

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Крупнов А. Ф. Миллиметровая и субмиллиметровая радиоспектроскопия (Обзор)	961
Шарадзе З. С. Перемещающиеся возмущения в $F$ -области ионосферы и спорадический слой $E$	1001
Кондратенко А. Н., Шапгала В. Г. О нелинейном взаимодействии волн в ограниченной магнитоактивной плазме	1012
Гуревич Г. Л. К теории генераторов бегущей волны оптического диапазона	1019
Андреев Г. А. Обнаружение слабых сигналов по выбросам огибающей	1029
Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С. Размытие светового пучка в турбулентной среде	1039
Воробьев В. В. Уширение светового пучка в нелинейной среде со случайными неоднородностями показателя преломления	1053
Кляцкин В. И., Татарский В. И. К теории распространения световых пучков в среде со случайными неоднородностями	1061
Кляцкин В. И. О продольных корреляциях поля световой волны, распространяющейся в среде со случайными неоднородностями	1069
Вайцель В. И., Хмелевцов С. С. Исследование когерентности излучения интерференционным методом	1072
Бонч-Осмоловский А. Г., Перельштейн Э. А. Продольные неустойчивости в кольцевых заряженных пучках I. Эффект отрицательной массы	1080
Бонч-Осмоловский А. Г., Перельштейн Э. А. Продольные неустойчивости в кольцевых заряженных пучках II Радиационная неустойчивость	1089
Романов П. В., Рошаль А. С., Галимуллин В. Н. О расчете методом Монте-Карло плоского электронного потока в скрещенных полях	1096

### Краткие сообщения и письма в редакцию

Кондратьев И. Г., Марков Г. А. Об учете влияния поглощения на характеристики поверхностных волн в изотропном плазменном слое	1106
--	------

### Х р о н и к а

Международный симпозиум по теории электромагнитных волн	1109
Межвузовская научная конференция студентов по радиофизике	1110

УДК 538.56 : 543.42

## МИЛЛИМЕТРОВАЯ И СУБМИЛЛИМЕТРОВАЯ РАДИОСПЕКТРОСКОПИЯ

(Обзор)

А. Ф. Крупнов

### СО Д Е Р Ж А Н И Е

1. РАДИОСПЕКТРОСКОПИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ МИЛЛИМЕТРОВОГО И СУБМИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНОВ . . . . .	962
2. МЕТОДЫ МИЛЛИМЕТРОВОЙ И СУБМИЛЛИМЕТРОВОЙ РАДИОСПЕКТРОСКОПИИ . . . . .	968
а) Газовая радиоспектроскопия . . . . .	
б) Радиоспектроскопия повышенной разрешающей силы . . . . .	971
в) Лазерная радиоспектроскопия . . . . .	978
3. РАДИОАППАРАТУРА МИЛЛИМЕТРОВОЙ И СУБМИЛЛИМЕТРОВОЙ РАДИОСПЕКТРОСКОПИИ . . . . .	984
4. ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МИЛЛИМЕТРОВОЙ И СУБМИЛЛИМЕТРОВОЙ РАДИОСПЕКТРОСКОПИИ . . . . .	989

Радиоспектроскопия в настоящее время стала классическим разделом физики. Основные принципы и многочисленные результаты радиоспектроскопии изложены в ряде книг [1-5]; ее методы находят применение в самых различных областях исследований, таких как изучение свойств ядер, строения и свойств молекул и веществ, в радиоастрономии, квантовых стандартах частоты, мазерах, фундаментальных физических исследованиях (опыт Лэмба, измерение скорости света и т. д.), в химическом и изотопном анализе и пр. Сейчас основным направлением развития радиоспектроскопии является продвижение во все более коротковолновые области, использование мазерных принципов и нелинейных явлений.

Спектральные линии газов особенно обильны и сильны в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн, что делает эти диапазоны весьма перспективными как для изучения спектров веществ, так и для создания практических устройств, использующих спектральные линии. Однако этот диапазон наиболее труднодоступен технически. Освоение его было начато Лебедевым ( $\lambda = 6$  мм, 1895 г. [6]) и Глаголевой-Аркадьевой ( $\lambda = 0,082 \div 50$  мм, 1922 г. [7]). Собственно радиоспектроскопические исследования в указанном диапазоне стали развиваться начиная с 1946—1947 гг. с переходом от сплошного к монохроматическому спектру излучения (использовались гармоники генераторов сантиметрового диапазона). Большая роль в таких исследованиях принадлежит Горди, продвинувшемуся к 1959 г. до  $\lambda = 0,5$  мм. Этот этап отражен в [1, 3, 5], а также в обзоре [8].

В настоящее время, по нашему мнению, можно говорить о новом этапе освоения миллиметрового и субмиллиметрового диапазона, который характеризуется, в основном, появлением первичных источников монохроматического излучения достаточной мощности. Развитие принципа мазера, созданного Басовым, Прохоровым и Таунсом [9], привело в 1964 г. к созданию первых квантовых генераторов субмиллиметрового

диапазона [10, 125]. В 1965 г. появилось сообщение о создании электронных генераторов с длиной волны до  $\lambda \approx 0,5$  мм, а в 1969 — до  $\lambda \approx 0,2$  мм [11, 12]. Типичные мощности этих источников составляют от долей милливатта до сотен милливатт. На несколько порядков большие мощности доступны созданным в 1965 г. электронным генераторам нового типа — МЦР (см. обзор [13]). В эти же годы усовершенствовалась приемная техника рассматриваемых диапазонов. В 1963—1968 гг. был создан ряд низкотемпературных приемников высокой чувствительности [14—16] (см. также обзор [7]); в 1968 г. диапазон детектора с точечным контактом был расширен до длины волны 10 микрон [18]. Совершенствуются СВЧ элементы [19], важнейшим из которых является предложенный в [20] резонатор Фабри—Перо. Все это послужило мощным толчком дальнейшим исследованиям в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах.

Имеющиеся на русском языке книги по радиоспектроскопии вышли в свет достаточно давно (последняя [3] издана в 1954 г., переведена на русский в 1959 г.) и, естественно, не отражают современного состояния такой быстро развивающейся области исследований, какой является миллиметровая и субмиллиметровая радиоспектроскопия. Это одна из причин, делающих, по нашему мнению, полезным написание настоящего обзора. Другой причиной является то, что радиоспектроскопия выполняла (и выполняет) важную роль в освоении этих диапазонов. Ряд разработанных ею методик и устройств может найти большее, чем чисто радиоспектроскопическое, применение. Примерами могут служить недавние успехи в стабилизации и умножении частоты, позволившие практически поставить вопрос о связи оптического и радиодиапазонов [21—23, 200—203, 245, 246].

Настоящий обзор посвящен развитию миллиметровой и субмиллиметровой радиоспектроскопии газов за последние десять лет; более ранние данные приведены в [8], а также в [1, 3]. Значительная библиография, включающая работы до 1965 г., содержится в [5] (см. также [243]). Как принято в большинстве работ, будем рассматривать в качестве миллиметрового и субмиллиметрового диапазон длин волн примерно от 10 до 0,1 мм. Мы не будем касаться таких достаточно самостоятельных ветвей радиоспектроскопии, как исследования поглощения в атмосфере (см., например, обзор [24]) или радиоастрономические исследования дискретных линий (например, [238]).

## 1. РАДИОСПЕКТРОСКОПИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ МИЛЛИМЕТРОВОГО И СУБМИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНОВ

Миллиметровый и субмиллиметровый диапазоны имеют особенности, связанные как с собственно спектрами газов, так и с конструкцией экспериментальных установок, которые во многом определяют направления радиоспектроскопических исследований в этом диапазоне. Рассмотрим важнейшие из них.

Большая широта диапазона приводит к большей «информативности» его и в радиоспектроскопическом отношении (если считать априори, что число спектральных линий пропорционально ширине интервала частот). В сочетании с широкими пределами перестройки генераторов [11, 12] это дает возможность исследовать сразу большую часть вращательного спектра молекул, повышая точность и надежность результатов.

В этом диапазоне находятся вращательные спектры легких (обладающих малыми моментами инерции) полярных молекул. Напомним вкратце характерные особенности спектра. Вращательный спектр линейной молекулы (ядра которой лежат на одной прямой) состоит из ряда эквидистантных (если не учитывать центробежных эффектов) линий, начинающихся на частоте  $2B$ ; расстояние между линиями по частоте

также равно  $2B$ . Такой спектр получается из-за квантования величины момента количества движения молекулы  $\omega I = J\hbar$ , где  $\omega$  — частота вращения,  $I$  — момент инерции,  $J$  — целое число,  $\hbar$  — постоянная Планка. Энергия вращения равна при этом  $W = hBJ(J + 1)$ , где  $B = h/8\pi^2 I$  — вращательная постоянная молекулы, выражающаяся обычно в *Мгц*. Частота, соответствующая разрешенным электродипольным переходам  $J \leftrightarrow J + 1$ , получается равной

$$\nu = 2B(J + 1). \quad (1)$$

Молекула типа симметричного волчка (имеющая уже три момента инерции, два из которых равны между собой) дает спектр, отличающийся от спектра линейной молекулы тем, что одиночные линии теперь расщепляются на группы близко расположенных линий, каждая из которых принадлежит переходу с тем же значением  $J$ , но различными проекциями  $K$  момента  $J$  на ось симметрии молекулы. Эти линии не совпадают из-за центробежных эффектов. Уровни с  $K \neq 0$  вырождены по знаку  $K$ . Принципиальное отличие заключается в появлении нерезонансного поглощения при  $\nu = 0$ , связанного с переходами между вырожденными по  $K$  уровнями.

При переходе к молекуле типа асимметричного волчка (у которой все три момента инерции различны) в спектре происходят дальнейшие изменения. В случае слабой асимметрии, когда еще можно приближенно пользоваться квантовым числом  $K$ , снимается вырождение линий по знаку  $K$ ; каждая из линий (кроме  $K=0$ ) расщепляется на две. Расщепление велико для малых  $K$  и резко уменьшается при переходе к большему  $K$ ; оно растет с ростом  $J$ . Линии спектра все еще сгруппированы в соответствии с числом  $J$ , но занимают больший участок спектра. Каждая группа линий обрамляется линиями с  $|K| = 1$ . От области нерезонансного поглощения у  $\nu=0$  «отщепляются» низкочастотные линии, соответствующие переходам между  $K$ -дублетами. И, наконец, в случае сильно асимметричного волчка линии, принадлежащие группам с различным  $J$ , перемешиваются. Картина спектра сильно усложняется (еще и потому, что появляются новые правила отбора). Методика расчета спектров известна [1–5].

Таким образом, для исследования вращательного спектра и структуры легких молекул типа линейных или симметричных волчков необходимо проникновение в миллиметровую и субмиллиметровую область спектра. Почти в такой же степени это относится и к легким асимметричным волчкам, так как исследование низкочастотного спектра последних не дает полной информации о молекулярных постоянных (например, о центробежном возмущении и т. д.). Класс легких молекул весьма важен своими практическими приложениями, так как именно этим молекулам принадлежат наиболее интенсивные спектральные линии. Повышенная интенсивность линий легких молекул обусловлена тем, что в интервале энергий  $\epsilon \leq kT$ , который связан с тепловым движением, у них умещается сравнительно небольшое число уровней, и доля молекул на каждом из заселенных уровней значительна.

Перечислим несколько характерных представителей класса легких молекул вместе с важнейшими областями их практических приложений:  $\text{H}_2\text{O}$  (поглощение в атмосфере [24]; обнаружена в космосе [25], субмиллиметровый лазер [10]);  $\text{NH}_3$  (пучковые мазеры [9, 26]; обнаружен в космосе [27]; инфракрасный лазер [28]);  $\text{HCN}$  (пучковый мазер [29]; субмиллиметровый лазер [10]; параметрический усилитель [30]);  $\text{H}_2\text{CO}$  (пучковый мазер [31]; обнаружен в космосе [32];  $\text{H}_2\text{S}$  (пучковый стандарт частоты — радиоспектроскоп [33]; субмиллиметровый лазер [34]) и т. д. Важной разновидностью легких молекул являются «осколки» молекул — радикалы



типа ОН, NO и т. п., получающиеся в низкотемпературной плазме (пламени, разряде), при химических реакциях и т. п. Наличие электронного момента количества движения у радикалов делает их спектр отчасти похожим на спектр асимметричного волчка. Космическое радиоизлучение радикала ОН обнаруживает мазерные свойства, причем механизм инверсии пока неясен [35].

Исследование более высокочастотных переходов и высших энергетических уровней молекул, обнаруженных в космосе, может дать ценные сведения о физических условиях в космосе. В случае формальдегида, например, имеющего, подобно водороду, орто- и пара-модификации, в космосе наблюдался нижний переход орто-модификации  $1_{10} - 1_{11}$  [32]. Представляет интерес наблюдение соответствующего нижнего перехода пара-модификации  $0_{00} - 1_{01}$  на волне  $\lambda = 4,12$  мм в связи с возможным влиянием процессов орто-пара-конверсии при низких температурах. Отметим, что для вращательного спектра, в отличие, например, от колебательного, интенсивности линий могут быть строго и однозначно связаны с населенностью уровней и дипольным моментом молекулы.

