

СОДЕРЖАНИЕ

Троицкий В. С., Тихонова Т. В. Тепловое излучение Луны и физические свойства ее верхнего покрова (Обзор)	1273
Гершман Б. Н., Самсонов А. В. К теории электростатических полей в условиях ионосферы	1312
Андреев Н. Е., Кирий А. Ю., Силин В. П. К теории параметрического резонанса в плазме, находящейся в сильном высокочастотном электрическом поле	1321
Назарян А. X. О диэлектрической проницаемости плазмы, находящейся в сильном магнитном поле	1325
Гиоргадзе Н. П., Каладзе Т. Д., Ломинадзе Д. Г. К вопросу о прохождении заряженной частицы через слабонелинейную плазму	1329
Захаров М. И., Троицкий Ю. В., Голдина Н. Д. Исследование оптического резонатора с тонкослойной металлической дифракционной решеткой	1335
Степанов А. В. Об интенсивности радиоизлучения из фронта бесстолкновительной ударной волны	1342
Гавриленко В. Г., Лупанов Г. А. К вопросу о распространении электромагнитных волн в неоднородно движущихся средах	1350
Сушик М. М., Фрейдман Г. И. Влияние неоднородности распределения амплитуды и фазы излучения накачки на пространственный захват параметрически усиливаемых волн	1354
Богатырев Ю. К. К нелинейной теории распределенного усилителя на туннельных диодах	1361
Маркелов В. А. О чувствительности приемной системы с параметроном	1367
Маркелов В. А. Флуктуации колебаний двухконтурного параметрического генератора при немонахроматической накачке	1371
Борисов В. В. Предельный переход к скорости света в задаче о падении плоской волны на движущийся фронт ионизации	1376
Изместьев А. А. Однопараметрические волновые пучки в свободном пространстве	1380
Дымский В. Н., Чони Ю. И. Об одном приближенном решении задач синтеза антенн, допускающем экспериментальное моделирование	1389
Эпштейн Э. М. О разогреве электронов проводимости инфракрасным излучением	1398

Краткие сообщения и письма в редакцию

Крупнов А. Ф., Герштейн Л. И., Шустов В. Г., Белов С. П. Радиоспектроскоп миллиметрового и субмиллиметрового диапазона с акустической индикацией	1403
Беляев Ю. Н., Киселев А. М., Новиков М. А. Перестройка и стабилизация частоты ОКГ с помощью анизотропных пластинок	1405
Зачепицкая Л. П., Клибанова И. М., Краснощекоев Ю. В., Малахов А. Н., Горопов Л. А. О технической ширине спектральной линии межмодовых биений He-Ne лазера	1408
Горбачев А. А., Данилов В. И. Об оценке интенсивности шума на фоне частотно-модулированной помехи	1410
Мергелян О. С. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрической периодической структуре	1412
Иванов И. Т. Рассеянное поле от шара малых размеров в ближней зоне источника излучения	1414
Гурзо В. В., Стальмахов В. С., Щеголев В. П. К оценке нелинейных свойств электронных аттенуаторов типа «М» на быстрых циклотронных волнах пучка	1417

Хроника

Конференция молодых ученых и специалистов городов Поволжья по вопросам статистической радиотехники	1422
--	------

УДК 523 164 34

**ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЛУНЫ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ЕЕ ВЕРХНЕГО ПОКРОВА**

(Обзор)

В. С. Троицкий, Т. В. Тихонова

СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение	1274
II. Теория теплового режима поверхности	
1. Общие соотношения	
2. Тепловой режим во время лунаций. Однородная модель поверхностного слоя	1275
3. Тепловой режим поверхности во время затмения	1279
4. Влияние шероховатости поверхности на ее тепловой режим	1281
III. Теория собственного теплового радиоизлучения Луны	1282
1. Радиоизлучение Луны при периодическом режиме нагрева ее поверхности	
2. Спектр постоянной составляющей интегрального радиоизлучения Луны	1285
3. Радиоизлучение Луны во время затмения	1286
IV. Излучательная способность поверхности Луны в радиодиапазоне	1288
1. Излучательная способность гладкой поверхности	
2. Излучательная способность шероховатой поверхности	
3. Излучательная способность неоднородного в глубину поверхностного слоя Луны	1289
4. Поляризация радиоизлучения шероховатой поверхности	1291
V. Результаты измерений собственного излучения Луны	1292
1. Результаты инфракрасных измерений	
2. Метод точных измерений радиоизлучения Луны (метод «искусственной Луны»)	1295
3. Экспериментальные данные о радиоизлучении Луны во время лунаций и во время затмений	
VI. Результаты измерения спектра коэффициента отражения	1297
VII. Лабораторные исследования земных пород	1298
VIII. Интерпретация данных собственного и отраженного излучения. Строение и свойства вещества верхнего покрова Луны	1301
1. Квазигомогенность свойств вещества в глубину	
2. Тепловой параметр γ	
3. Параметр $\delta = I_3/IT$	1302
4. Плотность вещества поверхностного слоя Луны	
5. Теплопроводность k и глубина проникновения тепловой волны l_T	1304
6. Электромагнитные свойства вещества: глубина проникновения электрической волны l_e , диэлектрическая постоянная ϵ , удельный тангенс угла потерь $\text{tg}(\Delta/\rho)$	
7. Химический состав лунного вещества	1305
8. Микроструктура вещества верхнего покрова Луны	1306
9. Однородность свойств по поверхности	
10. Общая модель строения верхнего слоя Луны	1308
IX. Заключение	

І. ВВЕДЕНИЕ

Настоящий обзор является критическим обобщением отечественных и зарубежных исследований Луны по ее собственному излучению в диапазоне инфракрасных и радиоволн с привлечением радиолокационных данных и лабораторных исследований электрических и тепловых свойств земных аналогов вещества верхнего покрова Луны*.

До 1927 г. единственным источником информации о физических условиях на Луне были оптические наблюдения, которые давали сведения о состоянии вещества только на самой поверхности. В 1927—30 гг. Петтитом и Никольсоном [1] были произведены первые измерения собственного излучения Луны на инфракрасных волнах во время лунаций и затмения. Эти измерения позволили определить температуру поверхности планеты, оценить теплопроводность лунного вещества и сделать первые выводы о структуре вещества Луны.

В 1946 г. были выполнены измерения собственного радиоизлучения Луны на $\lambda = 1,25$ см [2]. С тех пор получен огромный экспериментальный материал по собственному радиоизлучению Луны в широком диапазоне длин волн. Эти исследования совместно с данными радиолокационных и инфракрасных измерений, полученными в основном за рубежом, позволяют создать довольно цельную внутренне непротиворечивую картину физических условий на Луне. Обобщение результатов, полученных до 1965 г., содержится в [3-5] и до 1967 г.—в [6]. Цель настоящего обзора—подвести своего рода итог исследованиям Луны по собственному излучению и отражению радиоволн от ее поверхности и представить современную модель строения верхнего покрова Луны на основе имеющихся экспериментальных данных и развитых методов их интерпретации.

II. ТЕОРИЯ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ПОВЕРХНОСТИ

1. Общие соотношения

Основные особенности радиоизлучения Луны, являющегося тепловым, определяются условиями нагрева ее поверхности солнечным излучением. Тепловой режим лунной поверхности и распределение температуры в глубину описывается уравнением теплопроводности с соответствующими граничными и начальными условиями:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[k(y, T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \rho(y) c(y, T) \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1)$$

В случае периодического теплового режима (лунации) граничные условия имеют вид

$$\left(k_s \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \sigma(1 - R_n) [T(0, t)]^4 + q - \begin{cases} S_0(1 - R_c) \cos \psi \cos(\Omega t - \varphi) & \left(|\Omega t - \varphi| \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ 0 & \left(\frac{\pi}{2} < (\Omega t - \varphi) < \frac{3\pi}{2} \right) \end{cases}, \quad (2)$$

* Авторам представляется естественным, что обзор выражает точку зрения, выработанную сотрудниками Горьковского научно-исследовательского радиофизического института (НИРФИ), где были выполнены многие теоретические и экспериментальные исследования.

при непериодическом режиме (затмения)

$$\left(k_s \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \sigma(1 - R_n) [T(0, t)]^4 + q - S_0(1 - R_c) \cos \psi \cos \varphi f(t). \quad (3)$$

В выражениях (1)—(3) $\rho(y)$ — плотность лунного вещества, $c(y, T)$ — теплоемкость, q — плотность потока тепла из недр Луны, σ — постоянная Стефана—Больцмана, R_c и R_n — соответственно световое и инфракрасное альbedo поверхности, S_0 — солнечная постоянная, $f(t)$ — функция изменения потока во время затмения, φ и ψ — соответственно долгота и широта элемента поверхности, тепловой режим которого рассматривается, Ω — частота лунаций, $k(y, T) = k_0 + k_r$ — полная теплопроводность, равная сумме молекулярной k_0 и радиационной. k_r теплопроводностей, $k_s = k_0 + k_{rs}$, k_{rs} — радиационная теплопроводность поверхности.

Как показано в [7], при наличии радиационной теплопроводности в твердом пористом теле, прозрачном для инфракрасных волн, уравнения теплопередачи и граничное условие содержат разные коэффициенты радиационной теплопроводности. Оказывается, что k_{rs} в граничном условии в $2n^2/(1 - R_i) f(n)$ раз меньше, чем k_r в дифференциальном уравнении, причем n , R_i — соответственно коэффициенты преломления и отражения инфракрасных волн в теле, $f(n) = n^2[1 - (1 - 1/n^2)^{3/2}]$. Начальные условия в случае расчета режима лунаций произвольны в силу того, что ищется установившееся вынужденное периодическое решение. В случае затмения начальные условия определяются распределением температуры перед началом затмения. Так как затмения бывают только в полнолуние, то это распределение температур получается как решение уравнения теплопроводности для режима лунаций в момент $t = 0$.

Задачи по исследованию теплового режима во время лунаций и затмений можно разделить на два типа.

1) Решение уравнения (1) с граничными условиями (2) или (3), когда потоки солнечной энергии S_0 или $S_0 f(t)$ считаются заданными. Решение задач этого типа не может быть получено аналитически, они рассчитываются на ЭВМ.

2) Решение уравнения (1) при заданной температуре поверхности. Во время лунаций инсоляция носит периодический характер, поэтому наиболее удобной формой задания поверхностной температуры является функция, представленная в виде ряда Фурье. Кривая изменения температуры поверхности во время затмения достаточно хорошо может быть аппроксимирована четырьмя линейными отрезками. Решение задач такого типа позволяет получить аналитическое выражение для распределения температуры в глубину, знание которого необходимо при расчетах радиоизлучения Луны.

2. Тепловой режим во время лунаций. Однородная модель поверхностного слоя

Для расчета теплового режима поверхности необходимо принять какую-либо модель строения верхнего слоя. В качестве первого приближения была выбрана однородная модель, в которой свойства вещества не меняются в глубину и не зависят от температуры. Оказывается, что в этом случае температура поверхности зависит только от одного параметра $\gamma = (k \rho c)^{-1/2}$.

Задача первого типа для однородной модели строения верхнего слоя впервые рассматривалась Весселинком [8], а затем более детально

Ягером [9]. Для определения изменения температуры поверхности в центре лунного диска Ягер решал уравнение теплопроводности (1) при граничном условии (2) методом численного интегрирования.

В работах [10, 11] температурный режим лунной поверхности исследован более подробно с использованием последних данных о величине солнечной постоянной. На рис. 1 изображена зависимость поверхностной температуры в центре лунного диска от фазового угла (сплошные кривые), полученная путем решения на ЭВМ (1) и (2) при разных значениях параметра γ .

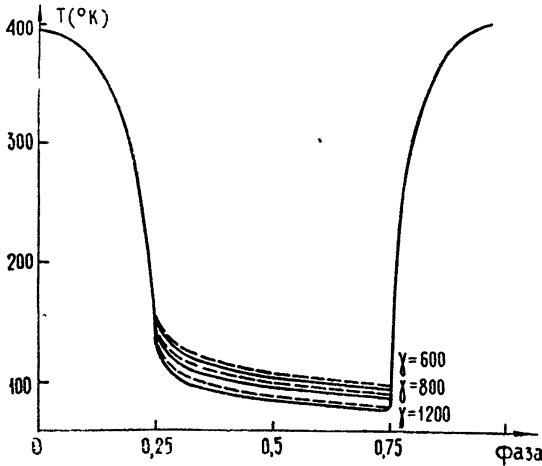


Рис. 1. Изменение температуры поверхности в центре лунного диска в зависимости от фазы для значений параметра $\gamma = 600; 800; 1200$.

Сплошные кривые — однородная модель без учета зависимости свойств вещества от температуры; пунктирные — с учетом этой зависимости.

Результаты расчета поверхностной температуры представляются в виде

$$T(\varphi, \psi, t) = T_0(\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n T_n(\psi) \cos(n\Omega t - n\varphi - \varphi_n), \quad (4)$$

где φ_n — сдвиг по фазе n -й гармоники изменения поверхностной температуры по отношению к фазе падающего потока. Как показано в [10], первые пять гармоник $T_n(\psi)$ хорошо аппроксимируются выражениями:

$$\begin{aligned} T_0(\psi) &= T_0(0) \cos^{0,25} \psi, & T_3(\psi) &= T_3(0) \cos^{0,44} \psi, \\ T_1(\psi) &= T_1(0) \cos^{0,33} \psi, & T_4(\psi) &= T_4(0) \cos^{0,3} \psi, \\ T_2(\psi) &= T_2(0) \cos^{0,27} \psi, \end{aligned} \quad (5)$$

а знак этих гармоник определяется показателем $\alpha_n = (n-1)(n-2)/2$.

Задача второго типа при той же однородной модели строения верхнего слоя аналитически решена в работе [72]. Решение уравнения теплопроводности (1) при граничном условии (4) приводит к следующему выражению для распределения температуры в глубину в любой точке лунной поверхности с координатами (φ, ψ) :

$$\begin{aligned} T(y, \varphi, \psi, t) &= T_0(\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n T_n(\psi) \exp\left(-y \sqrt{\frac{n\Omega\rho c}{2k}}\right) \times \\ &\times \cos\left(n\Omega t - n\varphi - \varphi_n - y \sqrt{\frac{n\Omega\rho c}{2k}}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Температура на любой глубине складывается из постоянной составляющей и переменной, образованной суммой гармоник с периодами,

кратными периоду лунаций ($\tau = 2\pi/\Omega = 29,5$ земных дня). Каждая из гармоник затухает в глубину, причем на глубине $l_{rn} = \sqrt{2k/n \Omega \rho c}$ амплитуда колебаний температуры уменьшается в e раз по сравнению со значением на поверхности. Эта величина получила название глубины проникновения температурной волны. Она характеризует толщину поверхностного слоя, прогреваемого Солнцем в течение лунного дня. На глубине, в три-четыре раза превышающей l_r , колебания температуры практически отсутствуют.

Во втором приближении рассматривалась однородная модель с теплопроводностью и теплоемкостью, зависящими от температуры. Как известно, теплопроводность пористых тел зависит от температуры за счет радиационного переноса тепла через поры. В «лунном» интервале температур лучистый перенос осуществляется излучением на инфракрасных волнах, длина которых соответствует планковскому максимуму $\lambda = 0,38/T \simeq 10 \div 30$ мк. Для пористого тела, у которого эффективный размер пор равен l_n , а само вещество непроницаемо для инфракрасных волн, величина радиационной теплопроводности k_r равна

$$k_{rn} = \frac{R_n}{2 - R_n} 4 \sigma l_n T^3. \quad (7)$$

Если инфракрасные волны проникают в вещество, то $k_r = (16/3) \sigma \epsilon_n \bar{l}_v T^3$, где \bar{l}_v — росселандова средняя глубина проникновения инфракрасного излучения в вещество, ϵ_n — диэлектрическая проницаемость вещества в инфракрасном диапазоне.

Расчеты показывают, что при зависимости $\bar{l}_v = a\lambda$ (которая следует из радиоизмерений и теории нерезонансного поглощения волн в веществе) величина $\bar{l}_v = 0,365 a/T$. Отсюда [13]

$$k_r = 2\epsilon_n a \sigma T^2. \quad (8)$$

Полная теплопроводность равна сумме молекулярной и радиационной теплопроводностей.

Впервые анализ теплового режима Луны с учетом радиационной теплопроводности был проведен Ягером [9], однако расчет не внес каких-либо существенных изменений в зависимость температуры от фазы.

В работе Инграо, Янга, Линского [14] приведены результаты вычислений температуры поверхности Луны во время лунаций и затмения для однородной и двухслойной моделей с учетом температурной зависимости теплопроводности (теплоемкость предполагалась постоянной). В [14] содержатся также расчеты для модели Манси [15], в которой зависимость теплоемкости и теплопроводности от температуры предполагалась линейной. Оказалось, что характер падения температуры во время захода Солнца удовлетворяет как модели Манси, так и модели с радиационной теплопроводностью вида $k_r = BT^3$. В первом случае соответствие с экспериментом получается при $\gamma = 400-450$, $T = 350^\circ$, а во втором — при $\gamma = 600$.

Далее авторы [14] отмечают, что в рамках двух указанных моделей имеются некоторые различия в распределении температуры в глубину в пределах нескольких сантиметров и как следствие — может быть отличие радиоизлучения в миллиметровом диапазоне длин волн.

Однако, как показывают оценки, это отличие весьма мало и не может быть обнаружено в экспериментах, дающих фазовый ход излучения, ввиду недостаточной точности этих измерений.

Вопрос о влиянии температурной зависимости теплоемкости и теплопроводности на тепловой режим и спектр радиоизлучения Луны подробно рассмотрен в [11]. Уравнение (1) с граничным условием (2) решалось на ЭВМ в предположении, что зависимость теплоемкости от температуры для вещества верхнего покрова Луны такая же, как для земных пород, а теплопроводность от температуры не зависит. Расчеты показывают, что учет температурной зависимости теплоемкости приводит к несколько более глубокому остыванию поверхности Луны в отсутствие инсоляции.

Далее в работе [11] методом возмущений получено аналитическое решение уравнения (1), при граничном условии (4) для случая, когда теплоемкость $c = \text{const}$, а теплопроводность $k = k_0(1 + B_n T^n)$, где $n = 1, 2, 3$ и $B_n T^n < 1$ во всем интервале лунных температур. Выражение для распределения температуры в глубину для центра лунного диска в этом случае имеет вид

$$T(y, t) = T_0 + \frac{n}{4} B_n T_0^{n-1} T_1^2 (1 - e^{-2\beta y}) + T_1 e^{-\beta y} \times \quad (9)$$

$$\times \cos(\Omega t - \varphi - \beta y) \left(1 + \frac{\beta B_n T_0^{n-1}}{2} y \right).$$

Из выражения (9) следует, что температурная зависимость теплопроводности (на что впервые было указано в работе [33]) приводит к росту постоянной составляющей температуры в глубину благодаря своеобразному эффекту детектирования температурной волны, распространяющейся в нелинейной среде.

Для оценки точности приближенного аналитического решения (9) получено точное решение на ЭВМ [11] уравнения (1) с граничным условием (3) для центра лунного диска, когда теплоемкость и теплопроводность зависят от температуры следующим образом:

$$c = c_0 T, \quad k = k_0(1 + B_n T^n).$$

Сравнение точного решения с приближенным дало хорошее совпадение.

На рис. 1 приведена зависимость температуры центра диска от местной фазы (пунктирные кривые) при различных γ и $BT^3 = 0,5$. Сопоставление указанных кривых с соответствующими кривыми, когда свойства вещества не зависят от температуры (сплошные кривые), показывает, что учет влияния температурных зависимостей теплоемкости и теплопроводности не дает существенных изменений поверхностной температуры, выходящих за общую точность анализа и эксперимента.

Для оценки доли радиационного переноса необходимо найти явления, в достаточно сильной степени определяемые зависимостью теплопроводности от температуры. Такое явление, как оказалось, существует. Как видно из выражения (9), постоянная составляющая истинной температуры растет с глубиной по закону.

$$T_0(y) = T_0 + \Delta T_{\max} (1 - e^{-2y/lT}), \quad (10)$$

где ΔT_{\max} зависит от γ и величины k_r . Увеличение температуры в глубину приводит к росту постоянной составляющей радиоизлучения Луны по мере увеличения длины волны. Из расчетов следует, что постоянная составляющая яркостной температуры радиоизлучения зависит от длины волны по закону [11]

$$T_{e0} \simeq T_0 + \Delta T_{\max} \frac{2\delta}{1 + 2\delta}. \quad (11)$$

Как будет показано ниже, для Луны $\delta = 2,3\lambda$. Значит, уже на длинах волн порядка 2—3 см постоянная составляющая достигает практически максимальной величины $T_{e0} = T_0 + \Delta T_{\max}$. Таким образом, измеряя температуру на поверхности (на инфракрасных волнах) и в глубине (на волнах с $\lambda \simeq (2 \div 3)$ см), можно найти прирост температуры ΔT_{\max} и определить k_r/k_0 .

Такое определение стало возможным благодаря точным измерениям радиотемпературы методом «искусственной Луны». В работе [13] показано, что существующая разница в постоянных составляющих по инфракрасным и радиоизмерениям в 10—15° объясняется рассматриваемым эффектом. Сравнением с теорией было найдено, что если вещество Луны непроницаемо для инфракрасных волн и имеет $\gamma \simeq \simeq 800 \text{ кал}^{-1} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{сек}^{1/2} \cdot \text{град}$, то относительная доля радиационного переноса через поры при $T = 300^\circ\text{K}$ равна $k_{rn}(300)/k_0 = 0,25$. При проницаемом веществе $k_r(300)/k_0 = 0,4$. Аналогичные численные расчеты были проведены также в работе [129].

В работах [9, 72], кроме однородной модели, рассматривалась также двухслойная модель поверхностного слоя, согласно которой поверхность Луны представляется состоящей из силикатной породы с низким значением теплового параметра $\gamma \simeq 100$, покрытой тонким слоем пыли, у которого $\gamma = 1000$. Однако, как показали дальнейшие исследования радиоизлучения Луны, ее поверхностный слой в глубину имеет квазиоднородную структуру, а резко-неоднородная модель, как не соответствующая экспериментальным данным, должна быть отвергнута [16].

3. Тепловой режим поверхности во время затмения

Первый численный расчет поверхностной температуры Луны во время затмения был проведен Ягером [9]. Решалось уравнение (1) при граничном условии (3) в предположении, что свойства вещества не меняются с глубиной и не зависят от температуры. Расчет теплового режима элемента поверхности в центре лунного диска для обстоятельств затмения 1963 г. с учетом зависимости от температуры теплоемкости в виде $c = c_0T$ и теплопроводности в виде $k = k_0(1 + BT^3)$ содержится в работе [11].

На рис. 2 приведено изменение поверхностной температуры во время затмения при $BT^3 = 0,5$ (пунктирные кривые), полученное путем решения уравнения (1) с граничным условием (3). (Сплошные кривые

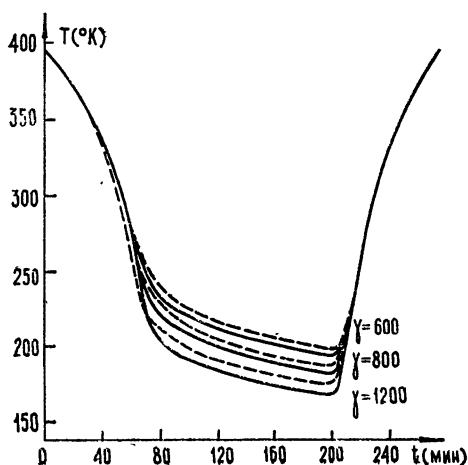


Рис. 2. Изменение температуры поверхности в центре лунного диска во время затмения при $\gamma = 600; 800; 1200$.

Сплошные кривые—без учета зависимости от температуры свойств вещества; пунктирные—с учетом этой зависимости.

соответствуют случаю, когда свойства вещества не зависят от температуры.)

Расчеты [9, 11] показали, что как в случае лунаций, так и в случае затмения наличие зависимостей $c(T)$ и $k(T)$ лунного вещества слабо влияет на тепловой режим лунной поверхности. Это дает основание полагать $c = \text{const}$ и $k = \text{const}$ при определении распределения температуры по поверхности. Результаты расчета распределения температуры по видимому диску Луны [17] для четырех моментов времени затмения приведены на рис. 3. Оценки показывают, что температурный режим поверхности практически полностью восстанавливается через 2 часа после окончания затмения.

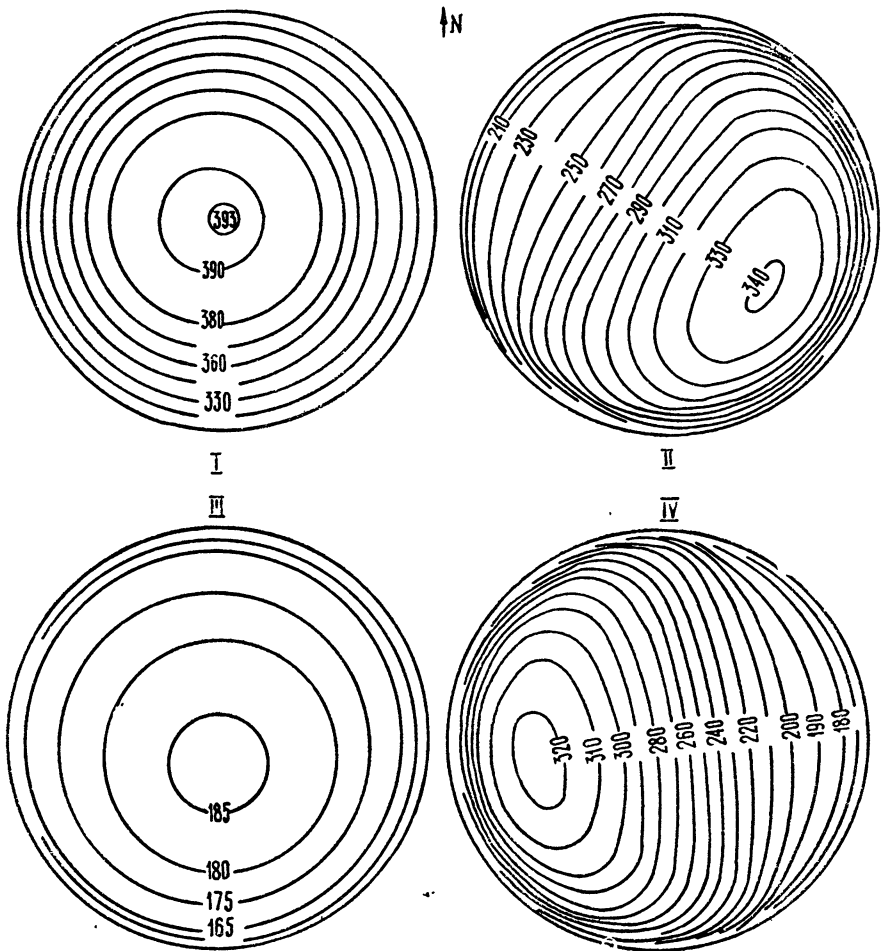


Рис. 3. Распределение температуры по видимому диску Луны для моментов затмения 0; 100; 190 и 280 минут.

Для разработки теории радиоизлучения во время затмения необходимо знание распределения температуры в глубину $T(y, t)$. Аналитическое решение задачи о тепловом режиме Луны в период затмения получено в [18, 19]. Однако в [18] при решении уравнения теплопроводности не учитывается начальное распределение температуры $T(y, 0)$. В [19] задача решается в предположении, что верхний покров однороден по свойствам до глубины, где еще могут быть колебания

температуры во время затмения и, кроме того, свойства вещества не зависят от температуры. Температуру элемента поверхности считают известной в любой момент времени в течение затмения. Действительно, кривая изменения температуры поверхности во время затмения известна из ряда измерений (см., например, [20]). Она достаточно хорошо может быть аппроксимирована четырьмя линейными отрезками, заключенными между характерными моментами затмения t_k :

$$T(0, t) = T_k + \alpha_k(t - t_k), \quad \alpha_k = \frac{T_{k+1} - T_k}{t_{k+1} - t_k}, \quad \alpha_4 = 0$$

$$(k = 1, 2, 3, 4).$$

Здесь t_1 — момент начала полутеневой фазы затмения, t_2 — начало теневой фазы, t_3 — конец теневой и начало полутеневой фазы, t_4 — конец полутеневой, T_k — температура поверхности, соответствующая моменту t_k . В качестве начального условия используется распределение температуры (6), полученное из решения тепловой задачи во время лунаций для центра диска ($\psi = 0, \varphi = 0$) и момента времени $t = 0$ (полнолуние).

4. Влияние шероховатости поверхности на ее тепловой режим

Как следует из теоретического анализа теплового режима лунной поверхности, распределение температуры вдоль гладкого диска полностью освещенной Луны описывается законом

$$T = T_0 \cos^{1/4} \psi. \quad (12)$$

Однако уже результаты измерений Петита и Никольсона [1] хорошо аппроксимировались выражением вида

$$T = T_0 \cos^{1/6} \psi. \quad (13)$$

Это различие (12) и (13) авторы объясняли шероховатостью поверхности.

Недавние измерения распределения температуры вдоль освещенного диска, проведенные с высоким разрешением во время лунаций в далекой инфракрасной и видимой областях [21], дали аналогичный результат. Они позволили получить карты изотерм, из которых можно видеть, что температура элемента поверхности зависит как от высоты Солнца, так и от угла наблюдения. Эти измерения подтвердили, что распределение температуры поверхности имеет вид (13). Кроме того, они подтвердили аномалии в изменении температуры подсолнечной точки: когда подсолнечная точка движется к краю диска, ее температура уменьшается. По-видимому, главный вклад в эти эффекты вносят шероховатости поверхности. В литературе рассматриваются в этой связи два типа рельефа: с мелкомасштабными неоднородностями от миллиметра до нескольких сантиметров и с крупномасштабными нерегулярностями порядка метра и больше.

Аномалии в изменении температуры подсолнечной точки в работе [22] объясняются с помощью модели волнистой поверхности. Показано, что если размеры нерегулярностей порядка миллиметров и сантиметров, то при нормальном падении солнечных лучей наблюдателя, смотрящего на поверхность под некоторым углом, температура этой поверхности будет несколько ниже, чем температура плоской поверхности из этого же материала. В работе [23] тот же эффект объясняется с помощью сферических более плотных кратеров сантиметровых размеров.

Аномалии в распределении яркости по диску Луны объясняются

с помощью крупномасштабных неоднородностей. При этом обычно рассматривается модель, в которой флуктуации высоты распределены по нормальному закону, а размеры неоднородностей по горизонтали описываются автокорреляционной функцией экспоненциального вида [24, 25]. Сравнение теоретических расчетов Смита [25] с экспериментальными результатами, полученными Инграо, Юнгом и Линским [26], а также Саари и Шортхиллом [21], позволяет оценить величину среднеквадратичного наклона шероховатостей. Эта величина оказывается равной 20° . Попытка применить этот же анализ к объяснению аномалий в яркости подсолнечной точки приводит к сильно завышенному значению среднеквадратичного наклона ($60-70^\circ$), что ставит под сомнение предположения, на которых основан анализ.

Другой факт, который может, по-видимому, помочь при объяснении этих явлений и который обсуждается в литературе,—наличие камней из горных пород на поверхности Луны [27]. В работе [28] были сделаны количественные оценки в предположении, что каменные глыбы состоят из базальта и имеют форму кубов. Общий вывод, сделанный в [28], состоит в том, что влияние камней в центре лунного диска на инфракрасную температуру при наблюдениях с Земли невелико. По мнению автора [28], влияние камней размерами от метра до нескольких десятков метров может оказаться существенным при измерениях с космических кораблей, так как освещенные Солнцем стороны во время захода и восхода и обращенные к кораблю могут излучать раз в десять энергии больше, чем остальная поверхность.

III. ТЕОРИЯ СОБСТВЕННОГО ТЕПЛОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ

1. Радиоизлучение Луны при периодическом режиме нагрева ее поверхности

Собственное излучение среды описывается уравнением переноса лучистой энергии. Для плотного вещества (каким является поверхностный слой Луны) это уравнение упрощается, из-за того, что можно пользоваться принципом локального термодинамического равновесия. Дальнейшие упрощения связаны с тем, что толщина слоя, ответственного за излучение, много меньше радиуса планеты, поэтому можно рассматривать плоскую задачу. С учетом всего сказанного уравнение переноса излучения на частоте ν имеет вид

$$\cos \vartheta \frac{d}{d\tau} \left(\frac{I_\nu}{n^2} \right) = - \frac{I_\nu}{n^2} + \frac{B_\nu}{n^2}; \quad (14)$$

$$B_\nu = \mu \int I_\nu f(r) \frac{d\omega}{4\pi} + (1 - \mu) n^2 B_{\nu_0}. \quad (15)$$

Здесь $\tau = \int_0^l \sigma_\nu dy$ — оптическая толщина, σ_ν — коэффициент затухания,

равный сумме коэффициента истинного поглощения (κ) и коэффициента рассеяния ($\mu\alpha_\nu$), μ — коэффициент, характеризующий отношение рассеянной мощности к общему количеству поглощенной, n — коэффициент преломления волн в среде, $f(r)$ — индикатриса рассеяния, ϑ — угол между вертикалью и направлением излучения, r — угол между направлением излучения, падающего на элементарный объем, и направлением рассеянного этим объемом излучения, B_{ν_0} — функция излучения среды. В данном случае это функция Планка для потока излучения среды в вакуум.

Если среда достаточно однородна в глубину по своим тепловым

и электрическим свойствам, то решение уравнения переноса можно представить как

$$I_\nu = (1 - R) \int_0^\infty B_\nu e^{-\tau \sec \vartheta} \sec \vartheta d\tau, \quad (16)$$

где R — коэффициент отражения излучения от границы раздела. Если поверхность раздела достаточно гладкая, то для R справедливы формулы Френеля; при сильно шероховатой поверхности под R нужно понимать альбедо поверхности. Если же среда существенно неоднородная (для данной длины волны), то выражение (16) усложняется [29], так как величина R в этом случае зависит от оптической глубины τ и определяется дифференциальным уравнением Рикатти [30]. Поэтому коэффициент передачи излучения через поверхность $(1-R)$ должен быть внесен под знак интеграла. Функция B_ν в (16) — неизвестная функция, определяемая как решение уравнения (15).

Вся теория радиоизлучения Луны до сих пор была построена в предположении, что для радиоволн $\mu = 0$. По-видимому, это справедливо с достаточной точностью для волн длиннее миллиметра. Для волн короче миллиметровых рассеяние в лунном веществе может оказаться существенным. Итак, если $\mu = 0$, то $a_\nu = \kappa$, а $B_\nu = n^2 B_{\nu n}$ — известная функция, и решение для радиодиапазона, т. е. при $h_\nu \ll kT$, значительно упрощается [12, 72]:

$$T_e(0, t, \varphi, \psi) = [1 - R(\varphi, \psi)] \int_0^\infty T(y, \varphi, \psi, t) \kappa \sec \vartheta' e^{-\kappa y \sec \vartheta'} dy, \quad (17)$$

где T_e — эффективная температура излучения элемента поверхности с координатами φ и ψ , ϑ' — угол, под которым излучение падает снизу на границу раздела, $T(y, \varphi, \psi, t)$ — истинная температура вещества Луны на глубине y в момент времени t , полученная выше в виде (6) как решение уравнения теплопроводности (1) с граничным условием (4).

После подстановки в (17) этого распределения температуры в глубину получается следующее выражение для эффективной температуры элемента поверхности [2]:

$$T_e(\varphi, \psi, t) = [1 - R(\varphi, \psi)] \left\{ T_0(\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \times \right. \\ \left. \times \frac{T_n(\psi)}{\sqrt{1 + 2\delta_n \cos \vartheta' + 2\delta_n^2 \cos^2 \vartheta'}} \cos [n \Omega t - n \varphi - \varphi_n - \xi_n(\varphi, \psi)] \right\}, \quad (18)$$

где $\delta = \sqrt{n \Omega \rho c / 2k} \kappa$ — отношение глубины проникновения электромагнитной волны $l_s = 1/\kappa$ к глубине проникновения n -й гармоники тепловой волны l_{nT} . При достаточно малых значениях тангенса угла потерь коэффициент поглощения равен $\kappa = 4\pi\sigma'/c' \sqrt{\epsilon}$, где σ' — проводимость, c' — скорость света. Тогда выражение для δ примет вид

$$\delta = \frac{c \gamma \lambda}{2\pi b \sqrt{\epsilon}} \sqrt{\frac{\Omega}{2}},$$

где $b = \operatorname{tg} \Delta/\rho$ — удельный тангенс угла потерь, $\xi_n = \operatorname{arctg} [\delta_n \cos \vartheta' / (1 + \delta_n \cos \vartheta')]$ — сдвиг по фазе для n -й гармоники эффективной температуры по отношению к фазе температуры поверхности.

При экспериментальных исследованиях Луны в случае, когда ширина диаграммы направленности приемной антенны на уровне 0,5 по мощности больше угловых размеров Луны, осуществляется прием интегрального радиоизлучения. Поэтому для правильной интерпретации результатов измерений необходимо сравнение их с выражением для интегрального излучения Луны, полученным при точном решении. В работе [31] теория интегрального радиоизлучения дана в предположении однородности свойств верхнего покрова Луны.

Усредненная по диску эффективная температура, согласно [12], равна

$$\bar{T}_e = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [1 - R(\varphi, \psi)] T_e(\varphi, \psi, t) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi. \quad (19)$$

Так как основной вклад в излучение дают центральные части диска, то целесообразно среднюю по диску радиотемпературу выразить через излучение центра диска, введя соответствующие пересчетные коэффициенты. В результате для эффективной температуры интегрального радиоизлучения получается выражение

$$\bar{T}_e = (1 - R_{\perp}) \beta_0 T_0(0) + (1 - R_{\perp}) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{T_n(0) \beta_n}{\sqrt{1 + 2\delta_n + 2\delta_n^2}} \times \quad (20)$$

$$\times \cos(n\Omega t - \varphi_n - \xi_n + \Delta\xi_n),$$

β_0 и β_n — соответствующие коэффициенты усреднения, $\Delta\xi_n$ — дополнительный фазовый сдвиг, возникающий при усреднении.

Величины β_0 , β_n и $\Delta\xi_n$ весьма сложно выражаются через интегралы, зависящие от ε и δ лунной поверхности. Их расчет был выполнен на ЭВМ для широкого интервала изменения ε и δ . На рис. 4 изображена зависимость коэффициента β_0 от ε . На рис. 5, 6 приведены коэффициенты β_1 и β_2 в зависимости от δ_1 для различных значений ε . На рис. 7 представлена зависимость дополнительного сдвига фаз $\Delta\xi_1$ для первой гармоники от δ_1 . При изменении ε в широких пределах максимальная величина $\Delta\xi_1$ не превышает -5° . Аналогичный сдвиг по фазе для второй гармоники интегрального излучения практически отсутствует.

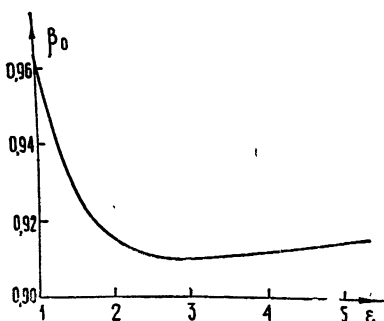


Рис. 4.

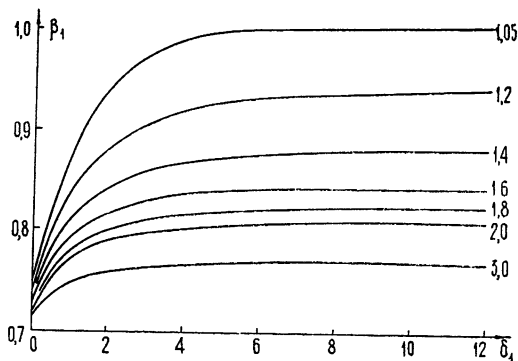


Рис. 5.

Оказалось, что высшие гармоники средней по диску эффективной температуры существенно ослаблены по сравнению с соответствующими гармониками эффективной температуры в центре диска. Это означа-

ет, что колебание средней по диску радиотемпературы достаточно хорошо описывается одной первой гармоникой, что подтверждается резуль-

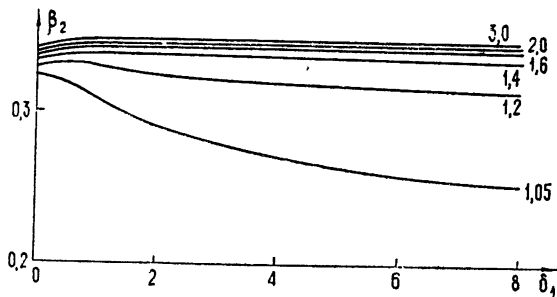


Рис. 6.

тами измерений интегрального радиоизлучения Луны на разных длинах волн, т. е.

$$\bar{T}_e = \bar{T}_{e0} + \bar{T}_{e1} \cos(\Omega t - \bar{\xi}_1). \quad (21)$$

Для сравнения с экспериментом используется величина $\bar{M}(\lambda) = \bar{T}_{e0}/\bar{T}_{e1}$, которая, как видно из выражения (20), имеет вид

$$\bar{M}(\lambda) = \frac{T_0(0) \beta_0}{T_1(0) \beta_1} \sqrt{1 + 2\delta_1 + 2\delta_1^2}. \quad (22)$$

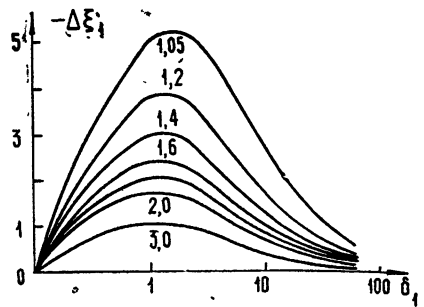


Рис. 7.

2. Спектр постоянной составляющей интегрального радиоизлучения Луны

Точные измерения по методу «искусственной Луны» обнаружили увеличение постоянной составляющей интегрального радиоизлучения с длиной волны (см. рис. 21), так что T_{e0} в выражении (21) нужно рассматривать как функцию λ . Как уже указывалось в разд. II.2 данного обзора, рост постоянной составляющей радиотемпературы в диапазоне длин волн от инфракрасных до $\lambda \simeq (2 \div 3)$ см вызван слабой зависимостью теплопроводности от температуры.

Рост постоянной составляющей в диапазоне длин волн $\lambda > 3$ см был объяснен наличием потока тепла из недр Луны. В [22] дан расчет постоянной составляющей радиоизлучения однородного поверхностного слоя Луны при наличии потока тепла из недр. В [33, 34] на основе измерений радиотемпературы по методу «искусственной Луны» получены оценки для плотности потока тепла, которая оказалась близкой к плотности потока тепла у Земли. Дальнейшие измерения показали, что температура радиоизлучения перестает расти на волнах длиннее 25—30 см, что свидетельствует, очевидно, о значительном уплотнении вещества на глубинах, соответствующих глубине проникновения этих волн.

В работе [29] приведен расчет постоянной составляющей интегрального радиоизлучения Луны при наличии потока тепла из недр для неоднородной модели строения в глубину и при учете роста температуры в глубину за счет температурной зависимости теплопроводности. Для двухслойной модели поверхностного слоя получена следующая зависимость $\bar{T}_e(\lambda)$ для $\lambda \gg hc'/kT$:

$$T_e(\lambda) = [1 - R_{\perp}(\lambda)] A_0 T_0(0) + [1 - R_{\perp}(\rho)] q m \gamma_1 \times \quad (23)$$

$$\times \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \lambda (A_1 - e^{-\lambda d_2} A_2) + [1 - R_{\perp}(\lambda)] \Delta T_{\max} \frac{2\delta_1}{1+2\delta_1} B,$$

где q — плотность потока тепла из недр, $R_{\perp}(\lambda)$ — коэффициент отражения по мощности от поверхности Луны [35], d_2 — толщина пористого слоя, A_0, A_1, A_2, B — коэффициенты, появляющиеся при усреднении по диску Луны и являющиеся сложными функциями λ, d_2 и ε . На рис. 8 и 9 в качестве примера приведены зависимости коэффициентов A_1 и A_2 от длины волны λ для разных значений d_2 и ε , а на рис. 10 — теоретические кривые, построенные согласно (23).

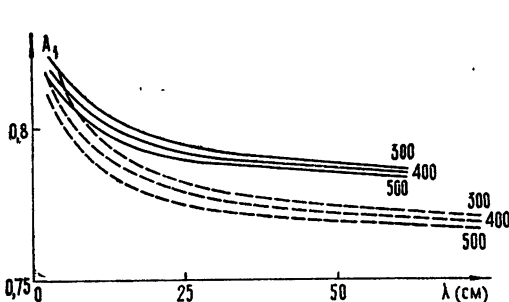


Рис. 8. Зависимость коэффициента A_1 от λ при $d_2=300; 400; 500$ см; $\varepsilon_1 = 2,25; \varepsilon_2 = 6$ (сплошные кривые) и $\varepsilon_2 = 7$ (пунктирные кривые).

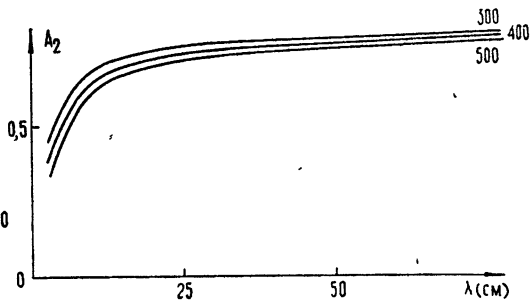


Рис. 9. Зависимость коэффициента A_2 от λ при $d_2 = 300; 400; 500$ см; $\varepsilon_1 = 2,25, \varepsilon_2 = 6$.

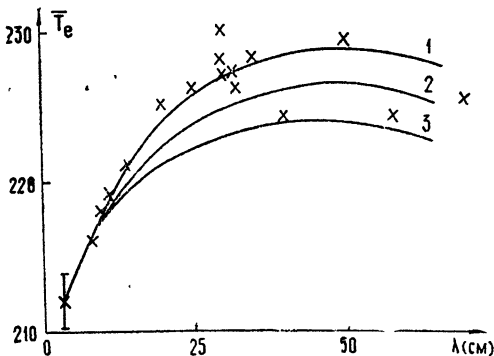


Рис. 10. Зависимость эффективной температуры интегрального радиоизлучения Луны от длины волны при следующих значениях параметров:

1. $d_2=500$ см; $q=0,65 \cdot 10^{-6}$ кал·см⁻²·сек⁻¹;
2. $d_2=400$ см; $q=0,72 \cdot 10^{-6}$ кал·см⁻²·сек⁻¹;
3. $d_2=300$ см; $q=0,8 \cdot 10^{-6}$ кал·см⁻²·сек⁻¹.

3. Радиоизлучение Луны во время затмения

Теория радиоизлучения центра лунного диска во время затмения дана в работах [18, 19]. В [19] получены точные и приближенные выражения для эффективной радиотемпературы центра диска в каждом из четырех перечисленных в разд. II.2 интервалов времени t_k . Для сравнения с экспериментом представляет интерес значение относительного максимального падения радиотемпературы $\Delta T_e(t_3)/T_{em}$, которое, очевидно, достигается в момент конца теневой фазы затмения t_3 . Эта величина, согласно [19], равна

$$\frac{1}{M_3(\lambda)} = \frac{\Delta T_e(t_3)}{T_{em}} = - (1 - R) \frac{4}{3} \frac{x a}{\sqrt{\pi} T_{em}} [\alpha_1(t_3 - t_1)^{3/2} + (\alpha_2 - \alpha_1)(t_3 - t_2)^{3/2}] + (1 - R) \frac{x^2 a^2}{2 T_{em}} [\alpha_1(t_3 - t_1)^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)(t_3 - t_2)^2] \quad (24)$$

$$\left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho c}} \right).$$

Как следует из (24), изменение радиотемпературы определяется величиной $x a = 2\pi b \sqrt{\epsilon} / c \lambda \gamma$, а в случае лунаций зависит от аналогичного соотношения между электрическими и тепловыми параметрами вещества. Действительно, из выражения (18) видно, что фазовые изменения радиотемпературы пропорциональны величине $1/\delta = 2\pi b \sqrt{\epsilon} \sqrt{2/\Omega} / c \lambda \gamma$. Таким образом, обратная величина изменения радиотемпературы $M_3(\lambda)$ теоретически является почти линейной функцией длины волны λ и отношения тепловых параметров к электрическим. Наклон спектра $M_3(\lambda)$ определяется величиной γ/b . На рис. 11 приведены теоретические кривые $M_3(\lambda)$, рассчитанные в соответствии с (24) для обстоятельств затмения 1963 г. при значениях $\gamma/(b\sqrt{\epsilon})$, равных $7,3 \cdot 10^4$; $5,7 \cdot 10^4$ и $4,1 \cdot 10^4$.

Необходимо отметить, что у применяемых при измерениях антенных систем ширина диаграммы направленности различна, и они, следовательно, оказывают различные усредняющие действия. Для выяснения применимости изложенной выше теории излучения центра лунного диска к описанию интегрального излучения в работе [17] сделан расчет интегрального радиоизлучения Луны и проведено его сравнение с радиоизлучением центра диска для затмения 1963 г.

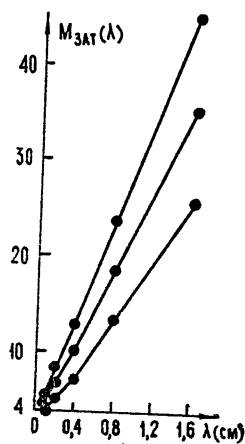


Рис. 11.

На рис. 12 представлены относительные изменения эффективной температуры центра диска во время затмения на разных волнах (сплошные кривые) и соответствующие изменения средней по диску эффективной температуры (пунктирные кривые). Сравнение показывает, что максимальное относительное падение температуры во время затмения,

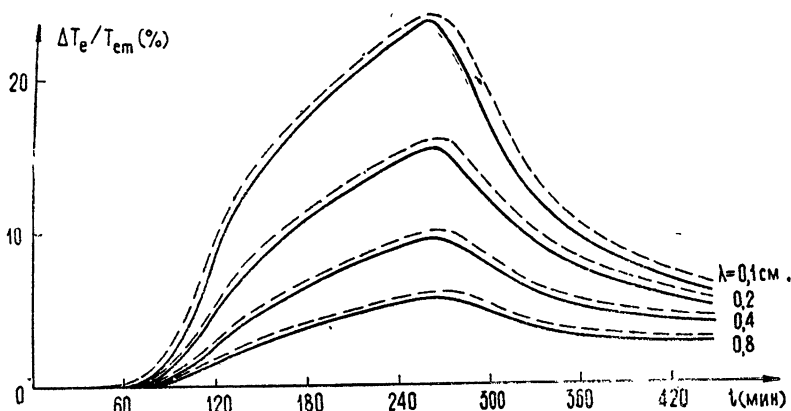


Рис. 12.

определяемое величиной γ/b , в обоих случаях практически одинаково. Это означает, что в случае затмения можно не учитывать усредняющее действие диаграммы направленности антенной системы и для определения величины γ/b по экспериментальным данным использовать теорию радиоизлучения затменной Луны, разработанную в [19] для центра лунного диска.

IV. ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ СПОСОБНОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ ЛУНЫ В РАДИОДИАПАЗОНЕ

1. Излучательная способность гладкой поверхности

Под излучательной способностью плоского тела понимается отношение интенсивности его излучения в данном направлении к максимальному излучению в предположении, что излучающее тело является абсолютно черным. В случае тела любой другой формы указанное определение дает для плоского элемента поверхности дифференциальную, а для всего тела интегральную излучательную способность. В случае гладких поверхностей, обеспечивающих зеркальное отражение, дифференциальная излучательная способность просто равна $[1 - R(\varphi, \psi)]$, где $R(\varphi, \psi)$ — коэффициент отражения Френеля для данного направления излучения. В работе [36] в предположении, что поверхность Луны гладкая, получена среднесферическая излучательная способность по постоянной составляющей интегрального радиоизлучения:

$$1 - \bar{R} = (1 - R_{\perp})\alpha, \quad (25)$$

где

$$R_{\perp} = \left(\frac{\sqrt{\epsilon} - 1}{\sqrt{\epsilon} + 1} \right)^2, \quad (26)$$

ϵ — диэлектрическая постоянная вещества, α — является функцией ϵ и дается графиком рис. 13.

В общем случае излучательная способность слоя зависит от геометрии его поверхности (шероховатость) и от изменения диэлектрических свойств вещества в глубину.

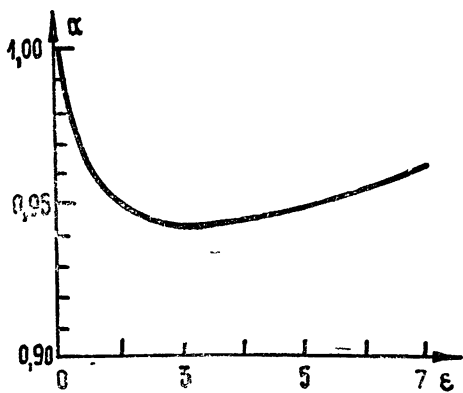


Рис. 13.

2. Излучательная способность шероховатой поверхности

Реальная поверхность любой планеты имеет неровности. Поэтому следующим приближением является учет крупномасштабных неоднородностей, размеры которых значительно больше длины волны. Ориентация отдельной площадки имеет произвольный наклон и может характеризоваться отклонением нормали к этой площадке от гладкой в среднем поверхности. Введение таких неровностей приводит к усреднению излучательной способности по всем значениям наклонов площадки в пределах допустимых углов наклона [12, 37]:

$$1 - \overline{R(\varphi, \psi)} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [1 - R(\varphi + \Delta\varphi)(\psi + \Delta\psi)] W(\Delta\varphi, \Delta\psi) d(\Delta\varphi) d(\Delta\psi), \quad (27)$$

φ, ψ — координаты, определяющие положение площадки на шероховатой поверхности, $\Delta\varphi, \Delta\psi$ определяют отклонение нормали к этой площадке от нормали к гладкой в среднем поверхности, $W(\Delta\varphi, \Delta\psi)$ — функция распределения углов отклонения от нормали. В работах [37, 42] представлены проведенные на ЭВМ расчеты интеграла (27) для функции $W(\Delta\varphi, \Delta\psi)$, имеющей вид кривой Гаусса. Расчеты показывают, что с ростом дисперсии углов наклона увеличивается вклад в излучение областей, расположенных около края диска. В центральной части диска излучательная способность очень слабо зависит от степени шероховатости поверхности.

Учет шероховатостей поверхности необходим при определении коэффициента отражения из радиолокационных измерений. Дело в том, что методы радиолокации позволяют найти поперечное сечение обратного рассеяния Луны σ , которое в общем случае может быть записано в виде

$$\sigma = gR_{\perp} \pi a^2. \quad (28)$$

Здесь a — радиус Луны, R_{\perp} — коэффициент отражения по мощности при нормальном падении, определяемый выражением (26), g — фактор, учитывающий шероховатость поверхности.

Теоретически величина g вычисляется только в двух предельных случаях: в предположении, что поверхность Луны гладкая, $g = 1$, а при условии чисто диффузионного отражения $g = 8/3$. Отражение радиоволн от поверхности Луны представляет, очевидно, некоторый промежуточный случай, поэтому оценка величины g связана обычно с целым рядом предположений [104, 120]. Между тем, из (28) видно, что дополнительное знание величины g позволило бы найти коэффициент отражения от лунной поверхности и, следовательно, сделать определенные выводы о природе верхнего покрова Луны.

В работе [38] содержится попытка смоделировать обратное рассеяние Луны в оптическом диапазоне с тем, чтобы выяснить степень влияния шероховатостей на фактор g . Для этого исследовалось обратное рассеяние света шероховатыми пластинками и шариками. Шероховатость поверхности шарика подбиралась такой, чтобы его диаграмма обратного рассеяния в оптическом диапазоне совпадала с аналогичной диаграммой для Луны на выбранной волне радиодиапазона. Далее измерялось поперечное сечение шероховатого и гладкого шариков. Для гладкого шара параметр g принимался равным единице. Следовательно, для шероховатого шара $g = \sigma_{ш}/\sigma_{г}$, и эта величина полагалась равной аналогичной величине для Луны на соответствующей волне. Диаграмма обратного рассеяния для шарика определялась по диаграмме обратного рассеяния пластинки из того же материала, что и шарик. Шероховатость поверхности обоих создавалась одними и теми же средствами. Получено, что для Луны $g = 1,6$ при рассеянии волн сантиметрового диапазона и $g = 1,06$ при рассеянии дециметровых волн.

3. Излучательная способность неоднородного в глубину поверхностного слоя Луны

Исследование собственного радиоизлучения Луны указывает на то, что вещество верхнего покрова неоднородно в глубину. Такая структура, очевидно, должна иметь сложный спектр коэффициента отражения по мощности. В самом деле, если верхний слой менее плотный, то он имеет меньшую диэлектрическую постоянную. Падающие на поверхность волны, длина которых много меньше толщины этого слоя, будут отражаться от верхней границы среды с вакуумом. Для волн, длина которых много больше толщины этого слоя, он как бы не существует,

и эти волны отражаются от нижнего более плотного слоя. Таким образом, коэффициент отражения для такой среды будет меняться в некотором интервале частот от значения коэффициента отражения для поверхности до его значения для подложки.

Как известно, комплексный коэффициент отражения от слоя с произвольным законом изменения параметров определяется уравнением Рикатти [30]. В работе [35] путем решения на ЭВМ этого уравнения получен спектр коэффициента отражения от слоя, плотность которого меняется в глубину по экспоненциальному закону

$$\rho(y) = \rho_2 - (\rho_2 - \rho_1) \exp(-y/y_0),$$

где ρ_1 и ρ_2 — соответственно плотности на поверхности и в глубине. На глубине $y = 2,5y_0$ плотность практически достигает максимальной величины $\rho = \rho_2$. Получена следующая связь между толщиной неоднородного слоя и средней длиной волны переходного диапазона:

$$l = 2,5 y_0 = \lambda_{cp}/8.$$

В [39] приведены также спектры коэффициента отражения для некоторых трехслойных моделей поверхностного слоя Луны, найденные численным интегрированием на ЭВМ. При расчетах учитывалась частотная зависимость диэлектрической постоянной [40] в соответствии с (32) и (33).

На рис. 14 показан спектр коэффициента отражения для модели

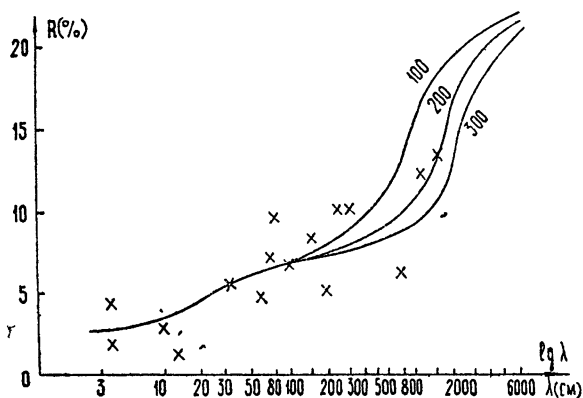


Рис. 14. Спектр коэффициента отражения, рассчитанный для трехслойной модели поверхностного слоя Луны.

поверхностного слоя, качественное изменение плотности которого в глубину представлено на графике рис. 15. Расчет проведен при следующих значениях параметров: $y_0 = 1,5$ см, $\rho_1 = 0,7$ г·см⁻³, $\rho_2 = 1$ г·см⁻³, $\rho_3 = 2,5$ г·см⁻³, $d_2 = 100, 200, 300$ см.

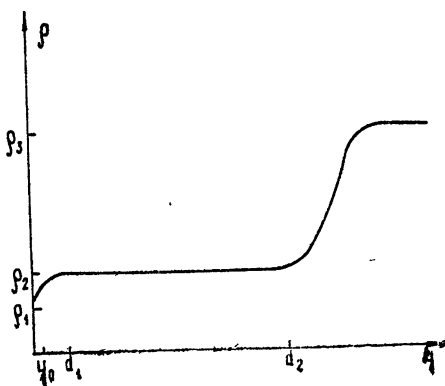


Рис. 15. Модель изменения плотности в глубину в поверхностном слое Луны.

