $\delta$  — такая малая окрестность вблизи  $\theta = \pi/2$  и  $\varphi = 3\pi/2$ , в которой подынтегральное выражение можно считать не зависящим от  $\theta$  и  $\varphi$  (например,  $(\pi/30)(\pi/30)$ ) и  $\sin(\omega t'') \approx \sin(\omega t')$ . Кроме того, в этой области  $v_y, w_z, w_v$  являются функциями от  $t'$  и не зависят от  $r$ , поэтому их можно вынести за знак интеграла. После сделанных замечаний можно вычислить интегралы (11):

$$E_z^{(I)} \approx -\frac{0,01 eh_{(0)}^{23} w_z(nw') R \sin[\nu(t - x/c)]}{c^5 (1 - nv/c)^5}, \quad (12)$$

$$H_x^{(I)} \approx \frac{0,01 eh_{(0)}^{23} w_z(nw') R \sin[\nu(t - x/c)]}{c^5 (1 - nv/c)^5}.$$

Так как система решалась методом последовательных приближений, на  $E_z^{(I)}$ ,  $H_x^{(I)}$  накладываются ограничения:  $E_z^{(I)} \ll E_z^{(0)}$ ,  $H_x^{(I)} \ll H_x^{(0)}$ . Поток энергии, излучаемый зарядами вдоль касательной, равен

$$S = S^{(0)} + S^{(I)} = \frac{c}{4\pi} [(E^{(0)} + E^{(I)})(H^{(0)} + H^{(I)})] \approx \quad (13)$$

$$\approx \frac{ne^2 w^2}{4\pi c^3 (1 - nv/c)^4 R^2} \left\{ 1 - \frac{0,1 h_{(0)}^{23} R^2 (nw') \sin[\nu(t - x/c)]}{c^3 (1 - nv/c)^3} \right\} \quad (S^{(0)} \gg S^{(I)}).$$

Изменение потока излучения вдоль касательной

$$\dot{S} = \dot{S}^{(I)} \approx -n \frac{0.01 R^2 (n\omega')}{c^3 (1 - nv/c)^3} \dot{h}^{23} S^{(0)} \approx -n \frac{0.01 R^2 (n\omega')}{c^3 (1 - nv/c)^3} h_{(0)}^{23} v \cos [\nu (t - x/c)] S^{(0)}. \quad (14)$$

2. Согласно оценкам, полученным Мирановским [3], величина потока гравитационного излучения двойных звезд составляет  $\sim 10^{-9}$  эрг·см $^{-2}$ ·сек $^{-1}$ , а период обращения составляет  $\sim 4$  часа. Из предположения, что энергия передается плоскими монохроматическими волнами [3], следует

$$P^1 = (c^2/16\pi K) [\dot{h}_{23}^2 + (1/4)(\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33})^2], \quad K = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-2}. \quad (15)$$

Считая далее, что  $h_{(0)}^{23}$  и  $h_{(0)}^{22}$  имеют одинаковый порядок малости, находим

$$h_{(0)}^{23} \approx h_{(0)23} \approx 10^{-18}.$$

При детектировании гравитационных волн при помощи циклических ускорителей показания прибора, установленного в точке  $M$  (см. рис 1), будут меняться на величину  $S^{(I)} \approx (0.01 h_{(0)}^{23} R^2 \omega^2/c^2) (\mathcal{E}/\mathcal{E}_{(0)})^6 S^{(0)}$  за период  $\sim 2$  часа, так как за это время  $\cos[\nu \times (t - x/c)]$  изменится от 0 до 1. В частности,  $S^{(I)} \approx 0.01 S^{(0)}$  при энергиях электронов 500 МэВ.

Как отмечено в работе [6], в интервале  $1\text{\AA}$  на длине  $5000\text{\AA}$  излучается  $\sim 310$  эрг·сек $^{-1}$ . Изменение излучения составляет  $\sim 3$  эрг·сек $^{-1}$ . Таким образом, представляется возможным экспериментальное обнаружение гравитационных волн.

В заключение выражаю благодарность Л. Е. Паргаманику за постоянное внимание к работе и П. И. Фомину за полезное обсуждение результатов работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Б. Брагинский, УФН, 86, 439 (1965).
2. В. И. Пустовойт, М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ, 42, 163 (1962).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1962.
4. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 2, Гостехиздат, М., 1953.
5. В. Н. Мирановский, Астрон. ж., 42, 977 (1965).
6. Ускорители элементарных частиц, Приложение 4 к ж. Атомная энергия, 1957.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
11 августа 1969 г.