Рассматриваемый диапазон характеризуется большой интенсивностью спектральных линий. Зачастую линии так интенсивны, что большая часть мощности сигнала, проходящего через газ, может поглощаться на длинах пути порядка сантиметров. Кроме зависимости интенсивности линий от класса молекулы, отмеченной ранее, здесь важна также зависимость интенсивности вращательных линий каждой отдельной молекулы от частоты. Мощность, поглощаемая газом, равна энергии кванта данной частоты, умноженной на число молекул, способных участвовать в поглощении, и на вероятность данного перехода молекулы. Вероятность перехода можно в первом приближении считать не зависящей от частоты. Число молекул, участвующих в поглощении, при  $h\nu \ll kT$  увеличивается пропорционально квадрату частоты для линейных молекул, так как растет статистический вес уровня, связанный с вырождением по ориентациям, как  $2J + 1$ , и разность населенностей уровней, обуславливающая поглощение, как  $h\nu/kT$ . Для симметричного и асимметричного волчков рост ориентационного вырождения компенсируется расщеплением уровня с данным  $J$  на  $J + 1$  (или  $2J + 1$ ) подуровней с различными  $K$ .

Таким образом, суммарное действие указанных причин приводит к росту интенсивности вращательных линий с частотой  $\nu$  пропорционально  $\nu^3$  для линейной молекулы и  $\nu^2$  для симметричного и асимметричного волчков. Такой рост интенсивности, разумеется, не беспредельно; населенность уровней обрезается больцмановским множителем  $\exp(-W/kT)$ . Однако для большинства молекул рост интенсивности происходит в большей части рассматриваемого диапазона. Высокая интенсивность линий облегчает исследования; кроме того, становится возможным применение линий в устройствах типа фильтров, аттенюаторов, модуляторов, усилителей (см. обзор [30]).

Упомянем еще о значительном изменении диэлектрической постоянной газа в области дисперсии спектральной линии. Максимальное изменение диэлектрической постоянной равно  $\Delta\epsilon = \epsilon_{\max} - \epsilon_{\min} = \lambda\gamma_{\max}$ , где  $\gamma_{\max}$  — максимальный коэффициент поглощения данной линии в  $см^{-1}$ ,  $\lambda$  — длина волны в  $см$ . Для наиболее интенсивных линий в районе  $\lambda \approx 1$  мм  $\Delta\epsilon$  может достигать величины  $\sim 5 \cdot 10^{-2}$  в интервале давлений от долей миллиметра до сантиметров ртутного столба.

Миллиметровая и субмиллиметровая области весьма удобны для исследования эффектов, связанных с жесткостью молекул, таких как центробежное возмущение и колебательно-вращательное взаимодействие, так как частота линий вращательного спектра растет пропорцио-

нально  $J$ , а поправки к частоте из-за жесткости — как  $J^3$  или даже  $J^5$ . Расчет эффектов жесткости для линейных и симметричных молекул имеется в [1<sup>-3</sup>]; удобные формулы для сложного случая асимметричного волчка приведены в [5]. Измерения в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах показали недостаточность первого приближения теории возмущений для описания эффектов жесткости в легких асимметричных волчках (см, например, [36, 37, 124]). Таким образом, дальнейшие исследования эффектов жесткости необходимы для правильного описания спектров, а также они позволяют количественно изучать валентные силы, связывающие атомы в молекуле.

Кроме вращательных, в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах могут наблюдаться и некоторые другие виды спектров атомов и молекул. Радиоспектроскопия дискретных линий в низкотемпературной плазме типа пламени или газового разряда дает возможность прецизионного исследования переходов между возбужденными состояниями атомов и молекул, процессов возбуждения и релаксации соответствующих уровней энергии, резонансной связи уровней, а также неравновесных состояний газа. Мощный толчок этим исследованиям был дан созданием газовых лазеров субмиллиметрового диапазона, работающих на указанных переходах. Молекулярные субмиллиметровые лазеры работают на колебательно-вращательных переходах между высшими колебательными состояниями молекул; атомарные субмиллиметровые лазеры — на переходах между высшими электронными уровнями, характеризующимися одним и тем же главным квантовым числом  $n$  и различными орбитальными квантовыми числами  $l$ .

Представляющие наибольший интерес для радиоспектроскопии вопросы измерения и отождествления лазерных линий, а также тесно связанные с ними вопросы получения инверсной населенности в лазерах будут рассмотрены ниже (разд. 2); здесь мы остановимся лишь на нескольких примерах. Неравновесное излучение на переходах  $\lambda$ -удвоения радикала  $\text{OH}$  в пламени низкого давления в диапазоне  $\lambda = 8$  мм было обнаружено в [38]. С помощью лазера на воде частоты переходов  $5_{23}—5_{50}$  (колебательный переход  $100—020$ ,  $\lambda = 220$  мк) и  $6_{42}—6_{61}$  (колебательный переход  $001—020$ ,  $\lambda = 118$  мк) были измерены с точностью  $\sim 10^{-7}$ , что на несколько порядков превышает точность инфракрасных измерений [22, 39]. Большой интерес представило бы прецизионное измерение переходов  $3^1P \rightarrow 3^1D$  ( $\lambda = 95,8$  мк) и  $4^1P \rightarrow 4^1D$  ( $\lambda = 216,3$  мк) в лазере на гелии в связи с тем, что эти результаты для гелия могут быть сопоставлены с точным решением соответствующей квантовомеханической задачи [40]. Обзор по лазерной спектроскопии имеется в [41]; ряд вопросов исследования плазменных излучений рассмотрен в [42]. В радиоастрономии представляют также интерес переходы между весьма высокими ( $n \sim 100$ ) состояниями атома водорода [43] и спектры диэлектронной рекомбинации (обзор [44]).

В сантиметровом-дециметровом диапазонах длин волны широко известны магнитные переходы, обусловленные взаимодействием двух магнитных моментов, один из которых равен по порядку величины магнетону Бора (момент электрона), а другой — ядерному магнетону ( $\sim 10^{-3}$  магнетона Бора). Примерами могут служить переходы между уровнями сверхтонкой структуры атома водорода ( $\lambda = 21$  см) или некоторых металлов (Cs, Rb, Tl, ...), многие из которых используются в стандартах частоты [4, 45]. Аналогичные спектры, обусловленные взаимодействием моментов, каждый из которых порядка магнетона Бора, лежат уже в миллиметровом-субмиллиметровом диапазонах. Примером может служить аналог водорода — атом позитрония, переход между уровнями сверхтонкой структуры которого лежит в диапазоне  $\lambda \simeq 1,5$  мм [46]. Позитроний нестабилен; однако орто-позитроний, благодаря запрету на двух-

квантовую аннигиляцию, имеет в  $\sim 10^3$  большее время жизни, нежели пара-позитроний. Индуцирование орто-пара-переходов изменяет интенсивность аннигиляции, что и может служить индикатором резонанса.

В настоящее время величина сверхтонкого расщепления позитрония, представляющая существенный интерес для теоретической физики, измерялась косвенным путем — индуцированием переходов между подуровнями верхнего уровня сверхтонкой структуры в сильных магнитных полях (частоты  $\sim 2$  Гц [46]). Прямые измерения на частотах  $\sim 200$  Гц, по-видимому, позволят уточнить величину расщепления.

Другим примером является известный спектр кислорода  $O_2$  [1-3]. Недавно был уточнен спектр кислорода, обусловленный переходами внутри одного вращательного состояния (60 и 120 Гц) [47, 48], и впервые наблюдался переход с изменением вращательного состояния на частоте 424 Гц [49]. Подобные виды спектров сравнительно мало исследованы; однако они представляют большой интерес, если учесть, что их низкочастотные аналоги дали возможность создать лучшие стандарты частоты.

Для молекул в рассматриваемом диапазоне могут наблюдаться спектры низкочастотных (крутильных, изгибных) колебаний, заторможенных малыми потенциальными барьерами. Проблема исследования потенциальных барьеров в молекулах в более широком плане сводится к изучению сил между атомами, не имеющими непосредственной химической связи. Эти силы определяют особенности конфигурации больших молекул типа протенинов и т. д. Радиоспектроскопия внесла основной вклад в исследование заторможенных движений в молекулах [5, 50]; с расширением диапазона появится возможность более подробного изучения и тех спектров, которые в настоящее время исследуются методами инфракрасной спектроскопии.

Представляет интерес исследование спектра димеров воды  $(H_2O)_2$  [24], увеличивающих поглощение миллиметровых и субмиллиметровых волн в атмосфере. В сущности, это обычный спектр слабо асимметричного волчка с внутренним вращением; особыми являются лишь условия его появления. Концентрация димеров пропорциональна квадрату концентрации мономеров; это приводит к тому, что при малых давлениях концентрация димеров крайне мала, а при больших давлениях линии расширяются и, сливаясь, делают невозможным наблюдение отдельных линий. Поэтому до сих пор отсутствуют прямые наблюдения линий димеров.

Рассмотрим теперь принципиальные особенности радиоспектроскопов миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов, благодаря которым этот диапазон является оптимальным для ряда радиоспектроскопических исследований, а также для некоторых применений радиоспектроскопии.

В миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах есть возможность получения наиболее добротных линий, доступных радиометодам, что имеет большое значение как для радиоспектроскопии, так и для создания стандартов частоты. Дело в том, что в большинстве типов стандартов частоты величина абсолютной ширины спектральной линии не связана непосредственно с частотой (ввиду того, что в них исключен эффект Доплера). Ширина линии определяется временем взаимодействия  $T$  молекулы с полем СВЧ как  $\Delta\nu \sim 1/T$ . При использовании, например, метода разнесенных полей Рамзея [4] нет принципиальных ограничений на величину  $T$ . Добротность же линии, определяющая свойства линии как стандарта частоты, растет с частотой ( $Q = \nu/\Delta\nu$ ). Иначе говоря, в существующих стандартах частоты выгоднее использовать все более высокочастотные переходы тех же молекул или атомов, для которых уже отработана техника длинных пучков, индикаторы и т. д.

Например, в пучковых мазерах на  $\text{H}_2\text{CO}$  при отношении рабочих частот  $\sim 10^5$  абсолютная ширина линии изменилась всего в 1,5 раза [31, 51]. В недавней работе [33] в пучковом устройстве на переходе  $1_{10} - 1_{01}$   $\text{H}_2\text{S}$  ( $\lambda = 1,78$  мм) получена добротность линии  $Q = 6 \cdot 10^8$ , что сравнимо с наивысшей достигнутой в настоящее время добротностью  $\sim 10^9$  для водородного мазера. В [52] рассмотрено подобное устройство на аммиаке. Дальнейшее повышение частоты может привести к еще более добротным линиям (по оценкам, до  $10^{11}$ ), однако следует заметить, что это потребует значительного развития техники субмиллиметрового диапазона.

Рассматриваемая область частот наиболее удобна для прецизионного определения скорости света как произведения

$$c = \lambda \nu,$$

так как в этом диапазоне можно измерить как частоту — сравнением с соответствующим стандартом, так и длину волны — методами инфракрасной спектроскопии (через расстояния и углы). Первыми работами в этом направлении являются [8, 53], где измерялась частота и длина волны одних и тех же переходов молекулы CO. При этом было получено  $c = 299\,792,8 \pm 0,4$  км·сек<sup>-1</sup>, что находится в согласии и сравнимо по точности с лучшими прямыми измерениями скорости света, хотя в этих работах и использовались сравнительно широкие линии в газах. Весьма перспективно здесь использование стабилизированного по частоте субмиллиметрового лазера. Мощности и когерентности существующих нестабилизированных субмиллиметровых лазеров уже достаточно для получения интерференции на длинах пути порядка полукилометра [54]. В [23] осуществлена фазовая автоподстройка частоты лазера на HCN ( $\lambda = 337$  мк) по умноженной частоте 5 Мгц стандарта, причем получена стабильность частоты  $\sim 10^{-8}$ . Отметим, что измерение более коротких (по сравнению с радиодиапазоном) длин волн в принципе можно осуществить более точно как из-за большей крутизны изменения фазы с расстоянием, так и потому, что с укорочением длины волны легче создать условия распространения, близкие к свободному пространству ( $v_{\text{ф}} = c$ ). Развитие исследований в этом направлении может привести к созданию единого стандарта времени — длины.

В миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах можно повысить точность измерений электрических дипольных моментов молекул. Радиоспектроскопический метод измерения дипольного момента основывается на измерении смещения частот компонент линии при наложении однородного электрического поля (эффект Штарка) и является самым точным. Например, радиоспектроскопически различаются величины дипольных моментов в разных колебательных состояниях или при различных изотопных замещениях в молекуле. Фактором, ограничивающим точность измерений, является неоднородность накладываемого электрического поля в различных частях установки, приводящая к расширению компонент линии и неопределенности их центров. В рассматриваемом диапазоне легко создать структуры достаточных размеров, почти идеальные с точки зрения однородности поля. К ним относятся штарк-ячейки из двух параллельных пластин, к которым приложено напряжение и между которыми распространяется сформированная рупорами волна [55]\*, и резонаторы Фабри — Перо [20]. Такие структуры на более длинных волнах должны быть весьма громоздкими и соответственно менее точными. Особенно перспективным является сочетание резонатора Фабри — Перо с молекулярным пучком (т. е. узкими линиями). Конструк-

\* В [55] на  $\lambda = 3,4$  мм была получена точность  $\pm 0,005$  дебая; в [138] на  $\lambda = 12$  мм —  $\pm 0,0002$  дебая (1 дебай =  $10^{-18}$  CGSE).

ция такого устройства приведена, например, в [56, 79]. Штарковские ячейки могут служить для создания эталона электрического напряжения; привлекательным при этом является как сведение измерения напряжения к частотным измерениям, так и достаточно большая величина эталонируемых напряжений (сотни и тысячи вольт) по сравнению с напряжениями в единицы вольт для нормальных элементов.

Наконец, благодаря большой интенсивности линий в рассматриваемом диапазоне можно использовать весьма малые по размерам поглощающие газовые ячейки (типичные размеры: длина 5—50 см, сечение  $\sim 1 \text{ см}^2$ ). Это облегчает, например, исследования нестабильных молекул [57—59, 241] (радикалов, промежуточных продуктов реакций), заполнение которыми больших объемов (типичная длина ячейки в сантиметровом диапазоне от единиц до десятков метров) встретило бы серьезные трудности. В малых ячейках легко создавать большие магнитные поля для исследования эффекта Зеемана [58], их можно сделать отпаянными для эталонирования частоты генераторов или волномеров по известным спектрам [60, 37] и т. д.

## 2. МЕТОДЫ МИЛЛИМЕТРОВОЙ И СУБМИЛЛИМЕТРОВОЙ РАДИОСПЕКТРОСКОПИИ

Как и во всякой спектроскопии, основными вопросами методики рассматриваемого диапазона (кроме расширения диапазона) являются получение большей разрешающей силы приборов и большей интенсивности наблюдаемых спектров. В исследуемом диапазоне, пограничном между радио- и оптическим, применяются как «классические» методы радиоспектроскопии, так и явно «оптические» (например, газовые лазеры, спектроскопия по «провалу Лэмба» и т. д.). В СВЧ структурах этого диапазона наряду с обычной волноводной широко используется квазиоптическая техника. Мы будем, в основном, рассматривать особенности этого диапазона, наиболее резко проявляющиеся в его коротковолновой части.

### а) Газовая радиоспектроскопия

Газовая радиоспектроскопия является наиболее «классической» и насчитывает наибольшее количество работ. В связи с простотой и универсальностью установки, позволяющей обычно легко менять объект исследования и перестраивать частоту в широких пределах, эта методика наиболее удобна для первичного исследования спектров, определения класса молекулы, получения с достаточной точностью значений вращательных и центробежных констант, а также данных об интенсивности и ширине линий молекулы. Частоты линий определяются обычно с точностью  $\sim 5 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-7}$ . Газовой радиоспектроскопии принадлежит основной вклад в исследование тысячи более или менее изученных молекул [61]. Точность определения межъядерных расстояний может доходить до  $\pm 0,00002 \text{ \AA}$  [62]. Блок-схема газового радиоспектроскопа приведена на рис. 1, а внешний вид радиоспектроскопа на  $\lambda = 1,2 - 0,5 \text{ мм}$  — на рис. 2.

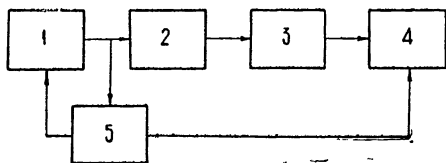


Рис. 1. Блок-схема газового радиоспектроскопа:

1—Источник излучения, 2—поглощающая газовая ячейка, 3—приемник, 4—индикатор, 5—устройство для контроля и измерения частоты

В качестве источника излучения, просвечивающего образец, используются либо гармоники сравнительно низкочастотного клистрона, полученные на кристаллическом умножителе [8], либо электронные генераторы миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов [11, 12], либо, наконец, субмиллиметровые лазеры [10]. В последнем случае, ввиду узких (несколько мегагерц) пределов перестройки частоты, трудно ожидать совпадения частот лазеров с линиями исследуемого вещества (если даже брать рабочее вещество лазера, так как в лазере переходы происходят между возбужденными состояниями). При несовпадении линий можно определять зависимость поглощения на крыле спектральной линии от различных параметров, получая информацию, например, о наличии димеров [63] или о процессах уширения линии [64]. В [65] линии исследуемого вещества перестраивались до совпадения с частотой лазера штарк-эффектом в пределах  $\sim 17$  Гц. Одной из важнейших задач спектроскопии с использованием лазерного источника является именно поиск совпадений линий поглощения газов с лазерными линиями, например, для стабилизации частоты лазеров (аналогично [66]). Вернемся к наиболее широко используемым спектроскопам с электронными источниками излучения. В [8] указаны основные достоинства источника с умножением частоты: широкий диапазон при использовании излучения на нескольких номерах гармоник, а также удобство измерения и стабилизации сравнительно низкой частоты первичного источника. Недостатками же его являются большая трудность достаточно эффективного умножения и, следовательно, весьма малая мощность излучения на гармониках. Это препятствует использованию, например, длинных ячеек для обнаружения слабых линий. При смене частоты приходится повторять трудоемкую процедуру настройки умножителя. При анализе сложных спектров следует помнить об одновременном присутствии излучения на ряде гармоник. Конструкция и работа такого источника, как более раннего, описана в [1, 3, 8] (см. также обзоры [67]). Применялись и плазменные умножители частоты [68].

Использование первичного электронного источника излучения нужного диапазона, обеспечивая запас по мощности, дает возможность значительно увеличить отношение сигнал/шум (например, как в [155]), и намного упрощает работу с установкой. Увеличение мощности позволяет исследовать слабые линии и повысить разрешающую способность газового радиоспектроскопа путем спектроскопии внутри доплеровской линии по узким провалам насыщения, что будет рассмотрено ниже. Пределы же электронной перестройки современных ЛОВ, достигающие октавы [11, 12], вполне достаточны для большинства задач. Недостатком

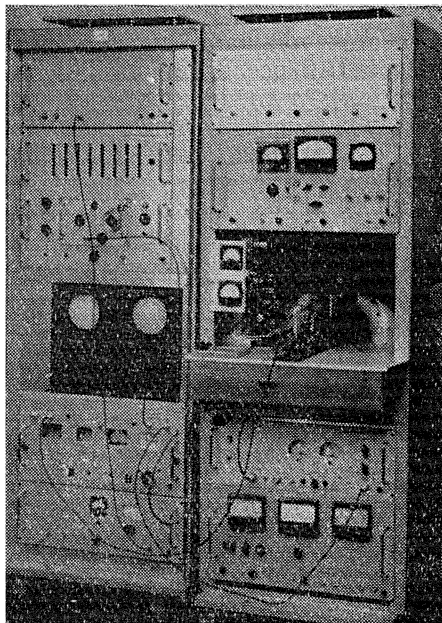


Рис. 2. Общий вид радиоспектроскопа на  $\lambda = 1,2 \div 0,5$  мм с кварцевым отсчетом частоты. Слева—система измерения частоты и индикаторы, справа—источник излучения (ЛОВ), ячейка, приемник и система умножения и сравнения частоты.

радиоспектроскопа с первичным источником излучения субмиллиметрового диапазона является необходимость создания отдельной цепочки умножения стабильной частоты до этого диапазона для измерения или стабилизации частоты ЛОВ. Однако требования к мощности выходного сигнала такой цепочки могут быть снижены благодаря возможности супергетеродинного приема метки частоты. Первыми радиоспектроскопическими исследованиями газов с таким источником являются работы [69–71, 37]; типичная фотография линий на  $\lambda \approx 0,6$  мм, полученная на установке рис. 2, приведена на рис. 3.

Следующей важной деталью газового радиоспектроскопа является поглощающая газовая ячейка. Для достижения наименьшей (доплеровской) ширины линии поперечные размеры ячейки должны быть достаточно велики, чтобы предотвратить уширение линии как из-за соударений со стенками, так и из-за насыщения.

Простые формулы для оценки этих эффектов имеются в [2]. Оптимальная длина ячейки определяется поглощением в ней; для сильных линий рассматриваемых диапазонов оптималь-

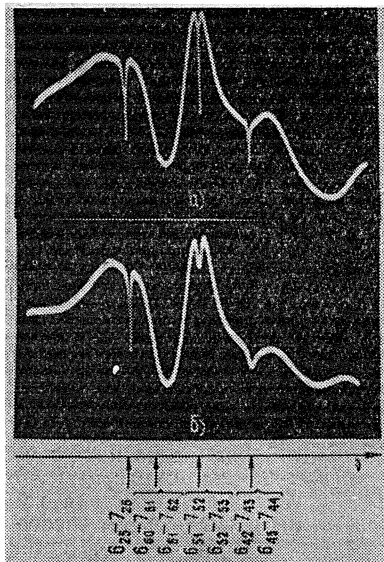


Рис. 3. Группа линий формальдегида  $\text{H}_2\text{CO}$  на  $\lambda = 0,6$  мм.

Обозначения линий приведены на рисунке. На рис. б к ячейке приложено неоднородное поле  $E \approx 1$  кв.см<sup>-1</sup>. Видно сильное действие поля на линии, соответствующие переходам между парами близких уровней ( $K$ -расщепления слабо асимметричного волчка).

ная длина будет порядка обратной величины коэффициента поглощения газа. Например, для аммиака на волне  $\lambda = 0,52$  мм оптимальная длина ячейки составляет  $\sim 15$  см.

Конструкция волноводных ячеек общеизвестна [1–3, 8]. В рассматриваемом диапазоне весьма резко проявляются резонансные свойства таких ячеек. Устранение мешающих резонансов достигается применением штарковского спектрографа или уменьшением ячеек. Наш опыт показал, что некоторые резонансные свойства СВЧ тракта можно использовать, например, для подстройки ЛОВ в провалах ее мощности. При использовании акустической индикации ячейка соединяется с микрофоном [155].

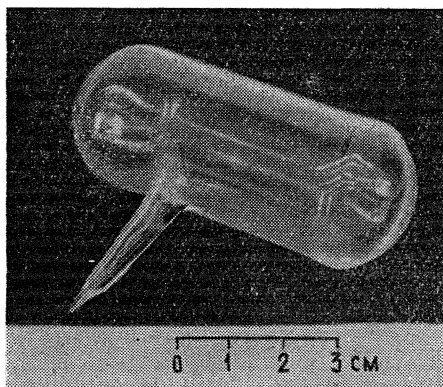
В штарковской ячейке из двух параллельных пластин удобнее всего применять стеклянные посеребренные пластины и кварцевые разделительные вкладыши, которые достаточно жестки и поддаются обработке с точностью до долей световой волны. СВЧ излучение направляется через ячейку рупорами и линзами. Во избежание краевых эффектов ширина пластин должна быть больше области СВЧ поля. Выбором поляризации излучения достигается возможность наблюдения как переходов с  $\Delta M = 0$  (электрические поля  $E$  ячейки и излучения параллельны), так и с  $\Delta M = \pm 1$  (поля  $E$  перпендикулярны).

В качестве компактной ячейки может быть использован резонатор Фабри—Перо. В [58] при исследовании эффекта Зеемана нестабильного радикала CS на  $\lambda = 3$  мм применялся полуконфокальный резонатор

Фабри — Перо с диаметром зеркал 3,8 см и расстоянием между ними 6 см, заключенный в стеклянную оболочку. Для замедления реакции поверхность зеркал покрывалась кварцем. При добротности, равной 2700, эффективная длина пути  $l_{эф} = Q\lambda/2\pi$  в резонаторе была около 1,3 м. Резонатор помещался между полюсами магнита. Малые размеры резонатора облегчали заполнение его нестабильным радикалом, получившимся в разряде перед резонатором, а также создание в нем полей до 15 000 гс.

Для ряда практических применений, таких как стабилизация частоты генераторов по линиям газов [70], измерение частоты линий сравнением с известными линиями других веществ [71], градуировка ЛОВ и волномеров, весьма удобны отпаянные газовые ячейки [37, 60]. На рис. 4 приведен вид использованной нами кварцевой отпаянной ячейки, наполненной парами формальдегида  $H_2CO$ , богатство и интенсивность линий которого, наряду со знанием их частот с точностью

Рис. 4. Кварцевая отпаянная ячейка, наполненная парами формальдегида при давлении  $\sim 0,1$  мм рт. ст. Для снижения потерь толщина кварца на торцах уменьшена до долей миллиметра.