4. Поляризация радиоизлучения шероховатой поверхности

Величина коэффициента поляризации радиоизлучения Луны в самом общем случае равна отношению разности усредненных по диаграмме эффективных температур, определенных для двух взаимно перпендикулярных ориентаций электрического вектора антенны, к их сумме [12]:

$$p = \frac{\bar{T}_{e1}^0 - \bar{T}_{e2}^0}{\bar{T}_{e1}^0 + \bar{T}_{e2}^0}; \quad (29)$$

$$\bar{T}_e^0 = \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [\bar{R}_h(\varphi, \psi) - \bar{R}_v(\varphi, \psi)] [\sin^2(\gamma - \Delta) - \cos^2(\gamma - \Delta)] F(\varphi, \psi) T_e(\varphi, \psi, t) \times \right. \\ \left. \times \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi \right\} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} [\bar{R}_h(\varphi, \psi) + \bar{R}_v(\varphi, \psi)] F(\varphi, \psi) \cos^2 \psi \cos \varphi d\varphi d\psi \right\}^{-1}, \quad (30)$$

где $\bar{R}_h(\varphi, \psi)$ и $\bar{R}_v(\varphi, \psi)$ — среднестатистические коэффициенты отражения для вертикальной и горизонтальной поляризации, определяемые выражением (27), γ — угол между плоскостью главного меридиана и проекцией на картинную плоскость радиуса-вектора, направленного из центра Луны в точку с координатами φ, ψ , Δ — угол между плоскостью электрического вектора антенны и плоскостью главного меридиана, $T_e(\varphi, \psi, t)$ — эффективная температура рассматриваемого участка для случая абсолютно черной Луны, $F(\varphi, \psi)$ — диаграмма направленности приемной антенны. Как видно из выражения (30), коэффициент поляризации определяется тремя величинами: распределением температуры $T_e(\varphi, \psi, t)$, диаграммой направленности $F(\varphi, \psi)$, излучательной способностью $1 - R(\varphi, \psi)$.

В [12] проведена оценка коэффициента поляризации излучения Луны для случая, когда поверхность Луны гладкая, диаграмма направленности антенны широкая по сравнению с угловыми размерами диска планеты ($F(\varphi, \psi) = \text{const}$), а $T_e(\varphi, \psi, t)$ есть сумма постоянной составляющей и первой гармоники радиотемпературы. Показано, что степень поляризации интегрального радиоизлучения Луны определяется только отклонением распределения температуры по диску от центрально-симметричного и, в частности, степенью падения температуры к лунным полюсам.

Вопросу о поляризации интегрального излучения Луны в предположении, что ее поверхность имеет крупномасштабные неровности, посвящена работа [41]. Проведенные расчеты показали, что величина коэффициента поляризации зависит от фаз Луны, достигая максимума вблизи квадратур. С увеличением длины волны переменная составляющая поляризации уменьшается и для волны $\lambda = 3,2$ см практически отсутствует.

В работах [43–48] рассматривается вопрос об усредняющем действии диаграммы направленности при измерении поляризации. В [46] предполагалось, что диаграмма направленности представляет собой тело вращения, сечение которого имеет вид гауссовой кривой. На рис. 16 приведено изменение коэффициента поляризации вдоль радиуса диска Луны при различных значениях ширины θ диаграммы направленности на уровне половины по мощности. Предполагалось, что поверхность Луны идеально гладкая. Видно, что коэффициент поляризации практически не зависит от ширины диаграммы направленности в центральной области диска, ограниченной окружностью радиусом $0,6 R_L$. На рис. 17 представлены результаты расчета p при $\varepsilon = 1,5$ и 3 и

различных значениях дисперсии σ . Для $r/R_{\text{л}} < 0,6$ коэффициент поляризации практически не зависит от величины σ . Влияние шероховатостей проявляется лишь вблизи лимба Луны.

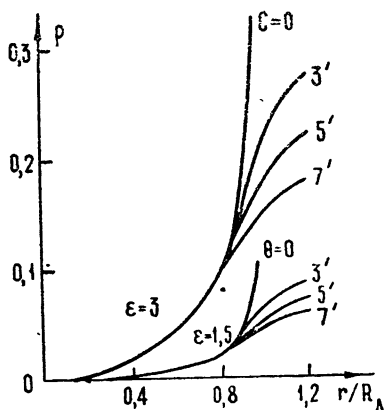


Рис. 16. Изменение коэффициента поляризации вдоль радиуса диска Луны при $\theta = 0, 3', 5', 7'$ и $\epsilon = 3; 1,5$.

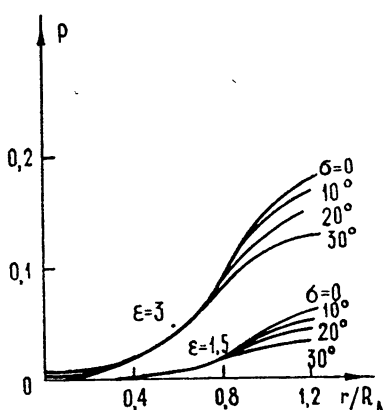


Рис. 17. Изменение коэффициента поляризации вдоль радиуса диска Луны при $\theta = 7'$, $\sigma = 0, 10, 20, 30^\circ$ и $\epsilon = 3; 1,5$.

Поляризационные характеристики радиоизлучения Луны при приеме излучения на антенну с диаграммой направленности ножевого типа получены в работах [43—45, 47]. В [43—45] рассматривался случай шероховатости с равномерным распределением углов наклона в определенных пределах без учета затенения, что является довольно грубым приближением. В [47] учитывалось затенение и предполагалось, что статистика углов наклона неровностей подчиняется нормальному закону. Расчеты показали, что при прохождении диаграммой направленности центральной части лунного диска наблюдается вертикальная поляризация, коэффициент поляризации при этом слабо зависит от σ и θ . Вблизи лимба Луны поляризация горизонтальная, здесь коэффициент поляризации существенным образом зависит от ширины диаграммы направленности в узком сечении и от дисперсии углов наклона неровностей.

В работах [45, 48] содержится анализ поляризационных характеристик радиоизлучения Луны при учете усредняющего действия многолепестковой диаграммы направленности, которая формируется при помощи двухэлементного радиоинтерферометра. Показано, что измерение коэффициента поляризации интерферометром целесообразно проводить при $n = 1 \div 1,5$ (n — число лепестков, укладываемых на диске Луны), где влияние ϵ и σ наиболее заметны.

Итак, проведенные расчеты показывают, что измерения коэффициента поляризации в центральной области ($r/R_{\text{л}} < 0,6$) позволяют найти диэлектрическую проницаемость поверхностного слоя Луны. Влияние шероховатости проявляется лишь вблизи лимба Луны, что дает возможность, предварительно определив ϵ , по значению коэффициента поляризации вблизи лимба оценить степень шероховатости лунной поверхности.

V. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ СОБСТВЕННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЛУНЫ

1. Результаты инфракрасных измерений

Наиболее ранние измерения собственного излучения Луны, имевшие важное значение для исследования последней, были проведены в инфракрасном диапазоне Петтитом и Никольсоном [1]. Ими были по-

лучены температура подсолнечной точки, полуночная температура, распределение интенсивности излучения по диску во время полнолуния, а также изменение температуры площадок вблизи центра диска и вблизи лимба во время затмения.

Повышение чувствительности приемников в инфракрасном диапазоне позволило провести ряд наблюдений с высоким разрешением. На рис. 18 представлены результаты измерений температуры поверхности площадки на лунном экваторе во время лунаций [49]. В измерениях дневной температуры Синтона и др. (см., например, [49]) использовался узкополосный фильтр на $\lambda = 8,8$ мк. Были получены карты изотерм освещенной поверхности при девяти фазовых углах с разрешением в 25 сек дуги (1 сек дуги — порядка 1/1800 лунного диаметра). Дневную температуру измеряли также Саари и Шортхилл [49] с высоким разрешением в 1 сек дуги. Измерения проводились в интервале длин волн $\lambda = (10 \div 12)$ мк при 23 значениях фазовых углов.

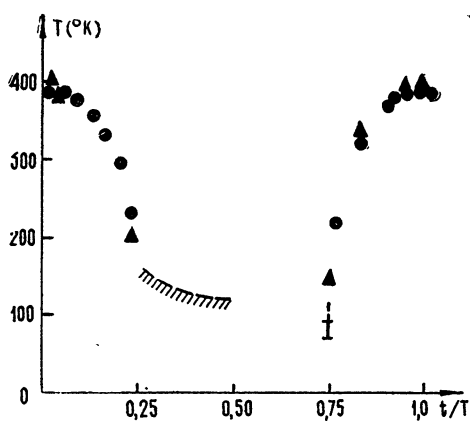


Рис. 18. Изменение-поверхностной температуры в центре лунного диска по экспериментальным данным:

▲▲▲ — Синтона и др. [49],
●●● — Саари и Шортхилла [49],
| | | — Лоу [51].

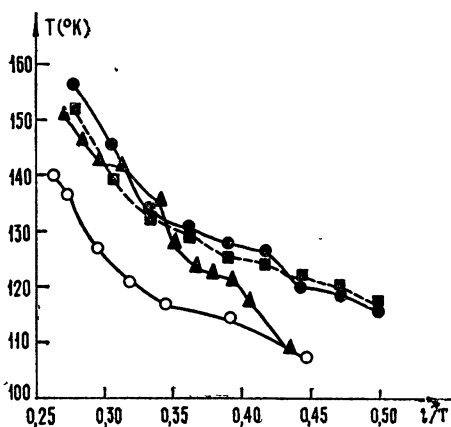


Рис. 19. Изменение поверхностной температуры центра диска во время лунной ночи по экспериментальным данным:

●●●, ■■■ — Сервейера-V [49],
▲▲▲ — Шортхилла и Саари [49],
○ ○ ○ — Мюррея и Вилди [50].

Температура лунной поверхности после захода Солнца изучена хуже, так как для этих измерений требуются более чувствительные инструменты. Заштрихованная на рис. 18 область более детально представлена на рис. 19. Измерения Мюррея и Вилди [50] проводились в интервале длин волн $\lambda = (8 \div 13)$ мк с разрешением 26 сек дуги. Экстраполяция этих результатов до момента $t/T = 0,5$ дает оценку для полуночной температуры поверхности Луны $T_n \sim 104^\circ$. Данные Сервейера-V [49] рассматривались как верхняя возможная граница ночной температуры. Однако в работе [130] показано, что более тщательный анализ этих результатов с учетом всех возможных ошибок измерений позволяет устранить отличие данных Сервейера-V от результатов наземных измерений. Измерения прямо перед восходом Солнца были сделаны Лоу [51] на волне $\lambda = 17,5$ мк. Оказалось, что средняя температура поверхности равна 90° , хотя есть области с температурой, меньшей 70° .

Интересные результаты получены при измерениях охлаждения лунной поверхности во время затмения 19 сентября 1964 г. Измерения проводились двумя группами: Саари и Шортхиллом [52] и Инграо, Янгом и

Линским [26]. На рис. 20 представлены результаты второй группы. Темные кружки описывают охлаждение областей, отстоящих на 30 сек дуги к востоку и западу от кратера Тихо, светлые описывают охлаждение области внутри кратера Тихо. Из рис. 20 видно, что наблюдается более медленное по сравнению с окружающими площадками остывание внутренней кратера во время лунного затмения. На фотографии затменной Луны в инфракрасных лучах такие кратеры выглядят необычайно светлыми, они получили в литературе название «горячих пятен». В настоящее время обнаружено 330 аномально светлых областей. Проведена классификация их с целью установления связи с визуальными особенностями рельефа. Результаты этой классификации показали, что около 90% всех «горячих пятен» связано с кратерами, которые оказываются более светлыми и во время полнолуния. Около 10% пятен не связаны с какими-либо особенностями рельефа.

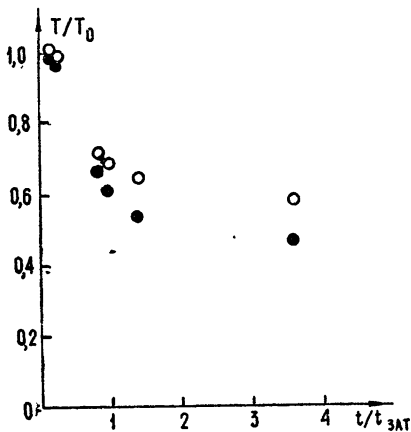


Рис. 20. Изменение температуры поверхности во время затмения 19 декабря 1964 г. по экспериментальным данным:

○ ○ — кратер Тихо,
● ● — область в окрестностях кратера Тихо.

В литературе обсуждаются следующие возможные объяснения наблюдаемого явления.

1. Разная эмиссионная способность у отдельных площадок на поверхности Луны [53]. Однако, как показывают оценки, чтобы обеспечить необходимую разницу температур в десятки градусов, эмиссионные способности площадок должны различаться в два раза.

2. Различная прозрачность вещества площадок в инфракрасном диапазоне [54]. Но, по-видимому, возражения здесь те же, что и в предыдущей гипотезе: необходимы слишком большие различия в прозрачности отдельных площадок.

3. Существование внутренних источников тепла. Возражением против этой гипотезы является то, что аномальные области часто не выглядят более теплыми в течение лунного дня.

4. Рассеяние на шероховатой поверхности. Поверхность, покрытая шероховатостями порядка нескольких сантиметров, будет выглядеть более теплой, чем плоская из тех же пород [23, 55].

5. Выход на поверхность более твердых скальных пород [53]. Такая структура должна порождать тепловые аномалии и кажется наиболее вероятной. Однако, как показывают расчеты [21], температура «горячих пятен» в случае чисто скальных поверхностей должна быть существенно выше наблюдаемой.

2. Метод точных измерений радиоизлучения Луны (метод «искусственной Луны»)

Эффективная температура радиоизлучения Луны \bar{T}_e , пропорциональная мощности сигнала на выходе антенны, измеряется с помощью радиометров. Коэффициент пропорциональности определяется параметрами антенны (направленностью, потерями в антенном тракте, диаграммой). Трудность определения указанных параметров приводит к значительным погрешностям измерений. Точность определения \bar{T}_e этим прямым методом не превышает обычно 10—20%, что сильно ограничивает возможность использования радиоданных для определения физических параметров поверхностного слоя Луны.

Большая часть экспериментальных результатов по собственному радиоизлучению Луны, приводимых ниже, получена точным методом «искусственной Луны» [57]. Этот метод основан на сравнении радиоизлучения Луны с известным радиоизлучением абсолютно черного диска, помещенного во френгоферовой зоне антенны (расстояние от телескопа $R \geq D^2/\lambda$ где D — диаметр зеркала, λ — длина волны) под достаточно большим углом места h_d на фоне неба. Мощность сигнала от диска пропорциональна известной величине

$$T_d \int_{\Omega_d} F d\Omega,$$

где T_d — температура диска, равная температуре окружающего воздуха, F — диаграмма направленности антенны, Ω_d — угловые размеры диска, видимые от раскрытия антенн. Пользуясь этой величиной, легко прокалибровать всю систему, не прибегая к измерению мощности по выходе антенны и пользуясь только точно известными параметрами антенны.

Оказалось, что наиболее существенная ошибка метода связана с влиянием радиоизлучения Земли и неравномерным излучением неба, которое дифрагирует на диске и попадает в радиотелескоп, увеличивая эталонный сигнал на неопределенную величину. В работе [57] показано, что использование двух дополнительных экранов — черного диска и отверстия в черной плоскости (диаметр отверстия точно равен диаметру диска) позволяет избавиться от дифракционной ошибки. Благодаря применению второго эталона были найдены условия установки диска, при которых влияние радиоизлучения Земли может быть снижено до минимально возможной величины.

В работах [58, 59] проведен расчет поправок за счет дифракции на диске излучения Земли и фона. Все это позволило в дальнейшем при измерениях радиоизлучения Луны использовать только эталонный диск. Метод «искусственной Луны» сделал возможным определение температуры интегрального радиоизлучения Луны с точностью 2—3% в широком интервале длин волн.

3. Экспериментальные данные о радиоизлучении Луны во время лунаций и во время затмений

К настоящему времени накоплен обширный экспериментальный материал по собственному радиоизлучению Луны во время лунаций в широком диапазоне длин волн от 0,7 мм до 150 см. Результаты этих измерений приведены в табл. 1.

Как видно из (21), собственное радиоизлучение Луны целесообразно характеризовать спектрами трех величин: постоянной составляющей, амплитуды первой гармоники, фазы запаздывания радиотемпературы по отношению к оптической фазе. Спектр постоянной составляющей интегрального радиоизлучения, полученный, в основном, методом точных из-

Таблица 1

№ п/п	λ (см)	T_{e0} (°K)	T_{e1} (°K)	ξ_1 (град)	Ошибка измерения (\pm %)	Полуширина диаграммы	Авторы
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,087	191	140	5	15	11	Федосеев и др. [131]
2	0,106	19	117	15	12	13,5	" [131]
3	0,126	179	119,5	5	12	8	" [131]
4	0,13	219	120	16	15	10	Федосеев [86]
5	0,145	189	110	2	15	18,5	Кукин, Федосеев [131]
6	0,18	240	115	14	20	6	Наумов [84]
7	0,225	207	80	18	10	10	Кисляков, Наумов (в печати)
8	0,40	230	73	24	10	25	Кисляков [79]
9	0,40	228	85	27	15	1,6	Кисляков, Саломонович [91]
10	0,40	204	56	23	4	36	Кисляков, Плечков [132]
11	0,8	197	32	40	10	18	Саломонович [78]
12	0,8	211	40	30	15	2	Саломонович, Лосовский [89]
13	0,86	180	35	35	15	12	Гиббсон [94]
14	1,25	215	36	45	10	45	Пиддингтон, Миннет [72]
15	1,25	222	40	64	5	40	Плечков [100]
16	1,45	215	36	37	5	40	Плечков [100]
17	1,63	208	37	30	3	44	Каменская и др. [99]
18	1,63	207	32	10	3	44	Дмитренко и др. [68]
19	1,8	202	24	30	5	63	Плечков [100]
20	2,0	206	19	56	5	60	Плечков [100]
21	2,0	190	20	40	7,5	4	Саломонович, Кощенко [88]
22	2,5	210	15,5	42	5	72	Плечков [100]
23	3,15	195	12	44	15	9	Майер и др. [93]
24	3,2	223	17	45	15	6	Кощенко и др. [87]
25	3,2	245	16	41	15	40	Стрежнева, Троицкий [80]
26	3,2	210	13,5	55	2,5	72	Кротиков и др. [57]
27	3,2	213	14	26	2	87	Бондарь и др. [69]
28	3,2	216	16	15	3	40	" [60]
29	7,93	216	7	45	3,5	73	Алексеев и др. [69]
30	9,4	220	5,5		5	140	Медд, Бротон [81]
31	9,6	218	7	40	2,5	100	Кротиков [62]
32	11	214			12	17	Месгер, Штрасл [56]
33	11	219	6	55	3	110	Алексеев и др. [69]
34	14,2	221	—	—	2,5	140	" " [63]
35	20,8	225	—	—	2,5	100	" " [69]
36	20,8	205	5	36			Ваак [133]
37	21	217	5,3	48	2	36	" [133]
38	21	250	5		15	35	Месгер, Штрасл [59]
39	23	254	6,5		15	38	Кастелли и др [97]
40	25	226	—	—	3	180	Алексеев и др [71]
41	30,2	227	—	—	3,5	210	" " [71]
42	32,3	233	—	—	2,5	180	Разин, Федоров [86]
43	35	236	—	—	4	186	Кротиков и др. [64]
44	36	237	—	—	3	190	" " [64]
45	40	224	—	—	5	40	" " [64]
46	50	229	—	—	3	280	" [65]
47	58	224	—	—	—	—	Троицкий и др. [83]
48	70,16	225	—	—	3,5	90	Кротиков и др. [68]
49	168	233			4	13,6·4°	Болдуин [134]

мерений с помощью «искусственной Луны» [32, 57, 60–62, 64–71, 75–80, 82–86], приведен на рис. 21. Спектр амплитуды первой гармоники, характеризующийся отношением $\bar{M}(\lambda) = \bar{T}_{e0}(\lambda)/\bar{T}_{e1}(\lambda)$, представлен на рис. 22 [2, 57, 60–92], из которого видно, что на волнах длиннее 15–20 см колебания интенсивности излучения практически исчезают. На рис. 23 приведен спектр запаздывания фазы первой гармоники $\bar{\xi}_1(\lambda)$ [2, 57, 60–92].

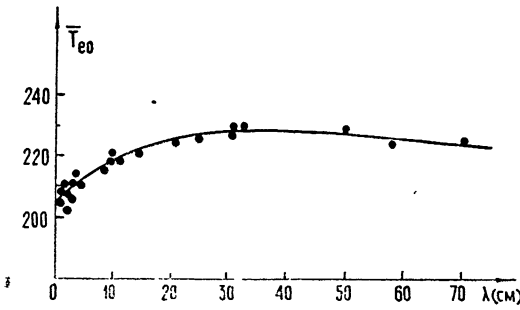


Рис. 21. Экспериментальный спектр постоянной составляющей интегрального радиоизлучения.

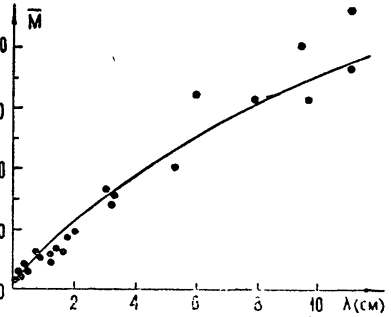


Рис. 22. Экспериментальный спектр $\bar{M} = \bar{T}_{e0}(\lambda)/\bar{T}_{e1}(\lambda)$.

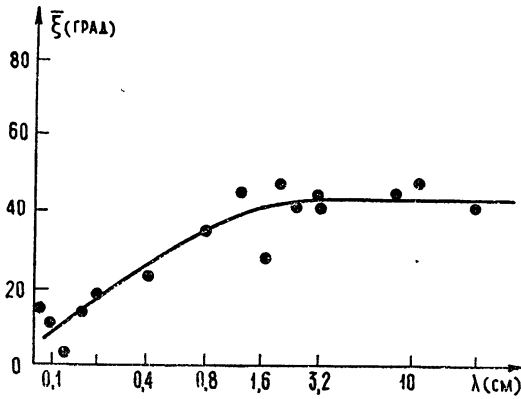


Рис. 23. Экспериментальный спектр запаздывания фазы первой гармоники.

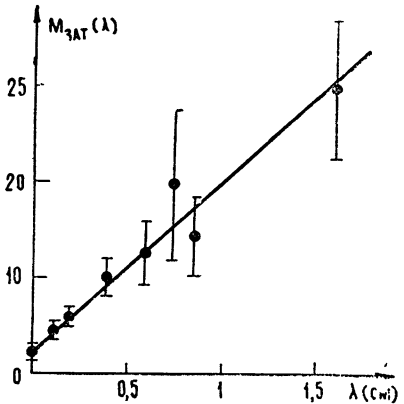


Рис. 24. Экспериментальный спектр $M_3 = \bar{T}_{em}/\Delta \bar{T}_e$.

Важная информация о свойствах вещества верхнего покрова заключена в данных об изменении интенсивности излучения во время лунных затмений [1, 18–20, 95–100]. Эти данные приведены на рис. 24, где по оси ординат отложена величина $\bar{M}_3 = \bar{T}_{em}/\Delta \bar{T}_e$, равная обратной величине максимального относительного падения интенсивности, характерного для конца теневой фазы затмения центра диска Луны. Как видно из этого рисунка, изменение интенсивности во время затмения практически отсутствует на волнах длиннее 1,5 см.

VI. РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРА КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ

Довольно существенной характеристикой поверхностного слоя Луны является спектр коэффициента отражения. Значения коэффициента отражения в широком диапазоне волн получены как методами радио-

астрономии, так и методами радиолокации. Существует несколько радиоастрономических методов определения коэффициента отражения, например, по постоянной составляющей радиотемпературы [36], по поляризации собственного излучения [102, 43—48], по распределению яркостной температуры по диску [37, 89, 101]. Но основной вклад в результаты исследования спектра коэффициента отражения вносят радиолокационные измерения, проведенные в более широком диапазоне волн [103—109].

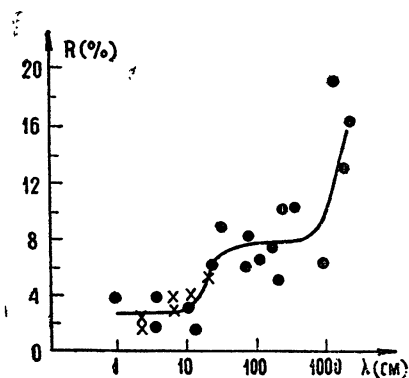


Рис. 25. Экспериментальный спектр коэффициента отражения.

На рис. 25 точками отмечены значения коэффициента локационного отражения, редуцированные соответственно указанным в разд. IV.1 данного обзора значениям g . Там же крестиками нанесены данные, полученные на основе измерения поляризации радиоизлучения.

VII. ЛАБОРАТОРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗЕМНЫХ ПОРОД

Естественное предположение о тождественности пород, составляющих верхние покровы Луны и Земли, привело к многочисленным лабораторным исследованиям земных пород. В оптическом диапазоне длин волн проводилось сравнение по таким характеристикам, как светлота, цвет, альbedo, индикатрисы рассеяния, кривые обратного рассеяния, поляризация отраженного света, ход отражательной способности по спектру. Обширный экспериментальный материал получен Барабашевым и Чекирдой [110], на основе которого ими был сделан вывод о том, что лунная поверхность, по-видимому, покрыта туфообразными горными породами в сильно раздробленном состоянии с размерами зерен 3—10 мм. В работе [111] проведено измерение альbedo и кривых обратного рассеяния у 200 различных поверхностей: горные, металлические, естественные — трава, лишайник, мох, искусственные — проволока, навитая на плоскую поверхность и т. д. Сравнение с лунными кривыми обратного рассеяния позволило авторам сделать вывод о том, что лунная поверхность покрыта горной пылью с размерами зерен 10—15 мк, которая в условиях лунного вакуума образует сложную пористую структуру. Более низкое альbedo лунных пород по сравнению с земными Хапке [112] объясняет бомбардировкой быстрыми частицами. Тщательные измерения поляризации света, отраженного Луной и различными земными породами, были проведены Лио [113] и позднее Дольфюсом [114], которые позволили им заключить, что поверхность Луны, вероятно, покрыта тонким слоем вулканической пыли или пепла.

Однако, все перечисленные выше оптические методы сравнения дают сведения лишь о тонком поверхностном слое, свойства которого могут отличаться от свойств более глубоких слоев. Кроме того, указанные способы не позволяют определить химическую природу вещества. Действительно, такие характеристики, как рассеяние и поляризация света при отражении, зависят в основном не от состава, а от геометрии поверхности, характера шероховатостей. Так, в работе [111] получено, что лунным кривым удовлетворяют кривые обратного рассеяния от поверхности лишайника, имеющего пористую структуру. По-видимому, единственной возможностью определения с Земли химического состава ве-

щества, образующего верхний покров Луны, является сравнение электрических характеристик лунной поверхности с соответствующими характеристиками земных пород. Метод оценки химического вещества Луны из радиоастрономических данных основан на предположении о том, что твердое вещество Луны является композицией силикатных пород, как и на Земле.

Измерения тангенса угла потерь $\operatorname{tg}\Delta$ и диэлектрической постоянной ϵ различных пород показали, что эти величины очень сильно зависят от химического состава и поэтому могут служить для его определения. Однако, как известно, параметры $\operatorname{tg}\Delta$ и ϵ зависят не только от химического состава, но еще и от плотности породы. В связи с этим в [16] было отмечено, что для сравнения необходимо пользоваться некоторыми функциями $\operatorname{tg}\Delta$ и ϵ , которые не зависели бы от плотности вещества, т. е. являлись бы инвариантами плотности. Теоретические и обширные экспериментальные исследования изверженных пород [15] показали, что с достаточной точностью величины $\operatorname{tg}\Delta/\rho = b$ и

$$(\sqrt{\epsilon} - 1)/\rho = a \quad (31)$$

не зависят от плотности ρ в широком интервале ее изменения. Измерения позволили обнаружить довольно четкую зависимость $b = \operatorname{tg}\Delta/\rho$ от количества окисла SiO_2 в породе.

Полученная зависимость служила для оценок содержания SiO_2 в лунном веществе, которое получилось равным 55—65% по весу [115—118]. Специальные экспериментальные исследования горных пород, проведенные в диапазоне 30—500 Мгц [40], показали, что величины b и a существенно определяются химической композицией пород и отчасти видом кристаллической структуры, иными словами, историей образования породы (интрузивные, эффузивные). Оказалось, что величина b для пород от кислых до основных меняется более чем в 20 раз, а величина a — в 2,5 раза от 0,45 — для кислых, до 1,1 — для ультраосновных. Величина b в сантиметровом и дециметровом диапазонах практически не зависит от частоты, в то время как a обнаруживает заметную частотную зависимость. Усредненная по всем породам частотная зависимость может быть представлена следующей эмпирической формулой:

$$a(\lambda) = a_0 + \xi \operatorname{lg} \lambda/\lambda_0. \quad (32)$$

Как показали измерения различных земных пород на волне $\lambda_0 = 3$ см, [15], среднее по всем породам значение $a_0 = 0,5$. Следовательно, выражение (31) приобретает вид

$$a(\lambda) = 0,5 + 0,045 \operatorname{lg} \lambda/3. \quad (33)$$

Анализ полученных в работе [40] значений b и a показал, что прослеживается в среднем определенная зависимость их от концентрации того или иного окисла в породе. Наиболее целесообразно эту зависимость изобразить в виде, аналогичном вариационной диаграмме Харкера [118]. На оси абсцисс откладывается величина a или b для какой-то породы, а на оси ординат — значения содержания окислов в породе. В результате для некоторых интрузивных пород получена диаграмма рис. 26 [119], причем при построении диаграммы данные о химическом составе породы брались в основном по известным из литературы типовым анализам для рассматриваемого вида породы.

Наличие закономерной связи параметров b и a с химическим составом связано с тем обстоятельством, что в породах вариации состава не произвольны. Не существует силикатных пород с произвольным содержанием различных окислов, уменьшение, например, содержания SiO_2 при переходе от одной породы к другой ведет, в среднем, к опре-

деленным изменениям в содержании одного или нескольких других окислов. Это фактически означает, что, например, процентное содержание SiO_2 в породе в среднем определяет содержание остальных окислов и, следовательно, тип породы.

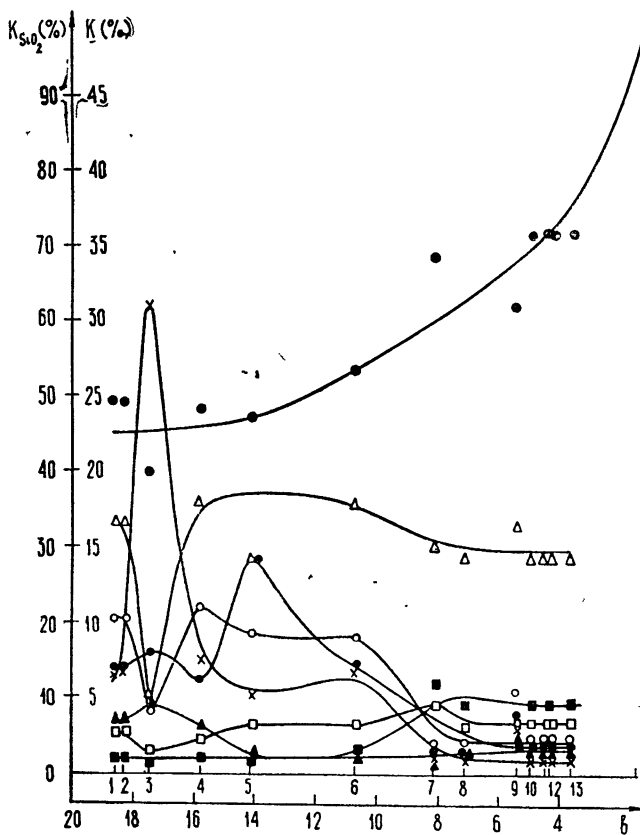


Рис. 26. Вариационная диаграмма потерь изверженных интрузивных пород:

1) габбро-диабаз № 1; 2) габбро-диабаз № 2; 3) перидотит; 4) габбро № 1; 5) габбро-диабаз № 3; 6) габбро № 2; 7) гранит-аплит; 8) гранит № 1; 9) кварцевый диорит; 10) гранит № 2, 11) гранит № 3; 12) гранит среднезернистый; 13) гранит № 4.

Зависимость удельного тангенса угла потерь от процентного содержания в породе:

●●● — SiO_2 , △△△ — Al_2O_3 и т. д.

Недавно выполнены измерения диэлектрической постоянной и тангенса угла потерь ряда горных пород на частотах 35 и 450 Гц [128]. Полученные данные хорошо согласуются с высказанными выше предположениями о зависимости электрических свойств от химического состава вещества и частоты.

VIII. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДАННЫХ СОБСТВЕННОГО И ОТРАЖЕННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ. СТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА ВЕРХНЕГО ПОКРОВА ЛУНЫ

Рассмотрим теперь кратко методы интерпретации экспериментальных данных о собственном излучении и отражении радиоволн для получения сведений о свойствах и структуре вещества верхнего покрова Луны. При этом мы не будем излагать подробно проведенные в соответствующих работах расчеты, а ограничимся описанием физической сущности анализа.

Совокупность уравнений (1)—(3), (14), (15) полностью определяет собственное излучение Луны. Следовательно, по различным характеристикам излучения можно (по крайней мере, в принципе) определить все параметры вещества, входящие в уравнения. С этой целью обычно ищется решение для семейства значений параметров, которые затем определяются путем сравнения расчета с опытом. Практически это возможно, когда решение зависит лишь от одного параметра. Мы же имеем около десятка неизвестных параметров (k , c , ρ , ϵ , d , q и т. д.), к тому же большинство из них в общем случае является функцией глубины, а иногда еще и функцией температуры. Поэтому метод анализа должен состоять в том, чтобы из характеристик излучения выбрать такие, которые определяются в основном одним параметром; другие параметры на них либо совсем не влияют, либо влияют настолько слабо, что этим влиянием в первом приближении можно пренебречь.

После того как на основании теоретического анализа такой выбор сделан, проводится определение по наблюдаемому явлению того или иного параметра, т. е. для объяснения характеристики излучения или группы характеристик строится соответствующая частная модель. Набор частных моделей, которые объясняют весь имеющийся экспериментальный материал, позволяет создать общую модель, наилучшим образом удовлетворяющую всем данным. Именно такой подход применялся при изучении Луны. Рассмотрим теперь конкретные результаты интерпретации.

1. Квазиоднородность свойств вещества в глубину

Возможность обнаружения резких неоднородностей поверхностного слоя в глубину связана с переменным тепловым режимом и с тем, что данные измерений интенсивности на разных волнах соответствуют измерению температуры на разных глубинах. С увеличением длины волны принимаемого излучения происходит как бы зондирование слоя в глубину. Любые резкие изменения свойств верхнего покрова с глубиной приводят к изменению распределения температуры и, следовательно, могут быть обнаружены в спектре радиоизлучения. В силу того, что в верхнем слое толщиной $(3 \div 4) l_T$ возникают значительные градиенты температуры за счет солнечного потока, изучение этого слоя оказывается наиболее доступным. (Спектры амплитуды первой гармоники и фазы запаздывания, например, несут информацию только об этом слое толщиной порядка нескольких десятков сантиметров.) Но, как увидим ниже, благодаря значительному потоку тепла из недр Луны и малой теплопроводности вещества верхнего слоя представляется возможным исследование поверхностного слоя до значительных глубин.

Анализ спектра амплитуды первой гармоники радиотемпературы (рис. 22) показал, что он хорошо удовлетворяет однородной модели поверхностного слоя и совершенно не соответствует резко-неоднородной модели, предполагавшей существование пылевого слоя толщиной в несколько миллиметров, покрывающего плотные породы [16]. О примерно однородном распределении тепловых свойств вещества в глубину гово-

рит и спектр запаздывания фазы первой гармоники $\xi_1(\lambda)$ (рис. 23). Предельное запаздывание фазы при увеличении λ равно 45° . Именно эта величина получается в теории однородной модели [12]. Всякая значительная неоднородность, особенно пылевой слой, приводит к заметному увеличению предельного запаздывания [72]. Таким образом, квази-однородная модель самого верхнего слоя довольно хорошо согласуется со спектром собственного излучения.

2. Тепловой параметр γ

Как было сказано в разд. II.1 данного обзора, при расчете теплового режима поверхности в первом приближении принималась однородная модель, в которой свойства не зависят от температуры и не меняются с глубиной. Во втором приближении рассматривалась однородная модель с теплопроводностью и теплоемкостью, зависящими от температуры.

Из измерений в настоящее время известно достаточно точно, что полуночная температура поверхности $T_n = 100^\circ\text{K}$, полуденная — $T_d = 395^\circ\text{K}$, отношение постоянной составляющей к амплитуде первой гармоники интегрального излучения при $\lambda = 0$ (т. е. в инфракрасном диапазоне) $T_0/T_1 = 1,3$ (см. рис. 22), а относительное падение температуры во время затмения (в том же диапазоне) $\Delta T_e/T_{em} = 0,52$ (см. рис. 24). Сопоставление этих величин с результатами теоретического расчета теплового режима поверхности в приближении однородной модели с учетом зависимости теплопроводности и теплоемкости от температуры [11] приводит к значениям параметра γ :

$$\gamma_1(300^\circ\text{K}) = 1000 \text{ кал}^{-1} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{сек}^{1/2} \cdot \text{град},$$

$$\gamma_2(300^\circ\text{K}) = 800 \text{ кал}^{-1} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{сек}^{1/2} \cdot \text{град}$$

соответственно для затмений и для лунаций.

Затменные значения γ относятся к самому верхнему слою, а лунационные — к слою, в десять раз более толстому. Близость значений γ для затменных и лунационных процессов тоже говорит в пользу равномерной однородности свойств в глубину.

3. Параметр $\delta = l_s/l_T$

Эффективную толщину излучающего слоя характеризует глубина проникновения электрической волны $l_s = 1/\chi_s$. Очевидно, что чем больше глубина излучающего слоя l_s по сравнению с глубиной проникновения тепловой волны l_T , тем меньше амплитуда колебаний интенсивности. Следовательно, спектр $\bar{M}(\lambda)$ характеризует величину отношения $\delta = l_s/l_T$. Сравнение экспериментального спектра $\bar{M}(\lambda)$ с соответствующей теоретической зависимостью $\bar{M}_{\text{теор}}(\lambda)$, задаваемой выражением (22), приводит к значению $\delta \simeq 2,3\lambda$. Полученный спектр величины $l_s = 2,3 l_T \lambda$, как и в случае модели первого приближения ($l_s = 2l_T \lambda$), указывает на диэлектрическую природу вещества верхнего покрова Луны. Наиболее вероятно, что таким диэлектриком могут быть породы, аналогичные земным, т. е. силикаты. Это сразу дает значение теплоемкости, которая для всех силикатов (с точностью до 10%) при $T = 300^\circ\text{K}$ равна $c(300) = 0,19 \text{ кал} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$.

4. Плотность вещества поверхностного слоя Луны

Выражение (31), приведенное выше, устанавливает фактически связь между диэлектрической постоянной вещества и его плотностью. Поэтому все возможные способы измерения ϵ , которые описаны ниже

в разд. VIII.6 обзора, позволяют определить плотность вещества верхнего покрова. Имются данные, указывающие на некоторую слабую неоднородность диэлектрических свойств вещества в глубину в верхнем слое порядка нескольких сантиметров. Это не противоречит сделанному выше утверждению, что спектры амплитуды и фазы запаздывания соответствуют однородной модели. Слабая неоднородность, при которой свойства вещества меняются с глубиной незначительно и плавно (в 1,2—1,3 раза по плотности), как показывают расчеты, мало сказывается на характере этих спектров. Их изменения в этом случае лежат в пределах точности измерений.

Для обнаружения неоднородности должны быть найдены такие параметры излучения, которые к ней чувствительны. Такими параметрами являются коэффициент отражения радиоволн, поляризация излучения и значение затменной и ночной температур поверхности. Увеличение коэффициента отражения в диапазоне длин волн 15—30 см (см. рис. 25) может указывать либо на реальную частотную зависимость диэлектрической постоянной вещества, либо на существование неоднородности диэлектрических свойств в зависимости от глубины. Первое предположение не проходит, так как увеличение ϵ с длиной волны, согласно теореме Крамерса — Кронига, неизбежно привело бы к увеличению потерь в этом диапазоне длин волн, что сказалось бы на спектре $M(\lambda)$. Это пока не обнаруживается. По-видимому, имеет место второй случай.

Как было показано в разд. IV.3 данного обзора, расчет коэффициента отражения для экспоненциального изменения плотности с глубиной показал, что длина волны λ , около которой происходит изменение коэффициента отражения, связана с характерным размером слоя y_0 соотношением

$$20 y_0 = \lambda_1.$$

Из эксперимента (см. рис. 25) $\lambda_1 \simeq 30$ см, следовательно, $y_0 \simeq 1,5$ см. Полный размер неоднородного слоя $d_1 \simeq 3$ —4 см. Наблюдаемому спектру $R(\lambda)$ в диапазоне 3 см $\leq \lambda \leq 100$ см удовлетворяют следующие данные [35]:

$$\rho_1 = (0,6 \div 0,7) \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad \rho_2/\rho_1 = 1,3 - 1,5, \quad y_0 = 1,5 \text{ см}.$$

К той же степени неоднородности приводят и измерения γ по температурам поверхности во время затмений и лунаций. Разница между γ_1 и γ_2 тоже указывает на слабое увеличение плотности в глубину. Слабое увеличение плотности вещества в глубину получено и из измерений, проведенных по программе Сервейера-VII. В работе [121] указывается, что для плотности вещества поверхности получено значение $\rho_1 \simeq 1 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, далее она растет в глубину в пределах верхних пяти сантиметров до величины $\rho_2 \simeq 1,5 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$.

Исследование свойств более глубоких слоев Луны оказалось возможным в связи с особенностью спектра постоянной составляющей интегрального радиоизлучения, полученного точным методом «искусственной Луны». Как указывалось в разд. III.2 обзора, об уплотнении вещества на глубине, соответствующей глубине проникновения длин волн 25—30 см, говорит тот факт, что постоянная составляющая практически перестает расти на $\lambda \geq 25$ см, т. е. спектр постоянной составляющей позволяет оценить толщину пористого слоя. На рис. 10 приведены теоретические кривые, построенные согласно (23). Там же для сравнения нанесены экспериментальные точки, взятые из рис. 21. Видно, что хорошее согласие теоретических и экспериментальных результатов получается при толщине пористого слоя

$$d_2 = 400 \pm 100 \text{ см}$$

с плотностью $\rho_2 = 12 \cdot \text{см}^{-3}$ и плотности потока тепла

$$q = (0,72 \pm 0,08) \cdot 10^{-6} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

На значительное уплотнение вещества на глубине порядка нескольких метров указывает и спектр коэффициента отражения радиоволн. Рост коэффициента отражения на волнах $\lambda > 10 \text{ м}$ [104], очевидно, говорит о том, что отражение этих волн происходит от более плотной породы.

На рис. 14 приведены теоретические спектры коэффициента отражения, рассчитанные при следующих значениях параметров:

$$y_0 = 1,5 \text{ см}; \rho_1 = 0,7 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}; \rho_2 = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}; \rho_3 = 2,5 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}; \\ d_2 = 100, 200, 300 \text{ см}.$$

Там же для сравнения нанесены экспериментальные точки, взятые из рис. 25. Видно, что рассматриваемая модель поверхностного слоя для указанных значений ρ_1, ρ_2, ρ_3 достаточно хорошо описывает наблюдаемый спектр коэффициента отражения. Для толщины пористого слоя получается значение

$$d_2 = 200 \pm 100 \text{ см}.$$

Из радиоастрономических измерений величина

$$d_2 = 400 \pm 100 \text{ см}.$$

По-видимому, более надежной из них является последняя. Действительно, информацию о величине d_2 в спектре коэффициента отражения в основном несут три измерения на волнах $\lambda > 10 \text{ м}$, к тому же точность этих измерений невелика. Чтобы уверенно получить d_2 из спектра $R(\lambda)$, необходимы, очевидно, дополнительные радиолокационные данные в метровом и дециметровом диапазонах длин волн.

5. Теплопроводность k и глубина проникновения тепловой волны L_T

Используя полученные выше значения $\gamma_1(300), \gamma_2(300), \rho_1, \rho_2, c(300)$, получаем, что теплопроводность вещества пористой поверхности $k_1(300) = (7 \pm 3) \cdot 10^{-6} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$ и теплопроводность пористого слоя $k_2(300) = (9 \pm 4) \cdot 10^{-6} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$. Приведенные здесь значения теплопроводностей k_1 и k_2 соответствуют температуре $T = 300^\circ\text{К}$.

Глубина проникновения тепловой волны, согласно (6), равна

$$L_T = \left(\frac{2k}{\rho c \Omega} \right)^{1/2} \simeq 7,5 \text{ см}.$$

6. Электромагнитные свойства вещества: глубина проникновения электрической волны l_s , диэлектрическая постоянная ϵ , удельный тангенс угла потерь $\text{tg}(\Delta/\rho)$

Выше было получено, что $l_s/L_T = 2,3\lambda$, $L_T \simeq 7,5 \text{ см}$, тогда $l_s \simeq 17\lambda$.

Как уже упоминалось, для определения диэлектрической постоянной ϵ вещества верхнего покрова Луны предложено несколько методов: определение ϵ по поляризации собственного излучения [43-48, 102], по распределению яркостной температуры по диску [37, 89, 101], по определению запаздывания фазы радиоизлучения участков диска, расположенных на разных долготах вдоль экватора Луны, по сравнению с фазой нагрева этих участков [122], по прямым локационным измерениям отражения [104-108]. Все эти методы основаны на том, что поверхность Луны достаточно гладкая, так что для коэффициента отражения справедливы формулы Френеля.

Поляризационный способ определения ϵ был использован в работах [43, 109, 123–125]. Эти измерения дают для диэлектрической постоянной вещества поверхности величину $\epsilon_1 \approx 2$ и для диэлектрической постоянной вещества твердого пористого слоя $\epsilon_2 \approx 2,5$.

Из найденных значений ϵ , согласно (31) и (32), для плотностей ρ_1 и ρ_2 получаются величины $\rho_1 = 0,75 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ и $\rho_2 = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, что совпадает со значениями этих величин, полученными выше по спектрам коэффициента отражения и постоянной составляющей радиоизлучения.

Сравнение спектра изменения интенсивности во время лунных затмений с теорией позволяет определить удельный тангенс угла потерь $b_1 = \text{tg } \Delta_1 / \rho_1$ для первых сантиметров слоя (см. разд. III.3 обзора).

Эта величина для сантиметровых волн оказывается равной

$$b_1 = (9 \pm 3) \cdot 10^{-3}.$$

Принимая во внимание значения для c, γ_2, ϵ_2 , полученные из лунационных измерений, имеем $b_2 = (8 \pm 2) \cdot 10^{-3}$.

7. Химический состав лунного вещества

Для определения химического состава вещества Луны использован метод, описанный в разд. VII настоящего обзора. Пользуясь графиком рис. 26 и значением $b = (9 \pm 3) \cdot 10^{-3}$, нетрудно найти, что верхний покров вещества Луны имеет в среднем по полусфере следующий химический состав:

$\text{SiO}_2 - 57 \pm 3\%$, $\text{Al}_2\text{O}_3 - 16 \pm 1\%$, $\text{Fe}_2\text{O}_3 - 1 \pm 2\%$,

$\text{FeO} - 5 \pm 1\%$, $\text{CaO} - 5,5 \pm 2,5\%$, $\text{MgO} - 3,5 \pm 2\%$,

$\text{Na}_2\text{O} - 4 \pm 0,5\%$, $\text{K}_2\text{O} - 3 \pm 1\%$, $\text{TiO}_2 - 1 \pm 0,5\%$.

В табл. 2 приведено сравнение результатов химического анализа, полученного указанным методом, с результатами анализа данных Сервейеров [119] (состав выражен в процентном содержании атомов).

Таблица 2

Элемент	Сервейер-V	Сервейер-VI	Сервейер-VII	Радиоастрон.
O	58±5	57±5	58±5	62±4
Si	18,5±3	22±4	18±4	20±1
Al	6,5±2	6,5±2	9±3	7±0,5
Mg	3±3	3±3	4±3	2±1
Fe } Ca }	13±3	5±2 6±2	2±1 6±1	2±0,5 2±1
K	—	—	—	1,5±0,5
Na	2	2	3	1,5±0,5

Как видно из таблицы, соответствие очень хорошее. (При сравнении значений для Ca надо иметь в виду, что данные, полученные Сервейером, включают в себя и концентрацию K.)

Интересно сопоставить эти результаты с результатами анализа вещества, доставленного космонавтами на корабле Аполлон-11. В работе [63] приведен следующий средний химический состав лунного вещества:

$\text{SiO}_2 - 41\%$; $\text{CaO} - 10,5\%$; $\text{MgO} - 8\%$; $\text{FeO} - 18\%$; $\text{Al}_2\text{O}_3 - 11,3\%$;

$\text{N}_2\text{O} - 0,6\%$; $\text{K}_2\text{O} - 0,2\%$; $\text{TiO}_2 - 10\%$.

Отличие этих данных от приведенных выше довольно существенное: значительно больше окислов железа, магния и кальция, а также на по-

рядок больше двуокиси титана. Обращает на себя внимание существенно меньшее количество окиси калия и натрия. Эти особенности авторами работы [63] объясняются испарением легкоплавких окислов в процессе тепловой истории Луны.

8. Микроструктура вещества верхнего покрова Луны

Выше было показано [13], что если вещество Луны непроницаемо для инфракрасных волн, то доля радиационного переноса излучения через поры $k_{rn}/k_0 = 0,25$, при проницаемом веществе $kr/k_0 = 0,4$. Принимая $k = k_r + k_0 = (9 \pm 3) \cdot 10^{-6} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$, получим, что $k_{rn} = (1,5 \div 2,5) \cdot 10^{-6} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$ или $k_r = (2,0 \div 3,5) \times 10^{-6} \text{ кал} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1}$.

По полученному k_{rn} из (7) найдем, что эффективный размер пор составляет 170—350 мк. Поскольку пористость вещества близка к 50%, размеры пор должны быть примерно равны размеру частиц. Если считать вещество проницаемым для инфракрасных волн, то, согласно (8), в соответствии с приведенным значением k_r получается, что $a = (6 \div 12)$ и, следовательно, для инфракрасных волн $l_s = (6 \div 12) \lambda$. Для волн длиннее 1000 мк, как мы видели, $l_s = 17 \lambda$. Нам представляется наиболее вероятным, что вещество проницаемо для инфракрасных волн. Тогда, чтобы перенос тепла через поры был незначителен, последние, а следовательно, и частицы вещества, должны быть во много раз меньше длины пробега инфракрасного кванта, равной $l_s = 60—120$ мк. По видимому, это могут быть частицы размером от десятка до нескольких десятков микрон [13].

9. Однородность свойств по поверхности

Полученные выше результаты, за исключением данных для γ , являются усредненными по всей полусфере Луны. Поэтому естественно возникает вопрос о том, в какой мере они соответствуют локальным значениям. Согласно исследованиям на инфракрасных волнах, тепловые свойства по диску, за исключением днщ лучистых кратеров, меняются очень мало, не более чем на 20—25% [126]. Эти изменения находятся практически в пределах точности измерений. Обнаружена также большая степень однородности по диску характеристик радиоизлучения, таких как $\bar{M}(\lambda)$ и ξ_1 , при усреднении по площадям от десятков до сотен километров [87—91, 126].

В связи с этим можно говорить о существовании радиометрической однородности, аналогичной известной фотометрической однородности [127], связанной с однородностью характеристик отраженного света. Радиометрическая однородность указывает на однородность в распределении электрических свойств вещества по поверхности Луны в слое толщиной по крайней мере 10 см. В частности, оказывается, что вещество на поверхности морей и материков практически одинаково [126]. Заведомо не соответствует характеристикам излучения гипотеза, что верхняя порода материков — граниты, а морей — базальты.

Более точные измерения распределения радиоизлучения по диску Луны на волне $\lambda = 8$ мм [64] обнаружили некоторое различие свойств и позволили сделать вывод о том, что плотность вещества морей, видимо, несколько больше плотности вещества материков.

В силу большой однородности свойств верхнего покрова по горизонтали полученные характеристики представляют реальные свойства вещества в каждом месте. Большая однородность свойств подтверждается результатами, полученными с помощью прямых исследований Луны. Однако исследования химического состава по программе «Сер-

Таблица 3

Наименование с л о я	Глубина слоя d (с.м)	Плотность ρ (г.с.м ⁻³)	Порис- тость p (%)	Тепло- проводность $k(300) \cdot 10^6$ кал с.м.сек.град	Тепло- емкость $c(300)$ кал г.град	Тепловая инерция γ с.м ² .сек ^{1/2} кал.град	Глубина проникно- вення тепловой волны l_T (с.м)	Плотность потока тепла $q \cdot 10^6$ кал с.м ² .сек	Диэлек- тричес- кая по- стоянная ϵ	Удель- ный тангенс угла потери $\operatorname{tg} \Delta / \rho$	Глубина проникно- вення электро- магн. волны l_s (с.м)
Пористая по- верхность	0—4	$0,7 \pm 0,2$	80	7 ± 3	0,19	1000	7,5	$0,7—0,8$	$2 \pm 0,2$	9 ± 3	15—17λ
Пористый слой	4—400	$1 \begin{matrix} +0,2 \\ -0,1 \end{matrix}$	60	9 ± 3	0,19	800	7,5	$0,7—0,8$	$2,5 \pm 0,2$	8 ± 2	15—17λ
Переходный слой	400—600	1,5—2	30	10^3	0,19				3,5		
Скальные породы	Больше 600	2,5—3	0—10	$5 \cdot 10^3$	0,19				5—6		

вейер» установили, что моря содержат в 2—3 раза больше окислов железа, чем материка.

10. Общая модель строения верхнего слоя Луны

На основании всего изложенного выше, можно сказать, что верхний покров Луны наиболее полно описывается четырехслойной моделью. Правда, реально плотность от слоя к слою меняется довольно плавно, так что такое разбиение на слои вводится несколько условно для упрощения картины. Свойства этих слоев представлены в табл. 3.

IX. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показывает проведенное рассмотрение, исследование собственного теплового излучения Луны позволяет получить довольно полные данные о температурном режиме поверхности Луны, ее физических условиях и структуре вещества. Объективность полученных данных подтверждают результаты прямых исследований Луны. Это позволяет с уверенностью считать, что разработанные методы анализа и интерпретации данных могут быть с успехом применены к исследованию некоторых других планет, например, Марса, физические условия на котором близки к физическим условиям на Луне.

Авторы благодарны В. Д. Кротикову за ценную дискуссию обзора.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Pettit, S. B. Nicolson, *Astrophys. J.*, **72**, 102 (1930).
2. R. H. Dicke, R. Beringer, *Astrophys. J.*, **103**, 735 (1946).
3. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, УФН, **81**, 589 (1963)
4. V. S. Troitsky, *J. Res. NBS*, **69D**, № 12, 1585 (1965).
5. W. H. H. H. H. H., *Solar Syst. Radio Astron., Atheus. Ionosph. Inst. Nat. Observ.*, 1965, p. 295.
6. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1266 (1967).
7. V. S. Troitsky, *Phil. Trans. Royal Soc. London*, **A264**, 145 (1969).
8. J. C. Wesselink, *Bull. Astron. Inst. Neth.*, **10**, 351 (1948).
9. J. G. Jaeger, *Austr. J. Phys.*, **6**, 10 (1953).
10. В. Д. Кротиков, О. Б. Щуко, *Астрон. ж.*, **40**, 297 (1963)
11. V. S. Troitsky, A. B. Bugov, T. N. Alyoshina, *Icarus*, **8**, 423 (1968).
12. В. С. Троицкий, *Астрон. ж.*, **31**, 51 (1954)
13. V. S. Troitsky, *Nature*, **213**, 688 (1967); В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 8, 1051 (1967).
14. H. C. Ingraо, A. T. Young, J. L. Linsky, *Harv. Coll. Observ. Rep.*, № 6 (1965).
15. R. W. Munsey, *Nature*, **181**, 1458 (1958).
16. В. С. Троицкий, *Астрон. ж.*, **39**, 73 (1962).
17. В. А. Алексеев, Л. В. Дробова, В. Д. Кротиков, *Астрон. ж.*, **45**, 1101 (1968).
18. W. J. Welch, D. D. Thornton, S. Winter, *J. Geophys. Res.*, **70**, 2793 (1965).
19. В. С. Троицкий, *Астрон. ж.*, **42**, 1296 (1965).
20. E. Pettit, *Astrophys. J.*, **91**, 408 (1940).
21. R. W. Shorthill, J. M. Saary, *Science*, **150**, 210 (1965).
22. A. E. Gear, J. A. Bastin, *Nature*, **196**, 1305 (1962).
23. D. Buhl, Ph. D. Thesis, University of California (1967).
24. T. Hagfors, *J. Geophys. Res.*, **69**, 3779 (1964).
25. B. G. Smith, *J. Geophys. Res.*, **72**, 4059 (1967).
26. H. C. Ingraо, A. T. Yong, J. L. Linsky, *The Nature of the Lunar Surface*, The Johns Hopkins Press, Baltimore, 1966, p. 185.
27. J. J. Hopfield, *Science*, **151**, 1380 (1966).
28. E. C. Roelof, *Icarus*, **8**, 138 (1968).
29. Т. В. Тихонова, В. С. Троицкий, *Астрон. ж.*, **46**, 159 (1969).
30. А. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах*, изд. АН СССР, М., 1957.
31. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **6**, № 5, 889 (1963).
32. В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **5**, № 3, 602 (1962).
33. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, *Астрон. ж.*, **40**, 1076 (1963).

34. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 633 (1963)
35. Ю. Г. Матвеев, Г. Л. Сучкин, В. С. Троицкий, Астрон. ж., 42, 810 (1965).
36. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж., 39, 1089 (1962).
37. В. А. Алексеев, Т. Н. Алешина, В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Астрон. ж., 44, 1070 (1967)
38. А. А. Богданов, И. Я. Брусин, М. С. Кагорлицкий, Т. В. Тихонова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 801 (1968)
39. Т. В. Тихонова, В. С. Троицкий, Астрон. ж., 46, 1324 (1969).
40. Л. Н. Бондарь, К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Физика Земли (в печати).
41. В. А. Алексеев, В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 8, 1133 (1968)
42. T. Hagfors, J. Moriella, Radio Science, 69D, 1614 (1965).
43. Н. С. Соболева, Астрон. ж., 39, 1124 (1962).
44. Б. Я. Лосовский, Астрон. ж., 44, 416 (1967).
45. Н. С. Соболева, Изв. ГАО, вып. 6, 205 (1967).
46. В. А. Алексеев, Т. Н. Алешина, В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 5, 604 (1967).
47. В. А. Алексеев, В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 1, 5 (1969)
48. В. А. Алексеев, Т. Н. Алешина, В. Д. Кротиков, Л. А. Молькова, Симпозиум по физике Луны и планет, Киев, 1968
49. D. Winter, Boeing Sci. Res. Lab. Doc., D1-82-0717 (1968).
50. В. С. Murray, R. L. Wildey, Astrophys. J., 139, 734 (1964).
51. F. J. Low, Astrophys. J., 142, 806 (1965).
52. R. W. Shorthill, J. M. Saary, Boeing Sci. Res. Lab. Doc., D1-82-0778 (1969).
53. J. M. Saary, R. W. Shorthill, Icarus, 2, 115 (1963).
54. K. J. K. Buettner, Planet. Space Sci., 11, 135 (1963)
55. J. A. Bastin, Nature, 207, 1381 (1965).
56. P. G. Messger, H. Strassl, Planet. Space Sci., 1, 213 (1959).
57. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 6, 1004 (1961).
58. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 6, 1265 (1963).
59. Т. В. Тихонова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 8, 1121 (1969).
60. Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, В. А. Порфирьев, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 4, 802 (1962).
61. Б. Н. Семенов, С. А. Каменская, В. С. Троицкий, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 5, 882 (1962)
62. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав. Радиофизика, 5, № 3, 604 (1962).
63. Science, 165, № 3899, 1211 (1969).
64. В. Д. Кротиков, В. А. Порфирьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 2, 242 (1963).
65. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 6, 1087 (1963).
66. Д. А. Дмитренко, С. А. Каменская, В. Л. Рахлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 555 (1964).
67. А. В. Захаров, В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 553 (1964).
68. В. Д. Кротиков, В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Астрон. ж., 41, № 5, 951 (1964).
69. В. А. Алексеев, В. Д. Кротиков, Ю. Г. Матвеев, Н. Б. Михайлова, В. А. Порфирьев, В. П. Рязанов, А. И. Сергеева, К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, С. А. Шмулевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 5, 1030 (1966).
70. В. М. Плечков, Астрон. ж., 44, № 1, 154 (1967).
71. В. А. Алексеев, Л. Н. Бондарь, С. А. Каменская, В. Д. Кротиков, Ю. Г. Матвеев, К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Астрон. ж., 44, № 3, 593 (1967)
72. J. H. Piddington, H. G. Minnet, Austr. J. Sci. Res., 2A, 643 (1949).
73. J. P. Hagen, NRL Report, № 3504 (1949).
74. J. H. Piddington, H. G. Minnet, Austr. J. Sci. Res., 4A, 459 (1951).
75. В. С. Троицкий, М. Р. Зелинская, Астрон. ж., 32, № 6, 550 (1955).
76. А. Е. Соломонович, Астрон. ж., 35, № 1, 129 (1958).
77. М. Р. Зелинская, В. С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Астрон. ж., 36, № 4, 643 (1959)
78. М. Р. Зелинская, В. С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 3, 506 (1959)
79. А. Г. Кисляков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 433 (1961).