УДК 621.378.32

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ЧАСТОТЫ В ТВЕРДОТЕЛЬНОМ ЛАЗЕРЕ С ОДНОРОДНО УШИРЕНОЙ ЛИНИЕЙ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ

Я. З. Вирник, Е. Г. Ларионцев

В твердотельном ОКГ малые возмущения относительно положения равновесия осциллируют с частотой  $\omega = \sqrt{(\omega_c/Q)\Gamma\eta}$  ( $\omega_c/Q$  — ширина полосы резонатора,  $\eta$  — превышение уровня накачки над пороговым,  $\Gamma$  — скорость релаксации инверсной населенности). На этой частоте в спектре естественных флуктуаций амплитуды существует резкий максимум [1, 2].

При генерации лазера на частоте, смещенной относительно центра линии люминесценции, частотные флуктуации зависят от амплитудных, и поэтому аналогичный пик будет существовать и для спектральной плотности флуктуаций частоты.

В настоящей работе частотные флуктуации в твердотельном ОКГ с однородно уширеною линией люминесценции исследуются методом, аналогичным использованному в работах [1, 2]. В исходные уравнения вводятся источники теплового ( $F$ ) и поляризационного шумов ( $F_N$  и  $F_{12}$  — соответственно в уравнениях для разности населенностей  $N$  и недиагонального элемента матрицы плотности  $\rho_{12}$ ).

Как показано в [1, 2], источники шума  $F_{ij}$  можно считать  $\delta$ -коррелированными  $\langle F_{ij}(t)F_{kl}(t') \rangle = K_{ijkl}\delta(t-t')$ . Приведем приближенные выражения для коэффициентов интенсивности [2]:

$$K_{1221} = \frac{2\gamma N_0}{n^2 V}, \quad K_{FF^*} = \frac{8\pi\hbar\omega_c^2}{QV} \left( \bar{n} + \frac{1}{2} \right).$$

Здесь  $N_0$  — стационарное значение плотности инверсной заселенности,  $n$  — плотность числа активных атомов,  $\gamma$  — ширина линии люминесценции,  $V$  — объем резонатора,  $\bar{n} = [\exp(\hbar\omega_c/kT) - 1]^{-1}$ ,  $\bar{n}$  — среднее число фотонов в моде в условиях равновесия при температуре  $T$ . Коэффициент  $K_{1221}$  записан с точностью до членов порядка  $\Gamma/\gamma$ ; коэффициентами  $K_{21N}$  и  $K_{N12}$  будем пренебрегать, поскольку они дают вклад порядка  $\Gamma/\gamma \ll 1$ .

Для отклонений от стационарных значений амплитуды и фазы поля ( $\delta\mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0$ ,  $\delta\varphi$ ) и разности населенностей ( $\delta N$ ) имеем линеаризованную систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\delta N}{dt} &= -\Gamma(1+\eta)\delta N - \frac{\mathcal{E}_0}{4\pi\hbar Q}\delta\mathcal{E} + W_N, \\ \frac{d\delta\mathcal{E}}{dt} &= 4\pi\hbar\omega_c\Gamma\eta\delta N/\mathcal{E}_0 + W_\mathcal{E}, \\ \frac{d\delta\varphi}{dt} &= \frac{\Omega}{2\gamma} \frac{\omega_c}{Q} \frac{\delta N}{N_0} + W_\varphi.\end{aligned}$$

Здесь  $\Omega = \omega_c - \omega_0$  — расстройка частоты генерации относительно центра линии люминесценции,

$$\begin{aligned}W_N &= (\beta F_{12} + \text{к. с.}) + F_N, \quad W_\mathcal{E} = (\delta F_{12} + F/2) + \text{к. с.,} \\ W_\varphi &= -i(\delta F_{12} + F/2)/\mathcal{E}_0 + \text{к. с.,} \quad \beta = -nd_{21}\mathcal{E}_0/2\hbar(\Omega + i\gamma), \\ \delta &= 2\pi\omega_c nd_{21}/(\Omega + i\gamma),\end{aligned}$$

$d_{21}$  — матричный элемент оператора дипольного момента.