$2 \cdot 10^{-6}$  вплоть до  $\lambda = 0,5$  мкм [37], делает удобным применение его спектра как опорного. При работе такая ячейка помещается в тракт СВЧ между двумя рупорами. Рис. 3 получен с ее помощью. Необходимо принимать меры против накопления электростатического заряда на кварцевых стенках, например, облучая ячейку кварцевой лампой, а затем экранируя ее. Для увеличения интенсивности линий ячейки часто охлаждают.

В работе [49] при наблюдении слабого магнитного перехода  $N = 1 \rightarrow 3$ ,  $J = 2 \rightarrow 2$  кислорода  $O_2$  ( $\lambda = 0,71$  мм) весьма удачно была использована низкая температура конденсации кислорода при малых давлениях. При работе ячейка охлаждалась до  $77^\circ K$  (жидкий азот), что значительно увеличивало интенсивность и снижало ширину линий. В результате удалось впервые наблюдать вращательный переход молекулы, не имеющей электродипольного момента, и прямым экспериментом определить вращательную постоянную кислорода.

Радиоаппаратура газовых спектроскопов будет рассмотрена ниже. Кроме упомянутых в тексте, методами газовой спектроскопии были выполнены работы [162–197]; исследовавшиеся вещества и диапазон частот указаны в ссылках.

#### б) Радиоспектроскопия повышенной разрешающей силы

Повышение разрешающей способности радиоспектроскопов привело, с одной стороны, к открытию весьма тонких взаимодействий в молекулах, таких как ядерная квадрупольная и магнитная структуры спектров, а также заторможенных внутренних движений в молекулах, а с



другой — к созданию повсеместно употребляющихся квантовых стандартов частоты [26, 45]. Поскольку в газовом радиоспектроскопе ширина линии в конечном счете определяется эффектом Допплера, рассматриваемые ниже методы повышения разрешающей способности направлены, по существу, на борьбу с доплеровским уширением линии. Экспериментально получено увеличение разрешающей силы на два-три порядка по сравнению с разрешающей силой газового радиоспектроскопа, предложены методы дальнейшего повышения разрешающей силы [33, 52, 72].

Обратимся вначале к выражению для формы спектральной линии отдельной свободной молекулы без насыщения. Форма линии определяется зависимостью вероятности перехода молекулы с уровня 1 на уровень 2,  $P_{12}$ , от частоты сигнала, просвечивающего образец,  $\omega_c$ , [4]. Вероятность перехода равна [73]

$$P_{12} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_{21} \exp(-i\omega_{12}t) dt \right|^2 = \frac{\mu_{21}^2}{\hbar^2} \left| \int_0^{\tau} E(t) \exp(-i\omega_{12}t) dt \right|^2, \quad (2)$$

где  $\omega_{12}$  — частота перехода молекулы,  $V_{21} = \mu_{21} E(t)$  — матричный элемент возмущения,  $\tau$  — время действия поля СВЧ (время пролета молекулой области поля, время между соударениями и т. д.). Выражение (2) есть не что иное, как умноженная на  $\mu^2/\hbar^2$  спектральная плотность мощности поля  $E(t)$ , действующего на молекулу, на частоте  $\omega_{12}$ , т. е. форма спектральной линии определяется просто спектром импульса СВЧ поля, действующего на молекулу [74]. Молекула ведет себя как «спектр-анализатор», отклик которого пропорционален составляющей спектра мощности сигнала на его резонансной частоте (см. рис. 5а, б).

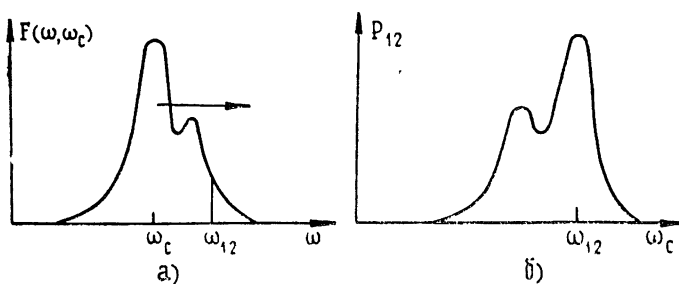


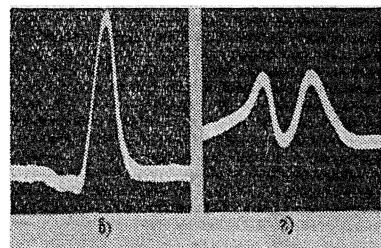
Рис. 5. Форма спектральной линии при пролете молекулой области поля СВЧ.

а) Спектр СВЧ импульса, действующего на молекулу,  $F(\omega, \omega_c)$ . Отклик молекулы пропорционален составляющей спектра на  $\omega = \omega_{12}$ .

б) Отклик молекулы в зависимости от частоты сигнала  $\omega_c$  (форма линии);  $P_{12} \sim F(\omega_{12}, \omega_c)$ .

в) Экспериментально полученная форма линии в пучке молекул, пролетающем через резонатор Фабри-Перо с одним максимумом поля вдоль траектории молекул (основной тип колебания).

г) Расщепление линии при высшем типе колебаний с двумя максимумами поля вдоль траектории молекул [96].



Для молекулы, движущейся в поле плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ ,  $E(t) = E_0 \cos(\omega_c t - Kz)$ ,  $z = v_z t$  и

$$P_{12} = \frac{\mu_{12}^2 E_0^2 \pi \tau}{4\hbar^2} \frac{\sin^2[\omega_c(1 - v_z/c) - \omega_{12}]\tau/2}{\pi[\omega_c(1 - v_z/c) - \omega_{12}]^2 \tau/2}, \quad (3)$$

где  $\tau$  — длительность взаимодействия с волной. Второй множитель в (3) определяет линию с центром на  $\omega_c = \omega_{12}/(1 - v_z/c)$  и шириной  $\sim 1/\tau$  (при  $\tau \rightarrow \infty$  он стремится к  $\delta[\omega_c(1 - v_z/c) - \omega_{12}]$ ). Суммарный отклик ансамбля взаимодействующих молекул получается простым суммированием откликов отдельных молекул с соответствующими  $E(t)$ . В случае газа, например, усреднение (3) по максвелловскому распределению  $\exp(-mv_z^2/2kT)$  дает при  $1/\tau \ll K\alpha$  ( $K$  — волновой вектор,  $\alpha = (2kT/m)^{1/2}$  — наивероятнейшая скорость в газе) обычную доплеровскую форму линии.

Из (3) видно, однако, что для каждой  $\omega_c$  поле взаимодействует лишь с одной группой молекул, для которой  $v_z/c \simeq \omega_c - \omega_{12}$ , т. е. доплеровская линия, по существу, состоит из набора линий ширины  $\sim 1/\tau$ . Для повышения разрешающей способности нужно, во-первых, выделить одну из этих линий и, во-вторых, увеличивать время взаимодействия молекулы с полем  $\tau$ . При пучковых методах сужения линии оставляют лишь одну группу молекул, обрезая распределение молекул по  $v_z^*$ , в методе «провала Лэмба», наоборот, одна из групп молекул устраняется насыщением, и узкая линия наблюдается как провал в широкой доплеровской линии. Мы рассмотрим ниже оба метода более подробно.

Спектральная линия одной молекулы (или хорошо коллимированного пучка) в резонаторе не расщепится в том случае, если молекула в своем движении не выйдет из одного максимума поля СВЧ, т. е. практически будет лететь вдоль фронта плоской волны (см. рис. 5 в, г)\*\*. Для получения малой ширины линии фронт плоской волны должен быть достаточно протяженным. Он может быть создан «из кулочков», как в методе разнесенных полей Рамзея [4]; в этом случае форма линии может быть определена из (2) как спектр последовательности двух импульсов СВЧ длительностью  $\tau$ , разнесенных на время  $T$ , где  $\tau$  и  $T$  — времена пролета молекулой резонаторов и пространства между ними соответственно.

Вопросы формы и ширины линий в пучковых устройствах рассмотрены в [4]; мы подчеркнем лишь важность контроля типа колебаний в резонаторах Фабри—Перо для эффективного сужения линии (см. также [56]). Другой метод повышения разрешающей силы основывается на обнаруженном в газовых лазерах при определенных условиях узком провале насыщения в доплеровской линии («провал Лэмба» [75]). Точный расчет явления сложен [75]; мы дадим качественную картину. Для получения «провала Лэмба» необходимо взаимодействие с плоской стоячей волной (в резонаторе Фабри—Перо)\*\*\*.

Как отмечалось ранее, доплеровская линия состоит из набора линий шириной  $1/\tau$ . В случае стоячей волны (эквивалентной двум бегущим навстречу волнам) сигнал с частотой  $\omega_c$  будет взаимодействовать уже с двумя узкими группами молекул со скоростями  $|v_z/c| \simeq |\omega_c - \omega_{12}|$ . Увеличение интенсивности излучения (согласно изложенной выше картине) приведет к насыщению групп молекул, взаимодействующих с полем, не затрагивая остальных («прожигание дырок»). Решающим является существование избранной частоты  $\omega_{12}$ , на которой обе бегущие волны взаимодействуют с одной и той же группой молекул с  $v_z = 0$ , вдвое увеличивая степень насыщения. Форма линии в зависимости от

\* Форма линии при этом получается усреднением (3) по обрезанному распределению по скоростям

\*\* В водородном генераторе такое состояние достигается ограничением движения частиц специальными стенками, соударения с которыми не меняют состояния атома водорода [26, 45].

\*\*\* В пучковом методе работают и с бегущей волной [33].

$\omega_c$  при небольшом насыщении имеет провал шириной  $\sim 1/\tau$  на центральной частоте линии. Если доплеровская линия состоит из нескольких неразрешенных компонент, то такие провалы будут наблюдаться на центральных частотах каждой компоненты, что и дает возможность «спектроскопии внутри доплеровской линии» [76]. Плоский фронт достаточной протяженности (для увеличения  $\tau$ ) в этом случае также может быть создан из «кусочков» [77]\*.

Как уже отмечалось, пучковый метод и метод «провала Лэмба» очень близки. В сущности, в каждом из них происходит отбор молекул по скоростям, однако с технической стороны метод «провала Лэмба» более привлекателен. Использование газа вместо пучка весьма упрощает установку и, самое главное, позволяет работать с большими объемами вещества, т. е. увеличить отношение сигнал/шум. Дело в том, что оптимальная плотность мощности сигнала в обоих методах уменьшается с уменьшением ширины линии (провала), и увеличением общей мощности сигнала детектора возможно лишь вместе с увеличением объема вещества, взаимодействующего с полем. Создание же пучка соответствующего размера технически весьма трудно\*\*.

Перейдем к рассмотрению конкретных работ. Ввиду новизны метода «провала Лэмба», а также из-за того, что он требует достаточно мощного источника излучения, этот метод еще не применялся в радиоспектроскопии для разрешения линий. На рис. 6 приведен впервые наблюдавшийся радиоспектроскопически в [78] провал насыщения на линии  $2_2 - 3_{-2}$  воды ( $\lambda = 1,64$  мм).

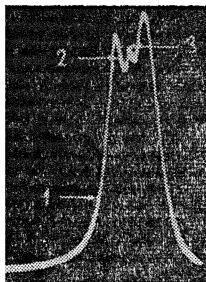


Рис. 6. Провал насыщения в доплеровской линии (переход  $2_2 - 3_{-2}$   $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\lambda = 1,64$  мм), наблюдавшийся в резонаторе Фабри—Перо.

Источник сигнала—ЛОБ типа [11].

1—резонансная кривая резонатора Фабри—Перо, 2—доплеровская линия поглощения воды, 3—провал насыщения («провал Лэмба») [78].

В качестве одной из лучших работ, выполненных пучковым методом, укажем [79], где в результате отработки системы коллимации пучка была получена ширина линии  $4,5$  кГц на частоте  $168$  ГГц, т. е. разрешающая способность примерно в  $50$  раз большая, чем у газового спектроскопа. Это позволило разрешить и исследовать магнитную структуру перехода  $1_{10} - 1_{01}$  сероводорода. Коллимация пучка достигалась применением вымораживающей сотовой диафрагмы после источника пучка. Использовалась плоскопараллельная штарковская ячейка длиной  $40$  см, питаемая ленточным пучком той же длины; излучение с помощью рупоров и линз пропускалось перпендикулярно пучку. Худшая коллимация пучка [80] позволила лишь незначительно сузить линию (до  $100$  кГц на частоте  $100$  ГГц).

Пучковая радиоспектроскопия в ее чистом виде не получила широкого распространения в основном из-за малой интенсивности линий, получающихся ее методами. Большую роль должно сыграть развитие чувствительных методов приема. Намного более перспективными яв-

\* Молекула может чувствовать дифракционное искривление фронта [81].

\*\* Метод получения узкой негауссовой линии в газе без насыщения описан в [82]. Здесь также ограничен объем рабочего вещества.