80. К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 4, 600 (1961).
81. W. J. Medd, N. W. Broten, Planet Space Sci., 5, 307 (1961).
82. А. Г. Кисляков, Астрон. ж., 38, № 3, 561 (1961).
83. В. С. Троицкий, В. Д. Кротиков, Н. М. Цейтлин, Астрон. ж., 44, № 2, 413 (1967).
84. А. И. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 4, 847 (1963).
85. Л. И. Федосеев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 4, 655 (1963).
86. В. А. Разин, В. Т. Федоров, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 5, 1052 (1963).
87. В. Н. Кощенко, А. Д. Кузьмин, А. Е. Соломонович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 4, 596 (1961).
88. А. Е. Соломонович, В. Н. Кощенко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 4, 591 (1961).
89. А. Е. Соломонович, Б. Я. Лосовский, Астрон. ж., 39, № 6, 1074 (1962).
90. А. Е. Соломонович, Астрон. ж., 39, № 1, 79 (1962).
91. А. Г. Кисляков, А. Е. Соломонович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 431 (1963).
92. A. E. Solomonovich, Proc. Roy. Soc., 296, 354 (1967).
93. C. H. Mayer, R. M. McCullough, R. M. Sloanaker; The Solar system, 3, Univ. Chicago, 1961.
94. J. E. Gibson, Astrophys. J., 133, 1072 (1961).
95. W. M. Sinton, Astrophys. J., 123, № 2, 325 (1956).
96. R. W. Shorthill, H. C. Borough, J. M. Canley, Publ. Astron. Soc. Pac., 72, № 429, 481 (1960).
97. J. P. Castelli, C. P. Ferioli, J. Aarons, Astronom. J., 65, № 9, 485 (1960).
98. J. M. Saary, R. W. Shorthill, Boeing Sci. Res. Lab., July, 1962.
99. С. А. Каменская, А. Г. Кисляков, В. Д. Кротиков, В. М. Плечков, А. И. Наумов, В. Н. Никонов, В. А. Порфирьев, К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Л. И. Федосеев, Л. В. Лубяко, Э. П. Сорокина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 2, 219 (1965).
100. В. М. Плечков, Астрон. ж., 43, № 1, 172 (1966).
101. В. Н. Кощенко, А. Д. Кузьмин, А. Е. Соломонович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 4, 596 (1961).
102. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 6, 1127 (1960).
103. J. V. Evans, Physics and Astronomy of the Moon, Acad. Press, N. Y.—London, 1962, p. 429.
104. J. V. Evans, J. Res. Nat. Bur. Stand., 69D, № 12, 1637 (1965).
105. A. Giraud, J. Res. Nat. Bur. Standards, 69D, № 12, 1677 (1965).
106. J. R. Davis, D. C. Rahlfs, G. A. Skaggs, J. W. Joss, J. Res. Nat. Bur. Standards, 69D, № 12, 1659 (1965).
107. J. V. Evans, T. Hagfors, J. Geophys. Res., 71, № 20, 4871 (1966).
108. Т. Хэгфорс, Симпозиум по физике Луны и планет, г. Киев, 1968.
109. R. D. Davies, F. F. Gardner, Aust. J., 19, № 16, 823 (1966).
110. Н. П. Барабашов, А. Т. Чекирда, Астрон. ж., 3, 827 (1960).
111. В. Нарке, H. Van Horn, CRSR 139, Cornell University, Ithaca, New York, February, 1963.
112. В. Нарке, Astron. J., 71, 333 (1966).
113. B. Lyot, Ann. de J'Obs. de Paris, Sect. de Medon, 8 (1929).
114. A. Dollfus, Ann. Astrophys., 19, № 2 (1956).
115. В. Д. Кротиков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 6, 1057 (1962).
116. W. E. Fensler, E. F. Knott, A. Olte, K. M. Siegel, IAU Symposium, Acad. Press, N. Y.—London, 1962, p. 14.
117. A. Olte, K. M. Siegel, Astrophys. J., 133, 706 (1961).
118. А. Г. Бетехтин, Курс минералогии, изд. ГНТ, М., 1956.
119. В. С. Троицкий, Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, К. М. Стрежнева, Астрон. вестник, 3, № 4 (1969).
120. Н. Н. Крупенин, Диссертация, ИКИ АН СССР, 1969.
121. Leonard Jaffe, Science, 164, 1514 (1969).
122. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 38, 1001 (1961).
123. G. E. Heiles, F. D. Drake, Icarus, 2, 281 (1963).
124. Gol'nev, N. S. Soboleva, Pros. Astr. Obs. Pulkova, 13, 83 (1964).
125. J. W. Baars, P. G. Mezger, N. Savin, H. Wendker, Astr. J., 70, 132 (1965).
126. В. С. Троицкий, Астрон. ж., 59, 724 (1964).
127. Н. П. Барабашов, В. А. Езерская, В. И. Езерский, Т. И. Ишутина, Изв. ком. по физ. планет, № 1, 67 (1959).

-
128. M. J. Campbell, J. Ulrichs, B. Napke, CRSR, Cornell University, Ithaca, New York, February, 1969.
 129. J. L. Linsky, *Icarus*, **5**, № 6, 606 (1966).
 130. L. D. Stimpson, J. W. Lucas, Report JPR, № NAS 7-100 (1968).
 131. Л. И. Федосеев, Л. В. Лубяко, Л. М. Кукин, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, **11**, № 6, 807 (1968).
 132. А. Г. Кисляков, В. М. Плечков, Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика, **7**, № 1, 46 (1964).
 133. J. A. Waak, *Astron. J.*, **66**, 298 (1961).
 134. J. E. Baldwin, *Month Not. Roy. Astron. Soc.*, **122**, 513 (1961).

Научно-исследовательский радиопизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
3 декабря 1969 г.

УДК 551 510.535

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В УСЛОВИЯХ ИОНОСФЕРЫ

Б. Н. Гершман, А. В. Самсонов

Применительно к ионосферным условиям получены уравнения для потенциала электростатического поля при наличии источников. Появление безвихревых полей может быть обусловлено движениями нейтрального газа. Исследование проведено при учете слагаемых, ответственных за амбиполярную диффузию плазмы.

Выявлено, что эффективность возбуждения и особенно степень проникновения существенным образом связаны с горизонтальными масштабами полей.

С электростатическими полями в ионосфере или магнитосфере приходится сталкиваться при анализе различных геофизических явлений [1-3]. К ним, в частности, можно отнести дрейфы неоднородностей в области F , изучение которых было в последние годы одним из основных направлений физики ионосферы (см., например, обзоры [4, 5]). При этом в ряде работ получила обоснование та точка зрения, что эти поля просачиваются в F -слой из области E [6-9]*. Рассматривались также возможности проникновения полей и из магнитосферы [11, 12].

Несмотря на значительное число исследований, касающихся возникновения электрических полей в области F [6-13], ряд основных вопросов еще до сих пор остается неясным. Во-первых, в [6-12] анализ проводился без рассмотрения процессов возбуждения. В силу этого было невозможно сделать даже оценки напряженностей полей. Исключение представляет последняя работа [13], однако в ней используется только усредненная модель кусочно-однородной ионосферы. Другим новым моментом, отличающим последующее исследование от анализа в [6-13], является учет при определении степени проникновения полей слагаемых, ответственных за амбиполярную диффузию плазмы. В результате ниже будет дана отличная от [7-9, 12] трактовка вопроса о просачивании полей с малыми горизонтальными масштабами.

В разд. 1 мы получим систему уравнений для отыскания потенциала φ .

В разд. 2 после исключения слагаемых, отражающих неоднородность в распределении электронов, эта система будет приближенным образом сведена к одному дифференциальному уравнению для φ . Коэффициенты последнего, в отличие от выводов ряда работ [7-9, 12], будут различными в зависимости от масштабов, характеризующих неоднородную структуру полей в горизонтальном направлении.

Анализ вида слагаемых, обуславливающих возбуждение полей, позволяет выявить особенности движения нейтральных частиц, при наличии которых генерация происходит наиболее эффективно. На основе полученных уравнений можно рассчитать степень возбуждения и просачивания электростатических полей в область F ионосферы. Результаты этих расчетов мы надеемся опубликовать в будущем.

* Просачивание электрических полей вихревого типа рассматривалось в [10].

1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКОВ

В этом разделе мы получим систему уравнений, содержащую в качестве одной из переменных потенциал φ . Ранее уравнения для φ рассматривались, как правило, без учета возбуждения, которое может быть обусловлено движением нейтральной компоненты. Определение величин полей можно провести только при учете эффектов, обеспечивающих их генерацию.

Предлагаемый далее вывод будет отличаться от используемого в работах [7-9, 12, 13] также и тем, что мы здесь примем во внимание влияние амбиполярной диффузии. В связи с этим нам будет удобнее исходить не из обобщенного закона Ома, используемого в [7, 8, 12], а непосредственно из квазигидродинамических уравнений для электронов и ионов. Учет диффузионных слагаемых, как это естественно ожидать, скажется на просачивании полей с мелкомасштабной структурой. Для полей с крупномасштабной структурой результаты, если не принимать во внимание наличие слагаемых, ответственных за возбуждение полей, совпадают с известными ранее [7, 8, 12].

Будем использовать квазигидродинамические уравнения движения электронов и ионов, пренебрегая нелинейными и инерциальными слагаемыми. Последнее вполне законно, если масштабы движений больше длин свободного пробега и характерные длительности значительно превышают интервалы между столкновениями.

Определяя из упомянутых уравнений скорости электронов и ионов u_e и u_i при выполнении условия квазинейтральности, получаем

$$Nu_e = \frac{v_e^2}{v_e^2 + \omega_H^2} \left\{ Nu - N \frac{\omega_H}{v_e} [u, h] + N \frac{\omega_H^2}{v_e^2} h(u, h) - \right. \\ \left. - \frac{\chi T}{m v_e} \left(\nabla N - \frac{\omega_H}{v_e} [\nabla N, h] + \frac{\omega_H^2}{v_e^2} h(\nabla N, h) \right) + \right. \\ \left. + \frac{eN}{m v_e} \left(\nabla \varphi - \frac{\omega_H}{v_e} [\nabla \varphi, h] + \frac{\omega_H^2}{v_e^2} h(\nabla \varphi, h) \right) \right\}; \quad (1)$$

$$Nu_i = \frac{v_i^2}{v_i^2 + \Omega_H^2} \left\{ Nu + N \frac{\Omega_H}{v_i} [u, h] + N \frac{\Omega_H^2}{v_i^2} h(h, u) - \right. \\ \left. - \frac{\chi T}{M v_i} \left(\nabla N + \frac{\Omega_H}{v_i} [\nabla N, h] + \frac{\Omega_H^2}{v_i^2} h(\nabla N, h) \right) - \right. \\ \left. - \frac{eN}{M v_i} \left(\nabla \varphi + \frac{\Omega_H}{v_i} [\nabla \varphi, h] + \frac{\Omega_H^2}{v_i^2} h(\nabla \varphi, h) \right) \right\}, \quad (2)$$

где скорость молекул u считается заданной, N — концентрация электронов, приближенно равная в силу квазинейтральности концентрации ионов, m и M — массы электрона и иона, ω_H и Ω_H — их гирочастоты, e — абсолютная величина заряда электрона, χ — постоянная Больцмана (электронное и ионное давления предполагались изотропными), T — температура (плазма считается изотермической), v_e и v_i — числа столкновений электронов и ионов с молекулами, h — единичный вектор в направлении геомагнитного поля H_0 .

Далее воспользуемся законами сохранения числа электронов и ионов:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} Nu_e - I + \alpha_{\text{эфф}} N^2 = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} Nu_i - I + \alpha_{\text{эфф}} N^2 = 0. \quad (4)$$

Здесь I — эффективная скорость ионообразования и $\alpha_{\text{эфф}}$ — коэффициент рекомбинации.

Выберем прямоугольную систему координат, направив ось x по геомагнитному меридиану, ось y — на восток и ось z — вертикально вверх. При таком выборе системы координат справедливо равенство $\mathbf{h} = -\cos \chi \mathbf{i} - \sin \chi \mathbf{k}$ ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты). Угол χ представляет магнитное наклонение. Проектируя (1), (2) на оси x, y, z , находим

$$Nu_{ex} = (1 + \beta_e^2)^{-1} [(1 + \beta_e^2 \cos^2 \chi) A_{ex} + \beta_e \sin \chi A_{ey} + \beta_e^2 \cos \chi \sin \chi A_{ez}],$$

$$Nu_{ey} = (1 + \beta_e^2)^{-1} [A_{ey} - \beta_e \sin \chi A_{ex} + \beta_e \cos \chi A_{ez}], \quad (5)$$

$$Nu_{ez} = (1 + \beta_e^2)^{-1} [\beta_e^2 \sin \chi \cos \chi A_{ex} - \beta_e \cos \chi A_{ey} + (1 + \beta_e^2 \sin^2 \chi) A_{ez}],$$

где $\beta_e = \omega_H / \nu_e$ и $\mathbf{A}_e = N\mathbf{u} - (xT/m\nu_e) \nabla N + (eN/m\nu_e) \nabla \varphi$. Соответствующие выражения для Nu_{ix}, Nu_{iy} и Nu_{iz} получаются заменой в (5) β_e на $-\beta_i = -\Omega_H / \nu_i$ и \mathbf{A}_e на \mathbf{A}_i . Соотношение для \mathbf{A}_i получается из формулы для \mathbf{A}_e заменой m на M, ν_e на ν_i и e на $-e$.

Подставляя (5) в (3) и считая, что параметр β_e (или ν_e) зависит от высоты z , в пренебрежении изменением температуры получаем нелинейное уравнение для переменных φ и N :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{e}{m\nu_e(1 + \beta_e^2)} \left\{ (1 + \beta_e^2 \cos^2 \chi) \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \right. \\ & + (1 + \beta_e^2 \sin^2 \chi) \frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - (\mathbf{h}, [\nabla N, \nabla \varphi]) + \beta_e^2 \sin \chi \cos \chi \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(N \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \right. \\ & + \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] + \frac{N}{1 + \beta_e^2} \frac{\partial \beta_e}{\partial z} \left[\beta_e (3 + \beta_e^2) \cos \chi \sin \chi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2 \cos \chi \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \right. \\ & + \left. \beta_e^{-1} (1 + 3 \sin^2 \chi \beta_e^2 - \beta_e^2 + \beta_e^4 \sin^2 \chi) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \left. \right\} - \frac{xT}{m\nu_e(1 + \beta_e^2)} \left\{ (1 + \right. \\ & + \beta_e^2 \cos^2 \chi) \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + (1 + \beta_e^2 \sin^2 \chi) \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + 2\beta_e^2 \sin \chi \cos \chi \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z} + \\ & + (1 + \beta_e^2)^{-1} \frac{\partial \beta_e}{\partial z} \left[\beta_e (3 + \beta_e^2) \cos \chi \sin \chi \frac{\partial N}{\partial x} - 2 \cos \chi \frac{\partial N}{\partial y} + \right. \\ & + \left. \beta_e^{-1} (1 + 3 \sin^2 \chi \beta_e^2 - \beta_e^2 + \beta_e^4 \sin^2 \chi) \frac{\partial N}{\partial z} \right] \left. \right\} + \frac{1}{1 + \beta_e^2} \left\{ (1 + \beta_e^2 \cos^2 \chi) \frac{\partial}{\partial x} \times \right. \\ & \times (Nu_x) + \frac{\partial (Nu_y)}{\partial y} + (1 + \beta_e^2 \sin^2 \chi) \frac{\partial (Nu_z)}{\partial z} + \beta_e^2 \cos \chi \sin \chi \left(\frac{\partial Nu_z}{\partial x} + \right. \\ & + \left. \frac{\partial Nu_x}{\partial z} \right) - \beta_e (\mathbf{h}, \operatorname{rot} N\mathbf{u}) + \frac{N}{1 + \beta_e^2} \frac{\partial \beta_e}{\partial z} [2\beta_e \cos \chi \sin \chi u_x + (\beta_e^2 - 1) \cos \chi u_y - \\ & - 2\beta_e^2 \cos^2 \chi u_z] + \frac{N}{1 + \beta_e^2} \operatorname{div} \mathbf{u} - I + \alpha_{\text{эфф}} N^2 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Второе нелинейное уравнение получается из (6) путем указанных выше замен (β_e на $-\beta_i$ и др.).

Таким образом, при заданной скорости u мы пришли к системе уравнений для φ и N . Электронную концентрацию нельзя, вообще говоря, считать фиксированной, так как движения газа и электрические поля E могут приводить к перераспределению заряженных частиц. Такое перераспределение является, в частности, наиболее вероятной причиной образования спорадического слоя E_s .

В то же время пример со слоем E_s является в известной степени исключительным, поскольку свидетельствует о сильных изменениях регулярных значений $N = N_0$. В большинстве случаев изменения электронной концентрации N' при $u \neq 0$ и $\nabla\varphi \neq 0$ по абсолютной величине невелики и можно считать, что

$$|N'| \ll N_0. \quad (7)$$

При условии (7) систему уравнений для φ и N можно линеаризовать. После этого при учете лишь вертикальных изменений регулярных ионосферных параметров (в первую очередь частот столкновений ν_e и ν_i) можно искать решение в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi \exp(ik_1x + ik_2y), \\ N' &= \bar{N}' \exp(ik_1x + ik_2y). \end{aligned} \quad (8)$$

Одновременно можно разложить в интегралы Фурье по x, y , также и слагаемые, зависящие от компонент скорости u , полагая, например, $u_x = \bar{u}_x \exp(ik_1x + ik_2y)$. Рассматривая поля с определенными горизонтальными масштабами, характеризуемыми волновыми числами k_1 и k_2 , приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &(\sigma_{0e} \sin^2 \chi + \sigma_{1e} \cos^2 \chi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left\{ 2ik_1 \sin \chi \cos \chi (\sigma_{0e} - \sigma_{1e}) + \sin^2 \chi \frac{d\sigma_{0e}}{dz} + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \chi \frac{d\sigma_{1e}}{dz} \right\} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left\{ -k_1^2 (\sigma_{0e} \cos^2 \chi + \sigma_{1e} \sin^2 \chi) - k_2^2 \sigma_{1e} - \right. \\ &\quad \left. - ik_2 \cos \chi \frac{d\sigma_{2e}}{dz} + ik_1 \sin \chi \cos \chi \frac{d}{dz} (\sigma_{0e} - \sigma_{1e}) \right\} \Phi - e(D_{0e} \sin^2 \chi + \\ &\quad + D_{1e} \cos^2 \chi) \frac{\partial^2 \bar{N}'}{\partial z^2} - e \left\{ 2ik_1 \sin \chi \cos \chi (D_{0e} - D_{1e}) + \sin^2 \chi \frac{dD_{0e}}{dz} + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \chi \frac{dD_{1e}}{dz} \right\} \frac{\partial \bar{N}'}{\partial z} + e \left\{ k_1^2 (D_{0e} \cos^2 \chi + D_{1e} \sin^2 \chi) + k_2^2 D_{1e} + \right. \\ &\quad \left. + ik_2 \cos \chi \frac{dD_{2e}}{dz} - ik_1 \sin \chi \cos \chi \frac{d}{dz} (D_{0e} - D_{1e}) + \frac{\partial}{\partial t} + 2\sigma_{\alpha\Phi} N_0 \right\} \bar{N}' = \\ &= -e\bar{u}_z \frac{dN_0}{dz} + \frac{H_0}{c} \bar{u}_y \cos \chi \frac{d\sigma_{1e}}{dz} + \frac{H_0}{c} \cos \chi (\bar{u}_z \cos \chi - \bar{u}_x \sin \chi) \frac{d\sigma_{2e}}{dz} + \\ &\quad + \frac{H_0}{c} \sigma_{1e} (\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{u})' + \frac{H_0}{c} \sigma_{2e} (\mathbf{h}, \text{rot } [\mathbf{h}, \mathbf{u}])' - \frac{eN_0}{1 + \beta_e^2} \text{div } \mathbf{u}'; \end{aligned} \quad (9)$$

$$(\sigma_{0i} \sin^2 \chi + \sigma_{1i} \cos^2 \chi) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left\{ 2ik_1 \sin \chi \cos \chi (\sigma_{0i} - \sigma_{1i}) + \sin^2 \chi \frac{d\sigma_{0i}}{dz} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \cos^2 \chi \frac{d\sigma_{1i}}{dz} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left[-k_1^2 (\sigma_{0i} \cos^2 \chi + \sigma_{1i} \sin^2 \chi) - k_2^2 \sigma_{1i} + \right. \right. \\
& + ik_2 \cos \chi \frac{d\sigma_{2i}}{dz} + ik_1 \sin \chi \cos \chi \frac{d}{dz} (\sigma_0 - \sigma_{1i}) \left. \right\} \Phi + e(D_{0i} \sin^2 \chi + \\
& + D_{1i} \cos^2 \chi) \frac{\partial^2 \bar{N}'}{\partial z^2} + e \left\{ 2ik_1 \sin \chi \cos \chi (D_{0i} - D_{1i}) + \sin^2 \chi \frac{dD_{0i}}{dz} + \right. \\
& + \cos^2 \chi \frac{dD_{1i}}{dz} \left. \right\} \frac{\partial \bar{N}'}{\partial z} - e \left\{ k_1^2 (D_{0i} \cos^2 \chi + D_{1i} \sin^2 \chi) + k_2^2 D_{1i} - \right. \quad (10) \\
& - ik_2 \cos \chi \frac{dD_{2i}}{dz} - ik_1 \sin \chi \cos \chi \frac{d}{dz} (D_{0i} - D_{1i}) + \frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha_{\Phi} N_0 \left. \right\} \bar{N}' = \\
& = e \bar{u}_z \frac{dN_0}{dz} + \frac{H_0}{c} \bar{u}_y \cos \chi \frac{d\sigma_{1i}}{dz} - \frac{H_0}{c} \cos \chi (\bar{u}_z \cos \chi - \bar{u}_x \sin \chi) \frac{d\sigma_{2i}}{dz} + \\
& + \frac{H_0}{c} \sigma_{1i} (\mathbf{h}, \operatorname{rot} \mathbf{u})' - \frac{H_0}{c} \sigma_{2i} (\mathbf{h}, \operatorname{rot} [\mathbf{h}, \mathbf{u}])' + \frac{eN_0}{1 + \beta_i^2} \operatorname{div} \mathbf{u}'.
\end{aligned}$$

В уравнении (9) $\sigma_{0e} = e^2 N_0 / m \nu_e$, $\sigma_{1e} = e^2 N_0 \nu_e / m (\omega_H^2 + \nu_e^2)$ и $\sigma_{2e} = e^2 N_0 \omega_H / m (\omega_H^2 + \nu_e^2)$ характеризуют вклад электронов соответственно в продольную, поперечную и холловскую проводимости плазмы. Аналогично введены коэффициенты $D_{0z} = \kappa T / m \nu_e$, $D_{1e} = \kappa T \nu_e / m (\omega_H^2 + \nu_e^2)$ и $D_{2e} = \kappa T \omega_H / m (\omega_H^2 + \nu_e^2)$. Значения величин σ_{0i} , σ_{1i} , σ_{2i} и D_{0i} , D_{1i} , D_{2i} можно получить из только что приведенных определений заменой m на M , ω_H на Ω_H и ν_e на ν_i . В (9), (10) в слагаемых с $(\mathbf{h}, \operatorname{rot} \mathbf{u})$, $(\mathbf{h}, \operatorname{rot} [\mathbf{h}, \mathbf{u}])$ и $\operatorname{div} \mathbf{u}$ фактор $\exp(ik_1 x + ik_2 y)$ исключается. Это обстоятельство отражено знаком штриховки.

2. УПРОЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИ ВЫБОРЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ МАСШТАБОВ

При решении ряда вопросов динамики ионосферной плазмы в уравнениях (9), (10) исключают слагаемые, обусловленные электростатическими полями. Естественно, что в случае, когда определяется величина самих полей, так поступать не следует. Поэтому ниже для упрощения системы (9), (10) мы будем исключать слагаемые с \bar{N}' . В общем случае сведение системы (9), (10) к одному уравнению для Φ в случае неоднородной атмосферы затруднительно. Поэтому такое сведение будет проведено при использовании ограничений на горизонтальные масштабы неоднородности поля. В частности, будут рассмотрены случаи больших и малых масштабов.

Наряду с характерными горизонтальными масштабами $l_x \sim k_1^{-1}$ и $l_y \sim k_2^{-1}$ введем вертикальный масштаб l_z . К ним следует добавить высоту однородной атмосферы H , которая характеризует изменения по вертикали коэффициентов D_e и D_i .

Обозначив L_{1e} , L_{1i} , L_{2e} , L_{2i} , L_{3e} и L_{3i} операторы, действующие в (9), (10) соответственно на амплитуду потенциала Φ , концентрацию \bar{N}' и скорость \mathbf{u} , запишем систему (9), (10) в схематической форме

$$L_{1e}(\Phi) + L_{2e}(\bar{N}') = L_{3e}(\mathbf{u}); \quad (11)$$

$$L_{1i}(\Phi) + L_{2i}(\bar{N}') = L_{3i}(\mathbf{u}). \quad (12)$$

Далее будем рассматривать процессы на умеренных широтах ($\cos \chi \approx \sin \chi \approx 1$)*. Можно выделить случай, когда выполняется неравенство

$$2\alpha_{\text{эфф}} N_0 l_{\text{min}}^2 \gg D_{0e}, \quad (13)$$

где l_{min} — минимальное из расстояний l_x, l_z, H^{**} . Оценим выполнимость условия (13) при $l_{\text{min}} = H$. В E -области, полагая $H = 2 \cdot 10^6$ см, $D_{0e} = 10^9$ см²·сек⁻¹, $\alpha_{\text{эфф}} \approx 10^{-8}$ см³·сек⁻¹, из (13) имеем ограничение $N_0 \gg 10^4$ см⁻³. Последнее удовлетворяется в дневные часы, а в ночные, по крайней мере, $N_0 \gtrsim 10^4$ см⁻³. В F -области, даже не доходя до максимума слоя, говорить о справедливости (13) уже не приходится, и в лучшем случае можно считать, что $2\alpha_{\text{эфф}} N_0 H^2 \gtrsim D_{0e}$. В силу трудности с использованием условия (13) при $l_{\text{min}} = H$ ясно, что не имеет смысла применять критерий (13) для анализа просачивания мелкомасштабных полей с $l_x < H$ и $l_y < H$.

При ограничении (13) с большим запасом выполняется неравенство $2\alpha_{\text{эфф}} N_0 l_{\text{min}}^2 \gg D_{0e}$. В соответствии с записью системы (9), (10)

в форме (11), (12) приближенно имеем: $L_{2e} \simeq \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha_{\text{эфф}} N_0 \right) e\bar{N}'$

и $L_{2i} \simeq - \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha_{\text{эфф}} N_0 \right) e\bar{N}'$. Исключение слагаемых с \bar{N}' (11), (12)

проводится элементарно. Это легко сделать даже при нарушении стационарности (в рамках справедливости уравнений (1), (2)). Складывая (11), (12), получаем уравнение $L_{1e}(\Phi) + L_{1i}(\Phi) = L_{3e}(u) + L_{3i}(u)$, которое можно написать в развернутом виде следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\sigma_0 \sin^2 \chi + \sigma_1 \cos^2 \chi) \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \left\{ 2ik_1 \sin \chi \cos \chi (\sigma_0 - \sigma_1) + \sin^2 \chi \frac{d\sigma_0}{dz} + \right. \\ & \left. + \cos^2 \chi \frac{d\sigma_1}{dz} \right\} \frac{d\Phi}{dz} + \left\{ -k_1^2 (\sigma_0 \cos^2 \chi + \sigma_1 \sin^2 \chi) - k_2^2 \sigma_1 - \right. \\ & \left. - ik_2 \cos \chi \frac{d\sigma_2}{dz} + ik_1 \sin \chi \cos \chi \frac{d}{dz} (\sigma_0 - \sigma_1) \right\} \Phi = \quad (14) \\ & = \frac{H_0}{c} \cos \chi \bar{u}_y \frac{d\sigma_1}{dz} + \frac{H_0}{c} \cos \chi (\bar{u}_x \sin \chi - \bar{u}_z \cos \chi) \frac{d\sigma_2}{dz} + \\ & + \frac{H_0}{c} \sigma_1 (\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{u})' + \frac{H_0}{c} \sigma_2 (\mathbf{h}, \text{rot } [\mathbf{h}, \mathbf{u}])' + \frac{eN_0}{1 + \beta_i^2} \text{div } \mathbf{u}', \end{aligned}$$

где $\sigma_0 = \sigma_{0e} + \sigma_{0i}$, $\sigma_1 = \sigma_{1e} + \sigma_{1i}$, $\sigma_2 = \sigma_{2e} - \sigma_{2i}$ — полные проводимости (продольная, поперечная и холловская). Именно на основе уравнения (14) при равной нулю правой части и проводился в работах [7–9, 12] анализ просачивания полей в ионосфере. Однако рассмотрение не было ограничено неравенством типа (13) и результаты применялись к мелкомасштабным неоднородностям, что не является корректным.

Далее получим уравнение для амплитуды потенциала Φ в применении к неоднородностям с небольшими горизонтальными масштабами.

* Для полярной и экваториальной зон необходим специальный анализ, который здесь проводиться не будет.

** Если применять рассмотрение не только к E - и F -областям, но и к D -слою, то под l_{min} нужно понимать наименьшее из расстояний l_x, l_y, l_z и H .

Здесь мы ограничимся только стационарным случаем, когда $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Условиями мелкомасштабности неоднородностей будут следующие:

$$l_{x, y} \ll H; \quad (15)$$

$$2\alpha_{эфф} N_0 l_x^2 \ll D_{0i}. \quad (16)$$

При выполнении ограничений (15), (16) операторы L_{2e} и L_{2i} приближенно сводятся к множителям $L_{2e} = ek_1^2 D_{0e} \cos^2 \chi$ и $L_{2i} = -ek_1^2 D_{0i} \cos^2 \chi$. Тогда из (11), (12) исключение слагаемых с \bar{N}' проводится элементарно, и мы приходим к уравнению

$$D_{0e} L_{1i}(\Phi) + D_{0i} L_{1e}(\Phi) = D_{0e} L_{3i}(u) + D_{0i} L_{3e}(u),$$

которое в развернутой записи имеет вид

$$\begin{aligned} & (2\sigma_{0i} \sin^2 \chi + \delta\sigma_{1e} \cos^2 \chi + \sigma_{1i} \cos^2 \chi) \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \left\{ 2ik_1 \sin \chi \cos \chi (2\sigma_{0i} - \right. \\ & \left. - \sigma_{1i} - \delta\sigma_{1e}) + 2 \sin^2 \chi \frac{d\sigma_{0i}}{dz} + \cos^2 \chi \frac{d\sigma_{1i}}{dz} + \delta \cos^2 \chi \frac{d\sigma_{1e}}{dz} \right\} \frac{d\Phi}{dz} + \\ & + \left\{ -k_1^2 (2\sigma_{0i} \cos^2 \chi + \sigma_{1i} \sin^2 \chi + \delta\sigma_{1e} \sin^2 \chi) - k_2^2 (\sigma_{1i} + \delta\sigma_{1e}) + \right. \\ & \left. + ik_2 \cos \chi \left(\frac{d\sigma_{2i}}{dz} - \delta \frac{d\sigma_{2e}}{dz} \right) + ik_1 \sin \chi \cos \chi \frac{d}{dz} (2\sigma_{0i} - \sigma_{1i} - \right. \\ & \left. - \delta\sigma_{1e}) \right\} \Phi = e\bar{u}_z \frac{dN_0}{dz} + \frac{H_0}{c} \bar{u}_y \cos \chi \left(\frac{d\sigma_{1i}}{dz} + \delta \frac{d\sigma_{1e}}{dz} \right) - \\ & - \frac{H_0}{c} \cos \chi (\bar{u}_z \cos \chi - \bar{u}_x \sin \chi) \left(\frac{d\sigma_{2i}}{dz} - \delta \frac{d\sigma_{2e}}{dz} \right) + \frac{H_0}{c} (\sigma_{1i} + \\ & + \delta\sigma_{1e}) (\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{u})' - \frac{H_0}{c} (\sigma_{2i} - \delta\sigma_{2e}) (\mathbf{h}, \text{rot } [\mathbf{h}, \mathbf{u}])' + \\ & + eN_0 \text{div } \mathbf{u}' \left(\frac{1}{1 + \beta_i^2} - \delta \frac{1}{1 + \beta_e^2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Следует заметить, что для достаточно больших высот (на уровне максимума области E и выше) все слагаемые с малым фактором $\delta = m\nu_e/M\nu_i \approx \sqrt{m/M}$ могут быть опущены. Эти члены оставлены в (17), чтобы сохранить возможность перехода к случаю, когда анизотропия проводимости отсутствует. Этот случай может реализоваться лишь в области D . Если область D исключить, то главное отличие (14) и (17), имеющих сходную структуру, заключается в коэффициентах, отражающих вклад продольной проводимости. Если в (14) фигурирует полная проводимость σ_0 , то в (17) входит величина $2\sigma_{0i}$. Заметим, что $\sigma_0 \approx \sigma_{0e} \gg 2\sigma_{0i}$. Это обстоятельство может существенно сказаться на определении эффективности просачивания электростатических полей с малыми масштабами.

Можно указать еще на один промежуточный случай, когда $l_{x, y} < H$ и выполнены неравенства

$$\begin{aligned} 2\alpha_{эфф} N_0 l_{x, y}^2 & \ll D_{0e}, \\ 2\alpha_{эфф} N_0 l_x^2 & \gg D_{0i}. \end{aligned} \quad (18)$$

По сравнению с (15)–(17) здесь рассматриваются неоднородности более крупных масштабов. В этом случае слагаемые с \bar{N}' также исключаются, после чего при $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ с точностью до отношения $\gamma = \alpha_{\text{эфф}} N_0 k_1^{-2} / D_{0e}$ амплитуда потенциала Φ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} & \{(\gamma\sigma_{0e} + \sigma_{0i}) \sin^2 \chi + (\gamma\sigma_{1e} + \sigma_{1i}) \cos^2 \chi\} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \left\{ 2ik_1 \sin \chi \cos \chi (\gamma\sigma_{0e} + \right. \\ & + \sigma_{0i} - \gamma\sigma_{1e} - \sigma_{1i}) + \sin^2 \chi \frac{d}{dz} (\gamma\sigma_{0e} + \sigma_{0i}) + \cos^2 \chi \frac{d}{dz} (\gamma\sigma_{1e} + \sigma_{1i}) \left. \right\} \frac{d\Phi}{dz} + \\ & + \left\{ -k_1^2 [(\gamma\sigma_{0e} + \sigma_{0i}) \cos^2 \chi + (\gamma\sigma_{1e} + \sigma_{1i}) \sin^2 \chi] - k_2^2 (\gamma\sigma_{1e} + \sigma_{1i}) + \right. \\ & + ik_2 \cos \chi \frac{d}{dz} (\sigma_{2i} - \gamma\sigma_{2e}) + ik_1 \sin \chi \cos \chi \frac{d}{dz} (\gamma\sigma_{0e} + \sigma_{0i} - \gamma\sigma_{1e} - \sigma_{1i}) \left. \right\} \Phi = \\ & = e\bar{u}_z \frac{dN_0}{dz} + \frac{H_0}{c} \bar{u}_y \cos \chi \frac{d}{dz} (\gamma\sigma_{1e} + \sigma_{1i}) - \frac{H_0}{c} \cos \chi (\bar{u}_z \cos \chi - \\ & - \bar{u}_x \sin \chi) \frac{d}{dz} (\sigma_{2i} - \gamma\sigma_{2e}) + \frac{H_0}{c} (\gamma\sigma_{1e} + \sigma_{1i}) (\mathbf{h}, \text{rot } \mathbf{u})' - \\ & - \frac{H_0}{c} (\sigma_{2i} - \gamma\sigma_{2e}) (\mathbf{h}, \text{rot } [\mathbf{h}, \mathbf{u}])' + eN_0 \text{div } \mathbf{u}' \left(\frac{1}{1 + \beta_i^2} - \gamma \frac{1}{1 + \beta_e^2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Резюмируя, можно еще раз отметить различие в коэффициентах, связанных с продольной проводимостью, во всех трех случаях (уравнения (14), (17) и (19)), что существенно для возбуждения и просачивания электрических полей. Результаты расчетов напряженностей этих полей на основе сформулированных уравнений будут приведены в последующих статьях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Альвен, К. Г. Фельдхаммар, Космическая электродинамика, изд Мир, М., 1967.
2. L. P. Block, Space Sci. Res., 7, 198 (1967).
3. R. L. Boyd, Space Sci. Res., 7, 230 (1967).
4. С. Ф. Миркотан, Ю. В. Кушнеревский, сб. Результаты МГГ, Ионосферные исследования, вып. 12, 1964.
5. Л. М. Ерухимов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 5, 839 (1962)
6. M. Dagg, J. Atm. Terr. Phys., 11, 139 (1957).
7. D. T. Farley, J. Geophys. Res., 65, 869 (1960).
8. J. R. Spreiter, В. Н. Briggs, J. Geophys. Res., 66, 1731 (1961).
9. D. T. Farley, J. Geophys. Res., 66, 3956 (1961).
10. Б. Н. Гершман, В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 6, 843 (1959).
11. В. П. Докучаев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 3, № 5, 901 (1960).
12. G. C. Reid, Radio Science, 69D, 827 (1965).
13. Л. М. Алексеева, Ю. С. Варданыч, Б. А. Тверской, Геомагнетизм и аэрномия, 9, 437 (1969).

ELECTROSTATIC FIELD THEORY UNDER IONOSPHERIC CONDITIONS

B. N. Gershman, A. V. Samsonov

Equations are derived for the potential of the electrostatic field in the presence of sources under ionospheric conditions. These fields may be due to neutral gas motion. The study is made with taking into account the addends responsible for ambipolar plasma diffusion. The effectiveness of excitation and especially the penetration degree is clarified to be essentially associated with horizontal scales of the fields.

УДК 533.951

К ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В ПЛАЗМЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СИЛЬНОМ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Н. Е. Андреев, А. Ю. Кирий, В. П. Силин

При учете теплового движения частиц в теории параметрического резонанса на плазменной частоте в сильном высокочастотном поле найдены области значений частоты и напряженности внешнего поля, в которых инкремент неустойчивости принимает наибольшее возможное значение.

Известно [1], что в плазме, находящейся в высокочастотном электрическом поле, в определенных условиях возникает неустойчивость относительно раскачки продольных колебаний, причем в случае частоты внешнего ВЧ поля ω_0 , близкой к плазменной $\omega_p = (\omega_{L_e}^2 + \omega_{L_i}^2)^{1/2}$ (здесь $\omega_{L_\alpha} = (4\pi e_\alpha^2 n_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$ — ленгмюровская частота частиц сорта α), раскачка таких колебаний оказывается возможной при сравнительно небольших напряженностях внешнего поля E_0 , удовлетворяющих условию

$$\frac{E_0^2}{4\pi} \ll n_e T_e.$$

Здесь n_e и T_e — плотность и температура электронов. Как показано в работах [2, 3], при достаточно малых величинах E_0 и частоты соударений электронов с ионами существенно изменяется лишь мнимая часть собственных частот продольных ионно-звуковых и плазменных колебаний, а действительная их часть меняется мало (т. е. имеет место так называемая слабая связь волн).

Если частота электрон-ионных соударений или напряженность E_0 достаточно велики, то при аperiodической неустойчивости возбуждаются продольные колебания с частотой, равной частоте внешнего поля ω_0 , однако, в отличие от случая слабой связи, длина волны этих колебаний существенно отличается от соответствующей плазменной волны с частотой ω_0 . В результате периодической неустойчивости возбуждаются ВЧ колебания с частотами $\omega_0 \pm \omega$ ($|\omega| \ll \omega_0$), отличными от частоты плазменной волны, и низкочастотные колебания с частотой, которая может превышать частоту ионно-звуковых колебаний даже на пороге неустойчивости.

Результаты работ [2, 3], как и полученное одним из авторов дисперсионное уравнение [4], справедливы лишь при достаточно малых напряженностях внешнего поля, когда амплитуда осцилляций электронов во внешнем поле $r_E = eE_0 / m_e \omega_0^2$ не превосходит длину волны возбуждаемых колебаний $\bar{\lambda}$ ($\bar{\lambda} = \lambda / 2\pi$). Обратный случай сильного поля, когда $r_E \gg \bar{\lambda}$, изучался ранее как для частот ω_0 , значительно превосходящих плазменную, так и для $\omega_0 \leq \omega_p$ [1]. Однако в интересующей нас

здесь области частот внешнего поля, близких к плазменной, полученные ранее результаты были основаны на уравнениях холодной плазмы [5].

В настоящей же работе показано, что хотя при $\bar{\lambda} < r_E$ и $\omega_0 \simeq \omega_p$ скорость осцилляций электронов $v_E = r_E \omega_0$ значительно превосходит их тепловую скорость $v_{T_e} = (T_e/m_e)^{1/2}$, тем не менее учет пространственной дисперсии, обусловленной тепловым движением, оказывается существенным. Более того, именно при учете теплового движения электронов становится возможным определение величины E_0 и частоты внешнего поля ω_0 , при которых инкремент принимает наибольшее возможное значение, а также нахождение характерных волновых векторов возбуждаемых продольных колебаний.

1. Рассмотрим дисперсионные свойства плазмы, находящейся во внешнем ВЧ электрическом поле $E(t) = E_0 \sin \omega_0 t$, частота которого ω_0 близка к плазменной ω_p .

Положим, что длина волны возбуждаемых колебаний значительно превосходит дебаевский радиус электронов $r_{De} = (T_e/4\pi e^2 n_e)^{1/2}$, но меньше характерного размера неоднородности плазмы и внешнего поля. При этом в разложении возмущений электрического поля

$$\delta E(r, t) = \exp(i\mathbf{k}r - i\omega t + \gamma t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta E_n \exp(-in\omega_0 t)$$

по гармоникам частоты внешнего поля ($|\omega + i\gamma| \ll \omega_0$) немалыми оказываются лишь амплитуды δE_n при $n = 0, \pm 1$, и из условия разрешимости системы уравнений для этих амплитуд (или для амплитуд возмущения плотности зарядов электронов и ионов [1]) получим следующее дисперсионное уравнение (ср. [1, 3]):

$$1 - J_0^2(kr_E) \frac{\delta \varepsilon_e(\omega + i\gamma, \mathbf{k})}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega + i\gamma, \mathbf{k})} + \frac{1}{\delta \varepsilon_i(\omega + i\gamma, \mathbf{k})} + \\ + J_1^2(kr_E) \{ [1 + \delta \varepsilon_e(\omega + i\gamma + \omega_0, \mathbf{k}) + J_0^2(kr_E) \delta \varepsilon_e(\omega + i\gamma + \omega_0, \mathbf{k})]^{-1} + \\ + (\omega_0 \rightarrow -\omega_0) \} = 0.$$

Здесь ω , $\omega \pm \omega_0$, γ , \mathbf{k} — соответственно частоты, инкремент и волновой вектор возбуждаемых колебаний, J_n — функция Бесселя порядка n , $\delta \varepsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k})$ — парциальный вклад в линейную продольную диэлектрическую проницаемость от частиц сорта α (см. [3]). В пределе малых напряженностей E_0 , когда $kr_E \ll 1$, дисперсионное уравнение (1) переходит в полученное в работе [4]. Как показано в [3, 5], дисперсионное уравнение, аналогичное (1), имеет как аperiodические ($\omega = 0$, $\gamma \geq 0$), так и периодические ($\omega \gtrsim \gamma$) решения.

В слабых полях E_0 , когда существенны как диссипативные эффекты, так и эффекты взаимодействия внешнего поля с собственными низкочастотными колебаниями, решения дисперсионного уравнения (1) исследованы в работе [3]. В рассматриваемом случае сильного внешнего поля, при $kr_E > 1$, такие эффекты несут существенны, и нетрудно получить из (1) следующее выражение для инкремента аperiodической неустойчивости ($\Delta\omega_0 < 0$)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ -(\Delta\omega_0)^2 + [(\Delta\omega_0)^4 - 4\omega_L \omega_L^2 \Delta\omega_0 J_1^2(kr_E)]^{1/2} \}^{1/2} \quad (2)$$

и формулы для частоты и инкремента периодической неустойчивости

$$\omega^2 = \frac{1}{4} \{(\Delta\omega_0)^2 + [4J_1^2(kr_E) \omega_{L_e} \omega_{L_i}^2 \Delta\omega_0]^{1/2}\},$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \{- (\Delta\omega_0)^2 + [4J_1^2(kr_E) \omega_{L_e} \omega_{L_i}^2 \Delta\omega_0]^{1/2}\}^{1/2} \quad (\Delta\omega_0 > 0).$$
(3)

Выражения (2), (3) отличаются от соответствующих формул работы [5] лишь изменением расстройки

$$\Delta\omega_0 = \omega_0 - [\omega_{L_e}^2 + J_0^2(kr_E) \omega_{L_i}^2 + 3k^2 v_{Te}^2]^{1/2},$$
(4)

которая при учете вклада ионов и теплового движения электронов стала зависящей от k .

Из формулы (2) нетрудно видеть, что максимальное значение инкремента аperiodической неустойчивости

$$\gamma_{\max} \simeq 0,55 \omega_{L_e}^{1/3} \omega_{L_i}^{2/3},$$
(5)

приведенное в работе [5], достигается при волновом числе, определяемом соотношениями

$$k^2 r_{De}^2 = \frac{2}{3} \left[\frac{\omega_0 - \omega_{L_e}}{\omega_{L_e}} + 0,55 \left(\frac{\omega_{L_i}}{\omega_{L_e}} \right)^{2/3} \right], \quad kr_E \simeq 1,8.$$
(6)

Из условия $kr_E > 1$ получаем при этом следующие ограничения на напряженность и частоту внешнего поля:

$$\frac{E_0^2}{4\pi n_e T_e} > \frac{3}{2} \left[\frac{\omega_0 - \omega_{L_e}}{\omega_{L_e}} + 0,55 \left(\frac{\omega_{L_i}}{\omega_{L_e}} \right)^{2/3} \right]^{-1}, \quad \frac{\omega_0 - \omega_{L_e}}{\omega_{L_e}} > -0,55 \left(\frac{\omega_{L_i}}{\omega_{L_e}} \right)^{2/3}.$$
(7)

Аналогично из формулы (3) следует полученное в работе [5] выражение для максимального инкремента периодической неустойчивости

$$\gamma_{\max} \simeq 0,38 \omega_{L_e}^{1/3} \omega_{L_i}^{2/3},$$
(8)

которое, как видно из (3), достигается при

$$k^2 r_{De}^2 = \frac{2}{3} \left[\frac{\omega_0 - \omega_{L_e}}{\omega_{L_e}} - 0,38 \left(\frac{\omega_{L_i}}{\omega_{L_e}} \right)^{2/3} \right], \quad kr_E \simeq 1,8$$
(9)

и справедливо при напряженностях и частотах внешнего поля, ограниченных неравенствами

$$\frac{E_0^2}{4\pi n_e T_e} > \frac{3}{2} \left[\frac{\omega_0 - \omega_{L_e}}{\omega_{L_e}} - 0,38 \left(\frac{\omega_{L_i}}{\omega_{L_e}} \right)^{2/3} \right]^{-1},$$

$$\omega_0 - \omega_{L_e} > 0,38 \omega_{L_e}^{1/3} \omega_{L_i}^{2/3}.$$
(10)

Заметим, что выражения (2) и (3) можно использовать лишь для достаточно больших значений инкремента по сравнению с декрементом затухания ленгмюровских колебаний. В сильном поле, когда $r_E > r_{De}$, это условие означает, что инкремент должен превосходить вклад от черенковского эффекта на электронах в декремент затухания ленгмюровских колебаний, равный

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{L_e}}{k^3 r_{De}^3} \exp\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2k^2 r_{De}^2}\right).$$

Имея в виду выражения (6) и (9) для волновых чисел, нетрудно видеть, что условие $\gamma > \tilde{\gamma}$ выполняется при

$$\frac{\omega_0 - \omega_{L_e}}{\omega_{L_e}} < \frac{9}{8} \left(\ln \frac{\omega_{L_e}}{\omega_{L_i}} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Из ограничения (11) с учетом (7) и (10) следует, что минимальное значение напряженности внешнего поля E_0 , при котором имеют место инкременты (5) и (8), определяется соотношением

$$\frac{E_0^2}{4\pi n_e T_e} \simeq \frac{4}{3} \ln \frac{\omega_{L_e}}{\omega_{L_i}}.$$

При расстройках $\omega_0 - \omega_{L_e}$, меньших минимальных значений, определяемых неравенствами (7) и (9), инкременты уменьшаются по сравнению со значениями (5) и (8). Если при этом поле E_0 достаточно велико, так что

$$\frac{E_0^2}{4\pi n_e T_e} > \frac{\omega_{L_e}}{|\omega_0 - \omega_{L_e}|},$$

то учет теплового движения не существен, и формулы (2) и (3) тождественны полученным в работе [5] в гидродинамическом приближении холодной плазмы.

Таким образом, учет пространственной дисперсии, связанной с тепловым движением электронов, существенно расширяет области расстройок, в которых применимы выражения для максимальных возможных при параметрическом резонансе инкрементов (5) и (8). Так, если аperiodическая неустойчивость, предсказанная в работе [5] при использовании уравнений холодной плазмы, оказывалась возможной лишь при $\omega_0 < \omega_{L_e}$, то учет теплового движения указывает на возможность такой неустойчивости и при $\omega_0 > \omega_{L_e}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. P. Silin, Interaction of a strong high-frequency electromagnetic field with a plasma, A Survey of Phenomena in Ionized Gases, Vienna, 1968, p. 205.
2. K. Nishikawa, J. Phys. Soc. Japan, 24, 916; 24, 1152 (1968)
3. Н. Е. Андреев, А. Ю. Кирий, В. П. Силин, Параметрическое возбуждение продольных колебаний в плазме слабым высокочастотным электрическим полем, ЖЭТФ, 57, 1028 (1969).
4. В. П. Силин, Письма в ЖЭТФ, 7, вып 7, 242 (1968).
5. В. П. Силин, ЖЭТФ, 48, 1679 (1965).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
17 ноября 1969 г.

TO THE THEORY OF PARAMETRIC RESONANCE OF PLASMA IN A STRONG HF ELECTRIC FIELD

N. E. Andreev, A. Yu. Kirii, V. P. Silin

The values of the external field frequency and the intensity which the instability increment takes the largest possible value are found when taking into account the thermal particle motion in the theory of parametric resonance on the plasma frequency in a strong HF field.

УДК 539.251

**О ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАЗМЫ,
НАХОДЯЩЕЙСЯ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

А. Х. Назарян

Получены поправки к эрмитовой части тензора комплексной диэлектрической проницаемости плазмы в однородном магнитном поле с учетом влияния кулоновского взаимодействия на время, в течение которого взаимодействуют частицы.

Настоящее сообщение посвящено вопросу об эрмитовой части диэлектрической проницаемости плазмы в области высоких частот. Предполагается, что плазма находится в однородном постоянном магнитном поле и пространственно однородном, но периодически зависящем от времени электрическом поле. Нас интересует область частот, в которой переменная частота ω значительно превышает ленгмюровскую частоту электронов $\omega_{Le} = (4\pi ne^2/m)^{1/2}$, но меньше $\omega_{\max} = \frac{(\chi T)^{3/2} (2m)^{-1/2}}{|ee_i|}$.

Диэлектрическая проницаемость плазмы, как известно, при таких условиях была изучена в [1], а затем результаты были обобщены на неизоэлектрический случай в работе [2]. При этом решалось кинетическое уравнение для установившихся процессов [1], при условии малости интеграла столкновений.

Однако в указанных работах не рассматривалось влияние кулоновского взаимодействия на время, в течение которого взаимодействуют частицы. Эффект кулоновского ограничения времени взаимодействия был рассмотрен в [3], с учетом чего было получено новое выражение для антиэрмитовой части диэлектрической проницаемости плазмы. Ниже будет исследована эрмитова часть тензора комплексной диэлектрической проницаемости плазмы.

Поскольку способ исследования, применяемый в данной работе, и основные предположения во многом подобны использованным в [3], мы сразу перейдем к изложению результатов.

Из обобщенного закона Ома, имея в виду малость столкновительной части, находим поправку к эрмитовой части диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_{ij}^a(\omega) = & - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^3} \left\{ b_i b_j \mu_{ei}^{\parallel}(\omega) + \mu_{ei}^{\perp}(\omega) \left[\frac{\omega^4}{\Omega_e^2} (\delta_{ij} - b_i b_j) \times \right. \right. \\ & \times \left(\left(\frac{\Omega_e}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\Omega_i}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right)^2 + \omega^2 \left(\frac{1}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{1}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right)^2 \right) - \\ & \left. \left. - \frac{2i\omega^5}{\Omega_e^2} e_{ijk} b_k \left(\frac{1}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{1}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right) \left(\frac{\Omega_e}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{\Omega_i}{\omega^2 - \Omega_i^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $b_i = B_i/B$ — единичный вектор вдоль магнитного поля, Ω_e и Ω_i —

соответственно ларморовская частота вращения электронов и ионов, e_{ijk} — полностью антисимметричный единичный тензор третьего ранга, а коэффициенты μ_{ei}^{\parallel} и μ_{ei}^{\perp} имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{ei}^{\parallel}(\omega) \\ \mu_{ei}^{\perp}(\omega) \end{array} \right\} = \frac{2\sqrt{2}(ee_i)^2}{\sqrt{m_e}(xT)^{3/2}} N_i \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{\max}} d\chi \int_{-1}^1 dx \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 \\ 1-x^2 \end{array} \right\} \int_0^{\xi_{\max}} d\xi \times \quad (2)$$

$$\times \sin\left(\frac{2\omega}{\Omega_e} \xi\right) \Phi(\chi\xi) \exp\{-\chi^2 x^2 [\xi^2 - \psi(\xi)]\}.$$

Здесь e_i и N_i — заряд и число ионов в единице объема, e и m_e — заряд и масса электрона, x — постоянная Больцмана, T — температура, $\xi = \Omega_e \tau / 2$ и $\chi = \rho_e k$ — соответственно безразмерное время и импульс,

$\rho_e = \sqrt{\frac{xT}{m_e}} \frac{m_e c}{|e|B}$ — гироскопический радиус вращения электронов,

c — скорость света, ρ_i — гироскопический радиус вращения ионов,

$\Phi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ — интеграл вероятностей, а функция $\psi(\xi)$ имеет вид

$$\psi(\xi) = \sin^2 \xi + \frac{\rho_i}{\rho_e} \sin^2\left(\frac{\Omega_i}{\Omega_e} \xi\right). \quad (3)$$

Анализ выражения (2) показывает, что магнитное поле существенно влияет только на поперечную часть. Поэтому упростим выражение (2) для поперечной части, отбрасывая члены порядка степеней отношения массы электрона к массе иона. Оставим только члены, содержащие большие логарифмы

$$\mu_{ei}^{\perp}(\omega) = \frac{3}{2} \omega_{\text{эфф}} J(\omega) \operatorname{sgn} \omega, \quad (4)$$

где

$$\omega_{\text{эфф}} = \frac{(2\pi)^{3/2} (ee_i)^2 N_i}{3\sqrt{m_e} (xT)^{3/2}}.$$

Когда $\rho_e > r_0 = r_{\min} v_e^2 / v_i^2$, то кулоновское взаимодействие несущественно. Функция $J(\omega)$ в этой области имеет следующий вид:

$$J(\omega) = \ln v_e / \rho_e \omega, \quad (5)$$

$$r_{\min} \frac{v_e^2}{v_i^2}, \quad \frac{v_i}{\omega} < \rho_e < \rho_i, \quad \frac{v_e}{\omega} < r_D;$$

$$J(\omega) = \ln r_D / \rho_e, \quad (6)$$

$$r_{\min} \frac{v_e^2}{v_i^2}, \quad \frac{v_i}{\omega} < \rho_e < r_D, \quad \frac{v_e}{\omega} < \rho_i;$$

$$J(\omega) = \ln \frac{r_D \omega}{v_i}, \quad (7)$$

$$r_{\min} \frac{v_e^2}{v_i^2}, \quad \frac{v_i^2}{\omega v_e} < \rho_e < \frac{v_i}{\omega}, \quad \rho_i, \quad r_D < \frac{v_e}{\omega};$$

$$J(\omega) = \ln \frac{v_i}{\omega \rho_e}, \quad (8)$$

$$r_{\min} \frac{v_e^2}{v_i^2} < \rho_e < \frac{v_i^2}{\omega v_e}, \quad \rho_l, \quad \frac{v_e}{\omega} < r_D;$$

$$J(\omega) = \ln \frac{r_D}{\rho_i}, \quad (9)$$

$$r_{\min} \frac{v_e^2}{v_i^2}, \quad \frac{v_i^2}{\omega v_e} < \rho_e < \frac{v_i}{\omega}, \quad \rho_l, \quad \frac{v_e}{\omega} < r_D;$$

$$J(\omega) = \ln \frac{v_e}{v_i}, \quad (10)$$

$$\frac{v_i^2}{\omega v_e}, \quad r_{\min} \frac{v_e^2}{v_i^2} < \rho_e < \rho_l < r_D < \frac{v_e}{\omega}.$$

В случае, когда выполняется обратное неравенство $\rho_e < r_0$,

$$J(\omega) = \ln \frac{v_e}{\rho_e \omega} - \frac{1}{3} \ln \frac{r_{\min}}{\rho_e^3} \frac{v_e^2}{\omega^2}, \quad (11)$$

$$\frac{v_i}{\omega} < \rho_e < r_{\min}^{1/3} \left(\frac{v_e}{\omega} \right)^{2/3}, \quad \frac{v_e}{\omega} < r_D;$$

$$J(\omega) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{v_i}{\omega} < \rho_e < r_{\min}^{1/3} \left(\frac{v_e}{\omega} \right) < r_D < \rho_l, \quad \frac{v_e}{\omega};$$

$$J(\omega) = \frac{1}{3} \ln \frac{v_e}{\omega r_{\min}}, \quad (13)$$

$$\frac{v_i}{\omega v_e} < \rho_e < \frac{v_i}{\omega} < r_{\min} \frac{v_e^2}{v_i^2}, \quad \rho_l, \quad \frac{v_e}{\omega} < r_D;$$

$$J(\omega) = \ln \frac{r_D \omega}{v_i} - \frac{1}{3} \ln \frac{r_{\min}}{v_i^2} \frac{v_e^2 \omega}{v_i}, \quad (14)$$

$$\frac{v_i^2}{\omega v_e} < \rho_e < \frac{v_i}{\omega} < r_{\min} \frac{v_e^2}{v_i^2} < r_D < \frac{v_e}{\omega};$$

$$J(\omega) = \ln \frac{v_e}{\rho_l \omega} - \frac{1}{3} \ln \frac{r_{\min}}{\rho_e^3} \left(\frac{v_e}{\omega} \right)^2, \quad (15)$$

$$\rho_e < \frac{v_i^2}{\omega v_e}, \quad \rho_l < r_{\min}^{1/3} \left(\frac{v_e}{\omega} \right)^{2/3} < r_{\min} \frac{v_e^2}{v_i^2}, \quad \frac{v_e}{\omega} < r_D;$$

$$J(\omega) = \ln \frac{r_D}{r_{\min}^{1/3}} \left(\frac{\omega}{v_e} \right)^{2/3},$$

$$\rho_e < \frac{v_i^2}{\omega v_e}, \quad \rho_l < r_{\min}^{1/3} \left(\frac{v_e}{\omega} \right)^{2/3} < r_{\min} \frac{v_e^2}{v_i^2}, \quad r_D < \frac{v_e}{\omega}. \quad (16)$$

Формулы (5), (7) (10) совпадают с результатами работы [1]. Из сравнения областей применимости (5), (10) видно, что совпадение происходит при условии $r_D > v_e/\omega$. При выполнении обратного неравенства получаются новые выражения, которые полезны для более высоких частот внешнего поля и разреженной плазмы.