Рассчитывая спектральную плотность флюктуаций частоты, получим выражение

$$g_v(\omega) = \frac{8\pi\hbar\omega_c^2}{\mathcal{E}_0^2 Q V} \left\{ \bar{n} + 1 + \frac{\Gamma^2\eta}{\alpha} \frac{\Omega^2}{\gamma^2} \left[ (\eta + 1)\omega^2 + \frac{\omega_c^2}{Q^2} \eta(\bar{n} + 1) \right] \right\}, \quad (1)$$

где

$$\alpha = (\tilde{\omega}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2(1 + \eta)^2.$$

Значение  $g_v$  при  $\omega = 0$  дает известное выражение для ширины линии [3]:

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} g_v(0) = \frac{4\pi\hbar\omega_c^2}{\mathcal{E}_0^2 Q V} (\bar{n}+1) \left( 1 + \frac{\Omega^2}{\gamma^2} \right). \quad (2)$$

Из выражения (1) следует существование резонансного пика в зависимости спектральной плотности частотных флюктуаций от частоты. Укажем параметры этого пика

Максимум расположен на частоте  $\omega$ , высота пика больше, чем  $g_v(0)$  в  $[1 + \omega_c\eta/Q\Gamma(1 + \eta)^2(1 + \gamma^2/\Omega^2)]$  раз, полуширина равна  $\Gamma(1 + \eta)$ . Наконец, частоты, на которых  $g_v$  возрастает в  $m$  раз по сравнению с  $g_v(0)$ , будут равны

$$\omega_m = \tilde{\omega} \sqrt{1 \pm [m + (\gamma^2/\Omega^2)(m-1)]^{-1/2}}. \quad (3)$$

Допустимые значения  $m$  определяются из соотношения

$$m < \frac{\omega_c}{Q\Gamma} \frac{\eta}{(1+\eta)^2} \frac{1}{1+\gamma^2/\Omega^2} + 1. \quad (4)$$

Сравнивая параметры пика для спектральной плотности флюктуаций частоты с соответствующими параметрами для спектральной плотности амплитудных флюктуаций, можно видеть, что их полуширины одинаковы, а отношение высоты пика к значению спектральной плотности на нулевой частоте ( $g_v^{\max}/g_v(0)$ ) для флюктуаций частоты в  $(1 + \gamma^2/\Omega^2)(\omega_c\eta/Q\Gamma)$  раз меньше.

Представляет интерес не только полуширина пика, но также и ширина всей

области, в которой спектральная плотность флуктуаций частоты существенно возрастает по сравнению с  $g_{\nu}(\omega)$  (на величину  $\geq g_{\nu}(0)$ ). Как видно из (3), ширина этой области в герцах равна

$$\Delta = \frac{\tilde{\omega}}{2\pi} \left[ \sqrt{1 + \left( 2 + \frac{\gamma^2}{\Omega^2} \right)^{-1/2}} - \sqrt{1 - \left( 2 + \frac{\gamma^2}{\Omega^2} \right)^{-1/2}} \right]. \quad (5)$$

В табл. 1 приведены значения  $2\pi\Delta/\tilde{\omega}$  и  $g_{\nu}^{\max}/g_{\nu}(0)$  в зависимости от отношения  $\gamma^2/\Omega^2$  при

$$\frac{\omega_c}{Q} \sim 10^8 \text{ сек}^{-1}, \quad \eta \sim 1, \quad \Gamma \sim 10^3 \text{ сек}^{-1} \left( \frac{\tilde{\omega}}{2\pi} \approx 0,5 \cdot 10^8 \text{ Гц} \right).$$

Таблица 1

$\gamma^2/\Omega^2$	1	10	$10^2$	$10^4$
$g_{\nu}^{\max}/g_{\nu}(0)$	$10^4$	$2 \cdot 10^3$	$2,5 \cdot 10^2$	3,5
$2\pi(\Delta/\tilde{\omega})$	0,6	0,3	0,1	0,01

Пик в спектре частотных флюктуаций полностью отсутствует при генерации лазера в центре линии люминесценции. Однако уже при малых расстройках ( $\Omega \ll \gamma$ ), когда ширина линии в соответствии с (2) изменяется несущественно, в спектре  $g_{\nu}(\omega)$  могут возникнуть значительные изменения. Таким образом, для непосредственного определения естественной ширины линии твердотельного ОКГ с помощью измерения спектральной плотности флюктуаций частоты следует

проводить измерения вне области частот  $\tilde{\omega} - \pi\Delta < \omega < \tilde{\omega} + \pi\Delta$  или добиваться, чтобы генерация происходила при достаточно малой расстройке частоты относительно центра линии люминесценции,

$$\frac{\Omega^2}{\gamma^2} \ll \frac{\Gamma Q}{\omega_c} \frac{(1 + \eta)^2}{\eta}, \quad (6)$$

когда спектральная плотность флюктуаций частоты примерно постоянна в области  $\omega \ll \gamma$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D. E. M c C u m b e r g, Phys. Rev., 141, 306 (1966).
2. M. L a x, Quantum Electr., QE-3, 37 (1967).
3. M. L a x, Physics of Quantum Electronics, N. Y., 1966, p. 735.