ляются пучковые методы с применением сортировки молекул по состояниям.

Предложенная Басовым, Прохоровым и Таунсом сортировка молекул в пучке по энергетическим состояниям привела к созданию первых квантовых генераторов [9]. Субмиллиметровый пучковый генератор, использующий резонатор Фабри—Перо, был предложен Прохоровым [20]. Вопросы генерации и приема ИК излучений квантовыми системами рассмотрены в [239]. В миллиметровом диапазоне были созданы пучковые мазеры на  $\text{HCN}$  [29, 148] и  $\text{H}_2\text{CO}$  [31]. Пучковым молекулярным генераторам посвящена книга [26], где исследованы особенности миллиметровых и субмиллиметровых мазеров. Мы остановимся на радиоспектроскопических аспектах пучковых мазеров, рассмотрев также более поздние по сравнению с [26] работы.

Сортировка молекул может значительно повысить интенсивность наблюдаемых линий [9]. Однако для сортировки пригодны не все переходы, что, разумеется, сужает область применения этого метода. Выращения для штарк-эффекта уровней различных молекул имеются в [1<sup>-5</sup>]. Для грубой оценки возможности сортировки полезно помнить, что наложение электрического поля приводит к расталкиванию уровней, между которыми разрешен переход, причем сила отталкивания обратно пропорциональна расстоянию между уровнями. Смещение уровня в поле  $E$  находится как алгебраическая сумма таких отталкиваний; число членов суммы при учете правил отбора обычно невелико. Отсюда сразу получается, например, что пара уровней, расстояние между которыми много меньше, чем расстояние до остальных уровней, расталкиваются полем, т. е. энергия верхнего уровня растет в поле  $E$ , а нижнего падает, что и нужно для сортировки. Эта схема соответствует генератору на аммиаке. Энергия низшего вращательного уровня только убывает в поле  $E$ , а благодаря неэквидистантности вращательных уровней энергии (1) уровни с большими  $J$  при определенных полях могут сортироваться относительно уровней с меньшими  $J$ . Это используется в генераторах на  $\text{HCN}$  и  $\text{H}_2\text{CO}$ . Ясно также, что с повышением частоты перехода эффективность сортировки падает; методы обхода этой трудности предложены в [20, 83, 84]. Все они основаны на таких схемах уровней, в которых эффективная сортировка осуществляется по близко расположенным уровням (см. рис. 3б), а инверсия получается и для более высокочастотных переходов. Предельным случаем близких уровней является сортировка вырожденных уровней симметричного волчка; однако в этом случае нужно снимать вырождение в резонаторе сторонним полем [83].

Используя фокусирующее действие сортирующих систем, можно создать весьма направленные пучки молекул достаточной интенсивности, позволяющие увеличить время взаимодействия молекул с полем СВЧ, т. е. повысить разрешающую силу пучковых спектроскопов [86, 87]. В [87, 88] достигнута длина пучка 2 м, т. е. разрешающая сила  $\sim 10^8$  с применением метода разнесенных полей Рамзея. Двухрезонаторный молекулярный генератор, во втором резонаторе которого наблюдается когерентный «молекулярный звон», может быть использован как спектроскоп повышенной разрешающей силы даже без СВЧ соединения резонаторов [89]. Дальнейшее повышение разрешающей способности, позволяющее выделить компоненты внутри однородно уширенной линии, может быть достигнуто путем измерения фазового сдвига поля, создаваемого «молекулярным звоном» во втором резонаторе, по отношению к полю в первом [90, 91]. В сущности, такой метод позволяет использовать отмеченную ранее в молекулярных генераторах зависимость частоты колебаний от структуры линии, не разрешаемой обычными мето-

дами. Предел разрешающей способности в этом случае определяется лишь стабильностью частоты СВЧ поля и, по оценкам, может достигать  $10^{10}$ . Практически этот метод еще не реализован.

Для радиоспектроскопических применений пучковых мазеров весьма существенно достижение режима генерации. Методы настройки частоты генерации на центр спектральной линии позволяют определять частоту мазерного перехода с точностью до  $10^{-9}$ — $10^{-11}$  [26]. Можно изучать сверхтонкую структуру по одновременной генерации на ряде компонент спектральной линии [240]. Возбуждение двухрезонаторного мазера с усилителем рассмотрено в [247]. Условия возбуждения миллиметровых мазеров исследованы в [92]; исследование частотных характеристик мазера на  $\text{H}_2\text{CO}$  ( $\lambda = 4,1$  мм) выполнено в [93], где измерена и частота перехода с точностью  $2 \cdot 10^{-9}$ . Практическая схема пучкового мазера приведена на рис. 7 [56]; на этой установке, кстати, получены фотографии рис. 5 в, г. Пучковый генератор инфракрасного диапазона рассмотрен в [85].

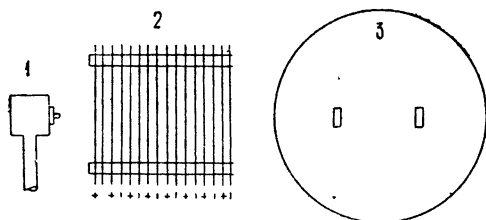


Рис. 7. Схема пучкового мазера на  $\lambda = 4,12$  мм [56]:

1—источник молекулярного пучка, 2—плоская сортирующая система, 3—резонатор Фабри-Перо.

Половина сортирующей системы и один из отражателей резонатора удалены; видны отверстия связи с резонатором.

Как уже говорилось, наблюдение узких линий в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах затрудняется необходимостью применения чувствительных приемников, чтобы работать при малых уровнях мощности просвечивающего сигнала и избежать насыщения линий. Уменьшение отношения сигнал/шум ухудшает, как известно, и точность воспроизведения частоты в квантовых стандартах [45]. Поэтому весьма интересным является развиваемый в работах [95, 94, 33] так называемый метод электрического резонанса в пучке молекул. Метод использует также отклонение молекул в электростатических полях, зависящее от состояния молекулы, как и вышеописанный мазерный метод; принципиальное отличие заключается лишь в способе индикации резонанса.

В то время как в мазерном методе наступление резонанса индицируется по изменению уровня мощности СВЧ сигнала, вызванному излучением (или поглощением) молекулами, совершившими переход, в настоящем методе индицируются сами молекулы, совершившие переход в другое состояние под действием СВЧ поля, для чего после области СВЧ поля помещается «сортирующая система-анализатор», направляющая эти молекулы на ионизационный или другой детектор частиц. Метод полностью аналогичен методу магнитного резонанса [4]. С помощью этого метода получена добротность линии  $6 \cdot 10^8$  на волне  $1,78$  мм и проведено наблюдение линии в пучке на  $\lambda = 0,84$  мм [33].

В качестве разнесенных областей СВЧ поля (метод Рамзея) использовались резонаторы Фабри—Перо с плоскими зеркалами, облучаемые рупорами с линзами; расстояние между резонаторами доходило до  $0,7$  м. Через резонаторы пропускался хорошо коллимированный пучок молекул сероводорода; тщательно юстировалась параллельность зеркал пучку. Индикация совершивших переход молекул осуществлялась детектором с электронной бомбардировкой, включающим масс-спектрометр и электронный умножитель. Необходимая для индуциро-

вания переходов СВЧ мощность получалась путем умножения частоты стабилизированного клистрона.

На рис. 8 приведена полученная запись линии  $\text{H}_2\text{S}$  [33]. Отметим два обстоятельства, которые должны учитываться при спектроскопии с большим разрешением: во-первых, на узкие линии оказывает заметное влияние магнитное поле Земли, что вызывает необходимость тщательной экранировки, и, во-вторых, индуцирующий переходы сигнал, получающийся путем умножения, должен быть достаточно чист в спектральном отношении. В [33, 87, 88] для обеспечения спектральной чистоты сигнала применялась стабилизация источника сигнала по квантовому стандарту частоты. Обзор исторического развития метода молекулярных пучков имеется в [108].

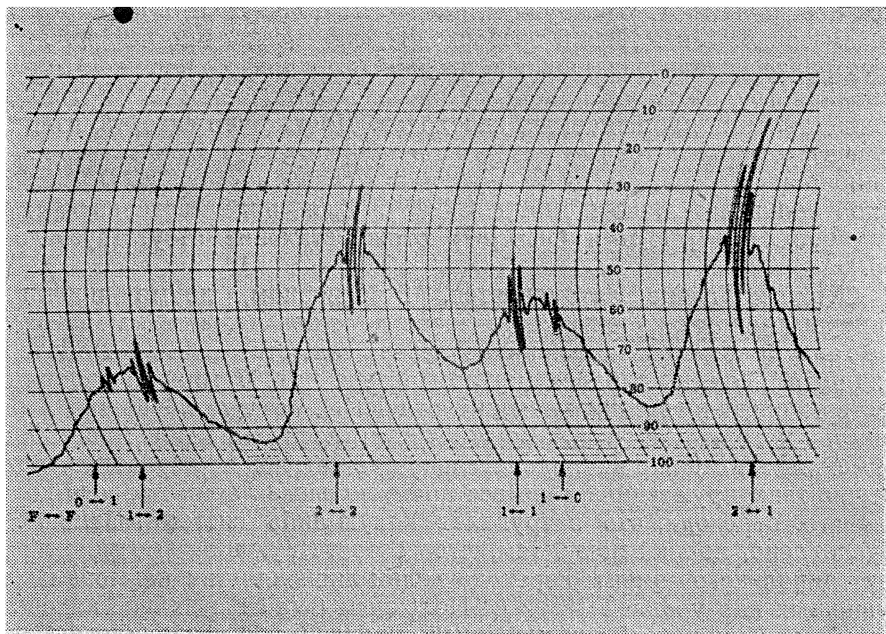


Рис. 8. Магнитная структура перехода  $1_0-1_{01}$   $\text{H}_2\text{S}$ , разрешенная методом электрического резонанса в пучке молекул [33]. Ширина рамзеевской компоненты 290  $\mu\text{c}$  при частоте перехода  $\sim 168$  Гц.

Интересный круг исследований может быть проведен при резонансном воздействии на вещества несколькими (чаще всего двумя) полями СВЧ с различными частотами. На аммиаке методом двойного резонанса удалось исследовать процессы переноса энергии при соударениях молекул, причем было обнаружено существование приближенных правил отбора для столкновительных переходов [96, 50]. Так, в соударениях «аммиак—аммиак» предпочтительными являются разрешенные электродипольные переходы, а в соударениях «аммиак—инертный газ» существует, по-видимому, единственное правило отбора  $\Delta K = 3n$  [96]. Трехуровневые схемы используются для мазерной радиоспектроскопии [97]. Различные схемы подкачки для создания субмиллиметровых мазеров приведены в [98–100].

Обсуждение параметров радиоспектроскопа с двойным резонансом проведено в [101]. При спектроскопии методом двойного резонанса для доплеровских спектральных линий, связанных общим уровнем, могут наблюдаться явления, аналогичные «пресвалу Лэмба», которые могут

быть использованы для повышения разрешающей силы метода [102]. Метод двойного резонанса может быть использован для индикации переходов в субмиллиметровой области по изменению интенсивности более доступных низкочастотных переходов [20, 26]. Интереснейшим объектом здесь является опять-таки аммиак, на котором возможно создание субмиллиметровых мазеров [20], а также стандарта частоты по схеме Рамзея с индуцированием субмиллиметровых переходов [88].

#### в) Лазерная радиоспектроскопия

В субмиллиметровом диапазоне применяется и такой специфический вид радиоспектроскопии, как лазерная радиоспектроскопия, исследующая радиометодами спектры ряда веществ по их собственному излучению в газовых лазерах. В табл. 1 приведен список длин волн и рабочих веществ субмиллиметровых лазеров. Этим методом исследуются переходы между возбужденными состояниями атомов и молекул, причем точность измерений превосходит на несколько порядков точность ранее использовавшихся в этой области инфракрасных методов. Основная трудность указанной методики заключается в правильном отождествлении наблюдаемых переходов. Достаточно сказать, что, хотя первые субмиллиметровые лазеры появились в 1964 г., достаточно надежное отождествление ряда переходов лазеров на HCN, DCN и H<sub>2</sub>O было получено лишь в 1968 г. [104, 105]. Для ряда лазеров (на SO<sub>2</sub> [106—108], JCN [227], H<sub>2</sub>S и OCS [108]) отождествление отсутствует до сих пор.

Отождествление затрудняется, в основном, двумя причинами. Во-первых, сильное электрохимическое действие разряда на молекулярные газы приводит к появлению в лазере веществ, весьма отличных от исходных. Так, в наиболее мощном лазере на 337 микрон рабочим веществом оказалась синильная кислота HCN, отсутствовавшая в большинстве исходных смесей. Во-вторых, имеется большое многообразие возможных комбинаций колебательно-вращательных переходов, причем обычно генерируют далеко не все вращательные линии данного колебательного перехода, что затрудняет какую-либо систематизацию\*. Это обусловлено, по-видимому, тем, что соответствующий матричный элемент дипольного момента перехода велик лишь для так называемых возмущенных пар уровней [124, 198]. Полезным было бы знание закономерностей возбуждения тех или иных уровней, что позволило бы сузить круг возможных вариантов.