Формулы же (11)—(16) добавляют поправки к (5)—(10). Эти поправки возникли из-за учета кулоновского взаимодействия на время, в течение которого взаимодействуют частицы аналогично результатам работы [3] для антиэрмитовой части диэлектрической проницаемости плазмы от частоты и других параметров плазмы.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность В. П. Силину за руководство и разностороннюю помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, ЖЭТФ, 41, 861 (1961).
2. Е. Е. Ловецкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 4, 813 (1962).
3. В. П. Силин, А. Р. Шистер, ЖЭТФ, 49, 193 (1965)

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
14 октября 1969г.

ON DIELECTRIC PERMITTIVITY OF PLASMA IN A STRONG MAGNETIC FIELD

A. Kh. Nazaryan

Corrections on the ermit part of the complex dielectric tensor of plasma in a uniform magnetic field have been derived with taking into account Columb interaction at a time of particle interaction.

УДК 533.922

К ВОПРОСУ О ПРОХОЖДЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ ЧЕРЕЗ СЛАБОНЕЛИНЕЙНУЮ ПЛАЗМУ

Н. П. Гиоргадзе, Т. Д. Каладзе, Д. Г. Ломинадзе

Рассмотрена геометрия нелинейного продольного поля, обусловленного взаимодействием генерированных частиц (пролетающей через слабо-нелинейную изотропную плазму) продольных полей линейного приближения. Показано, что при наиболее благоприятном выборе параметров задачи амплитуда нелинейного волнового поля всего на порядок меньше амплитуды линейного волнового поля, что (совместно с различием в спектральных составах этих полей) позволяет надеяться на возможность наблюдения рассматриваемых нелинейных эффектов.

В работах [1-4] было исследовано влияние слабой нелинейности на энергетические потери пролетающих через холодную изотропную плазму тяжелой заряженной частицы или сгустка заряженных частиц, пространственные размеры которых много меньше минимальной длины волны в спектре излучения*.

Ниже будет рассмотрена геометрия нелинейного продольного поля, обусловленного взаимодействием генерированных частиц продольных полей линейного приближения, поскольку, как это следует из работ [1, 2], именно этот процесс вносит основной вклад в нелинейные потери энергии.

Используя выражение (8) работы [2], для скалярного потенциала нелинейного продольного поля, обусловленного взаимодействием линейных продольных полей, без труда получим

$$\Phi^{u-1}(r, t) = - \frac{q^2 e^3 n_0}{2\pi^3 m^2} \int \frac{dk dk' F(k, k') \exp[ik(r - ut)]}{[(ku + i0)^2 - \Omega^2] [(k'u + i0)^2 - \Omega^2] [(\Delta ku + i0)^2 - \Omega^2]}, \quad (1)$$

где

$$F(k, k') = \frac{(ku)(k'u)(kk')}{k^2 k'^2} + \frac{(ku)(\Delta ku)(k\Delta k)}{k^2 \Delta k^2} + \frac{(k'u)(\Delta ku)(k'\Delta k)}{k'^2 \Delta k'^2} \quad (2)$$

$$(\Delta k = k - k').$$

Здесь e и m — абсолютная величина заряда и масса электрона, n_0 — равновесная плотность электронов плазмы, q, u — заряд и скорость пролетающей частицы, $\Omega = (4\pi n_0 e^2 / m)^{1/2}$ — ленгмюровская частота электронов.

Область интегрирования в (1) задается условиями

$$|k| \leq k_D, \quad |k'| \leq k_D, \quad |\Delta k| \leq k_D,$$

где k_D — дебаевский волновой вектор электронов.

Используя известное соотношение

* В работе [4] задача о движении заряда в среде решается без использования метода последовательных приближений.

$$\frac{1}{x + i0} = P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$$

и выбирая ось z вдоль направления движения заряда, после некоторых преобразований из (1) получим

$$\Phi^{u-l}(r, t) = \Phi_1^{u-l}(r, t) + \Phi_2^{u-l}(r, t), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1^{u-l}(r, t) = & \frac{iq^2 e^3 n_0}{2\pi^2 m^2 u^4} \int dk_{\perp} dk'_{\perp} P \int dx \exp [i(k_{\perp} r_{\perp} + xZ)] \times \\ & \times \left[\frac{F(x, k_0)}{xk_0(x-2k_0)(x^2-k_0^2)} + \frac{F(x, -k_0)}{x(-k_0)(x+2k_0)(x^2-k_0^2)} \right] + \\ & + \frac{q^2 e^3 n_0}{2\pi m^2 u^4 k_0^4} \int dk_{\perp} dk'_{\perp} \exp(ik_{\perp} r_{\perp}) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{3} F(2k_0, k_0) \cos(2k_0 Z) + F(0, k_0) - \right. \\ & \left. - \left[F(k_0, 0) + \frac{1}{3} F(-k_0, k_0) \right] \cos(k_0 Z) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

и

$$\begin{aligned} \Phi_2^{u-l}(r, t) = & - \frac{q^2 e^3 n_0}{4\pi^3 m^2 u^4} \int dk_{\perp} dk'_{\perp} P \int dx \exp [i(k_{\perp} r_{\perp} + xZ)] \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{xk_0(x^2-k_0^2)} P \int dx' \frac{F(x, x')}{(x'-k_0)(\Delta x - k_0)} + \frac{1}{x(-k_0)(x^2-k_0^2)} \times \right. \\ & \times P \int dx' \frac{F(x, x')}{(x'+k_0)(\Delta x + k_0)} \left. \right\} + \frac{iq^2 e^3 n_0}{4\pi^2 m^2 u^4} \int dk_{\perp} dk'_{\perp} \exp(ik_{\perp} r_{\perp}) \times \\ & \times \left\{ \exp(ik_0 Z) P \int dx' \frac{F(k_0, x')}{x'k_0(x'^2-k_0^2)(x'-2k_0)} + \right. \\ & \left. + \exp(-ik_0 Z) P \int dx' \frac{F(-k_0, x')}{x'(-k_0)(x'^2-k_0^2)(x'+2k_0)} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

причем $Z = z - ut$, $x \equiv k_z$, $k_{\perp} \perp z$, $r_{\perp} \perp z$, $k_0 = \Omega/u$ и $F(x, x') \equiv F(k_{\perp}, x; k'_{\perp}, x')$.

Приступим теперь к интегрированию выражений (4) и (5). Прежде всего, учитывая, что при $x \sim k_D$ подынтегральные функции убывают как $1/x^4$, при интегрировании по x распространим пределы интегрирования до бесконечности. Используя теперь известное представление главного значения

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-a} f(x) = \frac{1}{2} \int_{\sigma \rightarrow 0} \frac{dx}{x-a} f(x) + \frac{1}{2} \int_{\sigma \rightarrow 0} \frac{dx}{x-a} f(x),$$

а также пренебрегая при интегрировании по углам условием $|k - k'| \ll k_D$ (это упрощение использовалось и в работах [1, 2]), после некоторых вычислений найдем

$$\Phi^{l-l}(r, t; Z > 0) = -\frac{2\pi q^2 e^3 n_0 k_D}{3\alpha^2 m^2 u^4} \times$$

$$\times [I_1(r_{\perp}, Z; \alpha, k_D) + I_2(r_{\perp}, Z; \alpha, k_D)], \quad (6)$$

где

$$I_1(r_{\perp}, Z; \alpha, k_D) = \frac{3\alpha^2}{k_D} \int_0^1 dx \int_0^1 dy y J_0(xk_D r_{\perp}) \exp(-xk_D Z) \times$$

$$\times \frac{1}{(x^2 + \alpha^2)(x^2 + 4\alpha^2)} \left[4x + \frac{4\alpha^2 x}{y^2 + \alpha^2} - y(y^2 + \alpha^2 - 2x^2) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{(x-y)^2 + \alpha^2} - \frac{1}{(x+y)^2 + \alpha^2} \right) \right]; \quad (7)$$

$$I_2(r_{\perp}, Z; \alpha, k_D) = -\frac{3\alpha^2}{k_D} \int_0^1 dx x \int_0^1 dy y^2 \frac{\exp(-xk_D Z)}{(x^2 + \alpha^2)(x^2 + 4\alpha^2)} \times$$

$$\times \left[J_0(xk_D r_{\perp}) \left(\frac{2x}{y^2 + \alpha^2} - \frac{2y - 3x}{(x-y)^2 + \alpha^2} + \frac{2y + 3x}{(x+y)^2 + \alpha^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \exp(-yk_D Z) \left(\frac{2y + 3x}{(x+y)^2 + \alpha^2} - \frac{2y-x}{y^2 + \alpha^2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times (J_0(xk_D r_{\perp}) J_0(yk_D r_{\perp}) + J_1(xk_D r_{\perp}) J_1(yk_D r_{\perp})) \right] \quad (8)$$

и

$$\Phi^{l-l}(r, t; Z < 0) = -\frac{2\pi q^2 e^3 n_0 k_D}{3\alpha^2 m^2 u^4} [-I_1(r_{\perp}, |Z|; \alpha, k_D) +$$

$$+ I_2(r_{\perp}, |Z|; \alpha, k_D) + I_3(r_{\perp}, |Z|; \alpha, k_D) +$$

$$+ I_4(r_{\perp}, |Z|; \alpha, k_D) + I_5(r_{\perp}, |Z|; \alpha, k_D)], \quad (9)$$

где

$$I_3(r_{\perp}, |Z|; \alpha, k_D) = \frac{12\alpha^2}{k_D} \int_0^1 dx x \int_0^1 dy y \frac{\exp(-xk_D |Z|)}{(x^2 + \alpha^2)(x^2 + 4\alpha^2)} \times$$

$$\times \operatorname{Re} \left\{ (x - 2i\alpha) \exp(-ik_0 |Z|) \left[\frac{i(\alpha - ix)^2}{\alpha(y^2 + (\alpha - ix)^2)} J_0(yk_D r_{\perp}) + \right. \right. \quad (10)$$

$$\left. \left. + \frac{y}{y^2 + \alpha^2} J_1(xk_D r_{\perp}) J_1(yk_D r_{\perp}) + \frac{i\alpha}{y^2 + \alpha^2} J_0(xk_D r_{\perp}) J_0(yk_D r_{\perp}) \right] \right\};$$

$$I_4(r_{\perp}, |Z|; \alpha, k_D) = -\frac{12\alpha^2}{k_D} \sin(\alpha k_D |Z|) \int_0^1 dx x \int_0^1 dy y \times$$

$$\times \frac{1}{(y^2 + \alpha^2)(y^2 + 4\alpha^2)} \operatorname{Re} \left\{ \frac{x(\alpha + iy)(2\alpha - iy)}{\alpha[x^2 + (\alpha + iy)^2]} J_1(xk_D r_{\perp}) J_1(yk_D r_{\perp}) + \right. \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i(\alpha + iy)^2(2\alpha - iy)}{\alpha[x^2 + (\alpha + iy)^2]} J_0(xk_D r_\perp) J_0(yk_D r_\perp) - \frac{\alpha y}{x^2 + \alpha^2} J_0(xk_D r_\perp) \Big\}; \\
I_5(r_\perp, |Z|; \alpha, k_D) = & - \frac{2}{k_D} \int_0^1 dx x \int_0^1 dy y \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \times \\
& \times \left\{ \cos(2\alpha k_D |Z|) \left[\frac{8\alpha^2}{y^2 + 4\alpha^2} J_0(yk_D r_\perp) + \right. \right. \\
& + \frac{\alpha^2}{y^2 + \alpha^2} J_0(xk_D r_\perp) J_0(yk_D r_\perp) - \frac{xy}{y^2 + \alpha^2} J_1(xk_D r_\perp) J_1(yk_D r_\perp) \Big] + \\
& + \left. \left[\frac{3xy}{y^2 + \alpha^2} J_1(xk_D r_\perp) J_1(yk_D r_\perp) + \frac{3\alpha^2}{y^2 + \alpha^2} J_0(xk_D r_\perp) J_0(yk_D r_\perp) \right] - \right. \\
& - 2 \cos(\alpha k_D |Z|) \left[\frac{2\alpha^2}{y^2 + 4\alpha^2} J_0(xk_D r_\perp) + \frac{xy}{y^2 + 4\alpha^2} J_1(xk_D r_\perp) J_1(yk_D r_\perp) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{2\alpha^2}{y^2 + \alpha^2} J_0(xk_D r_\perp) + \frac{2\alpha^2}{y^2 + 4\alpha^2} J_0(xk_D r_\perp) J_0(yk_D r_\perp) \right] \right\}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Здесь J_n — функция Бесселя, а $\alpha = k_0/k_D$.

Из полученных соотношений следует, что при $Z < 0$, т. е. за частицей, электрическое поле имеет волновую часть, представляющую собой совокупность основной частоты, а также нулевого и удвоенного обертонов. Основная частота представляет собой две сдвинутые на $\pi/2$ по фазе волны.

Появление нулевого и удвоенного обертонов связано с взаимодействием линейных волновых полей. Что касается возникновения во втором приближении основной частоты, это, по-видимому, является следствием взаимодействия линейного волнового поля с линейным статическим. При $Z > 0$ волновая часть поля отсутствует. Разумеется, как перед, так и за частицей имеется еще и статическое нелинейное поле.

Полученные результаты могут быть использованы для вычисления парциального вклада в потери энергии, обусловленного рассматриваемым нелинейным процессом. Для этого достаточно подставить в формулу для потерь продольную компоненту электрического поля при $Z=0$, определяемую как

$$\dot{E}_z(r_\perp, Z=0) = - \frac{1}{2} \left[\lim_{Z \rightarrow 0^+} \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial Z} + \lim_{Z \rightarrow 0^-} \frac{\partial \Phi^{n-1}}{\partial Z} \right].$$

Не останавливаясь на подробностях, заметим, что результат, как и следовало ожидать, совпадает с полученным в работе [2].

Выражения (6) и (9) не могут быть до конца проинтегрированы аналитически, поэтому построение нелинейного электрического поля проведено посредством численного интегрирования. При этом во всех случаях предполагается $\alpha^2 = 5 \cdot 10^{-2}$. Кроме того, мы будем интересоваться большими расстояниями от заряда ($k_D |Z| \gg 1$), т. е. волновой частью нелинейного поля. Результаты численного интегрирования представлены на рис. 1—3.

Следует, однако, иметь в виду, что при получении выражений (6) и (9) был сделан ряд приближений, сохраняющих лишь порядок величины нелинейных полей. Далее мы учли вклад в нелинейные поля лишь

областей прозрачности плазмы. Поэтому воспроизведенные на рисунках результаты численного интегрирования следует рассматривать как правильно отражающие лишь качественное поведение полей нелинейного приближения.

На рис. 1, 2 приведена зависимость от $k_D Z$ продольной и ради-

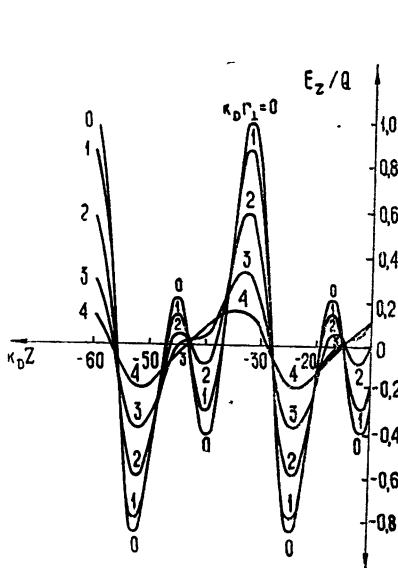


Рис. 1.

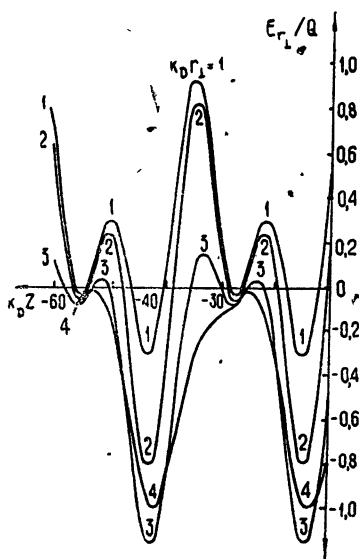


Рис. 2.

альной составляющих нелинейного поля (в единицах $Q = \frac{2\pi q^2 e^3 n_0 k_D}{3\alpha^2 m^2 u^4}$) для $k_D Z < 0$, при различных значениях $k_D r_{\perp}$. На рис. 3 для срав-

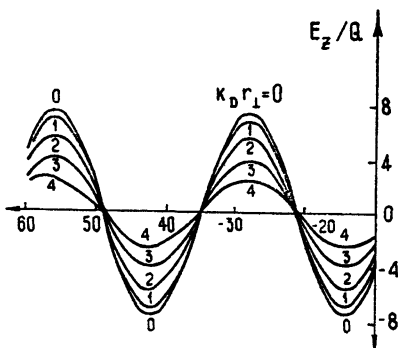


Рис. 3.

нения приведена продольная составляющая электрического поля линейного приближения. Соответствующее выражение легко может быть получено, оно имеет вид*

$$E_z^{(лин)} = \frac{Q}{\xi} \left[\int_0^1 \frac{x^3 J_0(x k_D r_{\perp})}{x^2 + \alpha^2} \exp(-x k_D |Z|) dx + 2\alpha^2 \cos(\alpha k_D |Z|) \times \right.$$

* С уменьшением Z_0 роль нелинейных эффектов убывает с уменьшением ξ . Поэтому при прохождении элементарных частиц ($Z_0 \sim 1$) вклад нелинейностей несуществен.

$$\times \int_0^1 \frac{x J_0(x k_D r_{\perp})}{x^2 + \alpha^2} dx \Big], \quad (13)$$

где $\xi = Z_0 \alpha^2 / 24 N_D$ представляет собой малый параметр задачи. (Здесь Z_0 — заряд сгустка, а N_D — число частиц в сфере Дебая.)

Существенно, что «амплитуда» нелинейной гармоники волнового поля за частицей всего на порядок меньше амплитуды основной гармоники линейного приближения. Совместно с различием в спектральных составах указанных полей это обстоятельство может благоприятствовать экспериментальному наблюдению подобных нелинейных эффектов.

Численное интегрирование выполнено на машине БЭСМ-4 Института прикладной математики ТГУ.

Авторы выражают благодарность А. Р. Хволесу за внимание и помощь при проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Гиоргадзе, Д. Г. Ломинадзе, Тр. VIII Международной конференции по явлениям в ионизированных газах, Вена, 1968, стр. 411
2. Н. П. Гиоргадзе, Д. Г. Ломинадзе, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 12, 1890 (1968).
3. В. И. Мирошниченко, УФЖ, 8, 1268 (1963); ЖТФ, 34, 1537 (1964).
4. С. Б. Рубин, В. Н. Цытович, ЖТФ, 34, 3 (1964)

Институт физики АН ГССР

Поступила в редакцию
1 августа 1968 г

ON PROPAGATION OF A CHARGED PARTICLE THROUGH WEAKLY-NONLINEAR PLASMA

N. P. Giorgadze, T. D. Kaladze, D. G. Lominadze

The authors consider the geometry of the nonlinear longitudinal field caused by interaction of generated by a particle (transiting through a weakly nonlinear isotropic plasma) longitudinal fields in a linear approximation. With the proper choice of the problem parameters the amplitude of the nonlinear wave field is shown to be by the order smaller than the amplitude of the linear wave field. Taking into account the differences in the spectral characteristics of these fields gives a possibility to observe the considered nonlinear effects.

УДК 621.378

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА С ТОНКОСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКОЙ

М. И. Захаров, Ю. В. Троицкий, Н. Д. Голдина

Рассматривается двухзеркальный оптический резонатор с введенной внутрь него тонкослойной металлической дифракционной решеткой, перпендикулярной к оси пучка. Расчет такой системы в оптическом приближении и при условии, что толщина элементов решетки значительно меньше длины волны, производится по формулам для резонатора с поглощающей пленкой. Полученное отношение энергии, рассеянной решеткой, к поглощенной энергии дает возможность оценить количество тепла, выделяющегося в селекторе. Измерения, проведенные с дифракционными решетками, изготовленными из Ag, на длине волны 6328 Å в пассивном резонаторе, хорошо согласуются с теорией. Однако потери в селектируемой моде несколько больше расчетных.

Как было показано [1], тонкий рассеивающий свет слой в оптическом резонаторе стоячей волны может использоваться для создания одночастотных газовых и твердотельных ОКГ. Эта система изображена на рис. 1 а, где 1 и 2—высокоотражающие зеркала, 3—рассеивающий слой, служащий селектором. Рассеивающий слой может быть выполнен в виде тонкой дифракционной решетки. Такая система позволяет эффективно выделять по добротности один вид колебаний, узловая поверхность которого совпадает с поверхностью решетки и для которого значительно уменьшаются потери, что связано с интерференцией лучей, возникающих в результате дифракции на решетке встречных бегущих волн.

Дифракционная решетка может быть изготовлена в виде множества одинаковых тонких (по сравнению с длиной волны) проводящих лент, представляющих собой металлические полосы (в частности, полупрозрачные), периодически расположенные на поверхности непоглощающего диэлектрика, перпендикулярной к световому пучку. Мы предполагаем, что нам известны коэффициент преломления диэлектрика, поверхностная проводимость металлических лент и коэффициент заполнения, т. е. относительная величина площади поверхности, покрытой металлом. Задача заключается в том, чтобы по этим параметрам определить добротность и собственную частоту резонатора с вставленной в него дифракционной решеткой, степень подавления нежелательных мод и т. п.

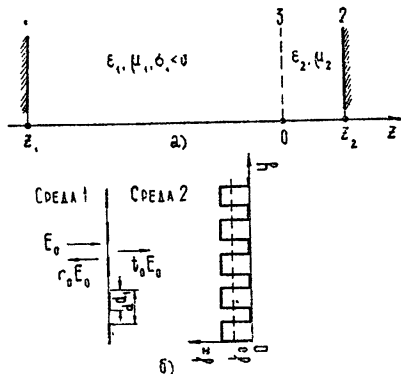


Рис. 1.

1. Поставленная задача непосредственно связана с задачей о дифракции электромагнитных волн на плоской решетке. Решение в общем случае является довольно сложным [2] и упрощается лишь в длинноволновом приближении для идеально проводящих лент. Нам же более интересно коротковолновое (оптическое) приближение, поскольку обычно легче изготовить решетку, характерные размеры которой намного превышают длину волны света. Задача может быть решена обычным методом Гюйгенса—Френеля. Однако здесь мы используем метод усреднения граничных условий на основе определенной модели проводящего слоя, что дает по существу тот же результат, но, во-первых, позволяет свести к минимуму число экспериментально определяемых параметров такого селектора, которые необходимо знать перед его установкой в оптический резонатор, а во-вторых, значительно облегчает процесс изготовления (путем напыления в вакууме) селектора с заданными свойствами.

Пусть на ленточную решетку, лежащую в плоскости $z=0$ (рис. 1 б) на полупространстве из диэлектрика (среда 2), нормально падает из среды 1 плоская электромагнитная волна. Ленты предполагаются бесконечно тонкими с произвольной поверхностной проводимостью σ_0 . Ширина ленты металла d_1 , период решетки d . Пусть, например, электрический вектор \mathbf{E} падающей волны ориентирован параллельно краю ленты (оси Ox). Ввиду периодичности по y поле удобно представить в виде рядов Фурье [2]:

$$\begin{aligned} E_{1x} &= E_0 \left[\exp(-i\omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} z) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \exp(ih'_n z) \exp(i2\pi n y/d) \right], \\ E_{2x} &= E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} t_n \exp(-ih''_n z) \exp(i2\pi n y/d), \\ H_{1y} &= E_0 \left[-\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \exp(-i\omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} z) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \frac{h'_n}{\omega \mu_1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp(ih'_n z) \exp(i2\pi n y/d) \right], \\ H_{2y} &= E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} t_n \frac{h''_n}{\omega \mu_2} \exp(-ih''_n z) \exp(i2\pi n y/d), \end{aligned} \quad (1)$$

где E_0 — амплитуда электрического поля падающей волны; ϵ_1 и ϵ_2 — диэлектрические, а μ_1 и μ_2 — магнитные проницаемости сред 1 и 2 соответственно; $h'_n = \sqrt{\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 - (2\pi n/d)^2}$; $h''_n = \sqrt{\omega^2 \epsilon_2 \mu_2 - (2\pi n/d)^2}$.

Граничные условия для дифракционных полей следующие:

$$z = 0: \quad E_{1x} = E_{2x}, \quad H_{2y} - H_{1y} = j_x, \quad (2)$$

где j_x — поверхностная плотность тока, являющаяся периодической функцией y . Имея в виду использование этой системы в резонаторе, из всего набора плоских волн, распространяющихся под различными углами к оси Oz , нам потребуются лишь те, которые распространяются вдоль этой оси. Удовлетворяя граничным условиям (2) для полей (1), получим для основной гармоники (т. е. для амплитуд прошедшей и отраженной плоских волн):

$$\begin{aligned} 1 + r_0 &= t_0, \\ E_0 \left[\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} (1 - r_0) - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} t_0 \right] &= j_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь j_0 — постоянная (не зависящая от y) составляющая поверхностной плотности тока j_x .

Средняя плотность тока j_0 пропорциональна полю рассматриваемой плоской волны в плоскости решетки, т. е. величине $E_0(1 + r_0)$:

$$j_0 = \bar{\sigma} E_0(1 + r_0), \quad (4)$$

где коэффициент пропорциональности $\bar{\sigma} = \sigma' + i\sigma''$ не зависит от y и является некоторой эффективной проводимостью, в общем случае комплексной. Для однородно проводящей плоскости, взятой вместо решетки, граничные условия дают точно такие же коэффициенты отражения и пропускания. Следовательно, $\bar{\sigma}$ равна проводимости однородно проводящей границы раздела двух диэлектриков, для которой коэффициенты пропускания и отражения те же, что и для дифракционной решетки.

Найдем связь между коэффициентом $\bar{\sigma}$ и проводимостью σ_0 лент решетки для случая, когда ширина лент d_1 велика по сравнению с длиной волны λ . Дифракционное поле имеет характер волн, расходящихся от краев лент, и поэтому на ленте на расстояниях от ее края, превышающих длину волны, оно значительно слабее, чем поле интересующих нас трех плоских волн, и им можно пренебречь [3].

Так как $d_1 \gg \lambda$, то можно считать распределение поля по всей ширине ленты однородным. Распределение поля в щелях не уточняем. Поверхностная плотность тока, изображенная справа на рис. 1 б, имеет вид $j_x = \sigma E_{1x}|_{z=0}$, где $\sigma = 0$ в щелях и $\sigma = \sigma_0$ на лентах, т. е. σ , как и E_{1x} , является периодической функцией y . Постоянная составляющая j_0 плотности тока j_x равна $j_0 = (d_1/d) \sigma_0 \bar{E}$, где \bar{E} — поле на ленте. В том же приближении $\bar{E} = E_0(1 + r)$, где

$$rE_0 = \frac{(V\bar{\epsilon}_1/V\bar{\mu}_1) - \sigma_0 - (V\bar{\epsilon}_2/V\bar{\mu}_2)}{(V\bar{\epsilon}_1/V\bar{\mu}_1) + \sigma_0 + (V\bar{\epsilon}_2/V\bar{\mu}_2)} E_0$$

— поле отраженной волны на ленте без учета влияния краев. Таким

образом, приближенно $j_0 = \frac{d_1}{d} \sigma_0 \frac{2 V\bar{\epsilon}_1/V\bar{\mu}_1}{(V\bar{\epsilon}_1/V\bar{\mu}_1) + \sigma_0 + (V\bar{\epsilon}_2/V\bar{\mu}_2)} E_0$.

С другой стороны, согласно (3) и (4) $j_0 = \bar{\sigma} \frac{2 V\bar{\epsilon}_1/V\bar{\mu}_1}{(V\bar{\epsilon}_1/V\bar{\mu}_1) + \bar{\sigma} + (V\bar{\epsilon}_2/V\bar{\mu}_2)} E_0$.

Сравнивая два выражения для j_0 , получаем искомое соотношение:

$$\bar{\sigma} = \frac{d_1}{d} \sigma_0 \left[1 + \left(1 - \frac{d_1}{d} \right) \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \right)^{-1} \sigma_0 \right]^{-1}. \quad (5)$$

2. Для оценки количества тепла, выделяющегося в селекторе рассматриваемого типа, представляет интерес определение омических потерь в сравнении с дифракционными потерями. Принимая $\sigma_0 = \sigma'_0 + i\sigma''_0$ и используя (5), находим для случая $d_1 \gg \lambda$ отношение рассеянной энергии $P_{\text{рас}}$ (потери вследствие дифракции) к поглощенной энергии $P_{\text{погл}}$ (омические потери):

$$\frac{P_{\text{рас}}}{P_{\text{погл}}} = \frac{\sigma' |1 + r_0|^2 - (d_1/d) \sigma'_0 |\bar{E}|^2}{(d_1/d) \sigma'_0 |\bar{E}|^2} = \left(1 - \frac{d_1}{d} \right) \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \right)^{-1} \frac{\sigma_0'^2 + \sigma_0''^2}{\sigma'_0}.$$

Это отношение может быть сделано большим, т. е. возможно значительно уменьшить нежелательные тепловые эффекты при использовании дифракционной решетки в качестве селектора мод в мощных лазерах.

3. При дифракции светового пучка лазера на ленточной решетке пространственное разделение гармоник происходит на таком расстоянии z от решетки, что $z \sim d\omega/\lambda$, где ω — радиус светового пучка. При $\omega \gg d$ это расстояние соответствует волновой зоне по периоду решетки. Таким образом, для отделения основной гармоники от остальных в стоячей волне необходимо, чтобы зеркала, образующие резонатор, находились на расстояниях от решетки, не меньших указанного. Тогда можно учитывать лишь основную гармонику, и расчет резонатора с дифракционной решеткой производится по формулам для резонатора с поглощающим слоем, рассмотренного в [4], где найдены спектр собственных частот продольных мод, затухание и т. д.

Для малых смещений ΔL_2 решетки из узла электрического поля стоячей волны усиление g в активной среде (активной средой считаем среду 1), необходимое для поддержания колебаний, и изменение $\Delta\omega$ собственной частоты резонатора определяются, следуя [4], следующим образом:

$$g - 1 = \frac{1}{2} \left[a_1 + \frac{a_2}{\eta} + \frac{4\xi'}{\eta^2} \varphi^2 \left(1 + \frac{2\xi''}{\eta} \varphi \right) \left(1 + \frac{\eta - 1}{\eta l_1 + l_2} l_2 \right)^2 \right]; \quad (6)$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\eta - 1}{\eta l_1 + l_2} \Delta L_2. \quad (7)$$

Здесь a_1 и a_2 — потери в зеркалах 1 и 2, причем $a_1 \ll 1$ и $a_2 \ll 1$; $\eta = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_1} / \sqrt{\varepsilon_1 \mu_2}$; $\xi' = \sigma' \sqrt{\mu_1} / \sqrt{\varepsilon_1}$; $\xi'' = \sigma'' \sqrt{\mu_1} / \sqrt{\varepsilon_1}$; l_1 и l_2 — оптические длины 2-х частей резонатора:

$$l_1 = -z_1 c \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \quad l_2 = z_2 c \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}; \quad \varphi = \frac{\omega}{c} \Delta L_2 \quad (|\varphi| \ll 1);$$

c — скорость света в вакууме. Формулы (6) и (7) потребуются в дальнейшем для сравнения с экспериментом. Формула (6) является более общей, нежели формула (7) в [4], где считалось, что $\xi'' = 0$.

Полученные выражения относятся к одной поляризации падающего света, однако в оптическом приближении поляризационными эффектами обычно пренебрегают, поэтому результаты легко обобщаются на случай произвольной поляризации. Решетка может быть и двумерной. Действительно, соотношение амплитуд интересующих нас плоских волн зависит только от среднего значения поверхностной плотности тока в плоскости $z = 0$; следовательно, полученные выше результаты могут быть применены и для случая двумерной решетки с заменой d_1/d на s_1/s — относительную величину площади, покрытой металлом.

4. Для проведения эксперимента был взят пассивный оптический резонатор, состоящий из двух диэлектрических зеркал — плоского и сферического с радиусом кривизны 70 см, находящихся на расстоянии $l_1 + l_2 = 33$ см. Внутрь резонатора вблизи плоского зеркала вводилась пластинка из высококачественного кварца; одна из плоских сторон пластинки просветлялась, а на другую, которая устанавливалась перпендикулярно к оси резонатора, наносилась дифракционная решетка путем напыления в вакууме серебра через маску — набор секток с квадратными ячейками, имеющих период 33 микрона.

Исследуемый резонатор просвечивался лучом сканируемого по частоте He-Ne лазера с длиной волны 6328 Å, и измерялась ширина резонансной кривой и ее сдвиг при различных положениях пластинки. Последняя перемещалась вдоль оси резонатора с помощью пьезокерамики. Измерения были возможны лишь вблизи точки максимальной добротности вследствие быстрого уменьшения добротности при сдвиге из этого положения. Установка и процедура измерений подробно описаны в [5]. Оптические длины отрезков, составляющих резонатор, равнялись $l_1 = 31$ см и $l_2 = 2$ см для случая, когда решетка была обращена к дальнему (сферическому) зеркалу, и $l_1 = 32,2$ см, $l_2 = 0,8$ см — для случая, когда решетка обращена к ближнему (плоскому) зеркалу.

По измерениям ширины резонансной кривой были определены потери, вносимые селектором в выделяемую моду, и крутизна роста потерь при сдвиге рассеивающего слоя из узла электрического поля. Как следует из формулы (6), потери при сдвиге решетки из узла электрического поля возрастают почти по квадратичному закону. Крутизна роста потерь зависит от σ' . Для получения нужной крутизны изготавливается решетка с наперед заданным параметром σ' , который зависит, согласно (5), от коэффициента заполнения s_1/s и проводимости σ_0 металлических элементов решетки. Ведя напыление через одну, две, три сетки, можно получить различные значения s_1/s . Варьируя же оптическую плотность наносимого покрытия, можно менять σ_0 . Одновременно с напылением решетки через маску велось напыление сплошного слоя на отдельную кварцевую пластинку; поверхностная проводимость вычислялась после измерения параметров этого слоя в бегущей волне на $\lambda = 6328$ Å. Параметр s_1/s находился по известной величине пропускания масок. Для исследованных решеток $|\sigma_0| \sqrt{\mu_1} / \sqrt{\epsilon_1} = 4,5 \div 30$; $s_1/s = 0,25 \div 0,62$. Показатель преломления кварца принимался равным 1,46.

Первый этап проверки полученных формул заключается в измерении энергетических коэффициентов пропускания T и отражения R, R' решетки в бегущей волне и сравнении их с вычисленными по формулам (3), (4), (5). Получено хорошее совпадение; например, для одной из решеток расчет дает $T = 34,0\%$, $R = 31,0\%$ и $R' = 14,0\%$, а измеренные значения равны 32,4%, 29,6% и 14,1% соответственно.

Наибольший интерес представляет сравнение расчетных и измеренных параметров резонатора с дифракционной решеткой в качестве селектора видов колебаний.

Измерения показали, что по мере выхода решетки из узла потери a в расчете на один проход вначале действительно возрастают по квадратичному закону: $a = a_0 + 2\alpha\varphi^2$ — для случая $\sqrt{\epsilon_2\mu_1} / \sqrt{\epsilon_1\mu_2} = 1,46$ (подложка решетки обращена к ближнему зеркалу) и $a' = a'_0 + 2\alpha'\varphi^2$ — для случая $\sqrt{\epsilon_2\mu_1} / \sqrt{\epsilon_1\mu_2} = 1/1,46$ (подложка обращена к дальнему зеркалу), причем $a'_0 > a_0$ и $\alpha' > \alpha$. Измеренные значения коэффициентов α и α' хорошо описываются квадратичными членами в формуле (6). На рис. 2 точками изображены значения коэффициентов α и α' для различных решеток, отличающихся величиной σ' . Здесь же проведены сплошные линии, соответствующие значениям α и α' , вычисленным по формуле (6) для указанной выше геометрии резонатора, причем $\alpha' \simeq 1,46^3 \alpha \simeq 3\alpha$. Исходные параметры $\sigma_0 = \sigma'_0 + i\sigma''_0$ и s_1/s указаны в табл. 1, где через Y_0 обозначена волновая проводимость свободного пространства, равная $(120 \pi \text{ ом})^{-1}$, порядковые номера решеток соответствуют обозначениям на рис. 2.

Экспериментально замечено, что изменение потерь при перемещении решетки из узла в одну сторону круче, чем в другую. Эта асимметрия для взятой нами модели становится заметной, согласно (6), при нарушении условия $|2\xi''\varphi/\eta| \ll 1$ и объясняется наличием мнимой части поверхностной проводимости, связанной, в частности, с грану-

Таблица 1

№ образца	$\frac{\sigma_0'}{Y_0}$	$\frac{ \sigma_0'' }{Y_0}$	$\frac{s_1}{s}$	$\frac{P_{\text{рас}}}{P_{\text{погл}}}$
1	3,5	19,0	0,25	32
2	0,5	4,4	0,25	12
3	0,5	6,0	0,52	14
4	2,8	12,4	0,39	14
5	0,6	6,0	0,62	9
6	12,0	25,0	0,62	10

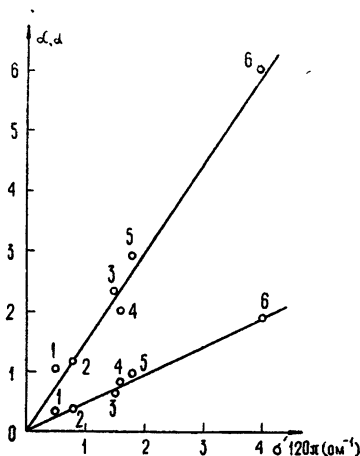


Рис. 2.

лярной структурой проводящих частей решетки, т. е. с токами смещения. По нашим данным $\xi'' < 0$ для всех исследованных решеток, вследствие чего более резкий рост потерь имеет место при уменьшении расстояния l_2 ($\varphi = \omega\Delta l_2/c < 0$). Наибольшая асимметрия наблюдалась для решеток, напыленных через одну сетку, т. е. решеток с относительно большим коэффициентом заполнения s_1/s , обладающих высокой эффективной проводимостью σ .

Измеренные значения сдвига частоты совпадают, с точностью до ошибки измерений (около 10%), с рассчитанными по формуле (7) и равными 2,9 МГц ($\eta = 1,46$) и $-4,1$ МГц ($\eta = 1/1,46$). Оба этих значения соответствуют увеличению расстояния l_2 на $\lambda/100$ для указанных выше размеров резонатора.

Экспериментальные данные показали, что сдвиг частоты при перемещении решетки вблизи узла практически не зависит от параметров селектора и таков же, как для чистой кварцевой подложки, не покрытой металлом.

Достоинством рассеивающего слоя является то, что тепловые потери в нем составляют весьма незначительную часть от величины полных потерь. Оценки отношения рассеянной энергии $P_{\text{рас}}$ к поглощенной $P_{\text{погл}}$ приведены в таблице.

Несмотря на хорошее совпадение расчета с данными измерений, есть и расхождения, касающиеся минимальных потерь a_0 и a_0' . В принятой модели, не учитывающей толщины решетки, потери обусловлены только зеркалами, а селектор сам по себе не должен вносить потерь в выделяемую моду. Однако в реальном случае эти потери отличны от нуля, по-видимому, благодаря конечной толщине решетки (хотя и значительно меньшей по сравнению с λ — не более 200 Å). На рис. 3 представлены потери a_0' на один проход, вносимые селектором в выделяемую моду, в зависимости от остроты селекции, характеризуемой коэффициентом α' . Наблюдается тенденция к возрастанию a_0' с уве-

личением α' . Что касается потерь a_0 , которые измерялись при $l_2 = 2$ см, то они оказались несколько выше, так как при данной геометрии резонатора поверхность равной фазы стоячей волны, обладая конечной кривизной, не совпадает с плоскостью решетки. На рис. 3 показаны также (для сравнения) экспериментальные точки для некоторых поглощающих пленок, исследованных ранее [5]. Из сравнения этих данных можно сделать вывод, что начальные потери, вносимые рассеивающим слоем, близки по величине к потерям, вносимым сплошной поглощающей пленкой.

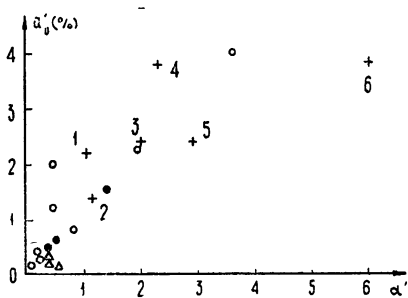


Рис. 3. $\triangle\triangle\triangle$ — Al_{погл.}; $\circ\circ\circ$ — Ni_{погл.}; $\bullet\bullet\bullet$ — Ag_{погл.}; $++++$ — Ag_{рас.}

5. Результаты проведенной работы показывают возможность расчета основных параметров резонатора с тонкослойной металлической дифракционной решеткой на основании задания минимального числа параметров — показателя преломления подложки, коэффициента заполнения и проводимости элементов решетки. Первые два параметра обычно известны заранее, а последний легко контролируется в процессе изготовления решетки. Это открывает возможность изготовления селектора с заданными свойствами. Экспериментальные данные показывают, что резонатор такого типа может обеспечить высокую остроту селекции и, следовательно, может быть использован даже в лазерах с большими коэффициентами усиления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Троицкий, Н. Д. Голдина, Оптика и спектроскопия, 25, 462 (1968).
2. О. А. Третьяков, В. П. Шестопапов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 2, 353 (1963).
3. Л. А. Вайнштейн, Теория дифракции и метод факторизации, изд. Сов. радио, М., 1966, § 37.
4. Ю. В. Троицкий, Радиотехника и электроника, 14, 1461 (1969)
5. Н. Д. Голдина, М. И. Захаров, Ю. В. Троицкий, Прикладная спектроскопия, 10, 43 (1969).

Институт автоматики и электрометрии
СО АН СССР

Поступила в редакцию
28 июля 1969 г.

INVESTIGATION OF THE OPTICAL RESONATOR WITH A THIN-LAYER METAL DIFFRACTION ARRAY

M. I. Zakharov, Yu. V. Troitskii, N. D. Goldina

A two-mirror optical resonator with inserted metal diffraction array perpendicular to the beam axis is considered. The calculation of such a system in the optical approximation when the depth of the array elements is considerably smaller than the wavelength are made using the formulas for the resonator with the absorbing film. The obtained ratio of the energy scattered by the array and the absorbed energy enables one to estimate the quantity of heat released in the selector. Measurements made by diffraction arrays made of Ag at the wavelength 6328 Å in the passive resonator show a good agreement with the theory. However, the losses in the selected mode are larger than the estimated ones.

УДК 533.951 : 538 56

**ОБ ИНТЕНСИВНОСТИ РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ ФРОНТА
БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ**

А. В. Степанов

Рассматриваются спонтанные процессы рэлеевского и комбинационного рассеяния плазменных волн в электромагнитные на тепловых флуктуациях плазмы во фронте бесстолкновительной ударной волны. Определены коэффициенты рассеяния. Показано, что при относительном движении электронов и ионов во фронте ударной волны со скоростью, превышающей тепловую скорость электронов, коэффициент рэлеевского рассеяния в $(2a^4q^4)^{-1}$ раз меньше ($a^2q^2 \ll 1$), чем в обычной плазме.

1. Известно [1], что во фронте бесстолкновительной ударной волны, распространяющейся перпендикулярно внешнему магнитному полю H_0 в разреженной и достаточно холодной плазме ($H_0^2 \gg 8\pi N_0 T_e$, где N_0 — невозмущенная концентрация электронов, равная концентрации ионов; T_e — температура электронов), вследствие градиентного дрейфа электроны сдвинуты в пространстве скоростей относительно ионов на величину v_0 , которая при определенных условиях превышает тепловую скорость электронов $v_{T_e} = \sqrt{T_e/m_e}$, где m_e — масса электрона. Такая система генерирует ленгмюровские волны, которые, взаимодействуя с тепловыми флуктуациями плазмы, трансформируются в электромагнитные с частотами порядка ω_0 и $2\omega_0$ (рэлеевское и комбинационное рассеяние). Здесь ω_0 — частота возбуждаемых плазменных волн.

В работе [2] показано, что условие возникновения неустойчивости ($v_0 > v_{T_e}$) зависит от параметра $\alpha = H_0^2/4\pi N_0 m_e c^2$, где c — скорость света. Так, при $\alpha \ll 1$ неустойчивость возникает, если

$$M > 1 + 3/4 (8\pi N_0 T_e / H_0^2)^{1/3},$$

где $M = u \sqrt{4\pi N_0 m_i} / H_0$ — магнитное число Маха, u — скорость ударной волны, m_i — масса иона. Если $1 \ll \alpha \ll m_i/m_e$, то условие неустойчивости имеет вид

$$M > 1 + 3/4 (2v_{T_e}^2 / c^2)^{1/3}.$$

Процессы рэлеевского и комбинационного рассеяния подчиняются законам сохранения

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \Delta\omega, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}, \end{aligned} \tag{1}$$

где ω , \mathbf{k} и $\Delta\omega$, \mathbf{q} — частоты и волновые векторы рассеянной и флуктуационной волн, \mathbf{k}_0 — волновой вектор рассеиваемой волны. Так как $k \sim n_{1,2}\omega_0/c$, а $k_0 = n_0\omega_0/c$, где $n_{1,2}$ и n_0 — показатели преломления электромагнитной и плазменной волн, и обычно $n_0 \gg n_{1,2}$, то $k_0 \gg k$. Тогда из (1) следует, что

$$\mathbf{k}_0 \simeq -\mathbf{q}. \tag{2}$$

Рассеяние, следовательно, происходит на встречных волнах.

В работе [3] при определении интенсивности радиоизлучения первой гармоники солнечных всплесков II типа, генерируемых бесстолкновительными ударными волнами, использовался коэффициент рэлеевского рассеяния возбужденных плазменных волн на некогерентных тепловых флуктуациях плазмы, приведенный в монографии [4] и вычисленный без учета относительного движения электронов и ионов со скоростью $v_0 > v_{Te}$. Из [3] следует, что излучение на первой гармонике в этом случае преобладает над излучением на второй гармонике при условии, что последняя обусловлена спонтанным процессом рассеяния возбужденных плазменных волн в электромагнитные на когерентных тепловых флуктуациях плазмы.

Генерация радиоизлучения на второй гармонике возможна и посредством индуцированного процесса: плазменные волны рассеиваются на свободных электронах и изотропизуются. При этом всегда найдутся такие пары векторов k_0 и k'_0 , которые подчиняются условию (2). Интенсивность рассеянных электромагнитных волн в этом случае может оказаться более высокой, чем при спонтанном процессе, малая эффективность которого объясняется низким уровнем тепловых флуктуаций. Мощность радиоизлучения на частоте основного тона ω_0 может, в принципе, также значительно превышать уровень, определяемый спонтанным рассеянием, благодаря возможной трансформации плазменных волн в электромагнитные на регулярных неоднородностях фронта ударной волны. В настоящей работе, мы, однако, не рассматриваем оба указанных эффекта, а ограничиваемся анализом спонтанных процессов, которые, очевидно, будут определять лишь минимальные коэффициенты трансформации плазменных волн в электромагнитные с учетом относительного движения электронов и ионов со скоростью $v_0 > v_{Te}$.

2. Пренебрежем регулярной неоднородностью фронта бесстолкновительной ударной волны*, т. е. будем считать, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} k_0 \delta &\gg 1, \\ k \delta &\gg 1. \end{aligned} \tag{3}$$

При $\alpha \ll 1$ или, что одно и то же, при $\omega_{He} \ll \omega_{Le}$, где $\omega_{He} = eH_0/m_e c$, $\omega_{Le} = (4\pi e^2 N_0/m_e)^{1/2}$, ширина уединенной волны $\delta \sim c/\omega_{Le} \sqrt{M-1}$. Тогда $k_0 \delta \sim n_0/\sqrt{M-1}$ и $k \delta \sim n_{1,2}/\sqrt{M-1}$, а так как $n_{1,2} \leq 1$, то из (3) следует, что предположение об однородности фронта справедливо только для достаточно слабых ($M \sim 1$) ударных волн. В случае $\alpha \gg 1$ ($\omega_{He} \gg \omega_{Le}$), согласно [2], $\delta \sim H_0/4\pi e N_0 \sqrt{M-1}$, т. е. $k_0 \delta \sim \alpha n_0/\sqrt{M-1}$ и $k \delta \sim \alpha n_{1,2}/\sqrt{M-1}$. Следовательно, при $\alpha \gg 1$ для выполнения условий однородности фронта (3) требование «слабости» ударной волны становится менее жестким.

Кроме того, должно выполняться неравенство $1/\text{Im } \omega_0 \ll \delta/u$, означающее, что характерное время развития неустойчивости много меньше временного масштаба уединенной волны. Это неравенство, как показано в работе [2], заведомо справедливо при $\alpha \ll 1$, а при $\alpha \gg 1$ получается, что $1/\text{Im } \omega_0 \leq \delta/u$, т. е. амплитуды возбуждаемых плазменных колебаний существенно не возрастают и, возможно, не превышают заметно уровень равновесных тепловых флуктуаций.

* Фронт бесстолкновительной ударной волны состоит из серии уединенных волн с характерным масштабом δ (см., например, [1]).

Поскольку ионы в уединенной волне сдвинуты в пространстве скоростей относительно электронов на величину $v_0 > v_{Te}$, удобно перейти в систему координат, связанную с электронами, так как именно в такой системе координат фактически происходит нерегулярная трансформация плазменных волн в электромагнитные.

Дисперсионное уравнение продольных колебаний плазмы имеет вид

$$1 + 4\pi(\chi^e + \chi^i) = 0.$$

Если функция распределения электронов максвелловская, то электронная восприимчивость продольных $[q^2 c^2 / (\Delta\omega)^2 \gg 1]$ флуктуационных волн $\chi^e = q_i q_j \chi_{ij}^e / q^2$ равна [5]

$$\chi^e = \frac{1}{4\pi a^2 q^2} \left\{ 1 - e^{-\beta} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{z_0}{z_s} I_s(\beta) [\varphi(z_s) - i \sqrt{\pi} z_s \exp(-z_s^2)] \right\}, \quad (4)$$

где $a^2 = T_e / 4\pi e^2 N_0$, $\beta = q^2 v_{Te}^2 \sin^2 \tilde{\vartheta} / \omega_{He}^2$, $\tilde{\vartheta}$ — угол между \mathbf{q} и \mathbf{H}_0 , $z_s = (\Delta\omega - s\omega_{He}) / \sqrt{2} q v_{Te} |\cos \tilde{\vartheta}|$, $I_s(\beta)$ — модифицированная функция

Бесселя, $\varphi(z_s) = 2z_s \exp(-z_s^2) \int_0^{z_s} \exp(t^2) dt$.

Считая ионы холодными, определим в гидродинамическом приближении ионную восприимчивость, которая оказывается равной

$$\chi^i = -\frac{1}{4\pi} \frac{m_e}{m_i} \left[\frac{\omega_{Le}^2}{(\Delta\omega - qv_0)^2 - \omega_{Hi}^2} \sin^2 \tilde{\vartheta} + \frac{\omega_{Le}^2}{(\Delta\omega - qv_0)^2} \cos^2 \tilde{\vartheta} \right],$$

где $\omega_{Hi} = eH_0/m_i c$. В конкретных условиях генерации солнечных радиовсплесков II типа, радиоизлучения Юпитера, излучения из ударной волны, возникающей при взаимодействии солнечного ветра с магнитосферой Земли, ионы можно считать немагнитными, т. е. $\omega_{Hi} \ll qv_{Ti}$, где $v_{Ti} = \sqrt{T_i/m_i}$, T_i — температура ионов. Тогда χ^i преобразуется к выражению

$$\chi^i = -\frac{1}{4\pi} \frac{m_e}{m_i} \frac{\omega_{Le}^2}{(\Delta\omega - qv_0)^2}, \quad (5)$$

представляющему собой ионную восприимчивость плазмы в изотропном случае.

Считая частоты положительными величинами, заметим, что, в силу закона сохранения (2), фазовые скорости флуктуационных волн $\mathbf{v}_{\text{фл}} = \Delta\omega \mathbf{q} / q^2$ лежат в области отрицательных значений, вдали от области неустойчивости Q (рис. 1). При рэлеевском ($\Delta\omega \rightarrow 0$) и комбинационном ($\Delta\omega \approx -qv_0$) рассеянии из (5) видно, что в нулевом приближении ($m_e/m_i \rightarrow 0$) ионную восприимчивость можно положить равной нулю. Тогда дисперсионное уравнение флуктуационных колебаний примет вид

$$1 + 4\pi\chi^e = 0, \quad (6)$$

где χ^e определено в (4).

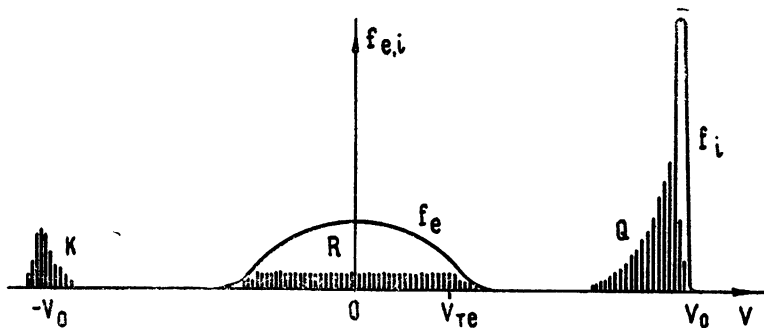


Рис. 1. Функции распределения электронов и ионов во фронте бесстолкновительной ударной волны в системе координат, связанной с электронами. *Q*—область неустойчивости, *R*—область резонансного рассеяния, *K*—область комбинационного рассеяния.

Таким образом, в плазме, ионы которой движутся относительно электронов со скоростью, превышающей тепловую скорость электронов, трансформация плазменных волн в электромагнитные происходит на тех тепловых флуктуационных колебаниях, фазовые скорости которых находятся в области отрицательных значений, вдали от области неустойчивости. В областях трансформации *R* и *K* (рис. 1) дисперсионное уравнение (6) имеет такой же вид, как и в случае электронной равновесной плазмы. Ионы в этом случае «выведены» из области рассеяния и их роль сводится лишь к компенсации заряда электронов. Флуктуации, ответственные за рассеяние, будут, следовательно, чисто электронными и равновесными, и для их рассмотрения можно пользоваться флуктуационно-диссипативной теоремой [5].

3. Коэффициент трансформации волн по определению равен

$$\Sigma = I/VS_0,$$

где *I* — интенсивность рассеянных волн, *S*₀ — плотность потока энергии волн, падающих на рассеивающий объем *V*. В пренебрежении влиянием теплового движения на характер распространения рассеиваемой и рассеянной высокочастотных волн, дифференциальный поперечник (коэффициент) трансформации плазменных волн в электромагнитные на некогерентных ($\Delta\omega \rightarrow 0$) флуктуациях равен [6]

$$d\Sigma_{\text{резл}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega_0^4}{\omega_{Le}^4} \frac{n^3 |e^*(\hat{\epsilon} - 1) \cdot \mathbf{x}_0|^2}{n_0 \hat{\epsilon} (e^* \cdot \hat{\epsilon} e)} \langle \delta N^2 \rangle_{q\Delta\omega} d\omega d\Omega, \quad (7)$$

где ϵ_{ij} — тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & -i\epsilon_2 & 0 \\ i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix},$$

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \omega_{He}^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_{He}}{\omega} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \omega_{He}^2}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2},$$

$$n^2 = n_{1,2}^2 = \frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin^2 \vartheta + \varepsilon_1 \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \vartheta) \pm [(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 \sin^4 \vartheta + 4\varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 \cos^2 \vartheta]^{1/2}}{2(\varepsilon_1 \sin^2 \vartheta + \varepsilon_3 \cos^2 \vartheta)},$$

ϑ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{H}_0 , $\alpha_0 = \mathbf{k}_0/k_0$.

$$\mathbf{e} = \left(\cos \varphi - i \frac{\varepsilon_2}{n^2 - \varepsilon_1} \sin \varphi; \sin \varphi + i \frac{\varepsilon_2}{n^2 - \varepsilon_1} \cos \varphi; \frac{n^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{n^2 \sin^2 \vartheta - \varepsilon_3} \right)$$

— комплексный вектор поляризации рассеянной волны, φ — угол между плоскостями $(\mathbf{k}_0, \mathbf{H}_0)$ и $(\mathbf{k}, \mathbf{H}_0)$,

$$\xi = \omega_0^2 \frac{dA_0}{d\omega_0^2} \Big|_{n_0} \frac{d(\omega_0 n_0)}{d\omega_0},$$

$$A_0 = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2 - \omega_{He}^2} \sin^2 \vartheta_0 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2} \cos^2 \vartheta_0,$$

ϑ_0 — угол между \mathbf{k}_0 и \mathbf{H}_0 , $d\Omega$ — элемент телесного угла.

Спектральная корреляционная функция флуктуаций плотности электронов выражается на основании флуктуационно-диссипативной теоремы через электронную восприимчивость следующим образом [5]:

$$\langle \delta N^2 \rangle_{q\Delta\omega} = \frac{2q^2 T_e \operatorname{Im} \chi^e}{e^2 \Delta\omega |\varepsilon|^2}, \quad (8)$$

где $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi^e$. Выражения для $\langle \delta N^2 \rangle_{q\Delta\omega}$ существенно различны в изотропной и магнитоактивной плазмах благодаря разному виду электронной восприимчивости χ^e . Но в [5, 7, 8] обращается внимание на то обстоятельство, что как в обычной электронно-ионной плазме, так и в электронной плазме при $q^2 c^2 / (\Delta\omega)^2 \gg 1$ величина $\langle \delta N^2 \rangle_q = (1/2\pi) \int \langle \delta N^2 \rangle_{q\Delta\omega} d(\Delta\omega)$ не зависит от магнитного поля и значение пространственной корреляционной функции флуктуаций плотности электронов $\langle \delta N^2 \rangle_q$ в магнитоактивной плазме совпадает с аналогичным значением в изотропной плазме. Это значение в случае функций распределения, изображенных на рис. 1, равно

$$\langle \delta N^2 \rangle_q = \frac{1}{2} N_0 \frac{a^4 q^4}{1 + a^2 q^2}, \quad (9)$$

где параметр $a^2 q^2 \ll 1$, а интегрирование в (9) распространено только на область равновесных флуктуаций (область R на рис. 1).

Пусть на рассеивающий объем V падает плоская монохроматическая плазменная волна $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r})$. Выбирая для простоты $\vartheta_0 = \pi/2^*$, проинтегрируем (7) по частоте и телесному углу, используя при этом (9):

$$\Sigma_{\text{рэл}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 N_0 \frac{a^4 q^4}{1 + a^2 q^2} \frac{c}{v_{\text{гp}}^0} \frac{\omega_{Le}^2 + \omega_{He}^2}{\omega_{Le}^2} \int_0^\pi \Gamma(\vartheta) d\vartheta, \quad (10)$$

* В уединенной волне, распространяющейся поперек магнитного поля, скорость дрейфа электронов относительно ионов $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{H}_0$. Плазменные волны, следовательно, возбуждаются в некотором конусе углов вблизи направления, перпендикулярного \mathbf{H}_0 , причем максимальный инкремент неустойчивости соответствует $\mathbf{k}_0 \perp \mathbf{H}_0$.