Научно-исследовательский институт  
ядерной физики при МГУ

Поступила в редакцию  
15 декабря 1969 г.

УДК 538.56

#### ФЛУКТУАЦИИ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ РОТОРА В МАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ

B. I. Osuka, A. A. Хорев

Идея использовать вращающийся в магнитном подвесе ротор в качестве источника сигналов с узкой естественной шириной линии была высказана в [1]. В той же работе была вычислена спектральная плотность девиации частоты вращения ротора, вызванной газовым трением в вакуумной камере, в которой находится ротор.

Приведем оценку величины относительных флюктуаций частоты вращения ротора  $\Delta f/\bar{f}$  (или  $\Delta\omega/\omega$ ) в магнитном подвесе, вызванных газовым трением в высоком вакууме. Положим момент инерции ротора равным  $J$ , коэффициент газового трения  $h$ , круговую частоту вращения ротора  $\omega(t)$ , флюктуационный момент сил, действующих на ротор со стороны остатков газа в вакуумной камере,  $M_{\text{фл}}(t)$ . Тогда уравнение движения ротора запишется в виде

$$J \ddot{\omega} + h \omega = M_{\text{фл}}(t), \quad (1)$$

$\omega(0) = \omega_0$ .

Решение уравнения (1) хорошо известно ([2], стр. 144). Учитывая, что для рассматриваемой задачи  $M_{\text{фл}}(t_1) M_{\text{фл}}(t_2) = 4 \times T \delta(t_1 - t_2)$ , получим

$$\overline{\Delta \omega^2(t)} = \overline{\omega^2(t)} - (\overline{\omega(t)})^2 = \frac{4 \times T}{J} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4t}{\tau^*}\right) \right].$$

Здесь  $\propto = 1,38 \cdot 10^{-16}$  эрг·град $^{-1}$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $\delta(t_1 - t_2)$  — дельта-функция Дирака,  $\tau^*$  — постоянная времени затухания ротора. Время измерения  $t$  мало по сравнению с  $\tau^*$ . Окончательно имеем при  $t \ll \tau^*$

$$\overline{\Delta \omega^2(t)} = \frac{16 \times T}{J} \frac{t}{\tau^*} (\text{рад} \cdot \text{сек}^{-1})^2. \quad (2)$$

Для нашей установки  $J = 30 \text{ г} \cdot \text{см}^2$ ,  $\tau^* = 5 \cdot 10^6 \text{ сек}$  в вакууме  $p = 10^{-6} \text{ тор}$ ; при  $t = 1 \text{ сек}$ ,  $T = 300^\circ\text{K}$  и  $\omega = 2\pi \cdot 500 \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}$  получаем, согласно (2),

$$\sqrt{\overline{\Delta \omega^2}} / \omega = 2 \cdot 10^{-14}.$$

Регулярный уход частоты вращения такого ротора, вызванный остаточным давлением газа в вакуумной камере, может быть сделан очень малым. В [3] описан магнитный подвес, имеющий постоянную затухания  $\tau^* \sim 10^9 \text{ сек}$  в вакууме  $10^{-8} \text{ тор}$  и соответствующий уход частоты вращения ротора менее  $10^{-2} \text{ гц}$  за сутки при средней частоте, равной  $500 \text{ гц}$ . В космических условиях при вакууме  $\leq 10^{-13} \text{ тор}$  основными факторами, вызывающими торможение ротора, будут световое трение [4] и магнитная вязкость материала ротора [5]. Заметим, что для ротора, рассмотренного в предыдущем примере, световой поток мощностью 1 вт будет создавать такое же трение, как и газ при давлении  $10^{-12} \text{ тор}$ .

Целью данной работы было измерение девиаций частоты вращения ротора. Проведенные измерения дали предварительную информацию о стабильности частоты предлагаемого источника сигналов.

Были проведены измерения относительной стабильности частоты вращения двух роторов в идентичных магнитных подвесах. Блок-схема установки дана на рис. 1. Изготовленные магнитные подвесы обеспечили подвешивание роторов из стали АРМКО весом до 100 г. В вакууме  $10^{-6} \text{ тор}$  были получены постоянные затухания роторов  $\tau^* \sim 3 \text{ месяцев}$ . На поверхность каждого ротора были нанесены 10 зеркальных полос. Точность изготовления ротора  $\sim 0,01 \text{ мм}$ , точность нанесения зеркальных полос  $\sim 1\%$ . С помощью простого фотооптического устройства, состоящего из лампы накаливания мощностью 7,5 вт и фотодиода ФД-3, на нагрузке фотодиода получалась последовательность импульсов с частотой 5 кгц (при частоте вращения ротора  $500 \text{ об} \cdot \text{сек}^{-1}$ ) и амплитудой 1 в.