Ввиду того, что этот новый вид радиоспектроскопии представляет значительный интерес, а также учитывая, что в настоящее время отсутствует какое-либо систематическое изложение этого вопроса, мы остановимся на субмиллиметровых газовых лазерах более подробно и приведем доступную нам библиографию.

Субмиллиметровый лазер представляет собой резонатор Фабри—Перо, заключенный в вакуумную трубу, в которой осуществляется тлеющий разряд в соответствующем газе (рис. 9). Диаметр трубы лазера обычно составляет 5—10 см, длина 2—6 м. Обычный интервал давлений газа 0,1—0,5 мм рт. ст., разрядные токи в непрерывном режиме 0,4—1,2 А (до 10 А в случае гелия [40]). Применявшиеся импульсные режимы весьма разнообразны. Ввиду отсутствия достаточно прозрачных материалов для окон в субмиллиметровых лазерах применяются обычно внутренние зеркала; имеются и конструкции с внешними зеркалами,

\* Вообще нужно отметить, что «пороговый» характер такой спектроскопии затрудняет исследования. Большой интерес, по нашему мнению, представляли бы исследования газового разряда обычными радиоспектроскопическими методами (с просвечивающим сигналом), что позволило бы видеть невозбужденные линии, устанавливать их систематику и подбирать условия их максимальной интенсивности.

Таблица 1

Таблица субмиллиметровых лазерных линий

$\lambda$ (мк)	$f$ (Мгц)	Вещество	Примечание
774		JCN	импульсная
538,5		JCN	имп.
537,5		JCN	имп.
372,80		HCN	имп.
337	890759,5	HCN	непрерывная
311	964312,3	HCN	непр.
309,94		HCN	имп.
225,3		H <sub>2</sub> S	имп.
223,25		HCN	имп.
220,23	1361282,6	H <sub>2</sub> O	непр.
218,5		D <sub>2</sub> O	имп.
216,3		He	непр.
215,27		SO <sub>2</sub>	имп.
211,14		HCN	имп.
204	1466787	DCN	непр.
201,19		HCN	имп.
194,76	1539257	DCN	непр.
194,70	1539745	DCN	непр.
192,9		H <sub>2</sub> S	имп.
192,67		SO <sub>2</sub>	непр.
190,0	1577789	DCN	непр.
189,95	1578279	DCN	непр.
181,90		HCN	имп.
171,67		D <sub>2</sub> O	непр.
170,08		D <sub>2</sub> O	имп.
162,4		H <sub>2</sub> S	имп.
151,16		SO <sub>2</sub>	имп.
140,85		SO <sub>2</sub>	непр.
140,6		H <sub>2</sub> S	имп.
135,5		H <sub>2</sub> S	имп.
135,03		HCN	имп.
133		Ne	имп.
132		OCS	имп.
130,95		HCN	имп.
130,8		H <sub>2</sub> S	имп.
129,1		H <sub>2</sub> S	имп.
128,75		HCN	имп.
126,24		HCN	имп.
126,2		H <sub>2</sub> S	имп.
126,1		Ne	непр.
124,4		Ne	непр.
123		OCS	имп.
120,08		H <sub>2</sub> O	имп.
118,59	2527952,8	H <sub>2</sub> O	непр.
116,8		H <sub>2</sub> S	имп.
115,32		H <sub>2</sub> O	имп.
111,74		D <sub>2</sub> O	имп.
110,49		D <sub>2</sub> O	имп.
108,88		D <sub>2</sub> O	имп.
108,8		H <sub>2</sub> S	имп.
107,91		D <sub>2</sub> O	имп.
107,73		D <sub>2</sub> O	непр.
106,02		Ne	имп.
103,33		D <sub>2</sub> O	имп.
103,3		H <sub>2</sub> S	имп.
99		D <sub>2</sub> O	имп.

в которых вакуумирование трубы лазера осуществляется тонкими (типа лавсановых) пленками [109]. Сферические вогнутые зеркала, покрытые слоем золота или серебра, располагаются обычно несколько ближе друг к другу, нежели в конфокальном случае. Вывод излучения чаще



всего осуществляется через отверстие в зеркале; иногда используются частично отражающие пленки, поставленные под  $45^\circ$  к оси лазера. Для избирательного возбуждения линий одно из зеркал заменяется эшелетом [110], что дает и еще один вид связи с резонатором.

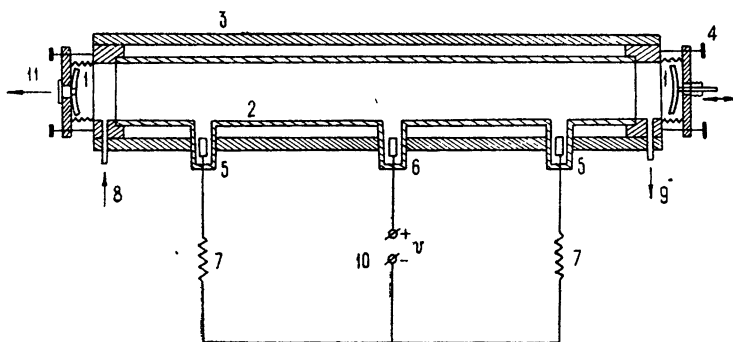


Рис. 9. Схема субмиллиметрового газового лазера:

1—зеркала резонатора Фабри—Перо, 2—стеклянная вакуумная труба, 3—корпус лазера, 4—юстировочные винты, 5—охлаждаемые водой катоды, 6—анод, 7—балластные сопротивления, 8—напуск рабочего вещества, 9—откачка, 10—источник высокого напряжения, 11—выход излучения лазера.

В этом диапазоне расстояние между соседними продольными модами резонатора лазера больше ширины линии, и первичное определение длины волны излучения субмиллиметрового лазера можно провести, воспользовавшись тем, что при перестройке резонатора лазера максимумы излучения появляются примерно через  $\lambda/2$ . Типичная запись при двух генерируемых линиях приведена на рис. 10. Анализ таких интер-

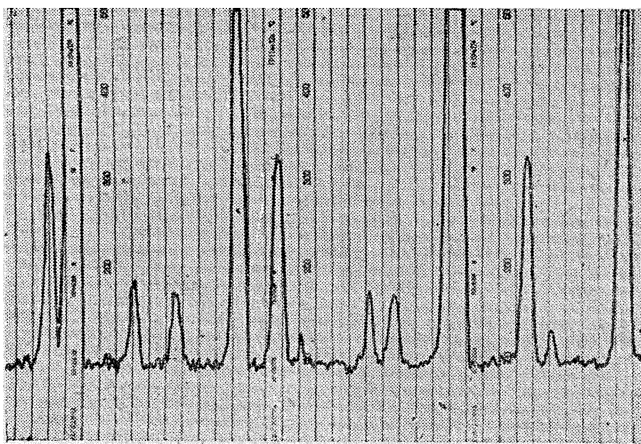


Рис. 10. Запись излучения субмиллиметрового лазера на  $D_2O + D_2$  при перестройке резонатора лазера.

Большие пики—генерация на волне  $\lambda = 171,6 \text{ мк}$  колебаний  $TEM_{00}$  и  $TEM_{01}$  поочередно, средние—генерация на  $\lambda = 107,7 \text{ мк}$ , малые соответствуют генерации высших мод резонатора. Для возбуждения линии  $107,7 \text{ мк}$  одно из зеркал—матовое медное (ослабляющее конкурирующую высокочастотную линию) [132].

ферограмм проводится обычными методами фурье-преобразований (см, например, [11]). Существенное повышение точности получается при переходе к радиоспектроскопическим методам — измерению частоты переходов по биениям с умноженной частотой кварцевого генератора ([21, 22, 39, 123, 145, 135] и табл. 1). Для повышения точности используются обычные методы настройки частоты генерации на центр линии; в случае лазера на воде точность повышается благодаря возможности настройки по «провалу Лэмба» (рис. 11).

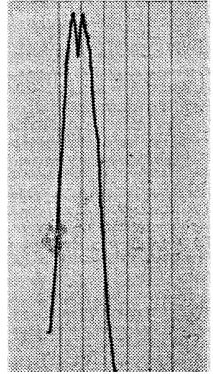


Рис. 11. Излучение субмиллиметрового лазера на  $\text{H}_2\text{O}$  ( $\lambda = 118,6 \text{ мк}$ ) при перестройке резонатора лазера. На вершине линии виден «провал Лэмба».

Механизм возбуждения достаточно хорошо известен лишь для атомарных субмиллиметровых лазеров на He и Ne [40, 112]. Здесь инверсия получается при возбуждении электронным ударом. Вероятность возбуждения электронным ударом в первом приближении пропорциональна вероятности соответствующего дипольного перехода, и если исходным является основной уровень  $1S$ , то процесс возбуждения соответствует разрешенным переходам  $1S \rightarrow nP$ , где  $n = 3 \div 9$ , а инверсия получается на переходах  $nP \rightarrow nD$ . Населенность уровней зависит также от процессов «пленения» радиации [40].

Для молекулярных субмиллиметровых лазеров механизм возбуждения в настоящее время еще неясен. Расшифрованные спектры лазеров на HCN, DCN,  $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{D}_2\text{O}$  и рассмотрение аналогичных инфракрасных лазеров (на  $\text{CO}_2$ ,  $\text{N}_2\text{O}$  и т. д.) позволяют сделать заключение, что инверсия получается между колебательными уровнями, принадлежащими различным типам колебания молекул. В газовом разряде населенность каждого типа колебаний может быть описана в первом приближении своей колебательной температурой [121].

Отметим принципиальную важность этого обстоятельства, позволяющего получить инверсию между уровнями, отличающимися по энергии на доли электронвольта (в субмиллиметровом диапазоне) при возбуждении, например, электронами со сплошным спектром в интервале нескольких электронвольт, лишь бы эти уровни принадлежали различным типам колебания молекулы. Механизм же преимущественного заселения неясен. Это может быть возбуждение электронным ударом, возбуждение в результате химических процессов или, наконец, резонансный перенос энергии (типа  $\text{CO}^* \rightarrow \text{CO}_2$ ,  $\text{N}_2^* \rightarrow \text{CO}_2$  и, может быть,  $\text{OH}^* \rightarrow \text{H}_2\text{O}$ ). В трехатомных молекулах инверсия обычно получается между валентным (верхний уровень) и деформационным (нижний уровень) типами колебаний. Деформационное колебание низкочастотно и быстрее релаксирует.

При рассмотрении табл. 1 видно, что лазерное действие в субмиллиметровом диапазоне получено на трехатомных довольно легких молекулах. Попытаемся дать некоторое объяснение этому факту. Чтобы частоты вращательно-колебательных переходов попадали в субмиллиметровый диапазон (при обычных правилах отбора  $|\Delta J| = 0; 1$ ), нужно

близкое расположение верхнего и нижнего колебательных лазерных уровней, т. е. уровни должны принадлежать различным типам колебаний молекулы\*. Наличие более чем одного типа колебаний существенно также для получения инверсии. Существование нескольких типов колебаний молекулы возможно только при наличии в молекуле не менее трех атомов. Сильное увеличение числа атомов также невыгодно, так как при этом снижается интенсивность отдельной линии (см. выше) и возрастает роль механизмов релаксации. Утяжеление молекулы невыгодно по тем же причинам. Молекула должна быть достаточно устойчивой (или самовоспроизводящейся) в разряде.

Для получения отпаянного режима лазеров на  $\text{H}_2\text{O}$  ( $\text{D}_2\text{O}$ ) использовалась добавка  $\text{H}_2$  (или  $\text{D}_2$ ), смещающая равновесие реакции диссоциации-рекомбинации воды и дающая приращение мощности (для  $\text{D}_2\text{O} + \text{D}_2$  почти на два порядка) [129, 131, 132, 216]. Весьма интересно более «мягкое» возбуждение неустойчивых веществ, например, возбужденным азотом, как в первых работах по  $\text{CO}_2$  [113].

Исследование лазера на  $\text{CO}_2$  привело к обнаружению весьма общего метода получения инверсии на колебательно-вращательных переходах молекул (см., например, обзор [113]). Оказывается, для получения лазерного действия на ряде колебательно-вращательных переходах  $P$ -ветви достаточно условия  $T_k \gg T_{вр}$ , где  $T_k$ ,  $T_{вр}$  — колебательная и вращательная температуры, описывающие заселенность соответствующих уровней. Такой лазер весьма похож на тепловую машину с  $T_k$ , соответствующей температуре нагревателя, и  $T_{вр}$  — холодильника. Благодаря быстрой вращательной релаксации (обычно достаточно одного или немногих соударений)  $T_{вр}$  поддерживается близкой к температуре стенок сосуда (трубы лазера). Высокая температура  $T_k$  может получаться уже упомянутыми способами — в разряде  $T_k$  бывает близка к электронной температуре ( $\sim 10^4$  °K); энергия химических реакций зачастую выделяется в виде колебательной энергии [115]. Наконец, благодаря тому, что колебательная релаксация примерно в  $10^3$  раз медленнее вращательной, условие  $T_k \gg T_{вр}$  может выполняться при быстром охлаждении нагретого газа [116]. Процессы возбуждения в неравновесных газах рассмотрены в обзоре [235].