где

$$\Gamma(\vartheta) = n^3 \sin \vartheta \frac{\left(\varepsilon_1 - 1 + \frac{\varepsilon_2^2}{n^2 - \varepsilon_1} \right)^2 + \varepsilon_2^2 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 - \varepsilon_1} \right)^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_2^2}{(n^2 - \varepsilon_1)^2} + \frac{2\varepsilon_2^2}{n^2 - \varepsilon_1} + \varepsilon_3 \frac{n^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(n^2 \sin^2 \vartheta - \varepsilon_3)^2}}$$

— диаграмма направленности рассеянного излучения, $v_{rp}^0 = \frac{d\omega_0}{dk_0}$ — групповая скорость рассеиваемых плазменных волн.

Отметим, что при изменении взаимного расположения функций распределения электронов и ионов в (10) изменяется только $\langle \delta N^2 \rangle_q$, так как мы полагали, что в (7) только $\langle \delta N^2 \rangle_{q\Delta\omega}$ зависит от $\Delta\omega$. Поэтому можно сравнить (10) с $\Sigma_{p\text{эл}}^0$, где индекс «0» означает, что $v_0 = 0$. В обычной электронно-ионной плазме в области R при $a^2 q^2 \ll 1$ (см. [5]) $\langle \delta N^2 \rangle_q^0 = (1/4) N_0$. Тогда $\Sigma_{p\text{эл}} / \Sigma_{p\text{эл}}^0 = \langle \delta N^2 \rangle_q / \langle \delta N^2 \rangle_q^0 \simeq 2a^4 q^4 \ll 1$. Таким образом, коэффициент рэлеевского рассеяния плазменных волн в электромагнитные при $v_0 > v_{Te}$ в $(2a^4 q^4)^{-1}$ раз меньше, чем в обычной плазме, что объясняется резким понижением уровня флуктуаций в области нулевых частот по сравнению со случаем $v_0 = 0$. На рис. 2 представлено спектральное распределение равновесных флуктуаций электронной плотности в изотропной* плазме при

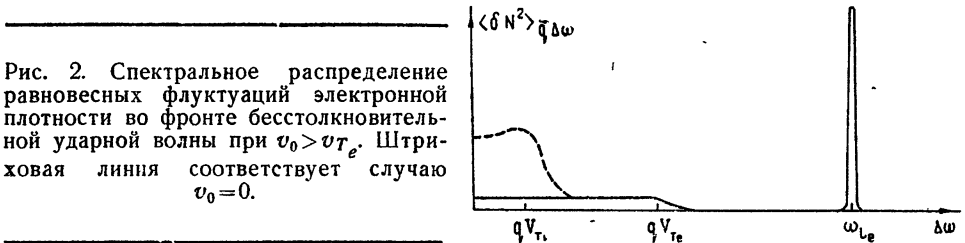


Рис. 2. Спектральное распределение равновесных флуктуаций электронной плотности во фронте бесстолкновительной ударной волны при $v_0 > v_{Te}$. Штриховая линия соответствует случаю $v_0 = 0$.

$v_0 > v_{Te}$. Причем, если в обычной плазме доплеровская ширина основной линии спектра излучения определяется тепловой скоростью ионов, то в электронной плазме ширина основной линии определяется, очевидно, тепловой скоростью электронов.

Спонтанное комбинационное рассеяние плазменных волн обусловлено взаимодействием их с когерентными флуктуациями с частотами $(\Delta\omega)^2 = \omega_{\pm}^2 = (1/2) (\omega_{Le}^2 + \omega_{He}^2) \pm (1/2) [(\omega_{Le}^2 + \omega_{He}^2)^2 - 4\omega_{Le}^2 \omega_{He}^2 \cos^2 \vartheta]^{1/2}$. Дифференциальный поперечник комбинационного рассеяния плазменных волн в электромагнитные в нашем случае имеет вид [6]

* В магнитоактивной плазме при углах ϑ , не близких к $\pi/2$, вид спектра флуктуаций электронной плотности в области некогерентных флуктуаций такой же, как и в изотропной плазме. При $\vartheta \rightarrow \pi/2$ и $\beta \gg 1$ в спектре некогерентных флуктуаций появятся дельта-образные максимумы, которые можно аппроксимировать кратными электронными гирочастотами (см., например, [9]). Однако, как уже отмечалось, величина $\langle \delta N^2 \rangle_q$ от этого не изменится.

$$d\Sigma_{\text{комб}} = \frac{1}{2} N_0 \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 a^2 q^2 \frac{\omega^2 \omega_0^2}{\omega_{L_e}^4} \frac{n^3 |e^* Q^L \mathbf{x}_0|^2}{n_0 \xi (e^* \hat{\varepsilon} e)} \frac{|\Delta\omega|^2 - \omega_{H_e}^2}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \times \quad (11)$$

$$\times [\delta(\Delta\omega - \omega_+) + \delta(\Delta\omega - \omega_-)] d\omega d\Omega,$$

где

$$Q_{ij}^L = (\varepsilon_{ik}^0 - \delta_{ik}) \left(\delta_{kj} + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \frac{k_0}{q} \tilde{x}_k x_{0j} \right), \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{q}/q.$$

Выбирая, как и прежде, $\vartheta_0 = \pi/2$ и считая, что на основании приближенного равенства (2) $\tilde{\vartheta} \simeq -\vartheta_0 = -\pi/2$, получим, что $\omega_+^2 = \omega_{L_e}^2 + \omega_{H_e}^2$, $\omega_-^2 = 0$. При интегрировании выражения (11) по частоте используем только $\delta(\Delta\omega - \omega_+)$, так как вторая дельта-функция соответствует рэлеевскому рассеянию ($\Delta\omega \rightarrow 0$). Учитывая связь $\cos \Theta = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos \varphi$, где Θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 (угол рассеяния), и производя вычисления, получаем

$$\Sigma_{\text{комб}} = 2N_0 \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 a^2 q^2 \left(\frac{k}{q} \right)^2 \frac{c}{v_{\text{гп}}^0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\varphi, \vartheta) d\varphi d\vartheta, \quad (12)$$

где

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = n^3 \sin^3 \vartheta \times$$

$$\sin^2 2\varphi \left(\varepsilon_2^0 + \varepsilon_2 \frac{\varepsilon_1^0 - 1}{n^2 - \varepsilon_1} \right)^2 + \left[\frac{n^2 \cos^2 \vartheta (\varepsilon_3^0 - 1)}{n^2 \sin^2 \vartheta - \varepsilon_3} - \cos 2\varphi \left(\varepsilon_1^0 - 1 + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_2^0}{n^2 - \varepsilon_1} \right) \right]^2$$

$$\times \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_2^2}{(n^2 - \varepsilon_1)^2} + \frac{2\varepsilon_2^2}{n^2 - \varepsilon_1} + \varepsilon_3 \frac{n^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(n^2 \sin^2 \vartheta - \varepsilon_3)^2}}$$

— диаграмма направленности рассеянного излучения. Здесь $\varepsilon^0 = \varepsilon(\omega_0)$, $\varepsilon = \varepsilon(2\omega_0)$.

4. Интегралы, входящие в выражения (10) и (12), трудно вычислить из-за громоздкого вида $n_{1,2}^2$, а приближения квазипродольного и квазипоперечного распространения, при которых выражение для $n_{1,2}^2$ существенно упрощается, накладывают слишком жесткие ограничения на интервал углов ϑ . Во многих случаях, однако, можно считать, что $\alpha \ll 1$ ($\omega_{H_e} \ll \omega_{L_e}$)*. Это условие позволяет пренебречь влиянием внешнего магнитного поля на процессы трансформации. Переходя в (7) к изотропному случаю, получим

$$d\Sigma_{\text{рэл}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{c}{\sqrt{3} v_{T_e}} \sin^2 \Theta \langle \delta N^2 \rangle_{q\Delta\omega} d\omega d\Omega. \quad (13)$$

Интегрируя (13) по частоте и телесному углу и используя (9), найдем

$$\Sigma_{\text{рэл}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sigma_T N_0 \frac{c}{v_{T_e}} \frac{a^4 q^4}{1 + a^2 q^2}, \quad (14)$$

где $\sigma_T = (8\pi/3) (e^2/m_e c^2)^2$ — томсоновское сечение рассеяния электромагнитных волн свободным электроном.

* Так, например, в солнечной короне, где $H_0 \sim 1 \div 10$ э, неравенство $\omega_{H_e} \ll \omega_{L_e}$ выполняется с достаточной степенью точности

Дифференциальное сечение комбинационного рассеяния (11) в изотропном случае равно

$$d\Sigma_{\text{комб}} = \frac{1}{2} N_0 \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{c}{\sqrt{3} v_{Te}} a^2 q^2 \frac{\omega^2}{\omega_{L_e}^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \times \\ \times \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \frac{k_0^2}{q^2} \right)^2 \sin^2 \Theta \delta(\Delta\omega - \omega_{L_e}) d\omega d\Omega.$$

Полное сечение комбинационного рассеяния

$$\Sigma_{\text{комб}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T N_0 \frac{c}{v_{Te}} a q \left(\frac{k}{q} \right)^2. \quad (15)$$

Из сравнения (14) и (15) видно, что при достаточно малом параметре $a^2 q^2$ спонтанное комбинационное рассеяние может оказаться эффективнее рэлеевского. Но во фронте бесстолкновительной ударной волны из-за аномально большого нагрева электронов [9] $a^2 q^2 \simeq 1/3$. А так как $k \ll k_0 \sim q$, то рэлеевское рассеяние может, по-видимому, преобладать над спонтанным комбинационным.

В заключение автор благодарит В. В. Зайцева за руководство работой, а также Е. В. Суворова и В. Ю. Трахтенгерца за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Р. З Сагдеев, Вопросы теории плазмы, вып. 4, Атомиздат, М., 1964, стр. 20.
- 2 В. В. Зайцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 5, 779 (1969)
- 3 В. В. Зайцев, Астрон. ж., 42, 740 (1965).
- 4 В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
- 5 А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. ХГУ, Харьков, 1965.
- 6 А. Г. Ситенко, Ю. А. Кирочкин, УФН, 89, 227 (1966).
- 7 D. T. Farley, J. P. Dougherty, D. W. Barron, Proc. Roy. Soc., A263, 238 (1961).
- 8 J. A. Fejer, Canad. J. Phys., 39, 716 (1961).
- 9 В. В. Зайцев, Диссертация, ГГУ, 1969.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
15 августа 1969 г.

ON RADIATION INTENSITY FROM THE FRONT OF COLLISIONLESS SHOCK WAVE

A. V. Stepanov

Spontaneous processes of Rayleigh and Raman scattering of plasma waves in electromagnetic ones on the thermal plasma fluctuations in the collisionless shock wave front are considered. The scattering coefficients are determined. It is shown that for the relative velocity of electrons and ions in the shock wave front exceeding the thermal velocity of electrons, the Rayleigh scattering coefficient is $(2a^4 q^4)^{-1}$ times less than $(a^2 q^2 \ll 1)$ as compared with that in the usual plasma.

УДК 538 574.33

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНО ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ

В. Г. Гавриленко, Г. А. Лупанов

Рассмотрено волновое уравнение для неоднородно движущейся изотропной среды в случае, когда градиент скорости перпендикулярен самой скорости. Указывается методика получения точных решений на основе известных результатов для неподвижных неоднородных сред.

В последние годы значительно возрос интерес к изучению распространения волн в движущихся средах. При этом, как правило, основное внимание уделялось задаче о распространении волн через границу раздела двух сред, движущихся с различными скоростями. Между тем, случай движущейся среды с произвольным профилем скорости, заслуживающий наибольшего внимания, в силу специфических трудностей исследован недостаточно полно. В настоящей работе указывается методика решения такой задачи для неоднородно движущегося диэлектрика. Получены уравнения поля, решения которых могут быть найдены на основе хорошо известных результатов для неоднородных покоящихся сред [1, 2]. Анализ ограничивается случаем, когда градиент скорости среды перпендикулярен самой скорости.

Аналогичная задача рассматривалась также в статье [3]. В ней получено уравнение Риккати для коэффициента отражения от слоя с заданным профилем скорости, которое решается далее методом возмущений.

В настоящей работе выведены волновые уравнения для двух различных поляризаций, позволяющие найти не только коэффициенты отражения и прохождения, но и исследовать структуру поля внутри слоя. Кроме того, учтено влияние частотной дисперсии среды.

Рассмотрим безграничную среду с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \epsilon(\omega_0, z)$ и магнитной проницаемостью $\mu = 1^*$. Пусть среда движется вдоль оси x декартовой системы координат со скоростью $v = v(z)$. В этом случае исходными являются уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

и материальные уравнения Минковского [4]

$$D + \frac{1}{c} [v H] = \epsilon \left(E + \frac{1}{c} [v B] \right), \quad (2)$$

* Здесь ϵ , ω_0 , μ — величины, измеренные в сопровождающей каждую точку среды системе отсчета.

$$\mathbf{B} + \frac{1}{c} [\mathbf{E} \mathbf{v}] = \mathbf{H} + \frac{1}{c} [\mathbf{D} \mathbf{v}].$$

Соотношения (2) справедливы при условии, что в сопровождающей каждую точку среды системе отсчета материальная связь остается локальной и не зависит от движения.

Для плоско-слоистой среды, когда поля не зависят от y , решение системы уравнений (1) — (2) можно искать в виде $F(z) \exp [i(\omega t - \frac{\omega}{c} n_x x)]$.

Тогда исходные уравнения можно разбить на две независимые системы, соответствующие двум независимым решениям с различными поляризациями. Для ТЕ-волны (вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости xz) удобно воспользоваться волновым уравнением для вектора \mathbf{E} :

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2 (\epsilon \beta^2 - 1) n_x^2 - 2\beta(\epsilon - 1) n_x + (\epsilon - \beta^2)}{c^2 (1 - \beta^2)} E_y = 0, \quad (3)$$

а для ТМ-волны (вектор \mathbf{H} перпендикулярен плоскости xz) — уравнением для вектора \mathbf{H} :

$$\epsilon \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{dH_y}{dz} \right) + \frac{\omega^2 (\epsilon \beta^2 - 1) n_x^2 - 2\beta(\epsilon - 1) n_x + (\epsilon - \beta^2)}{c^2 (1 - \beta^2)} H_y = 0. \quad (4)$$

Здесь $\beta = v(z)/c$.

Для диэлектриков без дисперсии отличие от соответствующих уравнений поля в плоско-слоистой неподвижной среде (см., например, [1]) состоит в том, что коэффициенты перед E_y и H_y в (3) и (4) имеют другой вид. Легко видеть, что при некоторых значениях β , n_x и ϵ этот коэффициент может обращаться в нуль и становиться отрицательным. В случае падения волны на неоднородно движущийся слой это приводит к полному отражению волны даже при $\epsilon = \text{const}$. Кроме того, при $\epsilon = \text{const}$ уравнения (3) и (4) становятся совершенно одинаковыми, т. е. структура поля \mathbf{E} в ТЕ-волне полностью совпадает со структурой поля \mathbf{H} в ТМ-волне.

Учет временной дисперсии может существенным образом повлиять на вид коэффициентов в волновых уравнениях. Например, подстановка в (3) и (4) закона дисперсии для холодной плазмы без магнитного поля приводит к следующим уравнениям*:

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - n_x^2 \right) E_y = 0; \quad (5)$$

$$\epsilon \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{dH_y}{dz} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - n_x^2 \right) H_y = 0, \quad (6)$$

где $\epsilon = 1 - \omega_p^2 (1 - \beta^2) / \omega^2 (1 - n_x \beta)^2$.

Остановимся более подробно на распространении электромагнитных волн в медленно движущейся ($\beta^2 \ll 1$) среде без дисперсии с $\epsilon = \text{const}$. При этом для обеих поляризаций получаем уравнение

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\epsilon - n_x^2 - 2(\epsilon - 1) n_x \beta(z)] F = 0. \quad (7)$$

* То же самое можно получить с использованием (вместо (2)) релятивистского уравнения движения электрона.

Для покоящейся же среды при ТЕ-поляризации имеет место уравнение [1]

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon(z) - n_x^2] F = 0. \quad (8)$$

Сравнение (7) и (8) показывает, что знание точных решений подробно исследованного уравнения (8) дает возможность легко найти соответствующие точные решения уравнения (7).

В качестве примера рассмотрим падение волны на слой, скорость среды в котором меняется по параболическому закону

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 (1 - z^2/z_m^2), & -z_m < z < z_m, \\ \beta &= 0, & |z| > z_m. \end{aligned} \quad (9)$$

Отражения от скачка производной скорости в точках $z = \pm z_m$ мы не рассматриваем, эти отражения отсутствуют, если несколько сгладить переход к области $\beta = 0^*$.

Для данного профиля скорости уравнение (7) приводится к виду

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (a^2 z^2 - b^2) F = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{2(\varepsilon - 1) \sqrt{\varepsilon} \sin \vartheta_0}{z_m^2} \beta_0, \\ b^2 &= 2(\varepsilon - 1) \sqrt{\varepsilon} \sin \vartheta_0 \beta_0 - \varepsilon \cos^2 \vartheta_0, \end{aligned}$$

ϑ_0 — угол падения волны на слой. При $a^2 > 0$ уравнение (10) полностью аналогично волновому уравнению, описывающему нормальное падение электромагнитной волны на слой неоднородной неподвижной плазмы с изменяющейся по параболическому закону концентрации [1]. Причем случай $b^2 > 0$ соответствует слою, у которого диэлектрическая проницаемость дважды обращается в нуль, а случай $b^2 < 0$ — слою без нулей диэлектрической проницаемости. В нашей задаче коэффициент a^2 принимает положительные значения тогда, когда волновой вектор падающей волны и скорость движения среды образуют острый угол.

Воспользовавшись результатами работы [1, 5], можно для этого случая написать выражения для модулей амплитудных коэффициентов отражения R и прохождения T :

$$|R| = \frac{1}{(1 + e^{-2\rho})^{1/2}}, \quad |T| = \frac{e^{-\rho}}{(1 + e^{-2\rho})^{1/2}}, \quad (11)$$

где $\rho = \omega b^2 / 2ca$. При этом поля внутри слоя описываются функциями параболического цилиндра Вебера. Формулы (11) справедливы как при сильном ($\rho \gg 1$), так и при слабом отражении волн ($|\rho| \gg 1$ при $\rho < 0$).

Если волновой вектор падающей волны образует с вектором скорости тупой угол, то $a^2 < 0$ и $b^2 < 0$. Легко видеть, что при этом уравнение (10) аналогично волновому уравнению, описывающему падение на плавный слой с возрастающей внутри слоя диэлектрической проницаемостью. Таким образом, здесь при всех значениях z выполняются условия применимости геометрической оптики и, следовательно, в данном приближении эффект отражения отсутствует.

* Предполагается, что скорость среды всюду внутри слоя мало меняется на расстояниях порядка длины волны.

В заключение отметим, что структуру поля вблизи точки отражения можно также исследовать на примере линейного слоя, используя аналогичным образом решения для неподвижной среды [1].

Авторы весьма признательны Н. Г. Денисову за ценные замечания, а также Н. С. Степанову и В. В. Тамойкину за внимание и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, изд. АН СССР, М., 1957.
3. H. N. Kritikos, K. S. H. Lee, C. H. Paras, *Radio Science*, **2**, № 9, 991 (1967).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
5. Н. Г. Денисов, Учен. зап. ГГУ, **35**, 3 (1957).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 июля 1969 г.

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN INHOMOGENEOUSLY MOVING MEDIA

V. G. Gavrilenko, G. A. Lupanov

The wave equation is considered for inhomogeneously moving isotropic medium in the case when the velocity gradient is perpendicular to the velocity. The methods of obtaining strict solutions using known results for immovable inhomogeneous media are presented.

УДК 621.378.001

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ИЗЛУЧЕНИЯ НАКАЧКИ НА ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ЗАХВАТ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ УСИЛИВАЕМЫХ ВОЛН

М. М. Суцник, Г. И. Фрейдман

Рассмотрено явление пространственного захвата параметрически усиливаемых волн накачкой с учетом ее амплитудной и фазовой модуляции. Для случая гауссова пучка накачки получены выражения для инкрементов и собственных функций плененных мод, что позволяет исследовать условия их возбуждения в резонаторах. Приведены оценки для мощности пучка накачки, необходимой для экспериментального наблюдения эффекта при конечной ширине углового и частотного спектров накачки

1. В работе [1] исследовано явление пространственного захвата (пленения) параметрически связанных волн пучками (импульсами) поля накачки с однородным распределением амплитуды и постоянной фазой. Для приложений представляет интерес рассмотрение влияния амплитудной и фазовой модуляции на условия пленения и характеристики возбуждаемых мод. Ниже мы рассмотрим задачу на примере взаимодействия пучков. Полученные результаты легко обобщить на случай взаимодействия импульсов, используя соответствующую замену параметров [1].

Рассмотрим распространение двух гармонических полей

$$E_{1,2}(\mathbf{r}', t) = e_{1,2} \{ \mathcal{E}'_{1,2}(\mathbf{r}') \exp [i(\mathbf{k}_{1,2} \mathbf{r}' - \omega_{1,2} t)] + \text{к. с.} \}, \quad (1)$$

взаимодействующих в одноосном (с оптической осью в плоскости $x'z'$) квадратично нелинейном кристалле с пучком излучения накачки. Здесь $\omega_{1,2}$ и $\mathbf{k}_{1,2}$ удовлетворяют условиям синхронизма и, кроме того, $\mathbf{k}_{1,2}$ компланарны с осью z' . Поле накачки $E_3(\mathbf{r}', t) = e_3 \{ \mathcal{E}'_3(x' - \beta_3 z'; y') \times \exp [i(\mathbf{k}_3 \mathbf{z} - \omega_3 t)] + \text{к. с.} \}$ (β_3 — угол двулучепреломления) и амплитуды $e_3(\mathbf{r}')$ предполагаются настолько плавными функциями поперечных координат, что слагаемыми $(i/2k_{1,2}) \Delta_{\perp} \mathcal{E}'_{1,2}(\mathbf{r}')$ в уравнениях можно пренебречь. В этом приближении задача сводится к двумерной, в которой все исходные функции зависят от координаты y' как от параметра.

Выбрав координаты так, чтобы амплитуда накачки зависела только от одной переменной x ($x = x' - \beta_3 z'$, $z = z'$, $y = y'$, для комплексных нормированных амплитуд $\mathcal{E}_1 = \sqrt[4]{k_1 \omega_2^2 / k_2 \omega_1^2}(\mathcal{E}'_1)$, $\mathcal{E}_2 = \sqrt[4]{k_2 \omega_1^2 / k_1 \omega_2^2}(\mathcal{E}'_2)$, пропорциональных $e^{p z}$ (для амплитуд собственных решений), получим уравнения

$$\left(p + \alpha_{1,2} \pm \Delta \beta_{1,2} \frac{d}{dx} \right) \mathcal{E}_{1,2}(x) = \pm i \gamma_0 \left\{ \frac{g(a_1^{-1} x)}{g^*(a_1^{-1} x)} \right\} \mathcal{E}_{2,1}(x). \quad (2)$$

Здесь $\Delta \beta_{1,2}$ — абсолютные величины углов между групповой скоростью накачки и групповыми скоростями усиливаемых волн; α_l — их коэффи-

циенты поглощения; $\gamma_0 = \bar{\gamma} \sqrt{S_0}$ — коэффициент взаимодействия, пропорциональный корню квадратному из пикового значения плотности потока мощности накачки S_0 , $\bar{\gamma}$ — константа, зависящая от величины компонент тензора квадратичной поляризуемости; функция $g(a_1^{-1}x)$ и ее характерный масштаб изменения a_1 характеризуют амплитудную и фазовую модуляцию накачки по поперечной координате.

Рассмотрим сначала некоторые общие свойства полей, которые описываются системой уравнений (2) и удовлетворяют условиям излучения. В рассматриваемом приближении эти условия эквивалентны равенству нулю полей E_1 и E_2 соответственно при $x < -a/2$ и $x > a/2$, где a определяет область $[-a/2; a/2]$, занятую излучением накачки ($g(a_1^{-1}x) = 0$ при $|x| > a/2$). Для удобства дальнейшего рассмотрения

введем новые амплитуды $A_j(x) \left\{ \mathcal{E}_j(x) = (-i)^{j-1} \Delta\beta_j^{-1/2} A_j(x) \exp \left[\frac{x}{2} \times \left(\frac{p + \alpha_2}{\Delta\beta_2} - \frac{p + \alpha_1}{\Delta\beta_1} \right) \right] \right\}$ и безразмерную переменную $\xi = a_0^{-1}x$ ($a_0 = \sqrt{\Delta\beta_1 \Delta\beta_2 / \gamma_0}$), что позволяет преобразовать (2) к симметричному виду:

$$\begin{aligned} \left(\gamma + \frac{d}{d\xi} \right) A_1(\xi) &= g \left(\frac{a_0}{a_1} \xi \right) A_2(\xi), \\ \left(\gamma - \frac{d}{d\xi} \right) A_2(\xi) &= g^* \left(\frac{a_0}{a_1} \xi \right) A_1(\xi), \end{aligned} \tag{3}$$

где инкремент p связан с величиной γ соотношением

$$\gamma = (a_0/2) [(p + \alpha_1)/\Delta\beta_1 + (p + \alpha_2)/\Delta\beta_2].$$

Из уравнений (3) видно, что как при амплитудной, так и при фазовой модуляции пучка накачки для некоторого заданного вида функции $g(a_1^{-1}x)$ величина γ и характерные параметры комплексных амплитуд $A_j(\xi)$ зависят лишь от определенной комбинации параметров задачи $\Delta\beta_1, \Delta\beta_2, \gamma_0, a_1, a$, а именно от отношений $(a_0/a_1) = \sqrt{\Delta\beta_1 \Delta\beta_2 / \gamma_0 a_1}$ и a_0/a_1 . Кроме того, при амплитудной модуляции пучка накачки ($g(a_1^{-1}x) = |g(a_1^{-1}x)|$), т. е. когда функция $g(a_1^{-1}x)$ неотрицательна во всем интервале от $-a/2$ до $a/2$, легко получить общее соотношение, определяющее границу области захвата. (Под этой областью подразумевается область значений параметра a_0/a_1 , в которой $\gamma > 0$.) Действительно, при $\gamma = 0$ решения уравнения (3) легко находятся:

$$\begin{aligned} A_1(\xi) &= C_1 \sin \left[\int_{\xi_0}^{\xi} g \left(\frac{a_0}{a_1} \xi \right) d\xi \right] - C_2 \cos \left[\int_{\xi_0}^{\xi} g \left(\frac{a_0}{a_1} \xi \right) d\xi \right], \\ A_2(\xi) &= C_2 \sin \left[\int_{\xi_0}^{\xi} g \left(\frac{a_0}{a_1} \xi \right) d\xi \right] + C_1 \cos \left[\int_{\xi_0}^{\xi} g \left(\frac{a_0}{a_1} \xi \right) d\xi \right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Они удовлетворяют граничным условиям $A_1(-a/2a_1) = 0$; $A_2(a/2a_1) = 0$ при

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_1^{(n)}}{a_0} = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\int_{-a/2a_1}^{a/2a_1} g(\xi) d\xi \right)^{-1}. \tag{5}$$

Соотношение (5) является точным в рамках применимости уравнений

(3) и определяет область параметров $a_1/a_0 > a^{(n)}/a_0$, в которой возможен захват n мод.

При $\gamma \neq 0$ для определения приближенных решений системы (3) удобно свести ее к уравнению второго порядка для функции $F(\xi)$ ($A_1(\xi) = F(\xi) [g(a_0\xi/a_1)]^{1/2}$):

$$\frac{d^2}{d\xi^2} F + \left[|g|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{g} \frac{d}{d\xi} g \right) - \left(\gamma + \frac{1}{2g} \frac{d}{d\xi} g \right)^2 \right] F = 0. \quad (6)$$

Вдали от границы захвата переменный коэффициент при $F(\xi)$ в уравнении (6) для малых значений ξ может быть аппроксимирован параболой*. При этом (6) сводится к уравнению типа уравнения для волновой функции осциллятора. В этом приближении для гауссова пучка накачки ($g = \exp(-a_0^2 \xi^2 / 2a_1^2)$): получим

$$\gamma^{(n)} = [1 - (2n + 1)(a_0/a_1)]^{1/2}; \quad (7)$$

$$F^{(n)}(\xi) = \exp\left[-\frac{a_0}{2a_1}\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2\right] H_n\left[\sqrt{\frac{a_0}{a_1}}\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\right], \quad (8)$$

где $H_n(x)$ — полиномы Эрмита.

В этих выражениях $\gamma^{(n)}$ и параметры функций $F^{(n)}(\xi)$ определены с точностью до членов $\sim (a_0/a_1)^2$, а соотношения (7), (8) справедливы при $(a_0/a_1) \ll 1$, т. е. до тех пор, пока характерный размер $r^{(n)} = \sqrt{(2n + 1)(a_1/a_0)}$ (или в размерных единицах $r^{(n)} = \sqrt{(2n + 1)a_1 a_0}$) функции $F^{(n)}(\xi)$ мал по сравнению с радиусом накачки.

Более точные выражения для собственных функций и собственных значений можно получить, приняв (7), (8) в качестве нулевого приближения и воспользовавшись стационарным функционалом $[\gamma]$ системы уравнений (3):

$$[\gamma] = \frac{\int \left(A_1^2 g + A_2^2 g^* - A_2 \frac{d}{d\xi} A_1 + A_1 \frac{d}{d\xi} A_2 \right) d\xi}{2 \int A_1 A_2 d\xi}. \quad (9)$$

Подставляя в это выражение $A_{1,2}^{(n)} = \exp[-(\xi \mp \theta)^2 / 2\rho^2] H_n[(\xi \mp \theta)/\rho]$, для гауссова пучка накачки получим

$$\begin{aligned} \gamma = & -\theta\rho^{-2} + \frac{(\exp[\theta^2 \rho^{-2} / (1 + a_0^2 \rho^2 / 2a_1^2)])}{(1 + a_0^2 \rho^2 / 2a_1^2)^{1/2}} \sum_0^n \frac{k!}{2^{n-k} n!} \binom{n}{k}^2 \left[1 + \frac{2a_1^2}{a_0^2 \rho^2} \right]^{-(n-k)} \times \\ & \times \frac{H_{2(n-k)}[\theta\rho^{-1} / (1 + 2a_1^2 / a_0^2 \rho^2)^{1/2}]}{L_n(-2\theta^2 \rho^{-2})}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $L_n(x)$ — полиномы Лагерра. Параметры ρ и θ в этом выражении могут быть взяты из нулевого приближения для функций $A_{1,2}^{(n)}(\xi)$. При малых n $\gamma(\rho, \theta)$ имеет относительно простой вид, и ρ, θ легко определить из условия экстремума функционала $[\gamma]$. Для нулевой моды в этом случае имеем

* Для достаточно плавной функции $g(a_1^{-1}x)$ результаты легко получить методом ВКБ и в более общем случае.

$$\gamma = \frac{a_1}{a_0 \rho^2} \left(1 - \frac{a_0^2 \rho^2}{2a_1^2}\right) \sqrt{1 + \frac{a_0^2 \rho^2}{2a_1^2}}, \quad (11)$$

где уточненный из условия экстремума $[\gamma]$ радиус моды ρ определяется соотношением

$$\frac{a_0 \rho^2}{a_1} \left(1 + \frac{a_0^2 \rho^2}{4a_1^2}\right)^{-1} \exp\left(\frac{a_0^2 \rho^2}{4a_1^2}\right) = 1, \quad (12)$$

а сдвиг ее относительно центра накачки характеризуется параметром

$$\theta = \frac{a_0^2 \rho^2}{2a_1^2} \left[1 + \frac{a_0^2 \rho^2}{2a_1^2}\right]^{1/2}.$$

Следует подчеркнуть, что вычисленное таким образом значение γ (рис. 1) обладает достаточно высокой точностью. Не останавливаясь

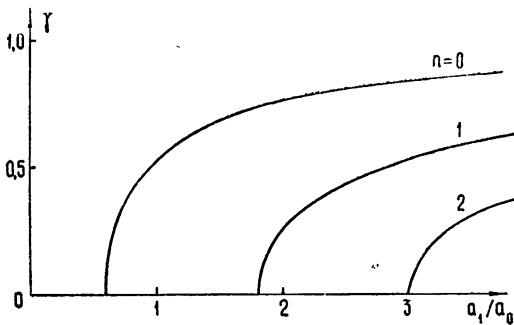


Рис. 1. Собственные значения $\gamma^{(n)}$ для низших мод $n = 1, 2, 3$.

подробно на ее оценке, укажем лишь, что найденное из (11), (12) значение $a^{(0)}/a_0$, определяющее границу области захвата для нулевой моды, отличается от точного, определяемого из (5), всего на 3%.

Из сказанного выше следует, что для гауссова осесимметричного пучка с мощностью P величина a_0/a_1 и, следовательно, $\gamma^{(n)}$ не зависит от a_1 , а инкремент $p^{(n)}$ обратно пропорционален a_1 :

$$p^{(n)} = \frac{1}{a_1} \frac{2\Delta\beta_1 \Delta\beta_2}{\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{P}{P_n}} \gamma^{(n)} - \frac{\Delta\beta_2 \alpha_1 + \Delta\beta_1 \alpha_2}{\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2}, \quad (13)$$

или при $2\sqrt{2}P_n/\sqrt{\pi}P < 1/2$, как следует из (7) и (13),

$$p^{(n)} \simeq \frac{1}{a_1} \frac{2\Delta\beta_1 \Delta\beta_2}{\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{P}{P_n} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{P_n}{P}}\right) \right]^{1/2} - \frac{\Delta\beta_2 \alpha_1 + \Delta\beta_1 \alpha_2}{\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2}. \quad (14)$$

Здесь точное значение критической мощности пучка накачки P_n для n -й моды определяется соотношением $P_n = (\pi^2/2)(n + 1/2)^2(\Delta\beta_1 \Delta\beta_2/\chi^2)^*$.

* Следует отметить, что критическая мощность для гауссова пучка в 2 раза меньше критической мощности для пучка с квадратным сечением и однородным распределением интенсивности. Например, для КДР при $\lambda_{1,2} = 1\mu$ $P_0 \simeq 0,15 \Delta\beta_1 \Delta\beta_2$, где $\Delta\beta_i$ выражены в градусах.

Структура моды определяется выражением (8) достаточно точно только вблизи максимума, что может привести к неверному результату при определении частотного и углового спектра параметрических генераторов. Уточнить выражения для собственных функций можно, воспользовавшись системой интегральных уравнений, эквивалентной системе (3):

$$A_1(\xi) = \int_{-a/2a_0}^{\xi} \exp[-\gamma(\xi - \xi')] g\left(\frac{a_0}{a_1} \xi'\right) A_2(\xi') d\xi',$$

$$A_2(\xi) = - \int_{a/2a_0}^{\xi} \exp[\gamma(\xi - \xi')] g^*\left(\frac{a_0}{a_1} \xi'\right) A_1(\xi') d\xi'. \quad (15)$$

Подставляя в (15) справа функции $A_j(\xi)$, определенные из нулевого приближения, уже после первой итерации для амплитуд мод получаются выражения, близкие к точным. Например, для моды с $n = 0$ в этом случае имеем

$$A_1^{(0)}(\xi) = A_2^{(0)}(-\xi) = \left\{ \Phi \left[\left(\frac{1}{2} \frac{a_0^2}{a_1^2} + \frac{1}{2} \frac{a_0}{a_1} \right)^{1/2} \xi - \frac{\gamma - (a_0/2a_1)}{2[(a_0^2/2a_1^2) + (a_0/2a_1)]^{1/2}} \right] + 1 \right\} e^{-\gamma\xi}, \quad (16)$$

где $\Phi(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x \exp(-t^2) dt$. Очевидно, что наибольшая погрешность этого выражения будет при $a_1/a_0 \simeq a^{(0)}/a_0$. Однако, как показывает сравнение (16) при $(a_1/a_0) = (a^{(0)}/a_0)$ с точным решением, даже в этом случае она незначительна (рис. 2).

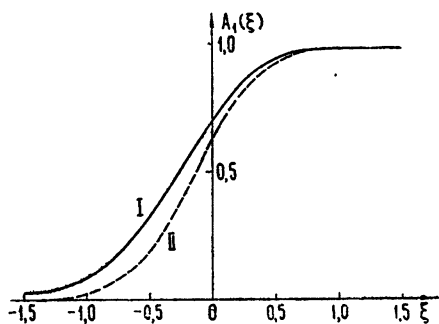


Рис. 2. I — зависимость амплитуды нулевой моды $A_1^{(0)}(\xi)$ от безразмерной поперечной координаты ξ на границе области захвата $a_1/a_0 = a^{(0)}/a_0$; II — приближенная зависимость $A_1^{(0)}(\xi)$, построенная по формуле (16).

случае, когда существенно влияние лишь фазовой модуляции ($a_0/a_1 \ll 1$, $a_1/a_2 > 1$). При этих ограничениях из уравнения (7) следует*:

* Эти соотношения справедливы при $(a_0/a_1)(1 - a_0^2 a_1^2 / 4a_2^4)^{1/2} \gg a_0^2 / a_1^2$, т. е. до тех пор, пока радиус моды $r = (a_0 a_1 \sqrt{1 - a_0^2 a_1^2 / 4a_2^4})^{-1/2}$ мал по сравнению с радиусом накачки a_1 . Кроме того, выражения (17), (18) применимы лишь при таких длинах нелинейного кристалла, при которых изменениями радиусов пучков взаимодействующих полей из-за кривизны их фазовых фронтов можно пренебречь.

$$F^{(n)}(\xi) = \exp \left[-\frac{a_0}{2a_1} \left(1 - \frac{a_0^2 a_1^2}{4a_2^4} \right)^{1/2} \left(\xi - \frac{ia_1^2}{2a_2^2 \gamma^{(n)}} \right)^2 \right] \times \quad (17)$$

$$\times H_n \left\{ \left[\frac{a_0}{a_1} \left(1 - \frac{a_0^2 a_1^2}{4a_2^4} \right)^{1/2} \left(\xi - \frac{ia_1^2}{2a_2^2 \gamma^{(n)}} \right)^2 \right]^{1/2} \right\};$$

$$\operatorname{Re} \gamma^{(n)} = \operatorname{Re} \left\{ \left(1 - \frac{a_0^2 a_1^2}{4a_2^4} \right)^{1/2} \left[1 - (2n+1) \frac{a_0}{a_1} \left(1 - \frac{a_0^2 a_1^2}{4a_2^4} \right)^{1/2} - \frac{ia_0^2}{a_2^2} \right]^{1/2} \right\} \simeq \left(1 - \frac{a_0^2 a_1^2}{4a_2^4} \right)^{1/2}. \quad (18)$$

Из (17), (18) видно, что, как только характерный масштаб изменения фазы a_2 становится сравнимым с радиусом моды ($r \sim \sqrt{a_1 a_0}$), возбуждающейся в отсутствие фазовой модуляции, происходит резкое уменьшение инкремента, т. е. эффективное усиление плененных мод возможно лишь при условии $a_0^2 a_1^2 / 4a_2^4 < 1$. Введя мощность пучка, это условие можно записать в виде

$$\frac{P_0}{P} \frac{\Delta\theta^2}{\Delta\theta_g^2} < 1 \quad \text{или} \quad \frac{\Delta\beta_1 \Delta\beta_2 \Delta\theta^2 k_3^2}{4\bar{\chi}^2 S_0} < 1, \quad (19)$$

где $\Delta\theta$ и $\Delta\theta_d$ соответственно полная и дифракционная расходимость излучения накачки. Как видно из (19), наличие большой угловой расходимости накачки может существенно затруднить возможность наблюдения рассматриваемого эффекта или его использование в параметрических генераторах.

Проведенное выше рассмотрение позволяет также выяснить и влияние частотной модуляции на захват параметрически усиливаемых волн пикосекундными импульсами излучения накачки. При линейном изменении частоты ($g = \exp[-(1/\tau_1^2 + i/\tau_2^2)t^2/2]$) необходимое условие эффективного усиления, как следует из (19), имеет вид

$$\frac{|\Delta s_1 \Delta s_2| (\delta\omega)^2 \omega^2}{4\bar{\chi}^2 S_0} < 1, \quad (20)$$

где $\delta\omega = \Delta\omega/\omega$ — относительная ширина спектра накачки, а Δs_i — разности обратных значений групповых скоростей v_i усиливаемых волн и скорости накачки v_3 ($\Delta s_i = v_3^{-1} - v_i^{-1}$). Оценим допустимую ширину частотного спектра накачки для КДР ($|\Delta s_1| \simeq |\Delta s_2| \simeq \sqrt{\varepsilon} 10^{-2}/c$), приняв $S_0 = 100 \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2}$. В этом случае имеем $\delta\omega < 5 \cdot 10^{-4}$. Хотя в пикосекундных импульсах накачки может наблюдаться девиация частоты больше этой величины [2], это, очевидно, не приведет к принципиальным затруднениям при наблюдении эффекта пленения, так как в пикосекундных импульсах S_0 может быть порядка $\text{Гвт} \cdot \text{см}^{-2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Сущик, В. М. Фортус, Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 2, 293 (1969).
2. A. J. De Maria, W. H. Glenn, M. J. Brienza, M. E. Mask, Proceeding of the IEEE, 57, 2 (1969).

INFLUENCE OF INHOMOGENEITY OF AMPLITUDE AND PHASE
DISTRIBUTION OF PUMP RADIATION ON SPATIAL LOCKING OF
PARAMETRICALLY AMPLIFIED WAVES

M. M. Sushchik, G. I. Freidman

The spatial locking of parametrically amplified waves by the pump taking into account its amplitude and phase modulation has been considered. For the Gaussian pump beam, expressions are derived for the increments and eigen-functions of imprisoned modes which permit the conditions of their excitation in resonators to be examined. The estimations are given of the pump beam power necessary for the experimental observation of the effect for the finite width of angular and frequency pump spectra.

УДК 621.375.4

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО УСИЛИТЕЛЯ НА ТУННЕЛЬНЫХ ДИОДАХ

Ю. К. Богатырев

Анализируется работа нелинейного усилителя с бегущей волной, периодически нагруженного туннельными диодами, с учетом отражений от несогласованных нагрузок. Рассмотрены стационарный и нестационарный режимы работы усилителя

Усилители с распределенными параметрами обычно выполняются в виде отрезка полосковой или коаксиальной линии передачи, периодически нагруженной нелинейными элементами, и с успехом применяются для усиления сигналов в диапазоне $\sim 300\text{--}800$ МГц и выше [1-3]. Усиление на более низких частотах встречается с рядом трудностей. С одной стороны, геометрические размеры волновых конструкций возрастают и становятся практически неприемлемыми, с другой — усилители на одиночных активных элементах не обеспечивают заметного усиления и полосы пропускания. Поэтому в диапазоне частот, начиная с нескольких десятков мегагерц, целесообразен переход к усилителям, построенным на основе искусственных линий передачи, в каждое звено которых включен нелинейный активный элемент. В связи с этим исследование работы усилителя на искусственной линии, особенно в нелинейном режиме усиления квазигармонических сигналов с периодом волны заполнения соизмеримым с постоянной времени звена линии, когда проявляются особенности, связанные с влиянием дисперсии, обусловленной периодическим изменением структуры усилителя вдоль направления распространения усиливаемого сигнала, представляет определенный интерес.

В настоящей работе такое исследование проведено с помощью метода усреднения, примененного к нелинейным дифференциально-разностным уравнениям, описывающим волновые процессы в усилителе на туннельных диодах как для стационарного, так и нестационарного режима его работы с учетом отражений от неполоностью согласованных нагрузок.

1. Уравнение для напряжения $u_n(t)$ в n -м звене усилителя с эквивалентной схемой, представленной на рис. 1, имеет вид

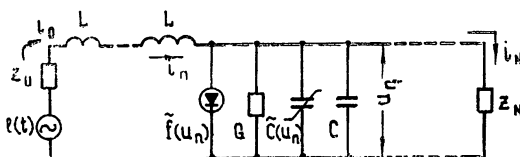


Рис. 1.

$$u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t) - [LC + L\tilde{C}(u_n)] (d^2u_n(t)/dt^2) = \\ = L \frac{d\tilde{C}(u_n)}{du_n} \left(\frac{du_n(t)}{dt} \right)^2 + L \frac{d\tilde{f}(u_n)}{du_n} \frac{du_n(t)}{dt} \quad (1 \leq n \leq N). \quad (1)$$

Здесь $\tilde{f}(u_n)$ — вольтамперная характеристика туннельного диода с учетом проводимости G , $\tilde{C}(u_n)$ — нелинейная емкость p — n перехода туннельного диода, L , C — индуктивность и емкость звена. В дальнейшем будем считать, что нелинейности малы и допускают аппроксимацию полиномами: $\tilde{f}(u_n) \sim \mu f(u_n) = -g(1 + \beta_0 u_n - \alpha u_n^2) u_n$ ($g = g_0 - G$, $\alpha = \alpha_0 g / (g - G)$; $\alpha, g > 0$); $\tilde{C}(u_n) \sim \mu C(u_n) = (C_0 + C_1 u_n + C_2 u_n^2) u_n$ ($C_1 > 0$); μ — малый параметр.

Напряжение и ток на входе и выходе усилителя определяются граничными условиями

$$u_0(t) = i_1(t) Z_0 + e(t) \quad (n = 0), \\ u_N(t) = -i_N(t) Z_N \quad (n = N), \quad (2)$$

где Z_N — сопротивление нагрузки, Z_0 — выходное сопротивление источника усиливаемого сигнала $e(t) = \mathcal{E}_0(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Предположим, что сопротивления $Z_{0,N}$ и параметры звена таковы, что в заданной в окрестностях частоты усиливаемого сигнала ω_0 полосе $\Delta\omega$ усилитель абсолютно и конвективно устойчив (см. [1,2]), тем не менее согласование не идеальное и имеют место отражения.

В этом случае решение уравнения (1) будем искать в виде суммы прямой и отраженной волн

$$u_n(t) = \sum_{1,2} \mathcal{E}_{n_{1,2}}(t) \cos[\omega_0 t \mp \beta n + \varphi_{n_{1,2}}(t)], \quad (3)$$

где $\mathcal{E}_{n_{1,2}}(t)$, $\varphi_{n_{1,2}}(t)$ — медленные функции координаты и времени.

Подставим (3) в (1) и, учитывая медленность изменения $\mathcal{E}_{n_{\pm 1}}(t)$ и $\varphi_{n_{\pm 1}}(t)$, представим их в виде ряда

$$\gamma_{n_{\pm 1}} = \gamma_n \pm \frac{\partial \gamma_n}{\partial n} + \frac{\partial^2 \gamma_n}{\partial n^2} \pm \dots$$

Отбросив затем члены высших порядков малости ($\sim \mu^2$ и выше), произведем усреднение по пространственному и временному периоду усиливаемой волны, используя процедуру, описанную в работе [4].

Отметим, что разложение в ряд функций $\mathcal{E}_{n_{\pm 1}}(t)$ и $\varphi_{n_{\pm 1}}(t)$ на данном этапе позволяет применить метод усреднения по встречным волнам к цепочечной системе, описываемой нелинейными дифференциально-разностными уравнениями, и отыскать решение, справедливое для любого квазигармонического сигнала с шириной спектра $\Delta\omega \ll \omega_0$ (ω_0 — несущая частота, лежащая на любом участке даже сильно изменяющейся дисперсионной характеристики линии*). При этом всегда можно указать условия, при которых изменение $\Delta\varphi = \varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)$ будет оставаться малым, несмотря на то, что общий набег фазы на звено может быть существенным (за счет β).

* Непосредственное разложение в ряд функций $u_{n_{\pm 1}}(t)$ в (1) справедливо лишь для сигналов, спектр которых лежит в области низких частот, где дисперсия мала.

После усреднения получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{n_1, 2}}{\partial t} \pm v_{\text{гр}} \frac{\partial \mathcal{E}_{n_1, 2}}{\partial n} &= \frac{g}{2C} \left[1 - \frac{3\alpha}{4} (\mathcal{E}_{n_1, 2}^2 + 2\mathcal{E}_{n_2, 1}^2) \right] \mathcal{E}_{n_1, 2}, \\ \frac{\partial \varphi_{n_1, 2}}{\partial t} \pm v_{\text{гр}} \frac{\partial \varphi_{n_1, 2}}{\partial n} &= -\frac{\omega_0 C_1}{8C} (\mathcal{E}_{n_1, 2}^2 + 2\mathcal{E}_{n_2, 1}^2) \end{aligned} \quad (4)$$

с граничными условиями для амплитуд и фаз* в виде

$$\mathcal{E}_{0_1}^2 (Z_0 + Z)^2 + \mathcal{E}_{0_2}^2 (Z_0 - Z)^2 - \mathcal{E}_0^2 Z = 2\mathcal{E}_{0_1} \mathcal{E}_{0_2} \cos(\varphi_{0_1} - \varphi_{0_2})$$

$$(n = 0);$$

$$\varphi_{0_1} - \varphi_{0_2} = 2k(\omega_0) N + \Delta\varphi_0(t), \quad (5)$$

$$\mathcal{E}_{N_1} (Z_N + Z) - \mathcal{E}_{N_2} (Z_N - Z) = 0, \quad \varphi_{N_1} - \varphi_{N_2} = 2k(\omega_0) N + \Delta\varphi_N$$

$$(n = N),$$

где $\Delta\varphi_{0, N}$ — фазы коэффициентов отражения от нагрузок $Z_{0, N}$, $k(\omega_0)$ — волновое число ($Z^2 = L/C$).

Влияние пространственной дисперсии в уравнениях системы (4) проявилось в том, что коэффициентом при производной $\frac{\partial}{\partial n}$ вошла не фазовая $v_0 = (LC)^{-1/2}$ (как это имеет место для случая распределенной системы), а групповая скорость $v_{\text{гр}} = v_0^2 \sin \beta / \omega_0$ сигнала в искусственной линии, дисперсионная характеристика которой имеет вид $1 - \cos \beta = \omega^2 / 2v_0^2$.

2. Если отражения практически отсутствуют или не играют существенной роли (например, при усилении радиоимпульсов с длительностью $t_u \ll v_{\text{гр}}/N$), в уравнениях (4), (5) можно положить $\mathcal{E}_{n_2} = 0$. В этом случае общие интегралы системы (4) находятся методом характеристик [5] и описывают изменение огибающей входного сигнала в процессе усиления:

$$\mathcal{E}_{n_1} = \exp(gn/2Cv_{\text{гр}}) \mathcal{E}_{0_1}(t - n/v_{\text{гр}}) \left\{ 1 - \frac{3\alpha}{4} \mathcal{E}_{0_1}^2(t - n/v_{\text{гр}}) \times \right.$$

$$\left. \times [1 - \exp(gn/Cv_{\text{гр}})] \right\}^{-1/2}. \quad (6)$$

Видно, что в начале условия (при малых n), когда $\alpha \mathcal{E}_{0_1}^2(t - n/v_{\text{гр}}) [1 - \exp(gn/Cv_{\text{гр}})] \ll 1$, амплитуда сигнала экспоненциально нарастает, а его форма не меняется: $\mathcal{E}_{n_1} = \exp(gn/2Cv_{\text{гр}}) \mathcal{E}_{0_1}(t - n/v_{\text{гр}})$. В дальнейшем форма сигнала изменяется согласно (6), а амплитуда приближается к величине насыщения $\mathcal{E}_{n_1, \text{max}} = 2/(3\alpha)^{1/2}$, определяемой только параметром нелинейности α характеристики диода. Коэффициент усиления в нелинейном режиме становится зависимым от уровня входного сигнала. Дисперсионное расплывание сигнала при этом мало

* Для простоты дальнейшего рассмотрения граничные условия (5) ввиду малости μ берутся в линейном приближении.

и не учитывается уравнением (6)*. Оптимальное число звеньев усилителя N_{opt} , при котором амплитуда сигнала изменяется от величины \mathcal{E}_{01} до $0,9 \mathcal{E}_{n_1 \text{ max}}$, равно $N_{\text{opt}} = (Cv_{\text{rp}}/g) \ln(4 - 3\alpha \mathcal{E}_{01}^2) / \alpha \mathcal{E}_{01}^2$. Дальнейшее увеличение звеньев нецелесообразно.

Из уравнения системы (4) также видно, что нелинейная емкость не влияет на изменение огибающей усиливаемого сигнала, однако полностью определяет изменение фазы заполнения:

$$\varphi_{n_1} = \varphi_{01} + \frac{\omega_0 C_1}{6\alpha g} \ln \left\{ 1 - \frac{3\alpha}{4} \mathcal{E}_{01}^2 (t - n/v_{\text{rp}}) [1 - \exp(gn/Cv_{\text{rp}})] \right\}$$

(при $C_1 = 0$, $\varphi_{n_1} = \varphi_{01} = \text{const}$). Легко показать, что набег фазы φ_{n_1} в начале усиления и в конце (при насыщении) происходит линейно с изменением числа звеньев. При малых n $\varphi_{n_1} \simeq \varphi_{01} + n\omega_0 C_1 \mathcal{E}_{01} \times (t - n/v_{\text{rp}}) / 6Cv_{\text{rp}}$, при больших — $\varphi_{n_1} \simeq \varphi_{01} + n\omega_0 C_1 / 6\alpha C v_{\text{rp}}$. Отсюда следует, что для выполнения условия медленности изменения φ_n ($\varphi_{n+1} - \varphi_n \sim \mu$ при $\beta \gg \mu$) необходимо, чтобы отношение нелинейной емкости C_1 к линейной C было также порядка μ .

Уравнения системы (4) симметричны относительно прямой и обратной волн, поэтому требования, предъявляемые к согласованию выхода и входа усилителя, должны быть достаточно высокими, в частности, при работе в импульсном режиме необходимо, чтобы возникшие переотражения затухали за время, меньшее или равное периоду следования импульсов.

Очевидно, что это условие выполняется тем лучше, чем сильнее неравенство

$$\begin{aligned} \exp(gN/2Cv_{\text{rp}}) \left\{ 1 - \frac{3\alpha}{4} \mathcal{E}_{01}^2 [1 - \exp(gn/2Cv_{\text{rp}})] \right\}^{-1} \gg \\ \gg (Z_0 - Z)(Z_N - Z_0) / (Z_0 + Z)(Z_N + Z), \end{aligned}$$

являющееся в то же время одним из условий устойчивой работы усилителя в нелинейном режиме.

3. В случае усиления непрерывного сигнала и наличия небольших переотражений в усилителе устанавливается стационарный режим с $\mathcal{E}_{n_1} \gg \mathcal{E}_{n_2}$, описываемый приближенными укороченными уравнениями

$$\frac{d\mathcal{E}_{n_1}}{dn} = \frac{g}{2Cv_{\text{rp}}} \left(1 - \frac{3\alpha}{4} \mathcal{E}_{n_1}^2 \right) \mathcal{E}_{n_1}, \quad \frac{d\mathcal{E}_{n_2}}{dn} = -\frac{g}{2Cv_{\text{rp}}} \left(1 - \frac{3\alpha}{4} \mathcal{E}_{n_1}^2 \right) \mathcal{E}_{n_2}; \quad (7a)$$

$$\frac{d\varphi_{n_1}}{dn} = -\frac{\omega_0 C_1}{8Cv_{\text{rp}}} \mathcal{E}_{n_1}^2, \quad \frac{d\varphi_{n_2}}{dn} = \frac{\omega_0 C_1}{4Cv_{\text{rp}}} \mathcal{E}_{n_1}^2 \quad (7b)$$

с граничными условиями

$$\mathcal{E}_{01}^2 (Z_0 + Z) - Z^2 \mathcal{E}_0^2 = 2\mathcal{E}_{01} \mathcal{E}_{02} \cos(\varphi_{01} - \varphi_{02}) \quad (n = 0); \quad (8a)$$

$$\mathcal{E}_{N_2}^2 (Z_n + Z) = \mathcal{E}_{N_1}^2 (Z_n - Z), \quad (8b)$$

$$\varphi_{N_1} - \varphi_{N_2} = 2k(\omega_0) N + \Delta\varphi_N \quad (n = N).$$

* Эффект дисперсионного распыливания сигнала проявится, если учесть в разложении $\chi_{n\pm 1}$ по крайней мере производные четвертого порядка.

Стационарное распределение огибающей прямой и обратной волн и разности фаз определяется путем интегрирования (7а) и (7б) с учетом (8 б):

$$\varphi_{n_1} - \varphi_{n_2} = \frac{\omega_0 C_1}{3\alpha g} \ln \frac{\mathcal{E}_{N_1}}{\mathcal{E}_{n_1}} - \frac{\omega_0 C_1}{6\alpha C v_{гр}} (N - n) + 2k(\omega_0) N + \Delta\varphi_N; \quad (9)$$

$$\mathcal{E}_{n_1} = 2 \exp(gn/2Cv_{гр}) \{3\alpha [B_1 + \exp(gn/Cv_{гр})]\}^{-1/2}; \quad (10)$$

$$\mathcal{E}_{n_2} = 2B_2 \exp(-gn/2Cv_{гр}) [B_1 + \exp(gn/Cv_{гр})]/(1 - B_1) (3\alpha)^{1/2}, \quad (11)$$

а постоянные $B_{1,2}$ находятся из решения алгебраических уравнений

$$4(Z_0 + Z)^2 (1 - B_1) - 3\alpha Z^2 \mathcal{E}_0^2 (1 - B_1^2) = 8B_2(1 - B_1)^{3/2} \cos(B_1, B_2), \quad (12)$$

$$B_2 = (Z_n - Z) (1 - B_1)/(Z_N + Z) [B_1 + \exp(gn/Cv_{гр})]^{3/2},$$

полученных из граничных условий (8а, б).

Система (12) решается графически, однако из общего рассмотрения (9), (10) и (12) видно, что для выполнения условия малости амплитуды отраженной волны необходимо параметры звена усилителя и величины нагрузок $Z_{0,N}$ подбирать таким образом, чтобы постоянная B_2 была много меньше единицы. Кроме того, система (9), (10) позволяет подобрать такие нагрузки $Z_{0,N}$, при которых значения $\mathcal{E}_{n_{1,2}}$ не превышают заранее заданных величин.

В заключение отметим, что система (4) для стационарных во времени ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) режимов сводится к уравнению в полных дифференциалах. Его решение может быть представлено в виде эллиптических интегралов

$$\int d\mathcal{E}_{n_{1,2}}^2 \left/ \left\{ \mathcal{E}_{n_{1,2}}^2 \left[\mathcal{E}_{n_{1,2}}^6 - \frac{8}{3\alpha} \mathcal{E}_{n_{1,2}}^4 + \left(\frac{4}{3\alpha} \right)^2 \mathcal{E}_{n_{1,2}}^2 - 4 \left(\frac{4}{3\alpha} \right)^3 B \right] \right\}^{1/2} = \pm \frac{4gn}{3\alpha C v_{гр}}. \quad (13)$$

Здесь знак (+) относится к \mathcal{E}_{n_1} , а (-) к \mathcal{E}_{n_2} . При этом уравнение связи между \mathcal{E}_{n_1} и \mathcal{E}_{n_2} имеет вид

$$\mathcal{E}_{n_1}^2 \mathcal{E}_{n_2}^2 \left| \frac{4}{3\alpha} - \mathcal{E}_{n_1}^2 - \mathcal{E}_{n_2}^2 \right| = B, \quad (14)$$

где B — постоянная, определяемая граничными условиями. Однако режимы работы системы с амплитудами $\mathcal{E}_{n_2} \sim \mathcal{E}_{n_1}$ более присущи не усилителю, а генератору, поэтому дальнейший анализ этих уравнений здесь не проводится.

Автор выражает признательность М. И. Рабиновичу за интерес, проявленный к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, Радиотехника и электроника, 11, 1467 (1966)
2. Д. А. Кабанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 9, 417 (1966)
3. Д. А. Кабанов, ПТЭ, № 2, 136 (1967)
4. М. И. Рабинович, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, 9, 987 (1966).
5. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд. Мир, М., 1964

NONLINEAR THEORY OF A DISTRIBUTED AMPLIFIER ON
TUNNEL DIODES

Yu. K. Bogatyrev

The operation of a TW nonlinear amplifier periodically loaded with tunnel diodes is analysed with taking into account the wave reflected from nonmatched loads. The stationary and nonstationary regimes of amplifier operation are considered.