Резонансным усилителем 2 с полосой  $\sim 50 \text{ гц}$  сигнал усиливался до 20 в и поступал на умножитель частоты 3 с коэффициентом умножения 5. Полученный сигнал частоты 25 кгц ограничивался по амплитуде и подавался на балансный смеситель 4. Роторы в магнитных подвесах раскручивались до разной скорости с тем, чтобы частота биений на выходе смесителя 4 составляла  $1 \div 2 \text{ гц}$ . Поскольку постоянные затухания  $\tau^*$  для двух магнитных подвесов нельзя сделать абсолютно одинаковыми, разностная частота имела небольшой постоянный дрейф во времени. При измерениях кварцевым хронометром 5 регистрировался период биений один раз каждые 10 сек. Каждая серия измерений проводилась непрерывно в течение 1—2 часов. При обработке результатов измерений находили разностную частоту (величина, обратная периоду биений) и усредняли ее для каждого из 30 последовательных замеров. Таким образом, серия измерений сводилась к 10—15 точкам на графике зависимости частоты биений от времени. Затем рассчитывали линию регрессии для этой зависимости и находили отклонение точек от линии регрессии (этим исключался дрейф разностной частоты). Величины этих отклонений пропорциональны флуктуациям частоты вращения ротора  $\Delta f$ . Относительная погрешность измерений периода биений имеет величину  $\sim 5 \cdot 10^{-4}$  и определяется, в основном, флуктуациями коэффициента усиления смесителя 4 (рис. 1). На рис. 2 представлены типичные результаты измерений флуктуаций разностной частоты во времени.

Относительные флуктуации частоты вращения каждого ротора, получающиеся из этих данных, не более  $\sim 6 \cdot 10^{-8}$ . Для сравнения при тех же условиях проведены измерения относительной стабильности частоты двух генераторов ГСС-6 и двух идентичных кварцевых автогенераторов частоты 36 кгц.

Измерения дают значение кратковременной стабильности частоты  $\Delta\omega/\omega \sim 10^{-5}$  для ГСС-6 на частоте 100 кгц и  $\Delta\omega/\omega \sim 5 \cdot 10^{-8}$  для нетермостабилизованных кварцевых автогенераторов частоты 36 кгц.

Таким образом, измерения относительной стабильности частоты вращения двух роторов показывают, что предложенный источник сигналов обладает при одинаковых условиях меньшими флюктуациями частоты, чем ГСС-6, и не уступает кварцевому

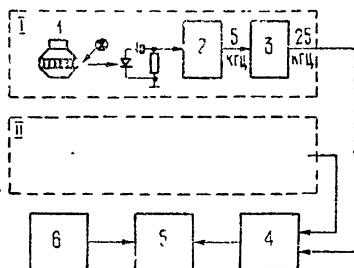


Рис. 1. Блок-схема установки для измерения относительных флюктуаций частоты вращения двух роторов:

1—стальной ротор; 2—резонансный усилитель 5 кГц; 3—умножитель частоты (х5); 4—балансный смеситель; 5—кварцевый хронометр; 6—запуск кварцевого хронометра.

автогенератору. Малые собственные шумы усилителя и умножителя, как известно [6], ухудшают только отношение сигнал/шум и не приводят к расширению спектральной линии колебания. Следует отметить, что в соответствии с общепринятой терминологией проведенные измерения флюктуаций частоты источника сигналов характеризуют его техническую ширину линии.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность В. Б. Брагинскому за постоянный интерес к работе и обсуждение результатов

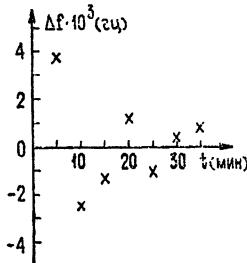


Рис. 2. Флюктуации разностной частоты двух роторов;  $f = 25$  кГц.

- ЛИТЕРАТУРА
1. В. Б. Брагинский, Радиотехника и электроника, 10, № 8, 1535 (1965).
  2. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
  3. J. W. Beams, RSI., 34, № 10 (1953).
  4. В. Б. Брагинский, А. Е. Манукин, ЖЭТФ, 52, 986 (1967).
  5. В. Б. Брагинский, Н. Б. Брандт, В. И. Осица, Вестник МГУ, серия физическая, № 1, 91 (1970).
  6. В. Н. Парыгин, Вестник МГУ, серия физическая, № 4, 42 (1963).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию  
3 декабря 1969 г.