Рассмотрим теперь методику отождествления лазерных переходов. Первичный поиск вещества, ответственного за лазерное действие, проводится варьированием состава газов, поступающих в лазер. Так, исходным для идентификации лазера на  $\text{HCN}$  явилось доказательство необходимости присутствия в разряде  $\text{C}$ ,  $\text{N}$  и  $\text{H}$  (или  $\text{D}$  для  $\text{DCN}$ ) [117]. Исследование зееман-эффекта лазера на  $118,59$  мк на парах воды, давшее для магнитного момента величину порядка ядерного магнетона, позволило исключить вариант с  $\text{OH}$  [118]. Указанием на то, что лазерные переходы соответствуют переходам между высшими колебательно-вращательными состояниями, явились результаты работ [119, 110], показавшие, с одной стороны, слабое поглощение лазерного излучения в невозбужденной среде (т. е. то, что энергия уровней  $\epsilon \gg kT$ ), и, с другой стороны, повышение мощности почти всех лазерных линий при одночастотном режиме лазера (так как быстрая термализация вращательных подуровней приводит к некоторой конкуренции всех вращательно-колебательных переходов между данными колебательными состояниями).

Однако все эти данные оставляли еще значительный произвол в выборе возможных вариантов лазерных переходов, так как точность знания вращательных и колебательных констант возбужденных состояний обычно недостаточна для однозначного отождествления переходов.

\* Переходы между уровнями одного типа колебаний дают спектр в инфракрасной области.

Решающим для отождествления лазерных линий в парах воды явилось нахождение корреляций между лазерными линиями, свидетельствующих о том, что эти линии имеют общие уровни энергии [120]. В том случае, если два лазерных перехода имеют общий верхний или нижний уровень, возрастание мощности генерации на одном переходе приводит к подавлению генерации на другом. Такие переходы называются конкурирующими.

Если же нижний уровень одного лазерного перехода является верхним для другого, то увеличение мощности генерации на одном переходе увеличивает мощность (или вообще создает условия для генерации) на другом. Это — каскадные переходы. Идеальным для исследования таких корреляций является двойной резонатор Фабри—Перо с эшелеттами вместо одного из зеркал [122]. В субмиллиметровых лазерах было обнаружено большое число корреляций между линиями, что позволило провести надежную проверку отождествления переходов. Отождествление лазеров на  $H_2O$  и  $D_2O$  дано в [105, 124, 244], на  $HCN$  и  $DCN$  — в [104], на  $He$  — в [40], на  $Ne$  — в [125]. При этом подтвердились полученные при исследовании эффекта Зеемана данные о том, что для  $\lambda = 118,6 \text{ мк}$  ( $H_2O$ )  $J$  целое и больше или равно 2,  $\Delta J = 0$  [118]. Убедительной проверкой явилось обнаружение новых лазерных линий, укладывающихся в предложенную ранее схему [123]. На рис. 12а, б приведены схемы уровней для нескольких типичных лазерных переходов.

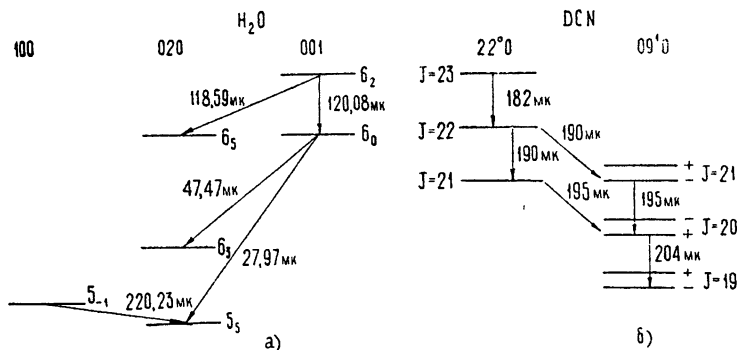


Рис. 12. Схема уровней субмиллиметровых лазеров на  $H_2O$  (а) и  $DCN$  (б).

Вверху указаны колебательные уровни, около уровней — вращательные. Стрелками отмечены лазерные переходы.

Другой ветвью лазерной радиоспектроскопии в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах является измерение разностных частот более коротковолновых лазеров [18, 126, 127]. Такие измерения позволили, например, значительно уточнить вращательные и центробежные постоянные молекулы  $CO_2$  [126]. Линейная молекула  $CO_2$ , благодаря симметрии, неполярна и не может иметь чисто вращательного спектра. Колебания лазера на  $CO_2$  ( $\lambda = 10,6 \text{ мк}$ ) гетеродинировались другим таким же лазером; лазеры были стабилизированы на соседних вращательных переходах одного и того же колебательного перехода. При этом их разностная частота, непосредственно определяющаяся вращательными и центробежными константами, лежала в миллиметровом диапазоне и измерялась обычными радиоспектроскопическими методами.

Кроме упомянутых в тексте работ, лазеры на  $H_2O$  исследовались в [208—216, 224], на  $D_2O$  в [224—226, 214, 212], на  $HCN$  в [214—223, 231, 237], на  $JCN$  в [227—229], на  $He$  в [230]. Смещение гармоник лазеров исследовалось в [128], отпаянные субмиллиметровые лазеры в [129—132]. Обзор субмиллиметровых лазеров дан в [133, 242], использованию лазеров этого диапазона для

радиоспектроскопии посвящен обзор [134]. Весьма полный обзор лазеров на воде дан в [124]. Роль лазерной радиоспектроскопии должна возрастать с усовершенствованием лазеров и расширением круга применяющихся в них веществ.

### 3. РАДИОАППАРАТУРА МИЛЛИМЕТРОВОЙ И СУБМИЛЛИМЕТРОВОЙ РАДИОСПЕКТРОСКОПИИ

Применение описанных выше радиоспектроскопических методик стало возможным благодаря развитию радиотехнической части аппаратуры рассматриваемых диапазонов. При рассмотрении соответствующей аппаратуры наряду с трудностями нам хотелось бы подчеркнуть доступность миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов в настоящее время, которая, разумеется, достигнута ценой большого труда ряда исследователей. Так, умножение частоты в этой области оказалось достаточно эффективным, чтобы наблюдать биения лазеров со столь далекими, как 23-я, гармониками стабилизированных по стандартной частоте клистронов [135], а частоту колебаний лазера на 28 мк умножить до 9,3 мк [246], достаточно мощными (до 0,6 ватта в непрерывном режиме [136]) оказались субмиллиметровые лазеры; несмотря на неблагоприятные прогнозы, с помощью электронных генераторов удалось перекрыть диапазон до  $\lambda = 0,2$  мм [11, 12], а с помощью точечных детекторов — до  $\lambda = 10$  мк [18]. Основное внимание мы уделим короткой миллиметровой и субмиллиметровой области, где отсутствует набор стандартной аппаратуры.

Источниками излучения рассматриваемого диапазона являются лазеры, рассмотренные выше, полупроводниковые умножители частоты (см. [1-3, 8] и обзоры [67]), собственно полупроводниковые генераторы [137] и лампы обратной волны [11, 12]. Полупроводниковые генераторы, использующие различные объемные эффекты в твердом теле, весьма перспективны. Уже сейчас с их помощью получены мощности порядка сотен милливольт для длин волн до  $\lambda = 4$  мм [137]; однако эти исследования еще не вышли из лабораторий. Отсутствуют также спектральные характеристики излучения этих источников.

Наиболее удобными для радиоспектроскопических применений в настоящее время являются лампы обратной волны. Их параметры приведены в [11, 12], а пути развития электронных приборов этого диапазона рассмотрены в обзоре [139]. Мы рассмотрим вопросы стабилизации и измерения частоты ЛОВ, так как именно от решения этой проблемы зависит дальнейшее развитие миллиметровой и субмиллиметровой радиоспектроскопии как в расширении диапазона, так и в реализации потенциальных возможностей повышения разрешающей силы и чувствительности радиоспектроскопов. Проблема эта имеет большое значение и для ряда практических задач, выходящих за пределы радиоспектроскопии.

Для измерения частот миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов наиболее часто используется умноженная частота генераторов обычного диапазона, которая контролируется обычным образом, а гармоники ее сравниваются с измеряемой. Исходным является обычно достаточно стабильный кварцевый генератор, частота которого цепочкой ламповых умножителей доводится до  $\sim 300 \div 500$  Мгц; далее умножение осуществляется на кристаллических детекторах обычно до диапазона  $\lambda = 3 \div 1,5$  см. В этом диапазоне производится фазовая автоподстройка (ФАП) достаточно мощного генератора по стабильной гармонике для последующего умножения и далее ступени умножения и стабилизации повторяются нужное число раз.

Существенным является вопрос о выборе ступеней и коэффициен-

тов умножения частоты. Практика показывает, что для получения кварцевой метки до диапазона  $0,3 \div 0,5$  мм достаточно стабилизации 4-миллиметрового клистрона с одной промежуточной системой ФАП 3-сантиметрового клистрона; для получения метки до  $\lambda = 0,1$  мм достаточно стабилизации 2-миллиметрового клистрона с промежуточной ступенью на  $\lambda = 1,5$  см [21, 140, 37, 141]. Перестройка частоты осуществляется сменой по ступеням номера гармоники в любой ступени умножения и плавной перестройкой вспомогательного генератора [33] или применением перестраиваемого задающего генератора [37]. В [142–144] описана система измерения частоты, в которой последняя ступень (ЛОВ на  $\lambda = 2$  или 4 мм) не стабилизируется по гармонике предыдущей; частота ее стабилизируется по резонатору Фабри—Перо и сравнивается одновременно как с измеряемой частотой (на гармонике), так и с эталонной (на основной частоте ЛОВ). Выход клистрона (или ЛОВ) последней ступени стабилизации подается на кристаллический смеситель-умножитель, на который подается также излучение лазера или ЛОВ, частоту которого нужно измерить.

Умножитель-смеситель является наиболее специфичной деталью. Он выполняется обычно на скрещенных волноводах, которые пронизываются вольфрамовой электролитически заточенной иглой, контакт которой с кремниевым кристаллом осуществляется в узком волноводе\* В [37, 69, 71] до длин волн  $\lambda = 0,5$  мм для этой цели успешно использовались и стандартные более длинноволновые кристаллические диоды. Получающиеся на смесителе биения усиливаются усилителем промежуточной частоты, детектируются и подаются на осциллоскоп. Обычно частота измеряемой ЛОВ модулируется для наблюдения спектральной линии. В этом случае на выходе детектора получается импульс всякий раз, когда частота биений совпадает с промежуточной. Этот импульс в качестве метки частоты и совмещается с измеряемой линией, после чего производится отсчет частоты. Обычная точность такой методики —  $10^{-6} \div 10^{-7}$ , т. е. она достаточна для газового радиоспектропа. Измерение частот лазеров производится аналогичным образом, на рис. 13 приведены биения лазера на  $\lambda = 337$  мк с 8-й гармоникой 3-миллиметровой ЛОВ [145].

Для решения ряда задач удобна система стабилизации частоты по перестраиваемому резонатору Фабри—Перо или, наоборот, по не зависящей от внешних условий спектральной линии. Примером применения первой системы может служить детальное снятие спектра в достаточно широкой области частот, примером второй — репер частоты, подкачка лазера или параметрического усилителя на данной спектральной линии. В этих случаях применяется обычная схема частотной автоподстройки-

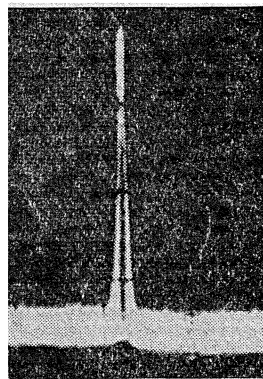


Рис. 13. Биения субмиллиметрового лазера на HCN ( $\lambda = 337$  мк) с 8-й гармоникой ЛОВ [145].

ки (ЧАП) по резонансному элементу, на склоне которого частотно-модулированный сигнал преобразовывается в амплитудно-модулированный, причем знак фазы модуляции зависит от знака расстройки генератора и резонансного элемента. Огибающая после синхронного детектирования и представляет собой управляющий сигнал.

Для повышения чистоты спектра сигнала следует применять повы-

\* См. примечание при корректуре.