УДК 621 396 62 : 621.3.089 52

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИЕМНОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОНОМ

В. А. Маркелов

Определяется чувствительность приемной системы с периодически запускаемым параметроном. Показано, что она в M раз хуже чувствительности оптимального приемника, причем коэффициент M по порядку величины равен отношению времени между запусками к времени установления колебаний в параметроне

В ряде работ (см., например, [1-4]) исследовались — теоретически и экспериментально — системы обнаружения слабого синусоидального сигнала с использованием параметронов (параметрических генераторов субгармоник). Идея метода обнаружения базируется на измерении вероятностей возбуждения стационарных фаз колебаний при многократных запусках*. В отсутствие сигнала значения фаз равновероятны; появление синусоидального сигнала с частотой, равной частоте генерации, приводит к преимущественному возбуждению одной из фаз; это и позволяет после проведения серии запусков получить информацию о сигнале. Однако приведенные в литературе оценки чувствительности такой системы носят в основном качественный характер. Целью данной работы является более обстоятельное рассмотрение этого вопроса.

Очевидно, что «выбор» того или иного значения фазы колебания параметрона происходит на начальном этапе возникновения генерации, когда амплитуда колебания еще мала и нелинейные члены в уравнении параметрона (ответственные за ограничение амплитуды) можно не принимать во внимание. Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать только фаза, можно считать, что линейное уравнение «работает» в течение всего цикла запуска параметрона. Это упрощает анализ и позволяет свести задачу к случаю обычного параметрического сверхгенератора.

Представим напряжение частоты ω_0 ($2\omega_0$ — частота накачки) на конденсаторе контура параметрона в виде

$$x(t) = u(t) \cos \omega_0 t + v(t) \sin \omega_0 t = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)} \cos [\omega_0 t + \psi(t)].$$

Пусть контур параметрона настроен точно на половину частоты накачки. Выбрав фазу накачки такой, чтобы в режиме развитой генерации выполнялось $u^2(t) \gg v^2(t)$ (в этом случае фаза возбужденного колебания будет определяться лишь знаком $u(t)$), запишем укороченное уравнение для $u(t)$ (см. [5]):

$$\dot{u}(t) = -\delta(t) u(t) + \frac{\omega_0^2}{2} e_{\perp}(t) + \frac{\omega_0}{2} E, \quad (1)$$

* Как известно, в параметронах возможны, вообще говоря, несколько устойчивых состояний, характеризуемых различными значениями фаз возбужденных колебаний. Здесь рассмотрен одноконтурный параметрон, у которого таких состояний два.

где E — амплитуда сигнала (считаем, что сигнал приходит в наиболее благоприятной для его обнаружения фазе), $\xi(t) = e_{\parallel}(t) \cos \omega_0 t + e_{\perp}(t) \sin \omega_0 t$ — шум с равномерным вблизи ω_0 спектром, $\delta(t) = \delta_0 [1 + m\varphi(t)]$ — эффективное затухание контура (с учетом регенерации, вносимой накачкой)*, $\varphi(t)$ — некоторая периодическая функция времени с периодом $T = 2\pi/\Omega$ ($|\varphi(t)|_{\max} = 1$, $\int_0^T \varphi(t) dt = 0$, $\Omega \ll \omega_0$), m — глубина модуляции затухания.

Решение (1) имеет вид

$$u(t) = \frac{\omega_0}{2} \int_{-\infty}^t \exp \left[- \int_{t'}^t \delta(y) dy \right] [e_{\perp}(t') + E] dt', \quad (2)$$

откуда

$$\langle u(t) \rangle = \frac{\omega_0}{2} E \exp [m\delta_0 \Phi(t)] F(\delta_0, m, t); \quad (3)$$

$$\langle u(t) u(t + \tau) \rangle = \frac{\pi}{2} \omega_0^2 \exp \{ -\delta_0 \tau + m\delta_0 [\Phi(t) + \Phi(t + \tau)] \} F(2\delta_0, m, t) G_{\varepsilon}(\omega_0), \quad (4)$$

где

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(y) dy,$$

$$F(\delta_0, m, t) = \exp(-\delta_0 t) \int_{-\infty}^t \exp[\delta_0 t' + m\delta_0 \Phi(t')] dt', \quad (5)$$

$G_{\varepsilon}(\omega)$ — спектральная плотность шума, а косые скобки означают статистическое усреднение.

Рассмотрим теперь процесс на выходе фазового детектора $Z(t) = \cos \psi(t) \simeq u(t) |u(t)|^{-1}$. Учитывая, что $u(t)$ — процесс нормальный, и считая сигнал слабым, будем иметь

$$\begin{aligned} \langle Z(t) \rangle &= \int_0^{\infty} W(u) du - \int_{-\infty}^0 W(u) du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\langle u(t) \rangle}{\sqrt{\langle u^2(t) \rangle}} = \\ &= \frac{E}{\pi} \frac{F(\delta_0, m, t)}{[G_{\varepsilon}(\omega_0) F(2\delta_0, m, t)]^{1/2}}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\langle Z(t) Z(t + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_1 u_2}{|u_1| |u_2|} W(u_1 u_2) du_1 du_2 = \frac{2}{\pi} \arcsin [r(t, \tau)], \quad (7)$$

где $W(u)$, $W(u_1 u_2) = W[u(t), u(t + \tau)]$ — плотности вероятности $u(t)$,

$$r(t, \tau) = \frac{\langle u_1 u_2 \rangle}{(\langle u_1^2 \rangle \langle u_2^2 \rangle)^{1/2}} = \exp(-\delta_0 \tau) \frac{F(2\delta_0, m, t)}{[F(2\delta_0, m, t) F(2\delta_0, m, t + \tau)]^{1/2}}. \quad (8)$$

* Модуляция затухания осуществляется обычно путем модуляции амплитуды накачки.

Пусть последующая обработка данных с выхода фазового детектора осуществляется сумматором, формирующим случайную величину $\xi_k = \sum_{p=1}^k Z(t_p)$. Для обнаружения слабого сигнала необходимо длительное накопление, $k \gg 1$; поэтому распределение ξ_k можно считать нормальным, и чувствительность в этом случае будет полностью определяться по величине отношения сигнал/шум на выходе сумматора:

$$(S/N)_{\text{вых}} = \langle \xi_k \rangle^2 / \langle \xi_k^2 \rangle. \quad (9)$$

Как видно из (5)—(9), чувствительность системы зависит в общем случае от конкретного вида модулирующей функции $\varphi(t)$. Оказывается, однако (см. [5]), что при $m \gg 1$ достаточно знать поведение $\varphi(t)$ лишь в момент возникновения генерации (когда $\delta(t) = 0$ и $\frac{d\delta}{dt} < 0$). Воспользовавшись выражением для $F(\delta_0, m, t)$, полученным в [5] для случая $m \gg 1$, из (5)—(9) будем иметь**

$$(S/N)_{\text{вых}} = \frac{1}{M} \frac{E^2 T_{\text{набл}}}{8G_{\Sigma}(\omega_0)}, \quad (10)$$

где $T_{\text{набл}} = kT$ — полное время наблюдения; $M = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{3/2} T \left(\frac{d\delta}{dt} \Big|_{t_{\text{возб}}} \right)^{1/2}$ для случая плавного изменения $\varphi(t)$ (плавного изменения уровня накачки), $M = (1/2) (\pi/4)^2 T \Delta\delta \Big|_{t_{\text{возб}}}$ — для скачкообразного, а величины $\frac{d\delta}{dt} \Big|_{t_{\text{возб}}}$, $\Delta\delta \Big|_{t_{\text{возб}}}$ есть соответственно скорость изменения затухания и скачок затухания в момент возбуждения генерации***.

Второй сомножитель в (10), как можно показать (см., например, [6]), есть отношение сигнал/шум на выходе оптимального фазового приемника. Формула (10) означает по сути дела, что данная система работает «на прием» лишь $\frac{1}{M}$ -ю часть каждого периода, пока амплитуда в контуре еще достаточно мала****.

Коэффициент M по порядку величины равен отношению периода модуляции затухания к времени установления колебаний и в практических условиях, по-видимому, не может быть меньше 3—5. Однако, хотя исследуемая система уступает по чувствительности (теоретической) оптимальному фазовому приемнику, она обладает рядом практических достоинств: слабое влияние разного рода нестабильностей, большое усиление (свойственные всем сверхгенераторным системам, удобство

* При этом система заходит далеко за порог генерации, и процесс в ней носит характер бурных вспышек (форма которых, если не принимать во внимание нелинейность, определяется законом $\varphi(t)$).

** Формула (10) получена в предположении, что значения $Z(t)$ в соседних вспышках некоррелированы; это выполняется, если частота следования вспышек достаточно мала, $\omega \ll \delta_0$.

*** Отметим, что в выражение для $(S/N)_{\text{вых}}$, полученное в работе [1], вместо $\Delta\delta$ (там рассматривался случай скачкообразного включения накачки) входит затухание контура; это обусловлено тем, что в [1] учитывалось воздействие сигнала и шума лишь в предосцилляционный период.

**** При $m = 0$ (когда параметрон становится параметрическим усилителем) чувствительность данной системы равна чувствительности оптимального фазового приемника, если не считать потери квантования фазы, которые относительно невелики [7].

цифровой обработки данных; это делает ее полезной для некоторых применений.

В заключение выражаю благодарность И. Л. Берштейну за ценные замечания, сделанные при просмотре рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Ахманов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 4, 769 (1961).
2. С. А. Ахманов, В. П. Комолов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 6, 1175 (1962).
3. В. П. Комолов, А. С. Рошаль, И. Г. Трофименко, Б. Я. Фельдман, Параметроны в цифровых устройствах, изд. Энергия, М., 1968.
4. В. П. Комолов, В. Ю. Маслов, И. Т. Трофименко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 12, 1811 (1969).
5. В. А. Маркелов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 502 (1964).
6. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, изд. Сов. радио, М., 1960.
7. Ю. Б. Черняк, Радиотехника и электроника, 8, 1326 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
26 мая 1969 г.,
после переработки
20 марта 1970 г.

SENSITIVITY OF RECEIVING SYSTEM WITH PARAMETRON

V. A. Markelov

The sensitivity of the receiving system with periodically started parametron is defined. This is shown to be M times worse than the optimum receiver sensitivity, the coefficient M being equal to the ratio of time between starts to that of setting oscillations in the parametron.

УДК 621 373.7

ФЛУКТУАЦИИ КОЛЕБАНИЙ ДВУХКОНТУРНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА ПРИ НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКОЙ НАКАЧКЕ

В. А. Маркелов

Исследуются флуктуации амплитуд и частот колебаний двухконтурного параметрического генератора, обусловленные немонохроматичностью накачки.

В работе [1] рассматривались естественные флуктуации в двухконтурном параметрическом генераторе (ДПГ). Предметом данной заметки является изучение влияния флуктуаций напряжения накачки на колебания, генерируемые ДПГ, что в ряде случаев может представить определенный интерес. В [2] аналогичная задача решалась для одноконтурного генератора. В отличие от последнего, в ДПГ частоты генерации не «привязаны» к частоте накачки; как показано, ширина линии одного из колебаний в результате этого может быть сделана при определенных условиях существенно меньше ширины линии накачки.

Рассмотрим ДПГ, связь между контурами которого осуществляется при помощи нелинейной емкости; пусть в общем случае емкость шунтирована нелинейной проводимостью. Зададимся зависимостью емкости и проводимости от приложенного напряжения в виде полиномов

$$c(u) = c_0 + \sigma u + \gamma u^2, \quad g(u) = g_0 + \chi u^2. \quad (1)$$

Напряжение накачки на емкости связи, обладающее флуктуациями амплитуды и фазы (спектры их будем считать заданными; это могут быть как естественные, так и технические флуктуации), запишем в виде

$$u_n = A_n [1 + \alpha_n(t)] \cos [\omega_n t + \varepsilon_n(t)]. \quad (2)$$

Аналогично запишем напряжения на конденсаторах $c_{1,2}$ первого и второго контуров ДПГ:

$$u_{1,2} = A_{1,2} [1 + \alpha_{1,2}(t)] \cos [\omega_{1,2} t + \varphi_{1,2} + \varepsilon_{1,2}(t)], \quad (3)$$

причем $\omega_1 + \omega_2 = \omega_n$.

Полагая $\langle \alpha_{1,2}^2 \rangle \ll 1$, $\langle (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_n)^2 \rangle \ll 1^*$, из уравнений Кирхгофа для ДПГ после обычной процедуры укорочения и линеаризации получим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k + P_{kk} \alpha_k + P_{kl} \alpha_l - \bar{\Delta}_k \varepsilon &= -P_{kn} \alpha_n - \bar{\Delta}_k \varepsilon_n, \\ \dot{\varepsilon}_k + Q_{kk} \alpha_k + Q_{kl} \alpha_l + \bar{\delta}_k \varepsilon &= -Q_{kn} \alpha_n + \bar{\delta}_k \varepsilon_n \end{aligned} \quad (4)$$

($k, l = 1, 2, k \neq l$),

* Можно показать, что, если ДПГ не работает на пороге генерации, эти условия заведомо выполняются при любом реальном генераторе накачки.

где

$$P_{kk} = \bar{\delta}_k + \frac{3}{4} \frac{x}{c_k} A_k^2, \quad P_{kl} = -\bar{\delta}_k + \frac{3}{2} \frac{x}{c_k} A_l^2, \quad P_{kH} = -\bar{\delta}_k + \frac{3}{2} \frac{x}{c_k} A_H^2,$$

$$Q_{kk} = \bar{\Delta}_k + \frac{3}{4} \frac{\omega_k \gamma}{c_k} A_k^2, \quad Q_{kl} = -\bar{\Delta}_k + \frac{3}{2} \frac{\omega_k \gamma}{c_k} A_l^2, \quad Q_{kH} = -\bar{\Delta}_k + \frac{3}{2} \frac{x}{c_k} A_H^2, \quad (5)$$

$$\bar{\delta}_k = \delta_k + \frac{3}{4} \frac{x}{2c_k} (A_k^2 + 2A_l^2 + 2A_H^2), \quad \bar{\Delta}_k = \Delta_k + \frac{3}{4} \frac{\omega_k \gamma}{2c_k} (A_k^2 + 2A_l^2 + 2A_H^2),$$

$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\delta_{1,2}$ — затухания «холодных» контуров, $\Delta_{1,2}$ — расстройки частот генерации относительно собственных частот «холодных» контуров, $\bar{\delta}_{1,2}$ и $\bar{\Delta}_{1,2}$ — те же самые величины в режиме генерации.

Из данных уравнений можно получить все необходимые статистические характеристики $\alpha_{1,2}$ и $\varepsilon_{1,2}$.

Рассмотрим сначала флуктуации амплитуд. Представим спектральные плотности $\alpha_{1,2}$ в виде

$$S_{\alpha_{1,2}}(\omega) = |K_{\alpha_{1,2}}(\omega)|^2 S_{\alpha_n}(\omega) + |H_{\alpha_{1,2}}(\omega)|^2 S_{\nu_n}(\omega), \quad (6)$$

где $S_{\alpha_n}(\omega)$ и $S_{\nu_n}(\omega)$ — спектральные плотности флуктуаций амплитуды и частоты $\nu_n = \varepsilon_n$ накачки.

Выражения для «коэффициентов передачи» $K_{\alpha_{1,2}}(\omega)$ и $H_{\alpha_{1,2}}(\omega)$, получающиеся из (4), (5), довольно громоздки и здесь не приводятся. Об их поведении в некоторых частных случаях можно судить по примерным графикам, приведенным на рис. 1. Кривая 1 изображает ход $|K_{\alpha_{1,2}}(\omega)|^2$ для случая так называемого диссипативного механизма ограничения амплитуды ($\gamma = 0$, $x > 0$ — ограничение амплитуды происходит на нелинейной проводимости). Расстройка для простоты полагается равной нулю, $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. При этом флуктуации частоты накачки не вызывают флуктуаций амплитуд генерации: $H_{\alpha_{1,2}}(\omega) = 0$. ДПГ вырезает из спектра флуктуаций амплитуды накачки полосу частот порядка $(A_1^2 + A_2^2)/(A_1^2 + A_2^2 + A_H^2) \beta \delta = m \beta \delta = m \beta (\delta_1 + \delta_2)$, где $\beta = A_H/A_{H \text{ пор}} = A_H(\sigma/2) \sqrt{\omega_1 \omega_2 / \delta_1 \delta_2}$ характеризует степень возбуждения ДПГ.

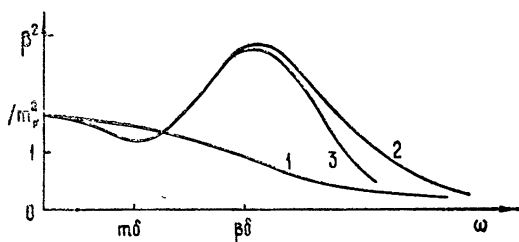


Рис. 1. 1, 2 — $|K_{\alpha_k}(\omega)|^2$; 3 — $(\beta \delta)^2 |H_{\alpha_k}(\omega)|^2$.

При расстроечном механизме ограничения ($x=0$, $\gamma \neq 0$; за ограничение амплитуды отвечает нелинейная емкость) оба коэффициента передачи отличны от нуля (кривые 2, 3). В отличие от монотонного спада в предыдущем случае, наблюдается заметный подъем кривых на частотах $\sim \beta \delta^*$, обусловленный осцилляторным характером установления колебаний при расстроечном ограничении. Общая интенсивность амплитудных флуктуаций благодаря влиянию флуктуаций частоты накачки может существенно возрасти по сравнению с диссипативным ограничением. При обоих механизмах ограничения поведение коэффициентов передачи вблизи нулевой частоты зависит от величин $m_k = (A_1^2 + A_2^2)/(A_k^2 + A_H^2)$ ($k = 1, 2$), характеризующих соотноше-

* Отметим, что при диссипативном ограничении $\beta \delta \approx \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2$, а при расстроечном $\beta \delta \approx \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2$.

ние между амплитудой напряжения накачки (на емкости связи) и амплитудами генерации*. При $A_n^2 \ll A_{1,2}^2$ (это может быть, когда потери и нелинейность достаточно малы) $K_{\alpha_{1,2}}(0) \sim 1$, т. е. медленные (относительные) флуктуации амплитуд генерации и накачки приблизительно одинаковы. При $A_n^2 \gg A_{1,2}^2$ (когда, например, близок «порог» или «потолок» генерации) флуктуации амплитуды накачки «проходят» через ДПГ со значительным «усилением».

Перейдем теперь к флуктуациям частот. Запишем их спектральную плотность в виде, аналогичном (6):

$$S_{v_{1,2}}(\omega) = |K_{v_{1,2}}(\omega)|^2 S_{\alpha_n}(\omega) + |H_{v_{1,2}}(\omega)|^2 S_{v_n}(\omega). \quad (7)$$

При диссипативном ограничении ($\gamma = 0, \kappa > 0$) и при нулевой расстройке $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ для коэффициентов передачи из (4), (5) получаются следующие простые выражения:

$$K_{v_{1,2}}(\omega) = 0, \quad (8)$$

$$H_{v_{1,2}}(\omega) = \frac{\bar{\delta}_{1,2}}{(\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2) + i\omega}.$$

При расстройочном ограничении $K_{v_{1,2}}(\omega)$ и $H_{v_{1,2}}(\omega)$ имеют довольно сложный вид, и мы ограничимся здесь лишь приведением соответствующих графиков (см. рис. 2). В отличие от амплитудных «коэффициентов передачи» $K_{\alpha_{1,2}}(\omega)$ и $H_{\alpha_{1,2}}(\omega)$, поведение $K_{v_{1,2}}(\omega)$ и $H_{v_{1,2}}(\omega)$ при обоих механизмах ограничения сравнительно мало зависит от амплитуд генерации (следовательно, и от близости к «порогу» или «потолку» генерации).

Как следует из (8), флуктуации амплитуды накачки при диссипативном ограничении не влияют, если отсутствует расстройка, на флуктуации частот генерируемых колебаний. В то же время в случае расстройочного ограничения их влияние может, вообще говоря, даже превышать влияние флуктуаций частоты накачки. Оказывается, однако, что воздействие достаточно медленных флуктуаций амплитуды можно «нейтрализовать», если специальным образом подобрать параметры ДПГ. Действительно, из (4), (5) имеем (при $\kappa = 0$)

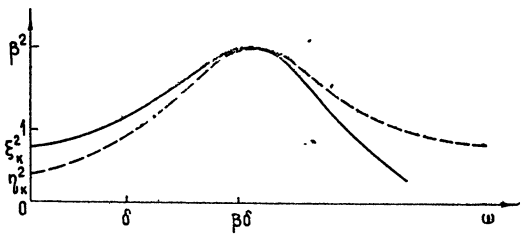


Рис. 2. — — — $|H_{v_k}(\omega)|^2$; - - - - $(\beta\delta)^{-2} |K_{\alpha_k}(\omega)|^2$.

$$K_{\alpha_k} = \eta_k \beta \delta = \frac{\delta_k c_k \omega_k^{-1} - \delta_l c_l \omega_l^{-1}}{\delta_1 c_1 \omega_1^{-1} + \delta_2 c_2 \omega_2^{-1}} \beta \delta \quad (9)$$

$$(k, l = 1, 2, k \neq l).$$

Отсюда видно, что если сделать

$$\frac{\delta_1 c_1 \omega_2}{\delta_2 c_2 \omega_1} = \frac{A_2^2}{A_1^2} = 1, \quad (10)$$

* Это зависит, в свою очередь, от величины потерь и степени нелинейности в системе, от близости к «порогу» или «потолку» генерации (см. [3]).

то $K_{\alpha_k}(0) = 0$. При этом для $H_{\nu_k}(0) = \xi_k = (Q_{kk} + Q_{kl}) / (Q_{11} + Q_{12} + Q_{21} + Q_{22})$ будет выполняться

$$H_{\nu_k}(0) = \frac{\delta_k}{\delta_1 + \delta_2}. \quad (11)$$

Как известно (см., например, [4]), спектральная плотность флуктуаций частоты в нуле определяет при быстрых (естественных) флуктуациях частоты ширину спектральной линии генератора. Из (8), (11) для ширины линий ДПГ, обусловленной лишь естественными флуктуациями в генераторе накачки, следует простое соотношение*

$$\Delta\Omega_{1,2} = S_{\nu_{1,2}}(0) = \frac{\bar{\delta}_{1,2}^2}{(\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2)^2} S_{\nu_n}(0) = \frac{\bar{\delta}_{1,2}^2}{(\bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2)^2} \Delta\Omega_n. \quad (12)$$

Таким образом, если бы не было собственных шумов системы, суммарная ширина спектральных линий ДПГ всегда** была бы меньше ширины линии накачки:

$$\Delta\Omega_1 + \Delta\Omega_2 < \Delta\Omega_n. \quad (13)$$

При этом контур с меньшим $\bar{\delta}_k$ (напомним, что $\bar{\delta}_k$ — затухание контура с учетом потерь, вносимых нелинейной проводимостью; при расстройном ограничении $\bar{\delta}_k = \delta_k$) «генерирует» колебание с меньшей шириной линии***. В одноконтурном параметрическом генераторе (который является, фактически, делителем частоты) ширина линии генерации однозначно связана (независимо от параметров генератора) с шириной линии накачки. В ДПГ же каждая из двух генерируемых частот прямо не связана с ω_n . Благодаря этому, если разница в затуханиях контуров $\bar{\delta}_k$ значительная, то ширина линии одного из колебаний может быть сделана существенно меньше ширины линии накачки.

Полные ширины спектральных линий зависят, очевидно, также и от собственных шумов ДПГ, можно показать (воспользовавшись результатами работы [5]), что в общем случае они равны:

$$\Delta\Omega_{1,2}^{\text{полн}} = \Delta\Omega_{1,2} + \Delta\Omega_{1,2}^{\text{собст}}, \quad (14)$$

где $\Delta\Omega_{1,2}^{\text{собст}}$ — составляющие, обусловленные одними только собственными шумами. Оценить относительный вклад каждого из слагаемых в (14) можно при помощи следующего приближенного соотношения:

$$\Delta\Omega_{1,2}^{\text{собст}} A_{1,2}^2 S_n(\omega_n) \simeq \Delta\Omega_{1,2} A_n^2 S_{1,2}(\omega_{1,2}), \quad (15)$$

где $S_{1,2}(\omega)$ и $S_n(\omega)$ — спектральные плотности шума в контуре ДПГ и генератора накачки соответственно. Обычно, (если не принято каких-либо специальных мер) $S_n(\omega)$ существенно больше $S_{1,2}(\omega)$, так что основной вклад в ширину спектральных линий ДПГ вносят флуктуации накачки.

В заключение выражаю благодарность А. Н. Малахову за предложенную тему и внимание к работе и И. Л. Берштейну за ценные замечания, сделанные при просмотре рукописи.

* Можно показать, что в рамках применимости линеаризации справедливо равенство $\Delta\Omega_n \ll \bar{\delta}_{1,2}$.

** В случае расстройного ограничения это справедливо при выполнении условия «нейтрализации» амплитудных флуктуаций накачки (10).

*** Из (11) следует также отмеченная в [5] возможность уменьшить при помощи ДПГ медленные (технические) уходы частоты накачки.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Малахов, В. А. Маркелов, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 6, 862 (1969).
2. И. Л. Берштейн, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 3, № 6, 995 (1960).
3. А. Е. Каплан, Ю. А. Кравцов, В. А. Рылов, Параметрические генераторы и делители частоты, изд. Сов. радио, М., 1966.
4. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968.
5. Л. Блэкуэлл, К. Коцебу, Параметрические усилители на полупроводниковых диодах, изд. Мир, М., 1964.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
19 августа 1969 г.

FLUCTUATIONS OF TWO-CIRCUIT PARAMETRIC GENERATOR
OSCILLATIONS AT NONMONOCHROMATIC PUMP

V. A. Markelov

Fluctuations of amplitude and frequency of two-circuit parametric generator oscillations due to nonmonochromatic pump are considered.

УДК 538 56

**ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД К СКОРОСТИ СВЕТА В ЗАДАЧЕ
О ПАДЕНИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ДВИЖУЩИЙСЯ
ФРОНТ ИОНИЗАЦИИ**

В. В. Борисов

Построено формальное решение нестационарной задачи о падении плоской электромагнитной волны на движущийся с постоянной скоростью фронт ионизации. Показана справедливость предельного перехода к скорости света в конечном результате, записанном в лабораторной системе отсчета

1. В положительном направлении оси Ox декартовой системы координат движется со скоростью $v_0 < c$ фронт ионизации. На фронт падает плоская электромагнитная волна

$$E_y = -B_z = E_0 I(\tau + x) u[(\tau + x)/c], \tag{1}$$

$I(\tau + x)$ — функция включения. Полагаем, что $I(\tau + x) u[(\tau + x)/c]$ — непрерывная функция, $u(0-) = 0$ и для $u[(\tau + x)/c]$ имеет смысл прямое обратное преобразование Лапласа. Точка встречи волны и фронта $x = 0$, время встречи $\tau = 0$. Уравнение движения фронта $x = v_0 \tau / c$. Скорость частиц в момент образования равна нулю, плотность — n_0 .

Поперечные электромагнитные поля будем определять из уравнений движения, сохранения частиц и системы уравнений Максвелла при тех же упрощающих предположениях, что и в [1]: скорость электронов много меньше скорости света, движением ионов и столкновениями пренебрегаем. Исходные уравнения в лабораторной системе отсчета совпадают с системой (1) работы [1].

2. Начальные условия определяются падающей электромагнитной волной, граничные — непрерывностью тангенциальных составляющих E , B на движущейся границе раздела сред [2]. Выражение для падающей электромагнитной волны в движущейся системе отсчета получим, используя известные формулы преобразования [3]:

$$E'_y = -B'_z = \sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}} E_0 I(\tau' + x') u\left(\sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}} \frac{\tau' + x'}{c}\right). \tag{2}$$

Здесь $\beta_0 = v_0/c$. Величины, относящиеся к движущейся со скоростью v_0 системе отсчета, будем отличать индексом.

Начальный момент времени $\tau = 0$ и начало координат $x = 0$ в движущейся системе при $\beta_0^2 \neq 1$ соответственно $\tau' = 0$ и $x' = 0$. Уравнение движения фронта $x' = 0$. Исходные уравнения:

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} = - \frac{\partial B'_z}{\partial \tau'}$$

$$-\frac{\partial B'_z}{\partial x'} = \frac{\partial E'_y}{\partial \tau'} + \frac{4\pi}{c} e \frac{n_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} v'_y, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v'_y}{\partial \tau'} - \beta_0 \frac{\partial v'_y}{\partial x'} = \frac{e}{mc} \sqrt{1-\beta_0^2} (E'_y + \beta_0 B'_z).$$

При получении последнего уравнения системы (3) учтено, что величина скорости частиц в ионизованной области в лабораторной системе отсчета много меньше скорости света, тогда продольная составляющая вектора скорости и поперечный импульс электронов в движущейся системе отсчета соответственно равны v_0 и $mv'_y/\sqrt{1-\beta_0^2}$. Плотность электронов в ионизованной области — $n_0/\sqrt{1-\beta_0^2}$.

Для определения E_y -составляющей вектора напряженности электрического поля в лабораторной системе отсчета нет необходимости находить E'_y и B'_z в отдельности, так как при переходе от движущейся со скоростью v_0 системы отсчета к лабораторной, согласно формулам преобразования Лоренца, $E_y = \frac{E'_y + \beta_0 B'_z}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$. Из системы (3) получим

для поперечной составляющей вектора E , зависящей от переменных x' , τ' в движущейся системе, уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0'^2} E_y(x'_0, \tau'_0) - \frac{\partial^2}{\partial \tau_0'^2} E_y(x'_0, \tau'_0) - E_y(x'_0, \tau'_0) = 0. \quad (4)$$

Здесь $x'_0 = \omega_0 x'/c$, $\tau'_0 = \omega_0 \tau'/c$ — безразмерные переменные, $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m}$ — частота плазменных колебаний.

Вне ионизованной области, $x'_0 > 0$, $E_y(x'_0, \tau'_0)$ удовлетворяет волновому уравнению для вакуума. $E_y(x'_0, \tau'_0)$ -составляющая падающего поля в безразмерных переменных будет

$$E_y(x'_0, \tau'_0) = E_0 I(x'_0 + \tau'_0) u\left(\sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}} \frac{\tau'_0 + x'_0}{\omega_0}\right). \quad (5)$$

3. Ищем поперечную составляющую вектора напряженности электрического поля в ионизованной области и вне ее, используя преобразование Лапласа.

Из системы уравнений Максвелла и условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов B'_z и E'_y при $v_y = 0$ на границе раздела двух сред непосредственно следует непрерывность нормальных производных $E_y(x'_0, \tau'_0)$.

Приравнявая при $x'_0 = 0$ поперечную составляющую вектора $E(x'_0, \tau'_0)$ и ее нормальную производную, преобразованные по Лапласу, получим систему двух алгебраических уравнений для определения коэффициента прозрачности движущейся границы и коэффициента отражения. Отсутствие источников поперечных полей в ионизованной области на бесконечности (условие излучения) и явный вид преобразованной по Лапласу функции падающей волны (5) приводят к следующим выражениям E_y для ионизованной области, $x'_0 < 0$, и вне ее, $x'_0 > 0$:

$$E_y = E_0 \frac{2\alpha p}{p + \sqrt{p^2 + 1}} u(\alpha p) \exp(\sqrt{1+p^2} x'_0) \quad (x'_0 < 0), \quad (6)$$

$$E_y = E_0 \alpha u(\alpha p) \exp(p x'_0) + E_0 \frac{p - \sqrt{p^2 + 1}}{p + \sqrt{p^2 + 1}} \alpha u(\alpha p) \exp(-p x'_0) \quad (x'_0 > 0),$$

$u(p)$ — преобразование Лапласа функции $u(\tau'_0)$, $\alpha = \omega_0 \sqrt{(1 - \beta_0)/(1 + \beta_0)}$.

4. Соотношения (6) позволяют построить формальное решение начальной задачи для $E_y(x'_0, \tau'_0)$ в виде свертки. После некоторых преобразований, используя [4], получим для преломленной волны

$$E_y(x'_0, \tau'_0) = 2E_0 \int_0^{(\tau'_0 + x'_0)/\alpha} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} d\eta \times \left\{ \frac{J_1 \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{\tau'_0}{\alpha} - \eta\right)^2 - \left(\frac{x'_0}{\alpha}\right)^2} \right]}{\alpha \sqrt{\left(\frac{\tau'_0}{\alpha} - \eta\right)^2 - \left(\frac{x'_0}{\alpha}\right)^2}} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\tau'_0}{\alpha} + \frac{x'_0}{\alpha} - \eta\right) \frac{x'_0}{\alpha} \frac{J_2 \left[\alpha \sqrt{\left(\frac{\tau'_0}{\alpha} - \eta\right)^2 - \left(\frac{x'_0}{\alpha}\right)^2} \right]}{\left[\sqrt{\left(\frac{\tau'_0}{\alpha} - \eta\right)^2 - \left(\frac{x'_0}{\alpha}\right)^2} \right]^2} \right\}. \quad (7)$$

Преобразуем значения координат и времени, входящие в аргумент правой части выражения (7) в лабораторную систему отсчета. Используя формулы преобразования Лоренца [3], находим

$$\frac{\tau'_0 + x'_0}{\alpha} = \frac{\tau_0 + x_0}{\omega_0}, \\ \frac{x'_0}{\alpha} = \frac{1}{\omega_0} \frac{x_0 - \beta_0 \tau_0}{1 - \beta_0} < 0, \\ \frac{\tau'_0 - x'_0}{\alpha} = \frac{1}{\omega_0} \frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0} (\tau_0 - x_0).$$

Подставляя полученные результаты в формулу (7), для преломленной волны в неподвижной системе отсчета получим

$$E_y(\tau_0, x_0) = 2E_0 \int_0^{(\tau_0 + x_0)/\omega_0} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} d\eta \left\{ \frac{J_1 \left[\sqrt{(\tau_0 + x_0 - \omega_0 \eta) \left(\tau_0 - x_0 - \frac{1 - \beta_0}{1 + \beta_0} \omega_0 \eta\right)} \right]}{\sqrt{(\tau_0 + x_0 - \omega_0 \eta) \left(\tau_0 - x_0 - \frac{1 - \beta_0}{1 + \beta_0} \omega_0 \eta\right)}} + \right. \\ \left. + \frac{x_0 - \beta_0 \tau_0}{(1 + \beta_0)(\tau_0 - x_0) - (1 - \beta_0)\omega_0 \eta} J_2 \left[\sqrt{(\tau_0 + x_0 - \omega_0 \eta) \left(\tau_0 - x_0 - \frac{1 - \beta_0}{1 + \beta_0} \omega_0 \eta\right)} \right] \right\} d\eta, \quad (8)$$

$$\tau_0 > 0, \quad x_0 < \beta_0 \tau_0.$$

Выражение (8) определяет поперечную составляющую вектора напряженности электрического поля в лабораторной системе отсчета за фронтом ионизации, движущимся со скоростью v_0 при падении на него плоской волны.

Для нахождения поперечной составляющей вектора магнитной индукции в ионизованной области при известной функции $E_y(x_0, \tau_0)$ из системы (1) удобно получить неоднородное волновое уравнение, решение которого не требует рассмотрения граничной задачи в движущейся системе отсчета.

5. В формальном решении начальной задачи для преломленной волны (8) устремим скорость движения фронта ионизации к скорости света при конечных τ_0, x_0 . Аргумент функций Бесселя, входящих в подынтегральное выражение, при $\beta_0 \rightarrow 1$ будет

$$\sqrt{(\tau_0 + x_0 - \omega_0 \eta) \left(\tau_0 - x_0 - \frac{1 - \beta_0}{1 + \beta_0} \omega_0 \eta \right)} \rightarrow \sqrt{(\tau_0 + x_0 - \omega_0 \eta) (\tau_0 - x_0)}.$$

Сомножитель второго слагаемого

$$\frac{x_0 - \beta_0 \tau_0}{(1 + \beta_0)(\tau_0 - x_0) - (1 - \beta_0)\omega_0 \eta} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

Используя рекуррентное соотношение $J_0(z) = (2/z)J_1(z) - J_2(z)$, для поперечной составляющей вектора напряженности электрического поля за фронтом ионизации, движущимся со скоростью света, получим

$$E_y = E_0 \int_0^{\xi_2} \frac{\partial u(x/\omega_0)}{\partial x} J_0 \left[\sqrt{(\xi_2 - x) \xi_1} \right] dx. \quad (9)$$

Здесь обозначили $\tau_0 - x_0 = \xi_1$, $\tau_0 + x_0 = \xi_2$ и перешли к новой переменной интегрирования $x = \omega_0 \eta$.

Отраженная волна ограничена плоскостями $x_0 = \beta_0 \tau_0$ — фронт ионизации, и $x_0 = \tau_0$ — фронт отраженной волны. При $\beta_0 \rightarrow 1$ область, занятая волной, уходящей от фронта, стремится к нулю.

Совпадение полученного результата (9) с формулой (7) работы [1] показывает устойчивость решения рассматриваемой задачи при предельном переходе скорости движения фронта ионизации к скорости света.

Автор благодарен М. А. Миллеру, предложившему подобный подход к задаче о падении плоской волны на фронт ионизации, движущейся со скоростью света.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Борисов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика (в печати)
2. В. И. Семенова, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, 8, 1077 (1967).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, изд. Наука, М., 1967.
4. Г. Бенгтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, 1, изд. Наука, М., 1969.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию
12 ноября 1969 г.

THE LIMITING TRANSITION TO THE LIGHT VELOCITY IN THE PROBLEM OF PLANE WAVE INCIDENTING ON MOVING IONIZATION FRONT

V. V. Borisov

A formal solution of the nonstationary problem of plane electromagnetic wave incidence on the ionization front moving with the constant velocity is built. The validity of the limiting transition to the light velocity in the final result recorded in the laboratory reference system is proved.

УДК 535.1 · 621.371

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Измestьев

Рассмотрены скалярные и векторные монохроматические волновые пучки с произвольной угловой расходимостью. Подробно проанализированы их геометрические и физические свойства. В параксиальном приближении найденные поля описывают гауссовы пучки. Показано, что двумерное волновое уравнение допускает решения, имеющие «нитевидный» характер.

1. При рассмотрении квазиоптических систем и волновых пучков, как правило, пользуются приближением параболического уравнения или принципом Гюйгенса—Кирхгофа для зоны дифракции Френеля [1, 2]. Такой приближенный подход хорошо описывает параксиальное электромагнитное поле и соответствует пучкам с малым углом раствора. В настоящей работе построена точная теория скалярных и векторных волновых пучков с произвольной угловой расходимостью.

2. Для анализа рассматриваемых нами волновых полей удобно воспользоваться сплюснутыми сфероидальными координатами (ССК). ССК η, ξ, φ связаны с декартовыми x, y, z соотношениями [3]

$$x = l\sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 + 1)} \cos \varphi, \quad y = l\sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 + 1)} \sin \varphi, \quad z = l\eta\xi, \quad (1)$$

где переменные η, ξ, φ удовлетворяют условиям

$$-1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \xi < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (2)$$

или

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3)$$

Поверхности $|\xi| = \text{const}$ и $|\eta| = \text{const}$ — сплюснутые вдоль оси z эллипсоиды (сфероиды) и однополостные гиперболоиды вращения, соответственно. Они вырождаются в предельном случае $\xi = 0$ в круглый диск радиуса $\rho = l$, лежащий в (x, y) -плоскости с центром в начале координат, а в случае $\eta = 0$ — в плоскости (x, y) с исключенным диском $\xi = 0$; при условиях (2) $\eta = \pm 1$ — положительная (отрицательная) полуось z , соответственно, а при условиях (3) $\eta = 1$ — вся ось z . В первом случае переменная η меняет знак скачком на вырожденной поверхности $\xi = 0$ ($\eta > 0$ при $z > 0$), а во втором случае ξ меняет знак скачком на вырожденном гиперболоиде $\eta = 0$ ($\xi > 0$ при $z > 0$); φ — азимутальный угол. Параметр l с размерностью длины произволен. В пределе $l = 0$ ССК совпадают со сферическими R, ϑ, φ ; при $l > 0$ они асимптотически переходят опять-таки в сферические при $\xi \rightarrow \infty$ согласно предельным условиям

$$l\xi = R, \quad \eta = \cos \vartheta, \quad \varphi = \varphi. \quad (4)$$

3. Дальнейшее основано на том, что как оператор Лапласа, так и уравнения Максвелла инвариантны по отношению к произвольному

сдвигу начала координат, в том числе и комплексному. Используя известные решения трехмерного уравнения Гельмгольца $\Delta\psi + k^2\psi = 0$, где $k = \omega/c = 1/\bar{\lambda} = \text{const}(\bar{\lambda} = \lambda/2\pi)$ — волновое число, полученные разделением переменных в ряд систем координат, легко получить скалярные волновые поля типа пучков, угол раствора которых определяется параметром $\gamma = kl$. Зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$ опускаем.

В качестве первого примера рассмотрим решение уравнения Гельмгольца в «сферических» координатах

$$x = r \sin \chi \cos \varphi, \quad y = r \sin \chi \sin \varphi, \quad z = r \cos \chi + il, \quad (5)$$

где комплексный радиус r и комплексный угол χ определяются равенствами

$$r = [\rho^2 + (z - il)^2]^{1/2} = (\rho^2 + q^2)^{1/2}, \quad \cos \chi = q/r. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $q = z - il$.

Вследствие указанной выше инвариантности решение волнового уравнения, описывающее уходящие на бесконечность волны, в переменных r, χ, φ имеет вид

$$u_{mn}(r, \chi, \varphi) = a_{mn} h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos \chi) e^{im\varphi}, \quad (7)$$

где a_{mn} — коэффициенты, выбираемые из соображений удобства, $P_n^m(\cos \chi)$ — полином Лежандра, а $h_n^{(1)}(kr)$ связана с функцией Ганкеля полуцелого индекса соотношением

$$h_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(1)}(kr).$$

Поле (7) обращается в бесконечность в точке $r = 0$ ($z = 0, \rho = l$), которая совпадает с фокальной окружностью сплюснутой системы координат $\eta = \xi = 0$. Очевидно, при $l = 0$ формула (7) описывает обычные сферические волны $u_{mn}(R, \vartheta, \varphi)$. Если не оговорено обратное, в дальнейшем предполагаем, что $l \geq \lambda = 2\pi\bar{\lambda}$.

Рассмотрим подробно простейший случай

$$u_{00}(r) = a_{00} \frac{e^{ikr}}{ikr}. \quad (8)$$

Переход к параксиальному приближению, эквивалентному приближению параболического уравнения, в полученном решении (8) осуществляется элементарно. Если выполняется неравенство

$$\frac{\rho^2}{|q|^2} = \frac{\bar{\lambda}^2}{\sigma_0^2} \frac{\rho^2}{\sigma^2} \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{\rho^2}{\sigma^2} \ll \gamma, \quad (9)$$

где $\sigma_0 = \sqrt{\bar{\lambda}l}$, $\sigma^2 = \sigma_0^2(1 + z^2/l^2)$, то комплексный радиус r следует заменить на q всюду, кроме экспоненциального фазового члена, в котором надо положить

$$r = q \left(1 + \frac{\rho^2}{q^2} \right)^{1/2} \simeq q + \frac{\rho^2}{2q}. \quad (10)$$

Пусть $a_{00} = \gamma \exp(-\gamma)$, тогда при условиях (9) — (10), определяющих точность и область применимости параксиального приближения, получаем из (8) «гауссов» пучок

$$\tilde{u}_{00}(\rho, z) = \frac{\sigma_0}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2\sigma^2} + i \left[\frac{k\rho^2}{2R} + kz - \Phi \right] \right\}, \quad (11)$$

где σ — текущий эффективный радиус пучка, $R = \gamma \sigma^2 / z$ — радиус кривизны фазового фронта вблизи оси z , $\Phi = \text{arctg } z/l$ — набег фазы. Параметры σ_0 и l определяют естественные поперечный и продольный масштабы. Мы получим поправку к пучку (11), если учтем следующие члены разложения (10); отметим лишь, что они имеют порядок $\bar{\lambda}^2/\sigma_0^2$.

Достоинство ССК η , ξ состоит в том, что в этих переменных квадратный корень «извлекается», именно $r = [\rho^2 + (z - il)^2]^{1/2} = l(\xi - i\eta)$, поэтому сдвиг на мнимое расстояние вдоль оси z означает переход от сферических R , ϑ , φ к ССК η , ξ , φ и эквивалентен некоторому конформному преобразованию.

Функция (8) имеет вид

$$u_{00}(\eta, \xi) = \frac{e^{-\gamma}}{(\eta + i\xi)} e^{ik(\xi - i\eta)} = e^{-\gamma(1-\eta)} \frac{e^{i\eta\xi - i\psi'}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad (12)$$

где $\psi' = \text{arctg } \xi/\eta$. При γ , достаточно большом по сравнению с единицей, и условиях (2) формула (12) описывает в полупространстве $z > 0$ ($\eta > 0$) волновое поле типа пучка. $|u_{00}(\eta, \xi)|^2$ убывает в e раз

на гиперboloиде $\eta_e = 1 - \frac{1}{2} \frac{\bar{\lambda}}{l}$, который, согласно (4), соответствует

асимптотическому углу раствора $\vartheta_e = \bar{\lambda}/\sigma_0$ ($\sigma_0 \gg \bar{\lambda}$). В случае $l \rightarrow \bar{\lambda}$ ($\sigma_0 \rightarrow \bar{\lambda}$) угол $\vartheta_e \rightarrow \pi/2$. При отрицательных z ($\eta < 0$) поле (12) экспоненциально мало (порядка $\exp[-\gamma(1 + |\eta|)]$).

Таким образом, условия (2) определяют поле, локализованное, в основном, вблизи положительной полуоси z ($\eta \approx +1$) (односторонний пучок). Наоборот, условия (3) определяют двусторонний пучок: полупространство $z < 0$ соответствует приходящим, а $z > 0$ — уходящим волнам. Горловина пучка лежит в плоскости диска $\xi = 0$, $\eta > 0$.

Не останавливаясь на параксиальном приближении высших мод (7) с $m, n \neq 0$, отметим лишь, что при $\gamma \gg 1$ $\cos \chi = q/r \approx 1$, поэтому наибольший интерес в этом случае представляют «секториальные» гармоники ($m = n$), так как $P_m^m(\cos \chi) e^{im\varphi} = \sin^m \chi e^{im\varphi} = (\rho/r)^m e^{im\varphi}$. Нетрудно также выписать поле (7) в ССК $u_{mn}(\eta, \xi, \varphi)$.

В заключение этого раздела приведем асимптотическую формулу, описывающую поле $u_{mn}(r, \chi, \varphi)$ в дальней зоне ($\xi \gg 1$, т. е. $z \gg l$). Согласно (4) получаем

$$\tilde{u}_{mn}(R, \vartheta, \varphi) = \text{const} \exp\left(-2\gamma \sin^2 \frac{\vartheta}{2}\right) P_n^m(\cos \vartheta) \frac{e^{ikR + im\varphi}}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

Член $O(R^{-2})$ соответствует боковым лепесткам, которые уже при l , равном нескольким длинам волн λ , экспоненциально малы. Во всяком случае, полученное решение $u_{mn}(\eta, \xi, \varphi)$ позволяет детально проследить за формированием боковых лепестков (направленных под углом $\vartheta \sim \pi/2$) по мере распространения пучка в полупространстве $z > 0$.

4. Использованный выше прием позволяет также получить волновое поле типа пучка, исходя из решения уравнения Гельмгольца в параболических координатах вращения [4]. Разделение переменных в волновом уравнении в этом случае приводит к уравнению для вырожденной гипергеометрической функции

$$\zeta \frac{d^2 \psi_n^m}{d\zeta^2} + (m + 1 - \zeta) \frac{d\psi_n^m}{d\zeta} + n\psi_n^m = 0,$$

которое при целых положительных n и m имеет своими линейно независимыми решениями полином Лагерра $\psi_n^m = L_n^m(\zeta)$ и функцию $U_n^m(\zeta)$.

Свойства функции $U_n^m(\zeta)$ подробно рассмотрены, например, в [4], поэтому мы ограничимся только необходимыми формулами. Так,

$$U_n^m(\zeta) \simeq \frac{(m+n)!}{\pi} e^{i\pi(n+1/2)} \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{m+n+1} e^\zeta, \quad |\zeta| \gg 1. \quad (13)$$

В этом разделе и ниже будем считать, что ССК η, ξ, φ удовлетворяют условиям (3), поэтому рассматриваемые поля описывают двусторонние пучки. Следуя предложенному выше методу, вводим комплексные переменные:

$$[v = \frac{1}{2}(r - q) = \frac{l}{2}(1 - \eta)(\xi + i), \quad w = \frac{1}{2}(r + q) = \frac{l}{2}(1 + \eta)(\xi - i)]. \quad (14)$$

Очевидно, они получены «расщеплением» координаты ρ , поскольку в соответствии с определением (1), $\rho^2 = 4vw = l^2(1 - \eta^2)(\xi^2 + 1)$. Воспользовавшись и на этот раз инвариантностью оператора Лапласа относительно произвольных (в том числе комплексных) сдвигов, запишем решение волнового уравнения в виде [4]

$$\Psi_{mn}(v, w, \varphi) = (vw)^{m/2} L_n^m(-2ikv) U_n^m(2ikw) e^{ik(v-w) + im\varphi}. \quad (15)$$

Рассмотрим прежде всего параксиальное приближение. Если $\gamma \gg 1$, то при условиях (9) и (10)

$$-2ikv \simeq -\frac{\rho^2}{2\sigma_0^2 \tau}, \quad 2ikw \simeq 2\gamma\tau, \quad \tau = 1 + i\frac{z}{l}, \quad (16)$$

а функция $U_n^m(2ikw)$ имеет вид (13), поэтому пучок описывается формулой

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{mn}(\rho, \varphi, z) = \text{const} \frac{\sigma_0}{\sigma} \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^m \left(\frac{1}{\tau}\right)^n L_n^m\left(\frac{\rho^2}{2\sigma_0^2 \tau}\right) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2} + i\left[\frac{k\rho^2}{2R} + kz - (m+1)\Phi + m\varphi\right]\right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Поле $\tilde{\Psi}_{mn}(\rho, \varphi, z)$ содержит в аргументе полиномов Лагерра комплексную величину τ , которую можно отсюда исключить, если воспользоваться формулой суммирования [5]

$$L_n^m(\mu\zeta) = \sum_{p=0}^n \binom{m+n}{p} \mu^{n-p} (1-\mu)^p L_{n-p}^m(\zeta), \quad (18)$$

где $\binom{m}{n}$ — биномиальный коэффициент. Полагая $\mu = 2/\tau^*$ и $\zeta = \rho^2/2\sigma_0^2 \tau$ (звездочка означает комплексное сопряжение) и заменяя в (17) $n \rightarrow n - p$, с помощью (18) легко получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{mn}(\rho, \varphi, z) = \frac{\sigma_0}{\sigma} \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^m L_n^m\left(\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right) \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2} + i\left[\frac{k\rho^2}{2R} + kz - (2n+m+1)\Phi + m\varphi\right]\right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Этот гауссов квазиоптический пучок можно рассматривать как результат интерференции волн вида (17). Он аппроксимирует излучение

из открытого конфокального резонатора длины $2l$, образованного сферическими зеркалами круглой формы. Существенное отличие (19) от (17) состоит в том, что поле $\tilde{\psi}_{mn}(\rho, \varphi, z)$ на зеркалах резонатора синфазно. А это, в свою очередь, связано с оптимальностью конфокального резонатора, формирующего пучок с наименьшей угловой расходимостью [6]. Асимптотический угол раствора пучка (19) равен

$$\vartheta_{mn} = \frac{\bar{\lambda}}{\sigma_0} \sqrt{2n + m + 1} = \vartheta_e \sqrt{2n + m + 1},$$

тогда как в случае (17) он в $\sqrt{2}$ раз больше. Таким образом, даже в параксиальном приближении полученные нами волновые поля, вообще говоря, отличаются от квазиоптических гауссовых пучков.

С помощью формул (13), (14) легко представить поле (15) в переменных η, ξ, φ при произвольном γ . Поле в дальней зоне ($\xi \gg 1$) получается отсюда, если воспользоваться формулами предельного перехода (4).

5. Рассмотрим геометрическую оптику волн вида (7). Ограничимся простейшим случаем (12). Вектор плотности потока интенсивности равен

$$I = \frac{i\bar{\lambda}}{2} (u_{00} \nabla u_{00}^* - u_{00}^* \nabla u_{00}) = A^2(\eta, \xi) \nabla S(\eta, \xi),$$

где вещественные амплитуда $A(\eta, \xi)$ и фаза поля $S(\eta, \xi)$ определяются второй формулой в равенствах (12):

$$A(\eta, \xi) = (\xi^2 + \eta^2)^{-1/2} \exp[-\gamma(1 - \eta)]; \quad S(\eta, \xi) = l\xi - \bar{\lambda} \arctg \frac{\xi}{\eta}. \quad (20)$$

Луч

$$N = \nabla S = e_\eta \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\bar{\lambda}}{r_\xi} + e_\xi \frac{\sqrt{\xi^2 + 1}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{r_\eta}\right), \quad (21)$$

где e_η и e_ξ — единичные орты сплюснутой системы координат, а $r_\xi = l(\xi^2 + \eta^2)/\xi = K_\xi^{-1/2}$ и $r_\eta = l(\xi^2 + \eta^2)/\eta = (-K_\eta)^{-1/2}$; K_ξ и K_η — гауссова кривизна поверхностей $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ соответственно. Наряду с вещественными лучами $N = \nabla S$ иногда пользуются понятием комплексных лучей [7]. Их введение оправдано тем, что для комплексных лучей в выражении I выделяется в явном виде малый член, пропорциональный $\bar{\lambda}$:

$$I = [|\tilde{A}|^2 \nabla S' + \bar{\lambda}(A' \nabla A'' - A'' \nabla A')] \exp(-2kS''). \quad (22)$$

Комплексная амплитуда $\tilde{A} = A' + iA''$ и комплексная фаза $\tilde{S} = S' + iS''$ определяются в нашем случае первой формулой в равенствах (12). Обычно, в силу медленности изменения амплитуды, вторым слагаемым в (22) можно пренебречь. Это эквивалентно тому, что в формуле (21) опущены члены, пропорциональные $\bar{\lambda}/r_{\eta, \xi}$. В этом приближении лучами являются гиперболы, т. е. сечения поверхностей $\eta = \text{const}$ плоскостями $\varphi = \text{const}$. а лучевыми трубками — однополостные гиперболоиды, причем «диффузии» волновой амплитуды из одной лучевой трубки в смежную не происходит. Абсолютная величина I экспоненциально убывает с уменьшением η , т. е. в направлении e_η . Все

сказанное остается справедливым и в параксиальном приближении для гауссова пучка (11). Поэтому, строго говоря, нельзя представлять себе процесс распространения волны (11) как «диффузию» волновой амплитуды поперек лучей, параллельных оси z .

Необходимо также подчеркнуть, что пренебрежение вторым членом в (22) оправдано не всегда. Вблизи фокальной окружности оба слагаемых сравнимы по величине. Подставляя (12) в волновое уравнение и разделяя вещественную и мнимую части, получаем уравнение эйконала и уравнение переноса

$$(\nabla S)^2 = \varepsilon(\eta, \xi), \quad A\Delta S + 2(\nabla A \nabla S) = 0.$$

Величину $\varepsilon(\eta, \xi) = 1 + \bar{\lambda}^2 \Delta A/A$ можно интерпретировать как «диэлектрическую проницаемость». Второй член в $\varepsilon(\eta, \xi)$ становится порядка единицы вблизи фокальной окружности, где гауссова кривизна поверхностей постоянной амплитуды $\eta = \text{const}$ сравнима с $\bar{\lambda}^{-2}$. Именно, в плоскости диска $\xi = 0$ на гиперboloиде $\eta_k = \bar{\lambda}/l$ отношение $\Delta A/A = -\bar{\lambda}^{-2}$. Таким образом, на окружности радиуса $\bar{\rho}^2 = l^2 - \bar{\lambda}^2$, $z = 0$ «диэлектрическая проницаемость» $\varepsilon(\bar{\lambda}/l, 0) = 0$. Если $\eta < \eta_k$, то $\varepsilon(\eta, 0) \rightarrow +\infty$. При этом лучи $N = \nabla S$ становятся отрицательными. С другой стороны, обращение в нуль вектора N связано целиком с дополнительным набегом фазы $\psi' = \text{arctg } \xi/\eta$, который при распространении пучка из $z = -\infty$ в $+\infty$ дает асимптотический «скачок» фазы на π . Этот результат можно сформулировать так: существование некоторой критической поверхности (линии), на которой $\nabla S = 0$, обусловлено «скачком» фазы. Полученный вывод, по-видимому, имеет общий характер.

6. До сих пор мы ограничивались скалярным случаем. В данном разделе подробно исследуем векторную задачу. Следуя методу Форсайта и Бейтмена [8], найдем решение уравнения $\Delta V + k^2 V = 0$, зависящее от произвольной функции, в дополнение к полученным выше. Пусть p_1, p_2, p_3 есть некоторые функции переменной β , подчиненные единственному условию

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \equiv p_\alpha^2 = 0. \quad (23)$$

По дважды повторяющемуся индексу подразумевается суммирование от 1 до 3. Переменная β как функция координат x, y, z определяется уравнением

$$d\beta = xp_1 + yp_2 + zp_3 = x_\alpha p_\alpha; \quad d = \text{const}. \quad (24)$$

Из (23) следует

$$p_\alpha p'_\alpha = 0, \quad p_\alpha p''_\alpha = -(p'_\alpha)^2 = -b^2. \quad (25)$$

Здесь b^2 есть, вообще говоря, функция β , а штрих означает дифференцирование по β . Обозначая $\zeta = x_\alpha p'_\alpha$, непосредственной проверкой нетрудно убедиться с помощью (23) и (25), что функция $V = f(\beta, \zeta)$ удовлетворяет волновому уравнению, если

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [(d - \zeta) f] + \frac{k^2}{b^2} (d - \zeta) f = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет, как хорошо известно, вид

$$(d - \zeta) f = B \exp(ik\zeta/b) + C \exp(-ik\zeta/b),$$

где B и C не зависят от ζ , но являются произвольными функциями β : $B = B(\beta)$, $C = C(\beta)$. Таким образом, решение уравнения $\Delta V + k^2 V = 0$, зависящее от произвольной функции, имеет вид

$$V_1 = \frac{B(\beta)}{(d-\zeta)} \exp \left[\frac{ikx_\alpha p'_\alpha}{(p'_\alpha)^{1/2}} \right] + \frac{C(\beta)}{(d-\zeta)} \exp \left[-\frac{ikx_\alpha p'_\alpha}{(p'_\alpha)^{1/2}} \right]. \quad (26)$$

В дальнейшем пусть $C(\beta) = 0$ и положим

$$p_1 = i(1 - \beta^2), \quad p_2 = (1 + \beta^2), \quad p_3 = 2i\beta. \quad (27)$$

Тогда условие (23) выполнено, а из (24) следует

$$\beta = (q - r)/(x + iy) = -(1 - \eta)^{1/2} (1 + \eta)^{-1/2} \exp(-i\Phi^{(-)}); \quad (28)$$

$$\Phi^{(-)} = \varphi - \arctg \xi^{-1},$$

причем, мы приняли $d = 2il$. При сделанном выборе p_α волновую функцию $V(x, y, z)$ можно представить как

$$V(x, y, z) = B(\beta) \frac{1}{r} e^{-\gamma + ikr}. \quad (29)$$

Электромагнитное поле пучка (29) удобно описывать вектором $F = H + iE$, где E, H вещественны. Уравнения Максвелла

$$\text{rot } F + \frac{i}{c} \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \text{div } F = 0$$

удовлетворяются, если $F(x, y, z, t)$ определить равенством

$$F = -ilgB(\beta) \exp \left[-\gamma - i\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] = g f_m, \quad (30)$$

где компоненты вектора g выражаются через якобианы следующим образом:

$$g_x = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(y, z)} = \frac{i(1 - \beta^2)}{2r}, \quad g_y = \frac{\partial(\alpha', \beta)}{\partial(z, x)} = \frac{(1 + \beta^2)}{2r}, \quad g_z = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} = \frac{i\beta}{r}.$$

Здесь $\alpha = t - r/c$. Оба инварианта поля F равны нулю. В этом случае E и H во всех лоренцевых системах отсчета равны по величине и взаимно перпендикулярны по направлению.

Средняя по времени плотность потока энергии $\Pi = ic[F^*, F]/8\pi = \Pi t$, где $\Pi = |\Pi| = cW$, плотность энергии равна

$$W = \frac{1}{8\pi} (F^* F) = \frac{1}{16\pi} \frac{|f_m|^2}{|r|^2} (1 + |\beta|^2)^2,$$

а единичный вектор t имеет декартовы составляющие

$$t_x = \sin \theta \cos \Phi^{(-)}, \quad t_y = \sin \theta \sin \Phi^{(-)}, \quad t_z = \cos \theta.$$

Здесь $\theta = \arccos \eta$, а $\Phi^{(-)}$ определяется (28). Уравнения $\theta = \text{const}$ и $\Phi^{(-)} = \text{const}$ определяют одно из двух семейств образующих (асимптотических линий) однополостного гиперболоида. Таким образом, линиями вектора Пойнтинга Π , которые следует отождествить с лучами, являются асимптотические линии одного из семейств однополостного гиперболоида вращения. Они обладают кручением $|\kappa| = (-K_\eta)^{1/2} = \eta/l(\xi^2 + \eta^2)$ и равной нулю кривизной.

Поле F (30) описывает свет, поляризованный по левому кругу. Свет правой поляризации описывается той же формулой (30), где, однако, надо произвести замену $\beta \rightarrow \beta^{(+)}$:

$$\beta^{(+)} = (q - r)/(x - iy) = -(1 - \eta)^{1/2} (1 + \eta)^{-1/2} \exp(i\Phi^{(+)});$$

$$\Phi^{(+)} = \varphi + \operatorname{arctg} \xi^{-1}.$$

Лучами в этом случае будут асимптотические линии другого семейства $\theta = \text{const}$ и $\Phi^{(+)} = \text{const}$. Тот факт, что вектор $\Pi = \Pi t$ направлен вдоль образующих, означает, что E и H ($E = H$, $E \perp H$) лежат в нормальной плоскости сопровождающего трехгранника в каждой точке образующей. Вследствие кручения $|x|$ главная нормаль n к лучу t при распространении волны от $\xi = 0$ до $\xi = 1$ поворачивается на угол $\pi/4$ и при дальнейшем распространении от $\xi = 1$ до ∞ еще на $\pi/4$.

Подчеркнем, что рассматриваемый пучок поляризован циркулярно по каждому асимптотическому направлению. Лучевыми трубками являются гиперboloиды $\eta = \text{const}$, и «диффузии» лучевой амплитуды Π из одного гиперboloида в смежный не происходит. Плотность потока энергии в пучке не совпадает с направлением ∇S . Все полученные здесь результаты остаются справедливыми и в параксиальном приближении. При условиях (9), (10) переменная β равна

$$\beta = \frac{q - r}{x + iy} \simeq -\frac{\bar{i}\bar{k}}{\sigma_0} \frac{\rho}{2\sigma} \exp[-i(\varphi + \operatorname{arctg} z/l)],$$

поэтому в g_x , g_y -компонентах вектора g следует пренебречь членом β^2 по сравнению с единицей, а $|\widetilde{F}_z|$ в этом случае в \bar{i}/σ_0 раз меньше, чем $|\widetilde{F}_x|$, $|\widetilde{F}_y|$. Для простоты можно положить, например, $B(\beta) = 1$.

7. Укажем еще одну интересную возможность, связанную на этот раз с использованием эллиптических координат η , ξ на (x, z) -плоскости [3a]:

$$x = l \sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)}, \quad z = l\eta\xi; \tag{31}$$

$$-1 \leq \eta \leq 1, \quad 1 \leq \xi < \infty; \tag{32}$$

$\xi = \text{const} > 1$ — эллипс, вытянутый вдоль оси z с фокусами в точках $z = \pm l$, $x = 0$; $\xi = 1$ — отрезок оси z от $z = -l$ до $z = +l$, $\eta = \pm 1$ — вырожденная гипербола, совпадающая с остальной частью оси z при $|z| > l$. При вращении эллиптических координат (31) вокруг оси z получим вытянутые сфероидальные координаты. Решением двумерного волнового уравнения является, например, функция Ганкеля

$$G(x, z) = a_0 i\pi H_0^{(1)}(kr), \quad r = [(x + il)^2 + z^2]^{1/2}, \tag{33}$$

где a_0 — постоянный коэффициент. При $|r| \rightarrow 0$ функция $i\pi H_0^{(1)}(kr) \simeq -2 \ln(kr)$, тогда как при $|r| \rightarrow \infty$ решение (33) имеет вид

$$G(x, z) = \sqrt{\frac{l}{-ir}} e^{ikr}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}. \tag{34}$$

Квадратный корень r «извлекается» в эллиптических координатах (31), именно

$$r = [(x + il)^2 + z^2]^{1/2} = l(i\sqrt{1 - \eta^2} + \sqrt{\xi^2 - 1}).$$

Поэтому при $|r| \rightarrow \infty$ поле (34) принимает вид

$$G(\eta, \xi) = \exp(-\gamma \sqrt{1 - \eta^2}) \frac{\exp(i\gamma \sqrt{\xi^2 - 1} + i\bar{\Phi})}{(\xi^2 - \eta^2)^{1/4}}, \tag{35}$$

где набег фазы $\bar{\Phi} = (1/2) \arctg [(\xi^2 - 1)^{1/2} (1 - \eta^2)^{-1/2}]$. Пучок (35) характеризуется чрезвычайно малым углом раствора и эффективным диаметром. Так $|G(\eta, \xi)|^2$ уменьшается в e раз при $\eta_e^2 = 1 - \bar{\lambda}^2/4L^2$, что соответствует асимптотическому углу раствора $\vartheta'_e = \bar{\lambda}^2/2\sigma_0^2$ и эффективному диаметру $2|x_e| = \bar{\lambda}(\xi^2 - 1)^{1/2} \simeq \bar{\lambda}(z^2/L^2 - 1)^{1/2}$, причем z^2/L^2 , во всяком случае, должно быть много больше 1.

Напомним, что рассмотренный выше «гауссов» пучок имел угол раствора $\vartheta_e = \bar{\lambda}/\sigma_0$ и эффективный радиус $\rho_e \simeq \sigma$. Таким образом, пучок (35) имеет явно «нитевидный» характер. Поле такого типа ранее не рассматривалось и, во всяком случае, допускается основными уравнениями. Можно представить себе пучок света, составленный из «нитей» (35).

8. Предложенный метод, кроме указанных (исходных) систем координат, применим также в параболических координатах на плоскости. Так, например, легко получить пучок, описываемый функциями Вебера [3]. Рассмотренные волновые поля допускают разнообразное применение и обладают, в дополнение к указанным выше, еще рядом важных свойств, простое перечисление которых заняло бы много места. Следует, между прочим, иметь в виду, что стационарное состояние свободных шредингеровских, клейн-гордоновских и дираковских частиц также описывается уравнением вида $\Delta\psi + k^2\psi = 0$. Это еще одна, чрезвычайно широкая область применения полученных решений. Для явления самофокусировки мощных лазерных пучков несомненный интерес представляют «нитевидные» решения типа (35). Кроме всего прочего, метод допускает обобщение, связанное с введением второго параметра δ .

Автор выражает благодарность Г. В. Скроцкому за руководство и конструктивную критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966
2. G. D. Boyd, J. P. Gordon, BSTJ, **40**, 489 (1961) (рус перевод в сб Лазеры, ИЛ, М., 1963).
3. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, **2**, ИЛ, М., 1966, стр. 273; За-1, стр. 480.
4. E. Rippey, J. Math. and Physics, **25**, 49 (1946).
5. Г. Бейтмен, А Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т 2, изд Наука, М., 1966.
6. Б. З. Каценеленбаум, УФН, **83**, 81 (1964).
7. Ю А Кравцов, Изв высш. уч зав — Радиофизика, **10**, № 9—10, 1283 (1967)
8. Г. Бейтмен, Математическая теория распространения электромагнитных волн, ГИФМЛ, М., 1958

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию
27 июня 1969 г.,
после переработки
25 мая 1970 г.

ONE-PARAMETRICAL WAVE BEAMS IN FREE SPACE

A. A. Izmet'ev

Scalar and vector monochromatic wave beams with the arbitrary angular divergence are considered. The geometrical and physical properties are analysed in every detail. In paraxial approximation the fields obtained are described by the Gaussian beams. The two-dimensional wave equation is shown to admit solutions, having the „filament“ character.

УДК 621 396 671

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СИНТЕЗА АНТЕНН, ДОПУСКАЮЩЕМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В. Н. Дымский, Ю. И. Чони

Рассматривается одно из возможных приближенных решений задач синтеза антенн. Относительная простота полученного решения позволяет использовать его для расчета произвольных антенных систем, в том числе расположенных вблизи металлических тел сложной формы. Оценивается точность этого решения, указываются некоторые оптимальные свойства и возможность использования его при выборе положения излучателей проектируемой антенной системы.

Рассматриваемое решение может быть получено экспериментальным путем, что представляет особый интерес в тех случаях, когда затруднен теоретический учет реальных факторов, влияющих на диаграмму направленности. Основные результаты работы иллюстрируются на примере синтеза антенной системы, состоящей из электрических излучателей, находящихся вблизи металлического экрана.

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Расчет распределения источников (токов) проектируемой антенной системы по заданной диаграмме направленности сводится к решению уравнения

$$UI = F_0, \quad (1)$$

где $F_0(r^0)$ — заданная диаграмма направленности — комплексная векторная функция (вектор F_0 касается поверхности сферы); r^0 — радиальный орт сферической системы координат; $I(\rho)$ — искомое распределение тока — комплексная векторная функция, на которую конкретные требования, предъявляемые к проектируемой антенне, накладывают ряд ограничений (конечная область определения, конечные амплитуды и т. п.); ρ — радиус-вектор области распределения источников.

Оператор U сопоставляет распределениям тока соответствующие им диаграммы направленности. При условии линейности окружающей среды и ограниченной области распределения источников этот оператор линеен и ограничен [1, 2]. Его интегральная форма в общем случае имеет вид

$$UI = \sum_{i=1}^3 \int_v I_i(\rho) f_i(r^0, \rho) dv, \quad (2)$$

где I_i — ортогональные компоненты плотности тока, $f_i(r^0, \rho)$ — диаграмма направленности элементарного излучателя, расположенного в точке ρ и ориентированного вдоль i -го координатного орта (если окружающее пространство неоднородно, то функции f существенно зависят от положения излучателей), v — область пространства, в которой распределены источники, образующие антенную систему. Эта область может являться и дискретной системой точек (дискретная антенная си-

стема). В последнем случае интеграл в выражении (2) следует понимать как интеграл Стильтьеса.

При произвольной заданной диаграмме направленности F_0 уравнение (1) может и не иметь точного решения, поэтому будем рассматривать решения этого уравнения, соответствующие наилучшему среднеквадратичному приближению к заданной диаграмме. При этом диаграммы направленности и распределения токов целесообразно рассматривать как элементы гильбертовых пространств F ($F(\mathbf{r}^0) \in F$) и I ($I(\rho) \in I$).

В этом случае [1, 3, 4] с помощью оператора V , сопряженного оператору U , уравнение (1) может быть сведено к уравнению

$$LI = VF_0, \quad (3)$$

где самосопряженный оператор $L = VU$ образован произведением операторов U и V . Как известно [5, 6], все собственные числа λ_n такого оператора положительны, а нормированные собственные элементы $\mathbf{g}_n(\rho)$ образуют ортонормированный базис пространства его определения (в нашем случае — пространства I). Нетрудно проверить, что диаграммы направленности, соответствующие собственным распределениям тока $\mathbf{g}_n(\rho)$, образуют ортогональную систему функций

$$\begin{aligned} (U\mathbf{g}_n, U\mathbf{g}_m) &= (VU\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_m) = (L\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_m) = \\ &= \lambda_n (\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_m) = \lambda_n \delta_{nm} = \begin{cases} \lambda_n & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая соотношение (4), можно построить ортонормированную систему $\{G_n(\mathbf{r}^0)\}$ в пространстве F

$$G_n(\mathbf{r}^0) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} U\mathbf{g}_n. \quad (5)$$

Таким образом, в случае произвольной антенной системы существует такой ортогональный базис $\{\mathbf{g}_n(\rho)\}$ в пространстве распределений тока, что соответствующие его элементам диаграммы направленности $\{G_n(\mathbf{r}^0)\}$ образуют ортогональный базис пространства реализуемых диаграмм, и решение задачи синтеза, обеспечивающее наилучшее среднеквадратичное приближение к заданной диаграмме $F_0(\mathbf{r}^0)$, определяется простым соотношением*

$$I(\rho) = \sum_n \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \mathbf{g}_n(\rho) = \sum_n \frac{(F_0, G_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \mathbf{g}_n(\rho), \quad (6)$$

где $a_n = (F_0(\mathbf{r}^0), G_n(\mathbf{r}^0))$ — коэффициенты разложения $F_0(\mathbf{r}^0)$ в ряд Фурье по базисным элементам $G_n(\mathbf{r}^0)$.

В некоторых частных случаях функции $\mathbf{g}_n(\rho)$ и $G_n(\mathbf{r}^0)$ совпадают с известными функциями, широко используемыми при решении соответствующих задач синтеза. Так, для изотропных источников, расположенных на отрезке прямой — это вытянутые сфероидальные функции (если диаграммы направленности рассматриваются на сфере) или нечетные функции Матье (если диаграммы направленности рассматриваются в плоскости). Можно привести еще ряд аналогичных примеров. Однако в общем случае найти функции $\mathbf{g}_n(\rho)$ и $G_n(\mathbf{r}^0)$ и использовать рассмотренную схему расчета токов довольно трудно.

* В бесконечном случае ряд (6) не всегда сходится, однако любая конечная его часть сохраняет смысл решения задачи наилучшего среднеквадратичного воспроизведения заданной диаграммы в соответствующем конечномерном пространстве.

Ниже предлагается способ приближенного решения задач синтеза и исследуются свойства получаемых распределений тока.

Для оценки качества того или иного решения задачи будут использованы три параметра.

1. σ — величина среднеквадратичного отклонения реализуемой диаграммы $F(r^0)$ от заданной $F_0(r^0)$.

Поскольку диаграммы направленности обычно выражаются в относительных величинах, характеризующих распределение напряженности поля на сфере, диаграммы направленности, отличающиеся произвольным постоянным комплексным множителем, равноценны. С этой точки зрения, для устранения произвола в определении среднеквадратичного отклонения, величину σ целесообразно определить в виде $\sigma^2 = \min \|F_0 - AF\|^2 / \|F_0\|^2$, где A — некоторый комплексный множитель, минимизирующий эту величину. Нетрудно показать, что величина $\|F_0 - AF\|^2$ имеет минимальное значение при условии $(F_0 - AF, F) = 0$, т. е. при $A = (F_0, F) / \|F\|^2$. Таким образом,

$$\sigma^2 = 1 - \frac{|(F_0, F)|^2}{\|F_0\|^2 \|F\|^2}. \quad (7)$$

В частном случае, если $F(r^0)$ является проекцией $F_0(r^0)$ на некоторое подпространство из F , то $A = 1$, и величина (7) совпадает с обычно используемой величиной $\sigma^2 = \frac{\|F_0 - F\|^2}{\|F_0\|^2}$.

2. Величина реактивности решения, которая определяется отношением квадрата нормы тока к квадрату нормы реализуемой им диаграммы направленности,

$$Q = \frac{\|I\|^2}{\|UI\|^2}. \quad (8)$$

Эту величину можно рассматривать как обобщение на случай произвольной антенной системы введенного Тейлором [7] для линейного излучателя коэффициента сверхнаправленности*

$$\gamma = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du}{\int_{-a}^a |F(u)|^2 du},$$

где $u = a \sin \theta$, $a = 2\pi l / \lambda$, $2l$ — длина излучателя, θ — угол, отсчитываемый от нормали к излучателю.

3. P_{20} — величина мощности, излучаемая в заданную диаграмму направленности, которая характеризует энергетическую обеспеченность заданной диаграммы $F_0(r^0)$ при реализации диаграммы $F(r^0)$,

* В отечественной литературе [8, 9] этот параметр получил название коэффициента реактивности, так как его возрастание не всегда связано с обужением диаграммы направленности. В этом отношении, на наш взгляд, очень удачно введен коэффициент сверхнаправленности в работе [10], где показано, что в случае линейного излучателя с распределением тока в виде конечной суммы гармоник Фурье, решению задачи о максимуме КНД соответствует диаграмма направленности, которая в области главного лепестка аппроксимируется функцией $\sin(hu)/hu$. Коэффициент h , характеризующий сужение диаграммы направленности по сравнению с диаграммой равномерно возбужденного излучателя, принят за коэффициент сверхнаправленности.

$$P_{\Sigma 0} = \frac{|(F_0, F)|^2}{\|F_0\|^2}. \quad (9)$$

Эта величина, введенная в работе [1], имеет следующий смысл: диаграмма $F(r^0)$ может быть представлена в виде ортогональной суммы $F(r^0) = [(F, F_0)/\|F_0\|^2] F_0(r^0) + F_0^\perp(r^0)$, где $F_0^\perp(r^0)$ — некоторая функция, ортогональная функции $F_0(r^0)$; тогда излучаемая мощность P_Σ разделяется на два слагаемых $P_\Sigma \equiv \|F\|^2 = |(F_0, F)|^2/\|F_0\|^2 + \|F_0^\perp\|^2$, причем первое слагаемое характеризует мощность, затрачиваемую на формирование нужной диаграммы, а второе — мощность побочного излучения, обусловленного различием реализуемой диаграммы и заданной.

Между величинами $P_{\Sigma 0}$ и σ существует непосредственная связь, которая выражается соотношением $P_{\Sigma 0} = \|F\|^2(1 - \sigma^2)$.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА И ЕГО СВОЙСТВА

Сопряженный оператор V отображает пространство F на пространство I . Заданной диаграмме направленности им ставится в соответствие некоторое распределение тока $p(\rho) = VF_0$, которое можно рассматривать как приближенное решение задачи синтеза, хотя бы потому, что реализуемая этим распределением диаграмма направленности не ортогональна заданной. Действительно, $(Up, F_0) = (p, VF_0) = \|p\|^2$, но $\|p\| \neq 0$, иначе $p(\rho) \equiv 0$.

Используя выражение (2) и условие сопряженности операторов V и U , можно показать, что оператору V соответствует следующее интегральное представление:

$$p(\rho) = VF_0 = \sum_{i=1}^3 \xi_i^0(\rho) \oint F_0(r^0) f_i^*(r^0, \rho) ds. \quad (10)$$

Здесь интегрирование выполняется по сфере (область определения диаграмм направленности); $\xi_i^0(\rho)$ — орты координатной системы, определенной в области источников.

В некоторых частных случаях выражение (10) определяет распределения тока, широко используемые на практике. Так, например, если заданная диаграмма представляет собой дельта-функцию $F(r^0) = \delta(r^0 - r_1^0)C$ (C — постоянный вектор), то распределение тока $p(\rho) = \sum_{i=1}^3 \xi_i^0(C, f_i^*(r_1^0, \rho))$ соответствует такому возбуждению антенной системы, при котором поля от отдельных излучателей в направлении r_1^0 складываются в фазе. Такой принцип возбуждения часто применяется при формировании узкой диаграммы направленности. Для системы изотропных излучателей, расположенных на отрезке прямой, выражение (10) в общепринятых для этого случая обозначениях (x вместо ρ , $u = a \sin \theta$ вместо r^0) принимает вид

$$p(x) = VF_0 = \int_{-a}^a F_0(u) e^{ixu} du, \quad (11)$$

т. е. является обратным преобразованием Фурье от функции, совпадающей с заданной диаграммой направленности на интервале видимых углов ($-a \leq u \leq a$) и равной нулю вне этого интервала. Таким образом, предложенный Вудвардом [11] способ приближенного решения задачи синтеза линейного излучения, основанный на «преобразовании

Фурье в конечных пределах», является частным случаем способа, рассматриваемого в настоящей работе.

Распределение тока $\mathbf{p}(\rho)$, определяемое выражением (10), оптимально в том смысле, что среди всех распределений с той же нормой ему соответствует максимум мощности, излучаемой в заданную диаграмму направленности, а среди всех распределений с той же реактивностью — минимум величины среднеквадратичной ошибки воспроизведения заданной диаграммы. В этом нетрудно убедиться, используя сопряженность операторов U и V и неравенство Буняковского—Шварца

$$\begin{aligned} \frac{P_{\Sigma 0}}{\|\mathbf{I}\|^2} &= \frac{|(\mathbf{UI}, \mathbf{F}_0)|^2}{\|\mathbf{F}_0\|^2 \|\mathbf{I}\|^2} = \frac{|(\mathbf{I}, \mathbf{VF}_0)|^2}{\|\mathbf{F}_0\|^2 \|\mathbf{I}\|^2} = \\ &= \frac{|(\mathbf{I}, \mathbf{p})|^2}{\|\mathbf{F}_0\|^2 \|\mathbf{I}\|^2} \leq \frac{|(\mathbf{p}, \mathbf{p}')|^2}{\|\mathbf{F}_0\|^2 \|\mathbf{p}\|^2} = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{\|\mathbf{F}_0\|^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mathbf{I}(\rho)$ — произвольное распределение тока в рассматриваемой антенной системе. Поскольку равенство в выражении (12) достигается лишь при условии $\mathbf{I}(\rho) = \mathbf{p}(\rho)$, этим доказывается первое утверждение.

Отношение $P_{\Sigma 0}/\|\mathbf{I}\|^2$ с учетом выражений (7)—(9) может быть представлено в иной форме:

$$\frac{P_{\Sigma 0}}{\|\mathbf{I}\|^2} = \frac{P_{\Sigma 0} \|\mathbf{UI}\|^2}{\|\mathbf{UI}\|^2 \|\mathbf{I}\|^2} = \frac{(1 - \sigma^2)}{Q}. \quad (13)$$

Так как максимум этого отношения соответствует распределению тока $\mathbf{I}(\rho) = \mathbf{p}(\rho)$, то любое другое распределение с той же самой реактивностью воспроизводит заданную диаграмму с большей среднеквадратичной ошибкой.

Решение (10) является приближенным, поэтому важно оценить его точность. Для этого представим приближенное решение в виде ряда по функциям $\mathbf{g}_n(\rho)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\rho) &= \sum_n (\mathbf{p}, \mathbf{g}_n) \mathbf{g}_n(\rho) = \sum_n (\mathbf{VF}_0, \mathbf{g}_n) \mathbf{g}_n(\rho) = \\ &= \sum_n (\mathbf{F}_0, \mathbf{Ug}_n) \mathbf{g}_n(\rho) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} (\mathbf{F}_0, \mathbf{G}_n) \mathbf{g}_n(\rho) = \sum_n \sqrt{\lambda_n} a_n \mathbf{g}_n(\rho). \end{aligned} \quad (14)$$

Сравнивая выражения (14) и (6), можно заметить, что чем равномернее участок спектра, которым представляется заданная диаграмма направленности, тем точнее приближенное решение. Если $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ и $\lambda_N = \lambda_{\min}$ — наибольшее и наименьшее собственные числа, σ_0 и σ_p — величины среднеквадратичной ошибки для решений (6) и (10) соответственно, то, как показано в Приложении, имеет место следующая оценка:

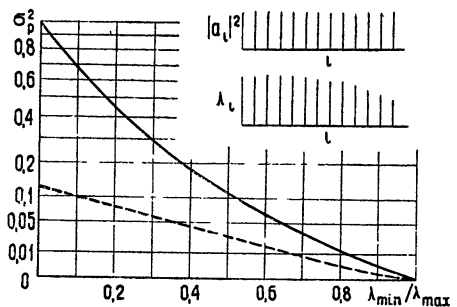


Рис. 1.

$$\sigma_p^2 \leq 1 - 4 \frac{\lambda_{\max} \lambda_{\min}}{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2} (1 - \sigma_0^2). \quad (15)$$

На рис. 1 сплошной линией представлена зависимость оценки (15) от отношения $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$ при $\tau_0 = 0$ (масштаб по оси ординат квадратичный). Из графика следует, что если $\lambda_{\min}/\lambda_{\max} = 0,5$, то можно гарантировать величину $\sigma_p^2 \leq 0,111$. Равенство в соотношении (15) выполняется лишь в том случае, когда в разложениях (6), (14) участвуют только две гармоники $g_1(\rho)$ и $g_N(\rho)$, причем $|a_1|^2/|a_N|^2 = \lambda_N/\lambda_1$. Обычно спектр заданной диаграммы направленности достаточно равномерен и величина σ_p^2 существенно меньше оценки, получаемой с помощью соотношения (15). На рис. 1 пунктиром представлена величина σ_p^2 для того случая, когда собственные числа определяются равенством $\lambda_n = \lambda_{\max} - [(n-1)^3/(N-1)^3](\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$, спектр заданной диаграммы равномерен ($|a_n|^2 = \text{const}$) и N достаточно велико. В этом случае, если $\lambda_{\min}/\lambda_{\max} \geq 0,5$, то $\sigma_p^2 \leq 0,026$.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЕГО ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНФИГУРАЦИИ ПРОЕКТИРУЕМОЙ АНТЕННЫ

Приближенное решение, описываемое соотношением (10), может быть получено экспериментальным путем. Эта возможность особенно интересна в том случае, когда излучающие элементы антенной системы предполагается размещать вблизи тела сложной геометрической формы и аналитическое выражение их диаграмм $f(r_0, \rho)$ неизвестно. Пусть с направления r_1^0 в область v приходит плоская электромагнитная волна, имеющая комплексную амплитуду $C(r_1^0)$. На элементе проводника, расположенном в точке ρ и ориентированном вдоль орта ξ_i^0 , при этом будет наводиться ЭДС $e_i(\rho) = C(r_1^0) f_i(r_1^0, \rho)$. Если в область v приходит пучок плоских волн, то на указанном элементе возникает ЭДС.

$$e_i(\rho) = \oint C(r^0) f_i(r^0, \rho) ds.$$

По-разному ориентируя проводник и измеряя наводимую на нем ЭДС, можно определить векторное поле

$$e(\rho) = \sum_{i=1}^3 \xi_i^0 \oint C(r^0) f_i(r^0, \rho) ds. \quad (16)$$

Из выражений (10) и (16) следует, что при условии $C(r^0) = F_0^*(r^0)$ $e(\rho)$ и $p(\rho)$ связаны простым соотношением $e(\rho) = p^*(\rho)$.

Таким образом, если рассматриваемая антенная система облучается пучком плоских электромагнитных волн, комплексные амплитуды которых соответствуют комплексно-сопряженной заданной диаграмме направленности, то сигналы, наведенные в элементах антенной системы, будут соответствовать комплексно-сопряженному решению $p(\rho)$.

На рис. 2 изображено решение $p(\rho)$ для случая электрических излучателей, непрерывно распределенных около проводящей плоскости xOz и поляризованных параллельно оси Oz , когда диаграмма направленности задана в плоскости xOy (плоская задача синтеза) и представляет собой секторную диаграмму шириной 180° . Левая часть рисунка соответствует расчетным, а правая—экспериментальным данным. Амплитудный рельеф передан линиями равного уровня. Максимальное значение $|p(\rho)|$ принято за единицу, уровни 0,8, 0,6, 0,4 и 0,2 отмечены сплошными линиями, а нулевой уровень—пунктиром. Точками отмечены места расположения локальных максимумов (вершин рельефа

$|p(\rho)|$). Фазовая структура поля весьма проста (при переходе амплитуды через нуль происходит скачок фазы на π) и на рисунке не показана. При осуществлении эксперимента необходимый пучок плоских волн имитировался с помощью 32-х одинаково возбужденных излучателей, которые были расположены вокруг исследовавшейся области на полуокружности радиуса 30λ .

В случае дискретной антенной системы экспериментальное определение приложенного решения $p(\rho)$ позволяет не только избежать громоздких вычислений, но и получить это решение с учетом электродинамического взаимодействия излучателей, так как можно интересоваться не распределением тока на излучающих элементах, а амплитудно-фазовом распределением на входных фишках.

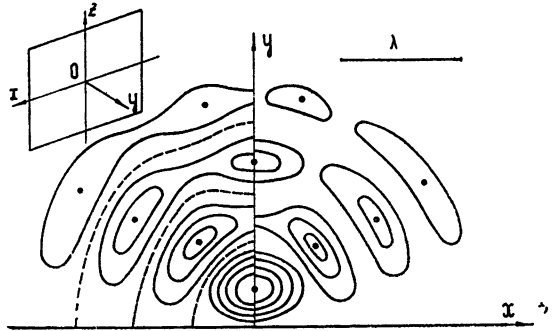


Рис. 2.

Интересной особенностью оператора V является его инвариантность по отношению к области v , где расположены излучатели. Действительно, выражением (10) определяется векторное комплексное поле, которое может рассматриваться и за пределами области v (во всем пространстве). Из соотношения (12), рассматриваемого для любой точки пространства, следует, что квадрат модуля этого поля $|p(\rho)|^2$ характеризует энергетическую эффективность излучателя, расположенного в точке ρ , по отношению к заданной диаграмме направленности. Если $p(\rho) = 0$, то диаграмма направленности излучателя, расположенного в точке ρ , ортогональна заданной; чем больше $|p(\rho)|^2$, тем большую мощность отдает излучатель в заданную диаграмму направленности при той же норме тока. Поэтому при выборе области v , т. е. при определении конфигурации проектируемой антенной системы, целесообразно учитывать рельеф $|p(\rho)|$ и располагать излучатели в местах его наибольших значений.

Пусть вблизи идеально проводящей плоскости необходимо расположить излучатели и обеспечить ненаправленное излучение в плоскости xOy (задача секторная диаграмма шириной 180°). Поле $p(\rho)$ для этого случая уже рассматривалось (рис. 2). В местах четко вырисовывающихся локальных максимумов были расположены излучатели, амплитуды и фазы которых соответствовали значениям поля $p(\rho)$ в местах их расположения.

На рис. 3 изображены диаграммы направленности, формируемые системой из трех (кривая 1) и четырех (кривая 2) излучателей. Для сравнения на этом же рисунке приведены диаграммы, соответствующие наилучшему средневлажному воспроизведению заданной диаграммы си-

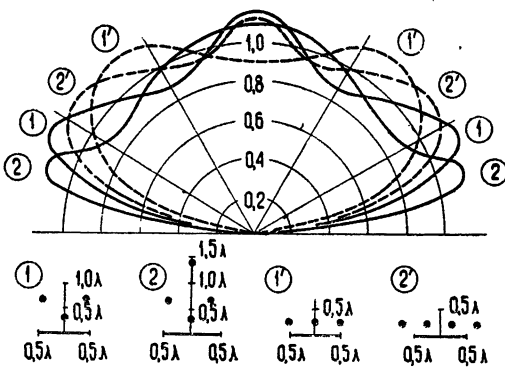


Рис. 3.

Для сравнения на этом же рисунке приведены диаграммы, соответствующие наилучшему средневлажному воспроизведению заданной диаграммы си-

стемой из трех (кривая 1') и четырех (кривая 2') излучателей, расположенных на расстоянии $\lambda/4$ от экрана с интервалом $\lambda/2$ друг от друга. Внизу рисунка представлено расположение излучателей в каждом из рассматриваемых случаев.

Приведенные данные со всей очевидностью свидетельствуют о целесообразности использования поля $p(\rho)$ для определения конфигурации антенной системы по заданной диаграмме направленности.

Использованный в настоящей работе метод решения и все результаты применимы к задачам синтеза антенн в весьма общей постановке, так как единственными ограничениями были: 1) ограниченность размеров антенной системы, 2) применимость принципа суперпозиции (антенна должна быть линейным устройством). Однако рассматривавшиеся вопросы (в особенности экспериментальное определение приближенных решений, выбор конфигурации антенны), по-видимому, наиболее интересны применительно к антеннам умеренных размеров (до нескольких десятков длин волн) и в тех случаях, когда излучатели находятся вблизи металлических тел или иных неоднородностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть $F_0(r^0)$ — заданная диаграмма направленности, $F(r^0) = \sum_n a_n \times G_n(r^0)$ — реализуемая диаграмма, обеспечивающая минимум среднеквадратичного отклонения. Пространство реализуемых диаграмм будем считать конечномерным ($n = 1, 2, \dots, N$). Очевидно, приближенному решению $p(\rho)$ соответствует диаграмма $F_p(r^0) = \sum_n \lambda_n a_n G_n(r^0)$ и

$$\sigma_p^2 = 1 - \frac{|(F_p, F_0)|^2}{\|F_p\|^2 \|F_0\|^2} \frac{\|F\|^2}{\|F\|^2} = 1 - \frac{|(F_p, F)|^2}{\|F_p\|^2 \|F\|^2} (1 - \sigma_0^2).$$

Так как

$$\frac{|(F_p, F)|^2}{\|F_p\|^2 \|F\|^2} = \frac{\left(\sum_n \lambda_n |a_n|^2\right)^2}{\sum_n \lambda_n^2 |a_n|^2 \sum_n |a_n|^2},$$

то оценка величины σ_p^2 сводится к отысканию минимального значения функции

$$K(x) = \frac{\left(\sum_n \lambda_n x_n\right)^2}{\sum_n \lambda_n^2 x_n \sum_n x_n}$$

в N -мерном квадранте, который определяется условиями $x_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots, N$).

Заметим, что, не теряя общности, все собственные числа λ_n можно считать отличными друг от друга (для определенности расположим их в порядке убывания $\lambda_1 = \lambda_{\max} > \lambda_2 > \dots > \lambda_{N-1} > \lambda_N = \lambda_{\min}$). Тогда в

системе уравнений $\frac{\partial K(x)}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial K(x)}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial K(x)}{\partial x_N} = 0$ любые два и только два уравнения совместны.

Пусть функция $K(x)$ принимает минимальное значение в некоторой точке x_0 . Если $N > 2$, то, как следует из предварительного замечания, у функции $K(x)$ нет минимума, и минимальное значение она принимает на границе квадранта, т. е. хотя бы одна координата точки x_0 равна нулю: $x_0 = \{x_1, x_2 \dots x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_N\}$. Величину $K(x_0)$ тогда можно рассматривать как функцию $K(x)$ в $(N-1)$ -мерном подпространстве, и если $(N-1) > 2$, то, повторяя предыдущие рассуждения, придем к заключению, что еще хотя бы одна координата точки x_0 равна нулю и так далее. Поэтому точка x_0 может иметь лишь две отличные от нуля координаты. Пусть это будут x_m и x_n . Решением системы уравнений $\frac{\partial K(x)}{\partial x_m} = 0, \frac{\partial K(x)}{\partial x_n} = 0$ является линия $x_m = (\lambda_m/\lambda_n)x_n$, на которой функция $K(x)$ принимает значение, равное $4\lambda_m\lambda_n/(\lambda_m + \lambda_n)^2$. Очевидно, это будет минимальное значение, если $\lambda_m = \lambda_{\max}$, а $\lambda_n = \lambda_{\min}$. Итак, окончательно имеем

$$x_0 = \left\{ x_1, 0, 0, \dots, 0, 0, \frac{\lambda_1}{\lambda_N} x_1 \right\},$$

$$K(x) \geq K(x_0) = 4 \frac{\lambda_{\max} \lambda_{\min}}{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2},$$

$$\sigma_p^2 \leq 1 - 4 \frac{\lambda_{\max} \lambda_{\min}}{(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})^2} (1 - \sigma_0^2).$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 В Н Дымский, Диссертация, Казанский авиационный институт, 1964.
- 2 В Н Дымский, Тр. Казанского авиационного института, вып 82, 3 (1964)
- 3 Ю И Чони, Диссертация, Казанский авиационный институт, 1968.
- 4 В Н Дымский, Изв. высш. уч зав—Радиофизика, 8, № 2, 401 (1965).
- 5 Л. А Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, изд. Наука, М., 1965.
6. Функциональный анализ, под редакцией С Г. Крейна, изд. Наука, М., 1964.
7. J. J. Taylor, Trans. IRE, AP-3, 1, 16 (1955)
- 8 Я И. Хургин, В. П Яковлев, Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, Физматгиз, М., 1962.
9. Б М Минкович, В. П Яковлев, Теория синтеза антенн, изд. Сов радио, М., 1969
10. П В Блюх, И Л Вербицкий, Радиотехника и электроника, 10, 1783 (1965)
11. P. M. Woodward, I. D. Lawson, J. IEE, 95, pt. III, 363 (1948).

Казанский авиационный институт

Поступила в редакцию
7 июля 1969 г.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE PROBLEM OF ANTENNA SYNTHESIS ADMITTING EXPERIMENTAL MODELLING

V. N. Dymsky, Yu. I. Choni

One of possible approximate solutions of the problem of antenna synthesis is considered. The relative simplicity of the solution obtained permits to use it for calculating the arbitrary antenna systems including those situated near metal complex-shape bodies. The accuracy of the solution is estimated. Some optimum properties and the possibility of using the solution at the choice of feed position of the antenna system designed. The considered solution may experimentally be derived in those cases when it is difficult to take into account theoretically real factors influencing upon the radiation pattern. The main results are illustrated by the example of antenna synthesis of electric sources situated near a metal screen.

УДК 539.293

О РАЗОГРЕВЕ ЭЛЕКТРОНОВ ПРОВодИМОСТИ ИНФРАКРАСНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Э. М. Эпштейн

Рассматривается электронный газ в полупроводнике, находящийся под действием излучения с энергией кванта, гораздо большей тепловой энергии электрона, но меньшей ширины запрещенной зоны. В приближении, линейном по интенсивности падающего излучения, найдена функция распределения электронов по каноническим импульсам. Вычислена средняя энергия теплового движения электронов и плотность тока в постоянном электрическом поле. Произведено сравнение различных механизмов «внутрizonной» фотопроводимости. Наибольший вклад дает разогрев электронов

1. При расчете разогрева электронов в электромагнитном поле обычно пользуются либо приближением электронной температуры (последняя определяется из уравнения баланса энергии) [1, 2], либо классической кинетической теорией [1, 3]. Первый из этих подходов, строго говоря, становится непригодным, когда концентрация электронов не очень велика и электроны передают энергию преимущественно решетке (а не друг другу). С другой стороны, применение классической кинетической теории является обоснованным лишь при $\hbar\Omega \ll \bar{\epsilon}$, где Ω — частота электромагнитного поля, $\bar{\epsilon}$ — средняя энергия электрона в зоне проводимости (в случае слабого поля это условие можно записать в виде $\hbar\Omega \ll k_B T$, где k_B — постоянная Больцмана, T — температура решетки). Поскольку $k_B / \hbar \approx 10^{11}$ (сек · град)⁻¹, можно заключить, что условия применимости классической теории нарушаются для инфракрасного излучения, а при низких (гелиевых) температурах — даже для микроволнового излучения.

В настоящей работе мы рассмотрим случай, когда электроны рассеиваются в основном на акустических фононах (механизм рассеяния — деформационный) и когда выполняются условия $E_g > \hbar\Omega \gg k_B T \gg \hbar\nu$ (E_g — ширина запрещенной зоны, ν — характерная частота соударений электронов с фононами). Исходя из квантового кинетического уравнения для электронов в высокочастотном электрическом поле [4, 5], мы найдем функцию распределения электронов и используем ее для вычисления энергии и статической электропроводности электронного газа в присутствии поля излучения.

2. Падающее излучение будем предполагать циркулярно поляризованным. Для стационарной функции распределения электронов n_p по каноническим импульсам p по аналогии с [4, 5] можно получить следующее кинетическое уравнение (в дальнейшем мы будем пользоваться системой единиц, где $\hbar = k_B = 1$):

$$eE_1 \frac{\partial n_p}{\partial p} = 2\pi \sum_k |C_k|^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2 \left(\frac{eE_0 k_{\perp}}{m\Omega^2} \right) \{ [n_{p+k} (N_k + 1) -$$

$$- n_p N_k] \delta(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p - \omega_k - l\Omega) + \quad (1)$$

$$+ [n_{p-k} N_k - n_p (N_k + 1)] \delta(\varepsilon_{p-k} - \varepsilon_p + \omega_k + l\Omega).$$

Здесь $\varepsilon_p = p^2/2m$, $\omega_k = sk$, s — фазовая скорость фонона, k — волновой вектор фонона, k_{\perp} — проекция этого вектора на плоскость, перпендикулярную направлению распространения излучения, C_k — матричный элемент электрон-фононного взаимодействия, m — эффективная масса электронов проводимости, E_0 — амплитуда поля излучения, E_1 — напряженность внешнего постоянного электрического поля, $J_1(x)$ — функция Бесселя вещественного аргумента; функция распределения фононов предполагается равновесной.

Будем предполагать, что постоянное поле E_1 приложено в направлении распространения излучения и, будучи слабым, не вызывает разогрева электронов. Что касается высокочастотного поля, то, как показывают оценки с помощью полученных ниже формул, вызываемое им изменение функции распределения в большинстве случаев будет мало. Поэтому можно разложить функцию распределения и вероятность рассеяния в (1) по степеням E_0 и ограничиться членами порядка E_0^2 . При этом функция распределения примет вид $n_p = F_0(p) + F_1(p)$,

$$F_0(p) = F_0(-p) = f_0(\varepsilon_p) + \varphi(p), \quad F_1(p) = -F_1(-p) \sim E_1,$$

$$F_1(p) = f_1(p) + \psi(p);$$

$f_0(\varepsilon_p)$ и $f_1(p)$ — соответственно симметричная и анисимметричная части функции распределения в отсутствие поля излучения, $\varphi(p) \sim E_0^2$, $\psi(p) \sim E_0^2$.

Разложим функцию $\varphi(p)$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$\varphi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\varepsilon_p) P_n(\cos \theta_p), \quad (2)$$

где θ_p — угол между вектором p и направлением распространения излучения (которое в данной задаче является единственным выделенным направлением).

Используя обычную процедуру [1], можно убедиться, что в приближении, квадратичном по E_0 и линейном по неупругости рассеяния, достаточно удержать в (2) члены с $n=0$ и $n=2$. Для соответствующих коэффициентов разложения получим следующие уравнения:

$$\frac{d}{d\varepsilon_p} \{ \varepsilon_p^2 [\varphi_0(\varepsilon_p) + T\varphi'_0(\varepsilon_p)] \} = - \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(\frac{e^2 E_0^2}{m\Omega^3} \right) \left(\frac{\Omega}{ms^2} \right)^{1/2} \sqrt{\Omega} \times \quad (3)$$

$$\times \operatorname{cth} \left(\frac{s}{T} \sqrt{\frac{m\Omega}{2}} \right) [\sqrt{\varepsilon_p - \Omega} f_0(\varepsilon_p - \Omega) \theta(\varepsilon_p - \Omega) - \sqrt{\varepsilon_p} f_0(\varepsilon_p)];$$

$$\varphi_2(\varepsilon_p) = \frac{1}{12\pi\sqrt{2}} \left(\frac{ms^2 \varepsilon_p}{T} \right)^{1/2} \operatorname{cth} \left(\frac{s}{T} \sqrt{\frac{m\Omega}{2}} \right) \times \quad (4)$$

$$\times \left(\frac{e^2 E_0^2}{m\Omega^3} \right) \left[\sqrt{\frac{\varepsilon_p}{\Omega} - 1} f_0(\varepsilon_p - \Omega) \theta(\varepsilon_p - \Omega) - f_0(\varepsilon_p) \right],$$

где $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда.

Решая уравнение (3) (в качестве начальных условий используется $\varphi'_0(\infty) = 0$ и условие нормировки), найдем

$$\varphi_0(\varepsilon_p) = f_0(\xi) \frac{1}{6\sqrt{2}} \beta \eta \lambda^{-1/2} \operatorname{cth} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \lambda \eta} \right) \times \\ \times \left\{ \int_0^{\xi} \left[\gamma \left(\frac{3}{2}, y \right) - \theta(y - \eta) \gamma \left(\frac{3}{2}, y - \eta \right) \right] e^y y^{-2} dy - A \right\}, \quad (5)$$

где $\xi = \varepsilon_p / T$, $\eta = \Omega / T$, $\lambda = ms^2 / T$, $\beta = e^2 E_0^2 / m \Omega^3$, $f_0(\xi) = n (2\pi m T)^{-3/2} \exp(-\xi)$, n — концентрация электронов проводимости,

$$A = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \int_0^{\infty} \gamma \left(\frac{3}{2}, x \right) \Gamma \left(\frac{3}{2}, x \right) e^x x^{-2} dx, \\ \gamma(p, x) = \int_0^x e^{-t} t^{p-1} dt, \quad \Gamma(p, x) = \Gamma(p) - \gamma(p, x).$$

Пользуясь формулой (5), нетрудно найти относительное отклонение средней энергии теплового движения электронов \mathcal{E} от ее равновесного значения:

$$\Delta \equiv \frac{\mathcal{E}}{(3/2) n T} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{9} \beta \eta^{3/2} \lambda^{-1/2} \operatorname{cth} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \lambda \eta} \right). \quad (6)$$

Обычно $\lambda \ll 1$, так что при $\eta \gg 1$ аргумент гиперболического котангенса в (6) может быть как мал, так и велик по сравнению с единицей. В первом случае

$$\Delta = \frac{2}{9} \beta \eta \lambda^{-1}, \quad (7)$$

что отличается от результата элементарной теории [1] лишь численным множителем порядка единицы. В обратном предельном случае, $\lambda \eta \gg 1$,

$$\Delta = \frac{\sqrt{2}}{9} \beta \eta^{3/2} \lambda^{-1/2}. \quad (8)$$

Этот случай можно интерпретировать следующим образом. Из законов сохранения $\varepsilon_p \pm k - \varepsilon_p \mp \omega_k \mp I\Omega = 0$ (см. (1)) следует, что при $\eta \gg 1$, $\beta \ll 1$ (именно этот случай и рассматривается в настоящей работе) рассеяние электронов происходит в основном на фонах с волновым числом $k \approx \sqrt{2m\Omega}$. При $\lambda \eta \gg 1$ имеем $N_{k=\sqrt{2m\Omega}} \ll 1$, так что главную роль в рассеянии электронов будет играть спонтанное испускание фононов, не описываемое классической теорией.

3. Рассмотрим теперь, как влияет поле излучения на электропроводность электронного газа в слабом постоянном электрическом поле. При $\Omega \gtrsim T$ помимо разогрева носителей (т. е. изменения симметричной части функции распределения) излучение будет влиять также на вероятность их рассеяния фононами [4-6]. Составляя обычным образом [7] уравнение для антисимметричной части функции распределения и ограничиваясь, как и выше, квадратичными по E_0 членами, будем иметь

$$\psi(p) = -eE_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p} \tau(\varepsilon_p) - \pi \tau(\varepsilon_p) \sum_k |C_k|^2 \times \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{eE_0 k_{\perp}}{m\Omega^2} \right)^2 (2N_k + 1) \delta(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p) [f_1(p+k) - f_1(p)] + \\ & + \frac{1}{2} \pi \tau(\varepsilon_p) \sum_k |C_k|^2 \left(\frac{eE_0 k_{\perp}}{m\Omega^2} \right)^2 (2N_k + 1) [\delta(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p - \Omega) + \\ & + \delta(\varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p + \Omega)] [f_1(p+k) - f_1(p)], \end{aligned}$$

где $\tau(\varepsilon_p)$ — время релаксации электронов на акустических фононах [8]. Первый член описывает разогрев электронов, второй — влияние излучения на вероятность упругого рассеяния [6], третий — влияние излучения на вероятность рассеяния, сопровождаемого излучением и поглощением фотона [4, 3]. Функция $\psi(p)$ известным образом связана с плотностью тока фотопроводимости, которая, таким образом, будет состоять из трех членов указанного выше происхождения. Отношения этих слагаемых к плотности тока в отсутствие излучения, j_0 , соответственно равны (мы выписываем здесь лишь главные члены по η и λ^{-1})

$$\frac{j_1}{j_0} = -\frac{1}{6} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta \eta \lambda^{-1/2} \operatorname{cth} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \lambda \eta} \right) \left(\frac{A}{\sqrt{\pi}} - 1 \right); \quad (10)$$

$$\frac{j_2}{j_0} = \frac{32}{15} \beta \eta^{-1}; \quad (11)$$

$$\frac{j_3}{j_0} = -\frac{1}{6} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta \eta \lambda^{1/2} \operatorname{cth} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \lambda \eta} \right). \quad (12)$$

Численный расчет* дает $A/\sqrt{\pi} - 1 = 0,80$.

Легко видеть, что $|j_1| \gg |j_3| \gg j_2$. Таким образом, в рассматриваемой области температур ($\lambda \ll 1$), частот и амплитуд электромагнитного поля ($\eta \gg 1$, $\beta \ll 1$) основную роль во «внутризонной» фотопроводимости играет не влияние поля на вероятность электрон-фононного рассеяния, а разогрев электронов. Заметим, что вклад функции φ_2 в величину j_1 гораздо меньше вклада φ_0 . Поэтому в том случае, когда нас интересует лишь разогрев электронного газа и (или) величина фотопроводимости, можно с самого начала положить $\varphi_2 = 0$, т. е. пользоваться так называемым диффузионным приближением.

Автор признателен В. Л. Бонч-Бруевичу и участникам руководимого им семинара за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, 70, 201 (1960); В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. Ш. М. Коган, ФТТ, 4, 1891 (1962).
3. Ф. Г. Басс, ЖЭТФ, 47, 1322 (1964).
4. В. И. Мельников, Письма в ЖЭТФ, 9, 204 (1969).
5. Э. М. Эпштейн, ФТТ, 11, 2732 (1969).
6. В. М. Буймистров, Письма в ЖЭТФ, 8, 274 (1968).
7. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ, 7, 1069 (1937); Б. И. Давыдов, И. М. Шмушкевич, УФН, 24, 21 (1940).
8. А. И. Ансельм, Введение в теорию полупроводников, Физматгиз, Л., 1962.

Московский институт электронной техники

Поступила в редакцию
20 октября 1969 г.,
после доработки
23 марта 1970 г.

* Этот расчет был проделан В. Я. Штейншрайбером, которому автор выражает искреннюю признательность.

CONDUCTIVITY ELECTRON HEATING BY INFRARED RADIATION

E. M. Epshtein

The electron gas in a semiconductor under the action of radiation with the energy quantum much larger than the thermal electron energy but less than the band gap is considered. In the linear approximation over on the incident radiation intensity the electron distribution function over canonical momenta is found. The mean energy of thermal electron motion and the current density in a constant electric field are calculated. Different mechanisms of „interband“ photoconductivity are compared. The electron heating gives the greatest contribution.

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 538.56 : 543.42

**РАДИОСПЕКТРОСКОП МИЛЛИМЕТРОВОГО И СУБМИЛЛИМЕТРОВОГО
ДИАПАЗОНА С АКУСТИЧЕСКОЙ ИНДИКАЦИЕЙ**

А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, В. Г. Шустров, С. П. Белов

Тепловые акустические (или пневматические) приемники, предложенные Голем [1], широко применяются в инфракрасной и субмиллиметровой областях спектра. Вейнгером [2] предложен вариант такого приемника, в котором излучение поглощается непосредственно в газе, имеющем соответствующие линии поглощения, что позволяет обнаруживать присутствие определенного газа. Однако, насколько нам известно, принцип акустического приема не использовался в радиоспектроскопии, т. е. для исследования микроволнового спектра поглощения газа, заполняющего ячейку приемника, с помощью монохроматического перестраиваемого по частоте сигнала. Такой радиоспектроскоп был нами построен и испытывался в диапазоне $\lambda = 2,4 - 0,5$ мм. В настоящей заметке излагаются предварительные результаты исследования и рассматриваются некоторые преимущества радиоспектроскопа с акустической индикацией.

Схема нашей установки приведена на рис. 1. Излучение источника сигнала 1 — лампы обратной волны (ЛОВО) типа [3] — проходит через прозрачную для излучения фторопластовую ячейку 2 длиной $L = 10$ см, наполненную исследуемым газом. Частота ЛОВО перестраивается в нужном диапазоне. При совпадении частоты излучения с частотой спектральной линии газ в ячейке поглощает мощность

$$P = P_0 [1 - \exp(-\gamma L)] \approx \gamma L P_0 \quad (\gamma L \ll 1), \quad (1)$$

где P_0 — падающая мощность, γ — коэффициент поглощения линии.

Боковая стенка ячейки представляет собой мембрану конденсаторного микрофона 3. Поглощенная мощность нагревает газ, который расширяется и прогибает мембрану, создавая сигнал, который усиливается усилителем 4. Как обычно, постоянная составляющая давления на мембрану исключается соединением полости под мембраной с основной ячейкой тонким каналом, а излучение источника модулируется. Спектральные линии наблюдались либо на экране осциллоскопа 6 при модуляции ЛОВО качанием частоты с частотой 50 гц, либо записывались на ленте самописца 8. В последнем случае частота ЛОВО манипулировалась с помощью реле 5 с частотой 180 гц и девиацией, большей, чем ширина линии, и одновременно медленно перестраивалась с помощью мотора; сигнал после синхронного детектирования детектором 7 записывался на ленте самописца. На рис. 2 приведена запись линии $2_2 - 3_{-2}$ воды H_2O^{16} ($\lambda = 1,6$ мм). Ширина линии около 600 Мгц (давление ~ 20 мм рт. ст.), мощность ЛОВО порядка десятков милливольт, отношение сигнал/шум около 1700 при постоянной времени усреднения около 1 сек. Нами наблюдались и узкие (шириной порядка 1 Мгц) линии газов

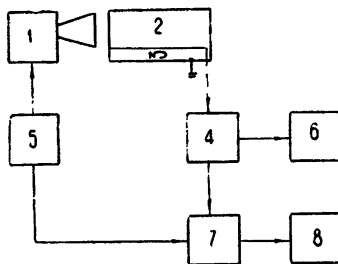


Рис. 1.

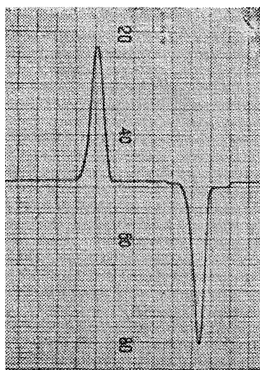


Рис. 2.

Отметим особенности такого радиоспектроскопа. Весьма существенным является нулевой характер метода, при котором вне линий поглощения реакция системы на

мощность сигнала отсутствует. При этом сигнал вне линии поглощения не создает дополнительных шумов; кроме того, обнаружение линий не затрудняется присутствием на экране большого сигнала P_0 , величина которого из-за резонансных свойств СВЧ тракта и ЛОВ сильно зависит от частоты. Это позволяет (как мы убедились и практически) легче, чем на обычном видеорадиоспектроскопе, обнаруживать линии поглощения. Выяснилось, кстати, что наиболее крутые частотные зависимости мощности сигнала обусловлены резонансными свойствами тракта, включающего СВЧ детектор; мощность ЛОВ меняется с частотой намного медленнее. Это обстоятельство вместе с нулевым характером метода сделало возможным наблюдение широких (в наших опытах до 600 Мгц) спектральных линий.

В инфракрасном диапазоне перестраиваемый по частоте сигнал получается вырезанием участка сплошного спектра теплового излучения черного тела с помощью соответствующего монохроматора [2]. Низкая спектральная плотность мощности теплового излучения ограничивает чувствительность спектроскопа и делает невозможным наблюдение узких спектральных линий. Поэтому акустический приемник [2] используется в основном как удобный индикатор суммарного поглощения в широких колебательно-вращательных полосах различных молекул («газоанализатор»). Существенным является положение в радиодиапазоне, где имеются источники когерентного излучения с весьма высокой спектральной плотностью мощности, перестраиваемые по частоте. Возможность наблюдения широких линий и нулевой характер метода облегчают обнаружение малых поглощений путем повышения мощности просвечивающего ячейку сигнала. Как известно, мощность, необходимая для насыщения спектральной линии, растет квадратично с шириной линии [4].

Приведем оценки допустимой (без насыщения линии) мощности сигнала при площади поперечного сечения ячейки 1 см^2 и дипольном моменте молекулы порядка 1 дебая . Если при ширине линии $\Delta\nu = 1 \text{ Мгц}$ мощность просвечивающего сигнала ограничена величиной порядка 10 мвт , то при $\Delta\nu = 100 \text{ Мгц}$ допустимая мощность растет уже до 100 вт , а при $\Delta\nu = 3000 \text{ Мгц}$ (порядка ширины линий в атмосфере) — до 100 квт . При этом (по крайней мере в принципе) шумы приемного устройства не должны измениться, а величина сигнала (1) растет с ростом мощности P_0 .

Предельная чувствительность акустического приемника по мощности должна определяться тепловыми флуктуациями газа [1, 2]. Приведем соответствующие оценки. Для флуктуаций температуры газа имеем [6]

$$\sqrt{\Delta T_{\Phi}^2} \approx T/\sqrt{N}, \quad (2)$$

где $\sqrt{\Delta T_{\Phi}^2}$ — среднеквадратичное значение флуктуации, T — температура, N — число частиц газа в ячейке. Повышение температуры газа при поглощении им мощности P в квазистатистическом режиме удобно записать в виде

$$\Delta T_c \approx P\tau_0/C. \quad (3)$$

Здесь $C \approx Nk$ — теплоемкость газа, $\tau_0 \sim C/G$ — постоянная времени тепловых процессов в газе (постоянная времени ячейки), $G \sim l\kappa$ — теплопроводность газа, l — характерный (наименьший) размер ячейки, κ — коэффициент теплопроводности, k — постоянная Больцмана. Приравнявая (2) и (3), для пороговой мощности имеем

$$P_{\min} \approx \frac{kT}{\tau_0} \sqrt{N}. \quad (4)$$

Выражения (3), (4) удобно записывать через постоянную времени ячейки τ_0 потому, что выбор величины τ_0 оказывается практически довольно жестко ограничен: снизу — разумными размерами ячейки и давлениями газов, сверху — низкочастотными шумами аппаратуры (типа фликера), которые препятствуют увеличению чувствительности путем увеличения τ_0 (и, следовательно, периода модуляции). Чаще всего τ_0 выбирается около 10^{-2} сек . Подставляя $kT \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ вт}$, $N \approx 10^{19}$, $\tau_0 \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$ имеем $P_{\min} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ вт}$. Такова чувствительность хорошо сконструированных приемников Голяя [1].

Из (1) для минимального обнаружимого коэффициента поглощения при этом имеем (при $L = 10 \text{ см}$ и P_0 в ваттах)

$$\gamma_{\min} (\text{см}^{-1}) \approx 3 \cdot 10^{-11}/P_0. \quad (5)$$

В лучших радиоспектроскопах сантиметрового диапазона достигнута $\gamma_{\min} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ см}^{-1}$ [8]. Приведенные оценки показывают, что эта чувствительность может быть превзойдена

* Такие мощности достижимы сейчас в миллиметровом—субмиллиметровом диапазоне [9].

в нулевом радиоспектроскопе с акустической индикацией при соответствующем выборе P_0 . Помехой может явиться нерезонансное поглощение, например, в стенках ячейки, если мощность генератора зависит от частоты.

В нашем первом образце практическая чувствительность была значительно ниже предельной ($\sim 10^{-6}$ *вт*) в основном из-за неоптимальной конструкции микрофона, малочувствительной и подверженной вибрациям Соответственно при однократном прохождении через ячейку мощности имевшихся в нашем распоряжении ЛОВ минимально обнаружимый коэффициент поглощения менялся от $5 \cdot 10^{-6}$ *см*⁻¹ в диапазоне 150 ÷ ÷ 280 *Гц* до 10^{-4} *см*⁻¹ в диапазоне 360 -- 570 *Гц**. Таким образом, здесь имеются значительные резервы

Отметим, однако, что полученная чувствительность превосходит не менее чем на порядок чувствительность существующих радиоспектроскопов в этом диапазоне [7]. Так, при спектроскопии паров воды нами наблюдались, кроме линий обычной воды H₂O¹⁶, линии ее изотопических разновидностей H₂O¹⁶ и HDO в естественной концентрации ($2 \cdot 10^{-3}$ для H₂O¹⁸ и $2 \cdot 10^{-4}$ для HDO). На переходе же $1_{10} - 1_{01}$ H₂O¹⁶ ($\lambda \approx \approx 0,54$ *мм*) получено отношение сигнал/шум около $9 \cdot 10^3$, что делает возможным использование такого радиоспектроскопа для стабилизации частоты. Отметим еще, что малые размеры ячейки (в нашем случае объем ~ 20 *см*³) облегчают исследование нестабильных молекул, а также варьирование, например, температуры газа.

В заключение авторы благодарят Е. Н. Карякина, Н. Н. Семьянского за помощь в создании установки, Ю. А. Дрягина, А. И. Наумова, Л. И. Федосеева за ценное обсуждение и любезное предоставление ЛОВ, А. В. Гапонова за ценные замечания при чтении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Golaу, Rev. Sci. Instr., 18, 357 (1947).
2. М. Л. Вейнгеров, Завод. лаборатория, 4, 426 (1947).
3. М. Б. Голант, Р. Л. Виленская, Е. А. Зюлина, З. Ф. Каплун, А. А. Негирев, В. А. Париков, Т. Б. Реброва, В. С. Савельев, Приборы и техника эксперимента, № 4, 136 (1965)
4. М. Стрендберг, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1956.
5. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, изд. Наука, М., 1964.
7. W. Gordy, Molecular spectroscopy, VIII European congress on molecular spectroscopy, Copenhagen, 1964, London, Butterworth, 1965, p. 403.
8. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
9. Л. С. Василенко, В. П. Чеботаев, Г. И. Шершнева, Оптика и спектроскопия, 24, 204 (1970).
10. С. Freed, A. Javan, Appl. Phys. Let., 17, 53 (1970).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
24 февраля 1970 г.

Примечание при корректуре. Аналогичная ситуация — большая мощность сигнала и весьма малый коэффициент поглощения — имеет место, например, при наблюдении узких резонансов насыщения в CO₂ при облучении его лазером на CO₂ [9, 10]. Здесь, по-видимому, также может быть выгоден нулевой акустический метод индикации.

УДК 621.378 : 325

ПЕРЕСТРОЙКА И СТАБИЛИЗАЦИЯ ЧАСТОТЫ ОКГ С ПОМОЩЬЮ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

Ю. Н. Беляев, А. М. Киселев, М. А. Новиков

Для целого ряда применений ОКГ возникает необходимость стабилизации ч плавной перестройки частоты излучения. Существующие способы стабилизации и перестройки частоты излучения ОКГ в пределах полосы люминесценции [1—3, 5] являются

* Увеличения сигнала можно добиться путем многократного пропускания излучения через ячейку, например, помещая ее в резонатор.

достаточно сложными и не всегда достигают поставленной цели. Ниже описывается способ стабилизации и перестройки, который, на наш взгляд, обладает рядом преимуществ. во-первых, получается достаточная селекция без отражающих покрытий; во-вторых, простота настройки и регулировки. Этот метод применим как для газовых, так и для твердотельных ОКГ.

Он основан на хорошо известных особенностях интерференции света в анизотропных средах. Как показано в работе [1], коэффициент отражения от эквивалентного зеркала (зеркало резонатора вместе с системой анизотропных пластин и поляризатором) зависит от частоты.

Для случая одной двоякопреломляющей пластинки и поляризатора эта зависимость имеет вид

$$R = R_0 \left[1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n d \right) \right]. \quad (1)$$

Для случая двух пластинок и поляризатора, который находится между этими пластинками,

$$R = R_0 \left[1 - \sin^2 2\theta_1 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_1 d_1 \right) \right] \left[1 - \sin^2 2\theta_2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_2 d_2 \right) \right], \quad (2)$$

где θ_1, θ_2 — углы между главными плоскостями кристаллических пластинок и главной плоскостью поляризатора, R_0 — коэффициент отражения от зеркала без анизотропных элементов (потери при отражении от анизотропных элементов пренебрегаем), d_1, d_2 — толщины пластинок, $\Delta n_1, \Delta n_2$ — разность показателей преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей анизотропных пластинок. Подобное выражение получается и для случая, когда пластинки расположены по одну сторону от поляризатора при определенных углах между оптическими осями кристаллических пластинок.

Из формулы (1) видно, что при заданной толщине анизотропной пластинки кривая потерь модулирована по частоте с периодом

$$\Delta \sigma (cm^{-1}) = (2\Delta n d)^{-1}, \quad (3)$$

причем глубина модуляции равна $\sin^2 2\theta$, а минимальными потерями обладают типы колебаний, частоты которых с точностью до расстояния между соседними модами удовлетворяют соотношению

$$\sigma (cm^{-1}) = \frac{2m+1}{4\Delta n d} \quad (m=0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

Следовательно, выбирая соответствующим образом кристаллическую пластинку и плавно меняя ее толщину, можно производить плавную перестройку частоты в пределах полосы люминесценции.

В настоящей работе перестройка и стабилизация частоты экспериментально исследовалась на твердотельном неодимовом ОКГ как в режиме свободной генерации, так и в режиме гигантских импульсов. В качестве двоякопреломляющей пластинки использовались два клина (с углом 1°) из кристаллического кварца, вырезанных параллельно оптической оси. Угол θ равен 45° . Общая толщина клиньев — около 3,5 мм. Перестройка частоты осуществлялась плавным изменением толщины путем перемещения одного клина относительно другого. Плавную перестройку частоты можно производить и другими способами, в частности, соответствующим поворотом анизотропной пластинки.

Схема установки приведена на рис. 1. На рис. 2 показана спектрограмма перестройки частоты ОКГ, а также спектр свободной генерации с призмой Глана (первая строчка снизу) и без нее (вторая строчка снизу). Диапазон перестройки — около

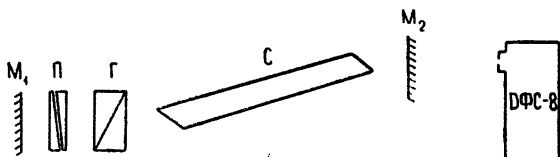


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: M_1, M_2 — зеркала с коэффициентами отражения 100%, 40%; С — стержень из стекла с неодимом; П — кристаллическая пластинка; Г — призма Глана; ДФС-8 — дифракционный спектрограф с линейной дисперсией $6 \text{ \AA} \cdot \text{мм}^{-1}$.

120 см^{-1} . Расстояние между максимумами кривой потерь резонатора в нашем случае, согласно (3), равно 140 см^{-1} . Несоответствие между полученным в эксперименте диапазоном перестройки и рассчитанным расстоянием между максимумами объясняется влиянием формы линии люминесценции.

Из рис. 2 также видно, что полоса перестройки несимметрична относительно частоты генерации без анизотропных элементов. Причина этого, по-видимому, состоит в асимметрии полосы люминесценции. Наличие дополнительной структуры объясняется влиянием плоскопараллельных поверхностей зеркал и анизотропных элементов.

Аналогичная картина перестройки получена в режиме гигантских импульсов. Вместо призмы Глана здесь применялся пассивный затвор, расположенный под углом Брюстера.

Использование дополнительной анизотропной пластинки в этом случае, как видно из (2), позволяет создать дополнительную селекцию и при соответствующем выборе ее толщины — стабилизацию частоты. В настоящей работе в качестве дополнительной пластинки выбиралась пластинка из исландского шпата с оптической осью, параллельной ее рабочей поверхности, причем $\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$. Толщина пластинки 6 мм. На рис. 3 приведена спектрограмма излучения ОКГ, полученная с помощью

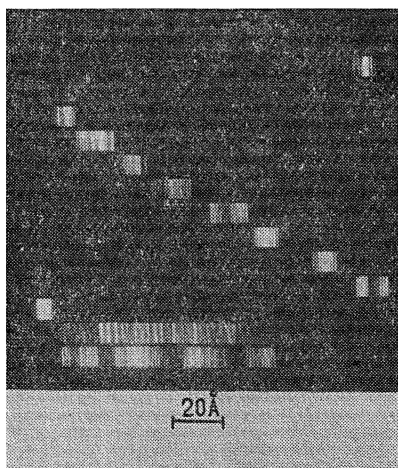


Рис. 2. Спектрограмма перестройки ОКГ.
Увеличение длины волны — слева направо.

Рис. 3.

эталона Фабри—Перо толщиной 2 см и линзы с $F = 160 \text{ см}$. Каждый сектор соответствует отдельной вспышке. Ширина отдельной линии составляет $0,04 \text{ см}^{-1}$.

Из рис. 3 видно, что в пределах разрешения данного эталона смещения частоты от вспышки к вспышке не наблюдается, т. е. стабильность частоты не ниже $0,02 \text{ см}^{-1}$. Заметного изменения порога и выходной энергии генерации в этих экспериментах не было обнаружено. При этом превышение накачки в 1,5 раза над порогом не ухудшало стабильности частоты.

Необходимо отметить, что использование в ОКГ активного элемента в виде прямого цилиндра, плоскости торцов которого настроены параллельно зеркалам резонатора, приводит к нестабильности частоты до $0,05 \text{ см}^{-1}$. Это, по-видимому, связано с изменением спектра собственных мод резонатора от вспышки к вспышке из-за нагревания активного элемента. Перекос стержня на $30'$ устранял это явление.

Авторы выражают свою глубокую признательность Г. И. Фрейдману за интерес и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Соскин, В. И. Кравченко, О. Н. Погорелый, Н. Ф. Прокопюк, Укр. физ. ж., 13, 28 (1968).
2. А. Н. Бондаренко, Г. В. Кривошеков, В. А. Смирнов, Письма в ЖЭТФ, 9, 100 (1969).

3. E. Snitzer, Appl. Opt., 5, 121 (1966).

4. М. А. Новиков, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 5, 765 (1970).

5. Б. Б. Бойко, Н. С. Петрова, ЖПС, 7, вып. 1, 21 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 февраля 1970 г.

УДК 621.378.325

О ТЕХНИЧЕСКОЙ ШИРИНЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ МЕЖМОДОВЫХ БИЕНИЙ He-Ne ЛАЗЕРА

Л. П. Зачеицкая, И. М. Клибанова, Ю. В. Краснощеков, А. Н. Малахов,
Л. А. Торопов

1. Технические флуктуации лазера исследованы экспериментально и теоретически еще недостаточно, хотя именно они и определяют реальную стабильность оптических квантовых генераторов (см, например, [1-5]). Наряду с изучением флуктуаций амплитуды и частоты автоколебаний лазера и флуктуаций биений между отдельными лазерами, определенный интерес представляют и исследования флуктуаций межмодовых биений одного лазера [6], которые несомненно могут дать определенную информацию об источниках шумов и флуктуаций лазера. Настоящее сообщение кратко излагает результаты экспериментального исследования флуктуаций частоты межмодовых биений He-Ne лазера.

Измерительная установка состояла из He-Ne лазера ($f_0 = 4,73 \cdot 10^{14}$ гц), фотоумножителя ФЭУ-27 и следующего за ним осциллографического спектр-анализатора, позволяющего наблюдать и регистрировать наличие разностных колебаний (колебаний межмодовых биений) в диапазоне частот от 0,5 до 3 Мгц. К выходу фотоумножителя был подключен также усилитель-фильтр (с полосой 300 кгц), выделявший одно разностное колебание частоты 1,2 Мгц. Спектр флуктуаций частоты этого разностного колебания измерялся затем обычным образом (см, например, [7]) в диапазоне от 100 гц до 100 кгц. Изменяя наклон зеркал резонатора, всегда можно было получить одно устойчивое разностное колебание вблизи частоты 1,2 Мгц с более или менее постоянной мощностью

2. На рис. 1 изображены результаты измерения спектра флуктуаций частоты разностного колебания. Спектральная плотность флуктуаций частоты удовлетворительно описывается законом

$$\overline{\nu_f^2} = B f^{-\gamma}, \quad (1)$$

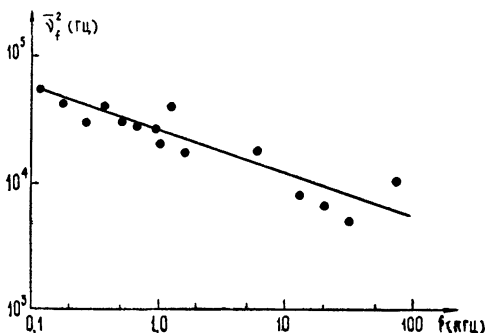


Рис. 1.

где $B = 2,7 \cdot 10^5$ гц^{4/3}, $\gamma = 1/3$. Таким образом, налицо фликкерный характер стационарных (поскольку $\gamma < 1$) флуктуаций частоты. Ширина спектральной линии колебания (флуктуации частоты которого описываются законом (1) с $\gamma < 1$) равна [8]

$$\Delta F = \frac{1 + \gamma}{2\Gamma [1/(1 + \gamma)]} \sqrt[1+\gamma]{\frac{\pi^2 B (2\pi)\gamma}{\Gamma(2+\gamma) \sin(\pi/2) (1 - \gamma)}}. \quad (2)$$

Форма спектральной линии зависит от γ . Если γ близко к нулю, форма линии близка к резонансной; если γ близко к единице, форма линии близка к доплеровской. Подставляя конкретные значения B и γ в (2), находим $\Delta F = 1,5 \cdot 10^3$ гц .

Такова была бы ширина спектральной линии разностного колебания (независимо от времени наблюдения), если бы закон (1) имел место вплоть до частоты $f = 0$. Поскольку в нашем случае формула (1) справедлива, по крайней мере, до частоты 100 гц , то полученное значение ширины линии заведомо справедливо для реализаций длительностью до 10^{-2} сек.

В связи с этим представляет интерес отыскание ширины спектральной линии разностного колебания за времена, существенно большие 10 мсек . Решение этой задачи было выполнено путем фотографирования и статистической обработки спектров реализаций разностного колебания за времена 1,5; 15 и 60 сек. Полученные результаты дают следующую зависимость ширины спектральной линии от длительности реализации:

T (сек)	1,5	15	60
ΔF (гц)	18	24	32

(3)

Таким образом, имеет место явная зависимость ΔF от T . Это значит, что флуктуации частоты нельзя считать стационарными; для них теперь $\gamma \geq 1$. При $1 < \gamma < 3$ ширина спектральной линии (зависящая теперь от T) определяется формулой [8]

$$\Delta F = \Delta F(T) = \sqrt{\frac{\pi (2\pi)\gamma B}{\Gamma(\gamma) \sin(\pi/2) (\gamma - 1)}} T^{\gamma-1}. \quad (4)$$

Форма спектральной линии колебания должна быть при этом доплеровской для всех $T > t_0$, где t_0 — некоторое время формирования спектральной линии [8]. Если с помощью (4) оценить значения γ , соответствующие (3), то при переходе от 1,5 к 15 сек имеем $\gamma = 1,25$; при переходе от 15 к 60 сек $\gamma = 1,4$. Тем самым нестационарность флуктуаций частоты разностного колебания растет с увеличением T .

Исследование формы спектра реализаций показало, что если для длительностей $\sim 1,5$ сек она была лишь грубо похожа на доплеровскую и заметно менялась от реализации к реализации, то для длительностей ~ 60 сек она была уже практически неотличимой от доплеровской. Тем самым время формирования доплеровской формы спектральной линии межмодовых биений в наших экспериментах имело порядок десятка секунд.

3. Каково происхождение описанных флуктуаций частоты биений? Вряд ли имеет смысл говорить о едином происхождении всего спектра флуктуаций частоты, рассматриваемого от самых низких частот, соответствующих длительностям порядка минут, до сотен килогерц. В области инфразвуковых частот существует много различных причин, ведущих к фликкерным флуктуациям частоты и флуктуации в источниках питания, и нестационарные флуктуации параметров оптической системы, и фликкерный шум газового разряда и т. д. Вместе с тем на звуковых и ультразвуковых частотах главной причиной фликкерных флуктуаций частоты лазера является, по-видимому, фликкерный шум газоразрядной трубки. В пользу этого предположения говорят и результаты работ [2, 4], в которых была обнаружена и обсуждена корреляция между шумом газового разряда и «лазерным шумом». Подобная корреляция возможна, вероятно, и в отношении флуктуаций частоты биений. Кроме того, следует принять во внимание значение γ , меньшее единицы, что характерно именно для спектров фликкерного шума газового разряда [9].

4. Уже после выполнения настоящей работы нам стали известны результаты работы [10], в которой измерялись флуктуации частоты лазера в режиме свободных колебаний (А) и при работе системы стабилизации (В). Спектральная плотность флуктуаций частоты в диапазоне 30—1000 гц , согласно [10], описывалась формулами

$$\overline{\dot{\nu}}_f^2 = 2,5 \cdot 10^{10} / f^2 \quad \text{—(А)}, \quad \overline{\dot{\nu}}_f^2 = 10^4 / f_{0,5} \quad \text{—(В)}.$$

На основании формул (2) и (4) по этим данным нетрудно определить ширину спектральной линии He-Ne лазера:

$$\Delta F = 1,8 \cdot 10^6 \sqrt{T} \text{ гц} \quad \text{—(А)}, \quad \Delta F = 2,2 \cdot 10^3 \text{ гц} \quad \text{—(В)}$$

(здесь T —в секундах).

Отсюда видно, что система стабилизации, описанная в [10], устраняет примерно те же причины больших технических флуктуаций частоты лазера, что и наблюдение над межмодовыми биениями. Кроме того, значение коэффициента $\gamma = 0,5$ показывает, что указанная система стабилизации, по-видимому, также не может «убирать» причины, связанные с фликкерным шумом газового разряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Blaquiere, P. Grivet, Proc. Symp. on Optical Masers, Polytechn. Inst., of Brooklyn, April 1963, p. 69.
2. L. J. Prescott, A. Van der Ziel, Appl Phys. Lett., 5, 48 (1964).
3. A. E. Siegman, B. Danio, K. R. Manes, IEEE J., QE-3, 180 (1967).
4. L. J. Prescott, A. Van der Ziel, IEEE J., QE-2, 173 (1966).
5. Н. Г. Басов, В. С. Летохов, УФН, 96, 584 (1968).
6. H. Z. Cummins, Phys. Lett., 5, 39 (1963).
7. А. Н. Малахов, В. Н. Никонов, Т. Д. Разина, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 6, 1052 (1961).
8. А. Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах, изд. Наука, М., 1968, §§ 4, 5.
9. А. Н. Малахов, Приборы и техника эксперимента, № 1, 79 (1958)
10. Д. П. Степанов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 4, 514 (1968).

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
19 января 1968 г.,
после доработки
2 декабря 1969 г.

УДК 621.391.82

ОБ ОЦЕНКЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ШУМА НА ФОНЕ ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННОЙ ПОМЕХИ

А. А. Горбачев, В. И. Данилов

При некоторых видах специального радиоприема возникает необходимость измерения интенсивности шума в условиях помех. В настоящей работе рассматриваются возможности оценки мощности шума на фоне частотно-модулированного колебания с неизвестными параметрами. При этом предполагается, что шум на выходе высокочастотного тракта приемника, имеющего полосу пропускания ΔF , нормальный с дисперсией σ^2 , а ширина спектра частотно-модулированной помехи не превышает величину ΔF .

Рассмотрим возможности построения оптимального устройства для обработки принимаемой смеси, алгоритм работы которого будем отыскивать, исходя из требования максимизации функции правдоподобия относительно параметра шума σ .

Известно [1], что при отсутствии априорных данных о фазе помехи функция правдоподобия будет определяться огибающей смеси. В частности, при использовании в приемнике линейного* детектора эта функция запишется следующим образом:

$$W(x|\sigma, U_m) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma} \exp\left(-\frac{x_i^2 + U_m^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{x_i U_m}{\sigma^2}\right), \quad (1)$$

где x_i — статистически независимые выборочные значения огибающей смеси шума и помехи с неизвестной амплитудой U_m , $I_0(y)$ — функция Бесселя.

Для отыскания параметра σ необходимо решить систему уравнений

* Заметим, что вид характеристики амплитудного детектора не влияет на точность измерения [1].

$$\frac{\partial \ln W(\mathbf{x} | \sigma, U_m)}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{2}{\hat{\sigma}} + \frac{x_i^2 + \hat{U}_m^2}{\hat{\sigma}^3} - \frac{2x_i \hat{U}_m I_1(x_i \hat{U}_m / \hat{\sigma}^2)}{\hat{\sigma}^3 I_0(x_i \hat{U}_m / \hat{\sigma}^2)} \right] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \ln W(\mathbf{x} | \sigma, U_m)}{\partial U_m} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{\hat{U}_m}{\hat{\sigma}^2} + \frac{x_i I_1(x_i \hat{U}_m / \hat{\sigma}^2)}{\hat{\sigma}^2 I_0(x_i \hat{U}_m / \hat{\sigma}^2)} \right] = 0.$$

Точное решение этой системы для всего диапазона значений U_m/σ ($0, \infty$) простыми приемами получить не удастся. В случае же достаточно больших помех ($U_m/\sigma > 3$) решение ее значительно упрощается. Разложив $I_1(y)/I_0(y)$ в асимптотический ряд с точностью до двух первых членов $I_1(y)/I_0(y) \approx 1 - 1/2y^*$, и решив систему (2) относительно $\hat{\sigma}^2$, получим

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2}{3} m_2 - \frac{4}{9} m_1^2 [1 + (1 - 3m_2/4m_1^2)^{1/2}], \quad (3a)$$

где $\hat{\sigma}^2$ — оценка дисперсии шума, $m_1 = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$, $m_2 = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Полагая время наблюдения неограниченно большим, найдем относительное асимптотическое смещение оценки δ , обусловленное влиянием помехи:

$$\delta = (\sigma^2 - \hat{\sigma}^2) / \sigma^2.$$

Зависимость величины δ от U_m/σ для измерительного устройства, построенного на основе выражения (3a), представлена на рис 1 кривой 1

Реализация алгоритма устройства в соответствии с (3a) может быть осуществлена с помощью сравнительно несложных функциональных блоков

Нетрудно показать, что при помехах, значительно превосходящих шум ($U_m/\sigma \gg 1$), обработка смеси сводится к еще более простой операции — нахождению второго центрального момента огибающей:

$$\lim_{U_m/\sigma \rightarrow \infty} \hat{\sigma}^2 = (m_2 - m_1^2). \quad (3б)$$

Сравнение кривой 2, построенной на основе выражения (3б), с кривой 1 показывает, что величины δ в соответствии с (3a) и (3б) отличаются незначительно и быстро возрастают с уменьшением мощности ЧМ помехи при $U_m/\sigma < 3$.

Рассматривая зависимость отношения m_2/m_1^2 от U_m/σ , легко заметить, что это отношение уменьшается при возрастании мощности помехи. Это обстоятельство может быть использовано для коррекции оценки σ^2 , получаемой с помощью выражения (3б). Например, можно предложить следующий алгоритм работы измерительного устройства:

$$\hat{\sigma}^2 = (2/(4-\pi) - 4,9\sqrt{z} + 4,5z) (m_2 - m_1^2), \quad (4)$$

где $z = (4/\pi) - (m_2/m_1^2)$. В этом случае величина δ не превышает 4% во всем диапазоне значений U_m/σ и стремится к нулю при $U_m/\sigma \rightarrow \infty$ (см рис. 1, кривая 3). Вместе с тем, функциональная блок-схема такого устройства относительно проста и, как видно из сопоставления (3a) и (4), содержит те же функциональные блоки, что и блок-схема устройства, построенного на основе выражения (3a): сумматоры, умножитель, делитель, блок извлечения квадратного корня.

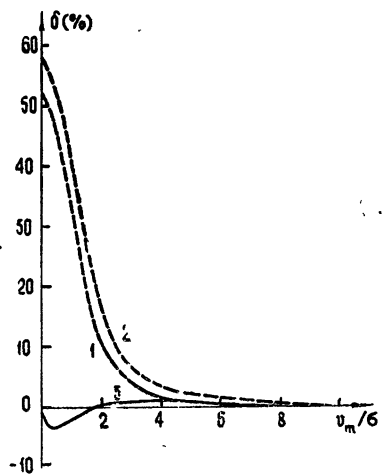


Рис. 1.

* Вычисления показывают, что погрешность такой аппроксимации не превышает 3% при $z \geq 1$ и с увеличением z асимптотически стремится к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. И. Куликов, Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех, изд. Сов. радио, М., 1969 г.

Научно-исследовательский радиопизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
16 декабря 1969 г

УДК 538.574 6

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ

О. С. Мергелян

В приближении теории возмущений решена задача о дифракции плоской электромагнитной волны на одномерно-периодической диэлектрической структуре. Получены выражения для полей и их углового распределения

Пусть плоскость $z = 0$ отделяет среду с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ_1 и μ_1 , заполняющую область $z < 0$, от среды с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 и магнитной проницаемостью μ_2 . При этом

$$\epsilon_2 = \epsilon_2' + \epsilon_2''(y), \quad |\epsilon_2''| \ll \epsilon_2', \quad \epsilon_2''(y) = \epsilon_2''(y + kl). \quad (1)$$

Будем считать $\epsilon_2''(y)$ четной функцией координаты y . Тогда $\epsilon_2''(y)$ мы можем разложить в ряд Фурье [1]

$$\epsilon_2''(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \cos \xi_k y \quad \left(\xi_k = \frac{2\pi}{l} k \right). \quad (2)$$

Таким образом задача сводится к получению формул Френеля для случая, когда диэлектрические свойства одной из сред меняются по косинусоидальному закону.

Предположим, что плоская электромагнитная волна

$$E(\mathbf{r}, t) = E(\omega) \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] \quad (k^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 / c^2) \quad (3)$$

падает под углом θ_0 на границу раздела $z=0$ со средой, диэлектрическая проницаемость которой

$$\epsilon_2 = \epsilon_2' + \epsilon_2'', \quad \epsilon_2'' = \Delta \cos \xi y \quad (\xi = 2\pi/l). \quad (4)$$

Отраженную волну ищем в виде

$$E_1'(\mathbf{r}, t) = E_0'(\omega) \exp [i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r} - \omega t)] + \sum_{n \neq 0} \tilde{E}_n(\omega) \times \\ \times \exp \{i(k_x x - \omega t) + i[(k_y + \xi n) y - k_z z]\}. \quad (5)$$

Преломленная волна состоит из поля основной преломленной волны $E_{2,0}$ и полей высших гармоник двух типов:

$$\sum_{n \neq 0} E_{2,n} = \sum_{n \neq 0} (E_{2n}' \exp(ik_{2z} z) + E_{2n}'' \exp(ik_{2z}'' z)) \exp \{i[(k_y + \xi n) y + k_x x - \omega t]\}. \quad (6)$$

В формулах (3) — (6)

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(k_x, k_y, k_z), \\ \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1(k_x, k_y, -k_z), \\ k_z, n = [\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 / c^2 - k_x^2 - (k_y + \xi n)^2]^{1/2}, \\ k_{2z}'' = [\omega^2 \epsilon_2' \mu_2 / c^2 - k_x^2 - (k_y + \xi n)^2]^{1/2},$$

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \quad (7)$$

$$k_y = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \sin \theta_0' \cos \varphi_0,$$

$$k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \cos \theta_0.$$

Поля E'_{2n} определяются в приближении теории возмущений

$$D'_{2n} = \varepsilon'_2 E'_{2,n} + \varepsilon''_2 E'_{2,n-1}$$

из уравнения

$$\left[-\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2'^{\mu_2} \right) + \nabla (\nabla) \right] E'_{2,n} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2''^{\mu_2} E'_{2,n-1} \quad (8)$$

методом последовательных приближений. При этом $E'_{2,n} = E'_{2,-n}$ (в силу четности функции $\cos \xi y$).

Амплитуды \tilde{E}_n и $E''_{2,n}$ можно найти из граничных условий и условий поперечности полей по амплитудам $E'_{2,n}$. В частности, для $n = 1$

$$E'_{2,n}(\omega) = \frac{\Delta}{2\varepsilon'_2} \frac{(\omega^2 \varepsilon_2'^{\mu_2} / c^2) E_{2,0} - \xi(ny\xi + k_z) E_{2,0,y}}{\xi(\xi + 2k_y)}, \quad (9)$$

$$k_z = k_2(k_x, k_y, k_{2z}),$$

$E_{2,0}$ — амплитуда преломленного поля при $\Delta = 0$, задаваемая обычными формулами Френеля.

Законы преломления имеют следующий вид:

а) для волны $E'_{2n}(r, t)$

$$\operatorname{tg} \theta'_{2,n} = \left\{ \frac{[(\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2} \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \xi n(c/\omega)]^2 + \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0}{\varepsilon_2'^{\mu_2} - \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_0} \right\}^{1/2}; \quad (10)$$

б) для волны $E''_{2,n}$

$$\operatorname{tg} \theta''_{2,n} = \left\{ \frac{\varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 + [(\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2} \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \xi n(c/\omega)]^2}{\varepsilon_2'^{\mu_2} - \varepsilon_1 \mu_1 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 - [(\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2} \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \xi n(c/\omega)]^2} \right\}^{1/2}, \quad (11)$$

а закон отражения записывается так:

$$\sin \theta_{1,n} = \left[\left(\sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \xi n \frac{c}{\omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \right)^2 + \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Из (9) видно, что плоскость поляризации преломленных (и, следовательно, отраженных) волн при $n \gg 1$ поворачивается, причем угол поворота пропорционален ξn .

В заключение заметим, что наше приближение справедливо для спектральной области

$$\lambda \gg l \quad (13)$$

и

$$\frac{\lambda}{lc} \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \gg \Delta(\omega). \quad (14)$$

Эти ограничения накладываются условиями применимости теории возмущений. Кроме того, отметим, что из рассмотрения исключаются частоты, для которых $k_y = \xi/2$, лежащие в полосе непрозрачности [2]

Автор благодарен Б. М. Болотовскому и Г. М. Гарибяну за советы и обсуждения

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Д. Д. Джексон. Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИЛ, М., 1958.
 2 Л. Бриллюэн, М. Пароди, Распространение электромагнитных волн в периодических структурах, ИЛ, М., 1959.

Поступила в редакцию
31 декабря 1969 г.

УДК 538 56 4

РАСSEЯННОЕ ПОЛЕ ОТ ШАРА МАЛЫХ РАЗМЕРОВ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ

И. Т. Иванов

Шар радиуса a (рис 1) с комплексной диэлектрической $\epsilon_1 = \epsilon_1' + i\epsilon_1''$ и магнитной $\mu_1 = \mu_1' + i\mu_1''$ проницаемостями вещества с центром в начале координат возбуждается полем электрического диполя, удаленным от шара в направлении Oz на расстояние b . Как показано в работах [1, 2], вводя вектор Герца $\Pi_x = \Pi^0 e_x$, нетрудно найти x -составляющие первичного и полного полей в точке наблюдения P :

$$E_x^{\text{пер}} = \frac{e^{ikR}}{R} \left[k^2 + i \frac{k}{R} - \frac{1}{R^2} - \sin \beta \left(k^2 + i \frac{3k}{R} - \frac{3}{R^2} \right) \right],$$

$$E_x^{\text{полн}} = E_x^{\text{пер}} \left[1 + \frac{1}{E_x^{\text{пер}}} (E_r \sin \theta \cos \varphi + E_\theta \cos \theta \cos \varphi - E_\varphi \sin \varphi) \right]. \quad (1)$$

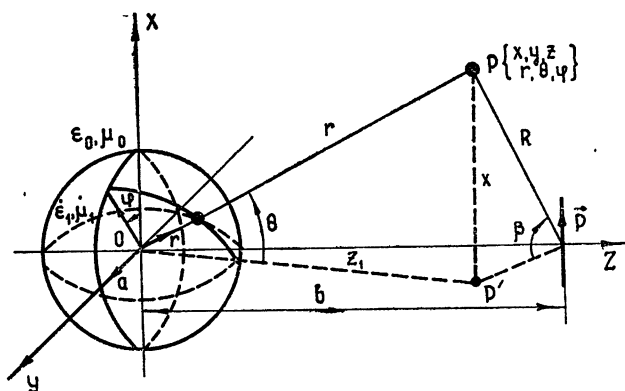


Рис 1.

Здесь E_r , E_θ и E_φ — составляющие вторичного рассеянного поля от шара, которые можно найти, вводя в рассмотрение электрическую U и магнитную V функции Герца [3]:

$$E_r = \frac{i \cos \varphi}{br^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) A_n \zeta_n'(kb) \zeta_n(kr) P_n^1(\cos \theta),$$

$$E_\theta = \frac{ik \cos \varphi}{rb} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [A_n \zeta_n'(kb) \zeta_n'(kr) \tau_n(\cos \theta) + B_n \zeta_n(kb) \zeta_n(kr) \tau_n(\cos \theta)], \quad (2)$$

$$E_{\varphi} = -\frac{ik \sin \varphi}{rb} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [B_n \zeta_n(kb) \zeta_n(kr) \tau_n(\cos \theta) + A_n \zeta_n'(kb) \zeta_n'(kr) \pi_n(\cos \theta)],$$

где

$$A_n = \frac{\psi_n'(ka)}{\zeta_n'(ka)} \zeta_n'(kb) \frac{\beta/\alpha - \Omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\beta/\gamma - \Omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}},$$

$$B_n = \frac{\psi_n(ka)}{\zeta_n(ka)} \zeta_n(kb) \frac{\alpha/\beta - \Omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\gamma/\beta - \Omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}};$$

$$\alpha = \frac{\psi_n'(ka)}{\psi_n(ka)}, \quad \beta = \frac{\psi_n'(ka \Omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1})}{\psi_n(ka \Omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1})}, \quad \gamma = \frac{\zeta_n'(ka)}{\zeta_n(ka)},$$

$k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, $k_1 = i\omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} = kn_1[(1 + i \operatorname{tg} \delta)(1 + i \operatorname{tg} \Delta)]^{1/2} = k\Omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$ — постоянные распространения [4] вне и внутри шара; $n_1 = [(\varepsilon_1'/\varepsilon_0)(\mu_1'/\mu_0)]^{1/2}$ — показатель преломления вещества в шар; $\operatorname{tg} \delta = \varepsilon_1''/\varepsilon_1' = \sigma/\varepsilon_1\omega$, $\operatorname{tg} \Delta = \mu_1''/\mu_1' = \rho/\mu_1\omega$ — тангенсы углов диэлектрических и магнитных потерь, $\psi_n(z) = (\pi z/2)^{1/2} J_{n+1/2}(z)$, $\zeta_n(z) = (\pi z/2)^{1/2} \times H_{n+1/2}^{(1)}(z)$ — сферические бesselовы функции; $P_n^1(\cos \theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра; $\pi_n(\cos \theta) = P_n^1(\cos \theta)/\sin \theta$; $\tau_n(\cos \theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos \theta)$;

$$\Omega = [(1 - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \Delta) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\delta + \Delta)}]^{1/2} \exp\left(i \frac{\Delta + \delta}{2}\right).$$

При $z \ll 1$ функции $\psi_n(z)$ и $\zeta_n(z)$ и их производные выражаются приближенно [5];

$$\psi_n(z) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{z^{n+1}}{(2n+1)!}, \quad \psi_n'(z) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{(n+1) z^n}{(2n+1)!},$$

$$\zeta_n(z) \simeq -i \frac{2^n (2n-1)!}{\sqrt{\pi} z^n}, \quad \zeta_n'(z) \simeq \frac{2^{n+1} (2n+1)!}{\sqrt{\pi} z^{n+1}}.$$

Тогда при $ka \ll 1$ и $ka |\Omega| \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} \ll 1$ логарифмические производные (4) с учетом (5) могут быть представлены в виде

$$\alpha \simeq \frac{n+1}{ka}, \quad \beta \simeq \frac{n+1}{\Omega ka \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}, \quad \gamma \simeq \frac{n}{ka}.$$

Выражения (2)–(4) справедливы для шара произвольного радиуса a [1, 2]. Для шара малых размеров коэффициенты (3) с учетом (6) будут

$$A_n^* = \frac{\psi_n'(ka) \zeta_n'(kb)}{\zeta_n'(ka)} \frac{n(\Omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - 1)}{(n+1) + n\Omega^2 \varepsilon_1 \mu_1} \neq 0,$$

$$B_n^* = \frac{\psi_n(ka) \zeta_n(kb)}{\zeta_n(ka)} \frac{\Omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} - \Omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{-\Omega \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1} (1 + n/(n+1))} = 0,$$

и для выражений (2) имеем

$$E_r^{\text{вн}} = \frac{a \cos \varphi}{2(br)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - 1}{(n/(n+1)) \Omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 + 1} \left(\frac{a^2}{br}\right)^n P_n^1(\cos \theta),$$

$$E_{\theta}^{\text{вн}} = \frac{a \cos \varphi}{2(br)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - 1}{n\Omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 + (n+1)} \left(\frac{a^2}{br}\right)^n \tau_n(\cos \theta),$$

$$E_{\varphi}^{\text{вн}} = -\frac{a \sin \varphi}{2(br)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - 1}{n\Omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 + (n+1)} \left(\frac{a^2}{br}\right)^n \pi_n(\cos \theta).$$

Искажение первичного поля диполя шаром (зондом) малых размеров. Падающие на шар и отраженные от шара поля будут максимальными в точке P , при $\theta = \varphi = 0$:

$$E_{x \max}^{\text{пол}} \simeq E_{x \max}^{\text{пад}} (1 + \dot{\Gamma}_{\max}). \quad (9)$$

Здесь

$$\dot{E}_{x \max}^{\text{пад}} \simeq -\frac{e^{ikb}}{b^3}, \quad (1 + \dot{\Gamma}) = \left(1 + \frac{\Delta E}{E_{\text{пер}}}\right) e^{i\Delta\Phi},$$

$$\Delta E = E_v^{\text{вТ}} = E_x^{\text{пол}} - E_x^{\text{пер}}, \quad \Delta\Phi = \Phi_{\text{пол}} - \Phi_{\text{пер}},$$

$$\dot{\Gamma}_{\max} = \frac{\dot{E}_x^{\text{вТ}}}{\dot{E}_x^{\text{пер}}} = \frac{a}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - 1}{n \Omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 + (n+1)} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2 \right]^n \tau_n (\cos \theta) |_{\theta=0} e^{-ikb}.$$

При измерении, например, амплитудно-фазового распределения поля СВЧ антенн методом зонда [6, 7], отражающего часть измеряемого поля обратно в раскрыт исследуемой антенны, первичное поле ее локально искажается возмущающим зондом по амплитуде и фазе на величины $|\Delta E|$ и $\Delta\Phi$. Поэтому размеры зонда должны быть таковы, чтобы относительные искажения измеряемого поля не превышали допустимых величин:

$$\frac{E_x^{\text{вТ}}}{E_x^{\text{пер}}} < \left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{\text{доп}}, \quad \frac{\Phi_{\text{пол}} - \Phi_{\text{пер}}}{\Phi_{\text{пер}}} < \left(\frac{\Delta\Phi}{\Phi}\right)_{\text{доп}}. \quad (10)$$

Для определения оптимального радиуса шара a^* с точки зрения допустимых искажений поля антенны (10) ряды (8) могут быть усечены благодаря их быстрой сходимости при $ka \ll 1$, т. е. суммирование в (8) нужно выполнить до [8]

$$n \simeq ka. \quad (11)$$

Очевидно, первое ($n=1$) и второе ($n=2$) приближения будут вполне достаточны для определения a^* .

а) В первом приближении ($n=1$)

$$\frac{a^*}{b} \leq \left[\frac{(\Delta E/E)_{\text{доп}}}{\xi} \right]^{1/3} \quad (ka \ll 1, r \simeq b, R \simeq b). \quad (12)$$

$$\frac{a^*}{b} \leq \left[\frac{1}{\xi} \frac{1 + (\Delta\Phi/\Phi)_{\text{доп}}}{2 + (\Delta\Phi/\Phi)_{\text{доп}}} \right]^{1/3}$$

б) Во втором приближении ($n=2$)

$$\frac{a^*}{b} \leq \left\{ \frac{1}{6} \left[\left(1 + 12 \left(\frac{\Delta E}{E} \right)_{\text{доп}} \frac{1}{\xi} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/3} \quad (ka \ll 1, r \simeq b, R \simeq b). \quad (13)$$

$$\frac{a^*}{b} \leq \left[\frac{1}{3\xi} \frac{1 + (\Delta\Phi/\Phi)_{\text{доп}}}{2 + (\Delta\Phi/\Phi)_{\text{доп}}} \right]^{1/5}$$

В формулах (12) и (13) приняты обозначения:

$$\xi = \frac{\gamma}{\alpha} \frac{1 - \beta^2/\alpha\gamma}{1 + (\beta/\alpha)^2} \sqrt{1 + \zeta^2}, \quad \zeta = \frac{1 - \gamma/\alpha}{\gamma/\beta - \beta/\alpha},$$

$$\gamma = \cos \tau - \sigma, \quad \alpha = \cos \tau + 2\sigma, \quad \beta = \sin \tau,$$

$$\sigma = (\Omega^2 \varepsilon_1 \mu_1)^{-1}, \quad \tau = \Delta + \delta.$$

в) При приближенной оценке a^* в соответствии с формулой (11) в случае $n=1$

$$a^* \leq \lambda/2\pi. \quad (14)$$

В табл. 1 приводятся радиусы шара a^* , рассчитанные по формулам (12) — (14) при следующих значениях параметров: $\lambda = 3$ см; $b = z_1 = 0,1\lambda = 0,1 \cdot 3 = 0,3$ см; $(\Delta E/E)_{\text{доп}} = 0,015$; $(\Delta \Phi/\Phi)_{\text{доп}} = 0,015$.

Таблица 1

№ п/п.	Материал шара	a^* (см)				
		Приближенная оценка	Первое приближение ($n=1$)		Второе приближение ($n=2$)	
			$(\frac{\Delta E}{E})_{\text{доп}} = 1,5\%$	$(\frac{\Delta \Phi}{\Phi})_{\text{доп}} = 1,5\%$	$(\frac{\Delta E}{E})_{\text{доп}} = 1,5\%$	$(\frac{\Delta \Phi}{\Phi})_{\text{доп}} = 1,5\%$
1	Шар латунный ($\xi=1$)	$\leq 0,48$	$\leq 0,75$	$\leq 2,39$	$\leq 0,74$	$\leq 2,1$
2	Шар из СВЧ из феррита марки Ф-1000* ($\xi=0,67$)	—	$\leq 0,85$	$\leq 2,73$	$\leq 0,825$	$\leq 2,27$
3	Шар из полистирола ($\xi=1/3$)	—	$\leq 1,065$	$\leq 3,43$	$\leq 1,02$	$\leq 2,6$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, ЖЭТФ, 19, № 10, 925 (1949).
2. Э. М. Гюннинен, Проблемы дифракции и распространения радиоволн, вып. 2, изд ЛГУ, 1962.
3. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов радио, М., 1957, стр. 92.
4. А. Хиппель, Диэлектрики и волны, ИЛ, М., 1960.
5. М. Борн, Оптика, ОНТИ Украины, Харьков—Киев, 1937.
6. Г. Н. Калинин, Научно-техническая информация по приборостроению, 3 (11), Судпромгиз, 1959.
7. Ю. В. Шубарин, А. Ф. Зоркин, Антенные измерения на СВЧ, изд ХГУ, Харьков, 1962.
8. Х. Хенл, Теория дифракции, изд Мир, М., 1964, стр. 397.

Ленинградский институт
точной механики и оптики

Поступила в редакцию
17 октября 1968 г.,
после доработки
26 января 1970 г.

УДК 621.372.852.3

К ОЦЕНКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОННЫХ АТТЕНУАТОРОВ ТИПА «М» НА БЫСТРЫХ ЦИКЛОТРОННЫХ ВОЛНАХ ПУЧКА

В. В. Гурзо, В. С. Стальмахов, В. П. Щеголев

В настоящем сообщении излагаются результаты теоретического и экспериментального исследования электронных аттенуаторов типа М (ЭАМ) на быстрых циклотронных волнах пучка [1], работающих в режиме большого сигнала. Исследуемые

* Параметры СВЧ феррита марки Ф-1000 взяты из работы Д. И. Марш, ЖТФ, 32, вып. 4 (1962).

схемы и основные обозначения приведены на рис. 1 а, б. В основу приближенной оценки нелинейных свойств ЭАМ положена методика, предложенная в [2] и развитая затем в [3] и в применении к взаимодействию трохондальных электронных пучков с СВЧ полями

Анализ ограничивается рассмотрением наиболее важного для практики случая, когда работа ЭАМ происходит вблизи истинного циклотронного резонанса ($\omega \approx \omega_m$). Влиянием пространственного заряда пренебрегается. Считается, что фазовая скорость волны в системе точно равна скорости быстрой циклотронной волны в пучке, т. е. имеет место равенство

$$\omega t - \beta u_e t = \omega_m t. \quad (1)$$

Интегрируя в этих предположениях уравнения движения электрона [2, 3] в ВЧ поле при работе на обратной быстрой циклотронной волне (рис 1 б), получаем

$$Z - Z_0 = -(1/2)\gamma R_0 \exp [\gamma(Y_a - Y_0 - Y_0)] \sin (\Phi_0 - \gamma Z_0) F; \quad (2)$$

$$Y - Y_0 = (1/2)\gamma R_0 \exp [\gamma(Y_a - Y_0)] \cos (\Phi_0 - \gamma Z_0) F + (1/8)\gamma \exp [2\gamma(Y_a - Y_0)] F^2; \quad (3)$$

$$R^2 - R_0^2 = R_0 \exp [\gamma(Y_a - Y_0)] \cos (\Phi_0 - \gamma Z_0) F + (1/4)\exp [2\gamma(Y_a - Y_0)] F^2; \quad (4)$$

$$\Phi - \Phi_0 = F \{ 2R_0 \exp [\gamma(Y_a - Y_0)] / \sin (\Phi_0 - \gamma Z_0) + F \operatorname{ctg} (\Phi_0 - \gamma Z_0) \}^{-1}, \quad (5)$$

где Z, Y, R — нормированные координаты центра и радиус электронной орбиты, Φ — фаза электрона относительно ВЧ поля, Y_a — координата анода, Z_0, Y_0, Φ_0, R_0 — начальные значения величин $Z, Y, \Phi, R, \gamma = (\omega_m/\omega - 1), \omega_m = \eta B_0$ (для ОБЦВ

$\omega_m > \omega$), $F = \beta_e/E_0 \int_0^z E_1 dz, E_1 dz$ — нормированная амплитуда ВЧ поля.

Соотношения, аналогичные (2) — (5), можно получить и при расчете взаимодействия на прямой БЦВ.

С помощью (2) — (5) можно проанализировать характер энергообмена между электронами и ВЧ полем. Уравнение (3) будет характеризовать при этом изменение средней потенциальной энергии электронов, а (4) — изменение его кинетической энергии, связанное с вращательным движением. В общем случае предварительно промодулированного пучка характер энергообмена будет зависеть от входной фазы $\mu_0 = \Phi_0 - \gamma Z_0$.

На рис. 2 представлены зависимости $Y - Y_0$ и R от F . Видно, что электроны с входными фазами $-\pi/2 < \mu_0 < \pi/2$ сразу начинают увеличивать радиус вращения.

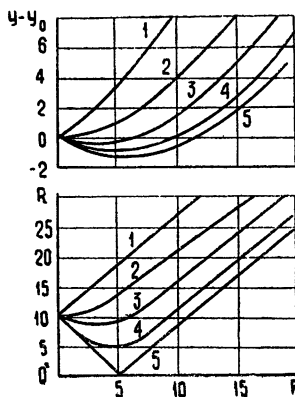


Рис. 2. Зависимости радиуса вращения и положения центра орбиты электрона от F для различных входных фаз при $\gamma=0,025, R_0=10, Y_a=50$ ($\mu_0=0(1); \pm\pi/2(2); \pm 2\pi/3(3); \pm 5\pi/6(4); \pm\pi(5)$).

При этом с увеличением R Y также растет, т. е. в случае взаимодействия на ОБЦВ при поглощении энергии ВЧ поля центры электронных орбит смещаются к положительному электроду. Электроны с входными фазами $\pi/2 < \mu_0 < -\pi/2$ сначала уменьшают радиус вращения и смещаются к основанию. При достижении некоторой величины F_{\min} фаза меняет знак (см. (4)), электроны переходят из тормозящей фазы в ускоряющую и начинают увеличивать радиус вращения. Центры электронных орбит при этом начинают смещаться к аноду. В процессе взаимодействия центры электронных орбит группируются вокруг электрона с фазой $\mu_0 = 0$.

Аналогичные результаты можно получить и для взаимодействия на прямой БЦВ (см. рис. 1). В этом случае с увеличением радиуса вращения центры электронных орбит смещаются к основанию, а с уменьшением радиуса вращения — к положительному электроду.

Таким образом, при взаимодействии на БЦВ центры электронных орбит смещаются в более слабые ВЧ поля, если процесс характеризуется отбором энергии у ВЧ поля, и в более сильные, если процесс характеризуется передачей энергии ВЧ полю. Энергообмен будет длиться до тех пор, пока электроны не выйдут из пространства взаимодействия на коллектор или не осядут на положительном или отрицательном электродах.

Используя методику, развитую в [3, 4], и согласовывая изменение мощности взаимодействия с изменением потока мощности в линии, для функции $F(z)$ можно получить

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = D^2 \beta_c^2 G(F), \quad (6)$$

где $\beta_c = \gamma \beta_e$, $D^2 = (\omega/\omega_m) (I_0/2V_e) K_S(Y_0)$, I_0 , V_e — ток и потенциал луча, $K_S(Y_0)$ — сопротивление связи в плоскости луча.

Функция $G(F)$ в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$G(F) = \frac{\exp[\gamma(Y_a - Y_0)]}{\operatorname{sh}^2 \gamma Y_0} \frac{1}{4\pi} \int_{\mu_{01}}^{\mu_{02}} \left\{ R_0 \cos \mu_0 + \frac{1}{2} \exp[\gamma(Y_a - Y_0)] F \right\} d\mu_0. \quad (7)$$

Здесь μ_{01} , μ_{02} определяют интервал входных фаз для электронов, принимающих участие во взаимодействии в некоторой плоскости z . Этот интервал определяется так:

$$\pi - \theta < \mu_0 < \pi + \theta,$$

$$\theta = \pi - \arccos \left\{ - \frac{(1/2) \exp[2\gamma(Y_a - Y_0)] F^2 - (R_{\max}^2 - R_0^2)}{R_0 \exp[\gamma(Y_a - Y_0)] F} \right\}, \quad (8)$$

R_{\max} — максимальный радиус электронной орбиты, определяемый конечными размерами пространства взаимодействия Y_a и координатой встрела Y_0 . В случае взаимодействия с ОБЦВ $R_{\max} \cong Y_a - Y_0$, а при работе на ПБЦВ $R_{\max} \cong Y_0$.

Из (4) для величины F_1 , при которой электроны начинают выходить на электроды, найдем $F_1 = 2(R_{\max} - R_0) \exp[-\gamma(Y_a - Y_0)]$, а для величины F_2 , при которой все электроны покидают пространство взаимодействия, получаем $F_2 = 2(R_{\max} + R_0) \times \exp[-\gamma(Y_a - Y_0)]$.

В случае электронного агтенатора первоначальная модуляция электронного потока на БЦВ отсутствует, т. е. $R_0 = 0$, и тогда видно, что

$$F_0 = F_1 = F_2 = 2R_{\max} \exp[\gamma(Y_a - Y_0)], \quad (9)$$

таким образом все электроны покидают пространство взаимодействия в одной плоскости $z_0 = l$. В этом случае уравнение (6) распадается на систему двух уравнений

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = D^2 \beta_c^2 F, \quad 0 < z < z_0, \quad (10)$$

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = 0, \quad z_0 < z < l.$$

Сшивая решения (10) в плоскости z_0 , можно найти связь между $E_{\text{вх}}$, $E(z_0)$ и D в виде

$$\frac{E_{\text{вх}}}{\gamma E_0} = \frac{DF_0}{\operatorname{th} \beta_c D z_0}. \quad (11)$$

Очевидно, что минимальный насыщающий входной сигнал $(E_{\text{вх}}/\gamma E_0)_{\min}$ определится из (11) при $z_0 = l$.

Полученные соотношения позволяют аналитически вычислить коэффициент поглощения ЭАМ в зависимости от входного сигнала:

$$K(\delta\theta) = 20 \lg (\operatorname{ch} \beta_c D I)^{-1}, \quad \frac{E_{\text{вх}}}{\gamma E_0} < \left(\frac{E_{\text{вх}}}{\gamma E_0} \right)_{\min}, \quad (12)$$

$$K(\delta\theta) = 20 \lg \{ \operatorname{ch} [\operatorname{arctch} (F_0 D) / (E_{\text{вх}} / \gamma E_0)] \}^{-1}, \quad \frac{E_{\text{вх}}}{\gamma E_0} \geq \left(\frac{E_{\text{вх}}}{\gamma E_0} \right)_{\min}.$$

Аналогичные выражения могут быть получены и для взаимодействия на прямой БЦВ.

На рис 3 представлена зависимость коэффициента поглощения от тока луча при различных входных сигналах. Как видим, с ростом тока луча поглощение увеличивается, при этом, чем больше входной сигнал, тем большие токи необходимы для того, чтобы получить то же самое поглощение. При малых токах луча и больших

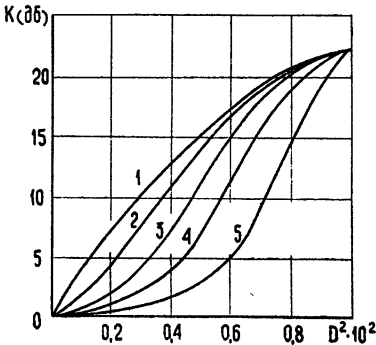


Рис. 3. Зависимость коэффициента поглощения от тока луча для различных входных сигналов ($N=5$)

$$(E_{\text{вх}} / \gamma F_0 E_0 = 0,2 \cdot 10^{-2} (1); 0,4 \cdot 10^{-2} (2); 0,6 \cdot 10^{-2} (3); 0,8 \cdot 10^{-2} (4); 1 \cdot 10^{-2} (5)).$$

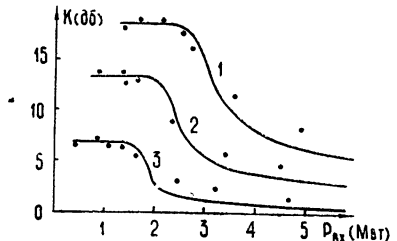
входных сигналах коэффициент поглощения слабо зависит от тока. Это связано с тем, что при малых токах луча в режиме насыщения электроны оседают на электроды системы, не доходя до коллектора. С ростом тока электроны проходят участок взаимодействия полностью, и уже здесь коэффициент поглощения будет резко зависеть от тока

На рис (4) изображены теоретические и экспериментальные зависимости коэффициента поглощения ЭАМ на ОБЦВ от входной мощности для электронного аттенюатора, описанного в [1]. Из рис. 4 видно, что с ростом входного сигнала коэффициент поглощения сначала остается постоянным (линейный режим), а затем начинает уменьшаться (нелинейный режим). При этом, чем меньше ток луча (D^2), тем быстрее

Рис. 4. Зависимости коэффициента поглощения от входной мощности при различных токах луча

$$(f=1500 \text{ МГц}, B_0=550 \text{ гс}; V_c=30 \text{ в}).$$

— теория: $I_0=140 \text{ мкА}$ (1); 100 мкА (2); 50 мкА (3), ... — эксперимент.



(при меньших входных сигналах) наступает насыщение электронного аттенюатора. Как видно, наблюдается удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных результатов. Некоторое расхождение объясняется, по-видимому, тем, что при расчетах не учитывалась статическая циклоидальность луча, которая на практике, очевидно, имела место.

Интересно отметить, что одновременно с уменьшением коэффициента поглощения ЭАМ с ростом входного сигнала начинает течь ток на положительный электрод системы, что подтверждает сделанные ранее для взаимодействия на ОБЦВ теоретические выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Гурзо, М. Н. Куликов, В. С. Стальмахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 8, 1236 (1968).
2. П. Л. Капица, Электроника больших мощностей, изд. АН СССР, М., 1962.
3. В. Н. Галлимулин, П. В. Романов, Вопросы радиоэлектроники, сер. 1; Электроника, 12, 2 (1964).
4. J. Feinstein, G. Kino, Proc. IRE, 45, № 10, 1364 (1957).

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
7 апреля 1969 г.

ХРОНИКА

КОНФЕРЕНЦИЯ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ И СПЕЦИАЛИСТОВ ГОРОДОВ
ПОВОЛЖЬЯ ПО ВОПРОСАМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОТЕХНИКИ

В феврале 1970 г. в г. Куйбышеве состоялась конференция молодых ученых и специалистов городов Поволжья) по вопросам статистической радиотехники, посвященная 100-летию со дня рождения В. И. Ленина. Конференция была организована Куйбышевским авиационным институтом совместно с секцией НТО РЭС им. А. С. Попова по инициативе городского совета молодых ученых и специалистов.

Методы статистической радиотехники привлекают в последнее время все большее внимание как в центральных, так и в периферийных научно-исследовательских организациях страны. В частности, в городах Поволжья целый ряд вузов, научно-исследовательских институтов и промышленных предприятий занимаются решением проблем, требующих использования методов статистической радиотехники. В этой связи особое значение приобретает установление более тесных контактов между отдельными исследовательскими организациями и предприятиями, осуществляемых в масштабе одного экономического района. Подобные соображения и послужили основным поводом для организации настоящей конференции.

В работе конференции приняли участие молодые ученые городов Горького, Казани, Куйбышева, представляющие 12 организаций. За три дня в работе конференции приняли участие свыше 150 человек. Всего было заслушано 27 докладов. Конференция открылась докладом Д. Д. Кловского, в котором обсуждались основные тенденции развития статистических методов в радиотехнике.

Первое заседание было посвящено вопросам оптимального приема сигналов и оценке помехоустойчивости и эффективности систем передачи информации. Заслушанные доклады вызвали широкое обсуждение. Отмечалось теоретическое и практическое значение поисков оптимальных приемных устройств в каналах с переменными параметрами и в каналах со специфическими аддитивными помехами. Этим вопросам были посвящены доклады В. А. Бочкарева и В. А. Сойфера, Ю. Н. Бабанова, В. И. Кривошеева и Л. А. Соколовой, Ш. М. Чабдарова и А. Е. Михайлова, И. С. Нугманова, В. П. Омшина.

Тематика второго заседания определялась разделом статистической радиофизики, изучающим физические явления при прохождении сигналов и шумов через линейные и нелинейные радиотехнические звенья. С большим вниманием были заслушаны доклады В. А. Лоссовского, П. И. Ильина, В. Н. Домрачева, в которых исследовалось воздействие сигналов и шумов на нелинейные инерционные устройства. Отмечались оригинальные результаты, полученные В. В. Семеновым, М. С. Сандлером, Л. Г. Шепелевич в измерении и исследовании флуктуаций в колебательных системах. Широкую дискуссию вызвал доклад А. В. Якимова, в котором предлагалась оригинальная модель фликкерных шумов. Доклады Г. Н. Бочкова о статистической неустойчивости и М. А. Кораблина об оценках вероятностей были встречены участниками конференции с живым интересом и вызвали множество вопросов.

Третье заседание конференции было посвящено вопросам синтеза и генерирования процессов с заданными статистическими характеристиками. В докладах Ш. М. Чабдарова, В. С. Урецкого и В. И. Сапарова содержались интересные сведения о разработанных и созданных авторами генераторах случайных сигналов. В выступлениях отмечалась большая практическая значимость разработок и оригинальность инженерных решений.

Доклады В. И. Поповкина и А. Н. Игнатъева, Б. А. Есипова содержали теоретическое исследование методов синтеза сигналов с заданными корреляционными свойствами. Доклады вызвали широкую дискуссию о методах синтеза сигналов с заданными свойствами и о путях технической реализации предложенных авторами методов. В докладе В. Н. Володина была сделана постановка интересной задачи поиска широкополосных сигналов, инвариантных и частотно-временных сдвигов. Доклады И. Л. Дороднова и Б. И. Николаева показали новые реальные возможности повышения помехоустойчивости и эффективности коротковолновых систем связи. Исследованию и применению статистических характеристик коротковолнового канала посвящались работы В. В. Ермистова и Ю. Н. Еремينا. Отмечались интересная по-

становка задачи и путь решения ее, содержащийся в докладе И. В. Карманова и Ш. М. Чабдарова

Проведение конференции в сильной степени способствовало установлению полезных контактов, взаимному ознакомлению с научными проблемами и полученными результатами, а также способствовало улучшению координации усилий молодых научных работников и научных направлений коллективов.

Учитывая актуальность тематики и интерес к ней со стороны научной общественности городов Поволжья, было принято решение об ежегодном проведении подобных конференций в Ленинские дни и широком привлечении к участию в них различных научно-исследовательских организаций.

Очередную конференцию намечено провести в 1971 году в г. Казани.

М. А. КОРАБЛИН

В. А. САЙФЕР