шенные частоты и малые индексы модуляции. Системы стабилизации по резонатору Фабри—Перо волн до  $\lambda = 0,8$  мм приведены в [142, 143, 70], по спектральной линии на  $\lambda = 3$  мм в [147] и волнах до  $\lambda = 0,8$  мм—[70]. Конструкции газовых ячеек описаны выше. Дальнейшим развитием системы стабилизации ЛОВ по спектральной линии может явиться стабилизация по провалу насыщения в доплеровской линии ([70], а также см. рис. 6).

Основную роль, как и в более низкочастотных диапазонах, должны играть системы стабилизации частоты генераторов по стабильному опорному сигналу, например, получающемуся умножением частоты, как вышеописанные кварцевые метки. В [146] описана система частотной автоподстройки (ЧАП) ЛОВ по стабильной гармонике в диапазоне  $\lambda = 0,57 \div 1$  мм. Система фазовой автоподстройки (ФАП) ЛОВ диапазона  $\lambda = 0,8 \div 4$  мм описана в [199]. Имеется сообщение о стабилизации частоты лазера на  $\lambda = 337$  мк [223].

Особое значение приобретает стабилизация частоты источника сигнала при исследованиях с высоким разрешением, так как «плавание» частоты сигнала во время наблюдения или нечистота его спектра могут привести к существенному искажению профиля линии. Недостаточная стабильность не позволяет также применять усреднение по времени для повышения чувствительности приема. При исследованиях линий с  $Q \geq 10^8$  источник сигнала стабилизировался по квантовым стандартам частоты [33, 87, 88].

Опишем еще методику измерения частоты сравнением с эталонным спектром и новый вариант измерения частоты резонатором Фабри—Перо. Большая интенсивность линий указанных диапазонов и ширина перестройки ЛОВ благоприятствуют простой первичной идентификации веществ и переходов по «спектру в целом». Для этого частота колебаний источника медленно перестраивается (например, мотором) в широком диапазоне, и на самописце записываются сначала исследуемый, а затем эталонный (или исследуемый с наложенным эталонным) спектры. Эталонный спектр используется для составления градуировочного графика. Весьма удобен при этом нулевой радиоспектроскоп с акустической индикацией [155]. В том случае, когда измеряемая линия отстоит от эталонной не более чем на  $\sim 500$  Мгц, точность измерения можно значительно повысить, используя измерение расстояния между линиями известным методом двойной модуляции частоты источника [1-3]. При этом, так как измеряются малые разности частот, ошибка измерения составляет не более десятых долей мегагерца на волне  $\lambda = 0,5$  мм.

На рис. 14 показаны линии  $J = 0 \rightarrow 1$ ,  $K = 0$  обычного и изотопного аммиака на  $\lambda = 0,525$  мм, расстояние между которыми равно  $384,8 \pm 0,2$  Мгц [71]. Частота перехода изотопного аммиака ( $N^{15}H_3$ ) измерялась по известной [141] частоте перехода обычного ( $N^{14}H_3$ ). Трудность в этом методе заключается в обеспечении достаточно плотного перекрытия диапазона опорными линиями.

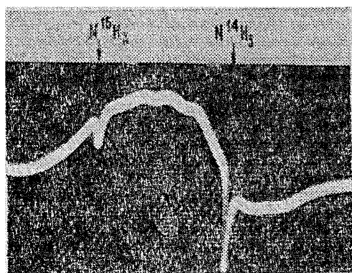


Рис. 14. Линии  $J = 0 \rightarrow 1$ ,  $K = 0$  обычного ( $N^{14}H_3$ ) и изотопного ( $N^{15}H_3$ ) аммиака на  $\lambda = 0,525$  мм. Содержание  $N^{15}H_3$ —около 12%.

В рассматриваемом диапазоне сравнительно легко осуществить резонатор Фабри—Перо с добротностью  $10^5 - 10^6$ , что в принципе

определяет достижимую точность измерений. Однако реализовать ее в режиме обычного резонансного волномера довольно сложно как из-за необходимости прецизионного отсчета длины, так и из-за неконтролируемых изменений параметров резонатора. В [78] предложен и осуществлен иной метод, сводящийся в основном к частотным измерениям. Поясним сущность метода.

Резонансная частота интерферометра Фабри—Перо равна

$$\nu = F(q + \delta), \quad (4)$$

где  $F = c/2L$  — межмодовое расстояние,  $L$  — длина резонатора,  $q$  — номер продольной моды,  $\delta$  — поправка, рассчитываемая из геометрии резонатора. Основной особенностью метода является замена измерения  $L$  измерением межмодового расстояния  $F$  опять-таки с помощью двойной модуляции частоты источника сигнала, аналогично измерению расстояния между линиями в предыдущем методе. Частота модуляции ЛОВ измеряется электронно-счетным частотомером. Для определения величины  $q$  на той же частоте  $\nu$  изменяют перемещением одного из зеркал индекс  $q$  на некоторое известное число  $n$  (отсчитываемое по числу прошедших на экране осциллоскопа резонансов) и вновь измеряют межмодовое расстояние  $F'$ , что дает возможность рассчитать  $q$  согласно (4). Обратим внимание на то, что так как  $q$  — целое, то достаточна точность определения его с абсолютной ошибкой в несколько десятых. Эта ошибка не сказывается в определении частоты  $\nu$ , и погрешность измерения  $\nu$  будет порядка погрешности измерения  $F$ .

Весьма существенными в радиоспектроскопии рассматриваемого диапазона являются вопросы построения соответствующего СВЧ тракта. Здесь применяются как волноводные, так и квазиоптические методы. Волноводные устройства общеизвестны; отметим лишь, что для уменьшения потерь тракта в этом диапазоне применяются обычно волноводы больших размеров. Квазиоптические методы в миллиметровой радиоспектроскопии рассматривались в [149]. Мы остановимся лишь на весьма существенных и не нашедших в [149] должного отражения квазиоптических элементах, таких, как сетчатые элементы и высокодобротные резонаторы Фабри — Перо.

Сетки из параллельных проволок применялись еще Герцем и Лебедевым в качестве поляризаторов и анализаторов излучения; в последнее время эта методика получила дальнейшее развитие [19, 150]. Плоские металлические сетки из тонких параллельных проволок, размеры которых удовлетворяют условиям

$$a \gg \lambda > l > d, \quad (5)$$

где  $a$  — апертура,  $\lambda$  — длина волны,  $l$  — период сетки,  $d$  — диаметр проволоки, имеют в субмиллиметровом диапазоне коэффициент отражения в пределах от 0,001 до 0,986—0,997 в зависимости от угла между проволоками и вектором  $E$  падающей на сетку волны. Отражение минимально при перпендикулярных направлениях  $E$  и проволок и максимально при параллельных. Такие сетки позволили создать практически все аналоги волноводных устройств, в том числе резонаторы Фабри — Перо с  $Q \simeq 10^4 \div 10^5$ , аттенюаторы, ответвители, интерферометры и т. д. Достоинствами их являются малые потери, весьма большая диапазонность (практически почти весь миллиметровый и субмиллиметровый диапазон), легкое получение нужного коэффициента связи, типа колебания.

С радиоспектроскопической точки зрения подобные устройства очень удобны для заполнения газами, пропускания молекулярных пучков и т. д. Обычно использовавшиеся сетки делались из позолоченных



проволочек диаметром  $d = 8 \div 15$  мк, натянутых с периодом  $l = 30 \div 150$  мк на оправки диаметром  $a = 40 \div 90$  мм (рис. 15). Квазиоптический тракт сопряжен с волноводными (выход ЛОВ, вход детектора) с помощью рупоров с малым углом раскрыва, снабженных линзами из тефлона, полиэтилена и т. п. Методы настройки сложного СВЧ тракта этого диапазона изложены в [94].

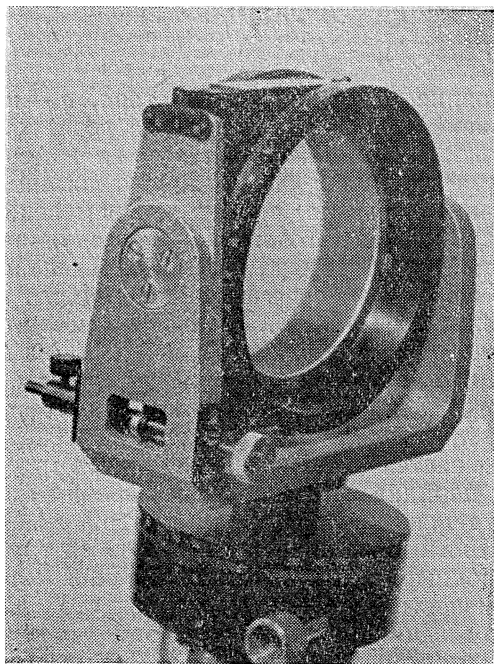


Рис. 15. Сетчатый элемент на юстировочном приспособлении [19].

рами с раскрывом  $40 \times 55$  мм<sup>2</sup>, длиной 230 мм. Такая конструкция связи не вносит неоднородностей, легко регулируется и обеспечивает при правильной юстировке возбуждение лишь основного типа колебаний. Резонатор обеспечивает  $Q = 5 \cdot 10^5$  на  $\lambda = 1$  мм.

На рис. 16 изображена типичная схема радиоспектроскопа с резонатором Фабри—Перо, с помощью которой получены фотографии

Другим важным устройством рассматриваемого диапазона является резонатор Фабри—Перо по возможности наибольшей добротности с контролируемым типом колебаний. Описание таких резонаторов дано, например, в [70, 78]. Резонатор состоит из двух вогнутых зеркал диаметром 110 мм, изготовленных с оптической точностью и покрытых напыленным под вакуумом слоем серебра толщиной  $\sim 5$  мк. Расстояние между зеркалами 300 мм, радиус кривизны зеркал 1200 мм. Посредине между зеркалами под углом  $45^\circ$  к оси резонатора натянута лавсановая пленка связи толщиной 10 мк. Зеркало и пленка снабжены устройствами для юстировки; одно зеркало может перемещаться вдоль оси для настройки. Корпус резонатора инваровый.

Пленка связи облучается рупо-

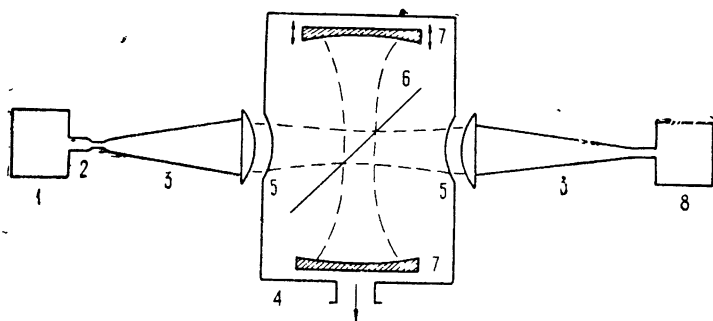


Рис. 16. Схема радиоспектроскопа с резонатором Фабри—Перо:

1—источник сигнала (ЛОВ), 2—фильтр, устраняющий высшие типы колебаний, 3—рупор с линзой из тефлона, 4—вакуумная камера, 5—окна из лавсановой пленки для пропускания излучения, 6—пленка связи с резонатором Фабри—Перо, 7—зеркала резонатора Фабри—Перо, 8—приемный детектор. Пунктиром показана область поля СВЧ.

рис. 8 и 18. Применение резонаторов Фабри—Перо в радиоспектроскопии описано также в [232—234].

Традиционным и наиболее широко использующимся приемником в радиоспектроскопии является полупроводниковый детектор с точечным контактом. Конструкции его для миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов описаны в [1—3, 8]; более поздние данные (включающие детекторы, смесители и умножители частоты) приведены в обзорах [67]\*. Наиболее широко используется пара кремний—вольфрам; однако успехи в детектировании излучения на волне 10 мк точечным контактом вольфрам—серебро и вольфрам—сталь [18] могут стимулировать поиск новых (как видно, весьма неожиданных) детекторных пар. Тенденцией здесь является повышение подвижности носителей в полупроводнике, а также использование тонких пленок полупроводника для уменьшения сопротивления растекания. Большое значение имеет конструкция элемента связи. Новая и хорошо зарекомендовавшая себя конструкция детектора с петлевой связью приведена в [151]. С этим детектором получены рис. 8 и 18. Применение супергетеродинных приемников в более коротковолновом диапазоне пока ограничено в связи с тем, что для их успешной работы частота гетеродина должна быть стабилизирована, а также ввиду трудностей перестройки в широком диапазоне.

Применение оптико-акустических приемников (ячеек Голея) в этом диапазоне общеизвестно. Ввиду большой постоянной времени их при наблюдении узких линий нужна большая стабильность частоты сигнала и плавная ее перестройка. Весьма перспективным для радиоспектроскопии может оказаться развитие акустического инфракрасного приемника Вейнгера [152], в котором излучение поглощается непосредственно в газе, заполняющем ячейку, так что поглощающая ячейка и приемник объединяются. В радиоспектроскопии при использовании монохроматического перестраиваемого по частоте сигнала такой метод был осуществлен в [155] в диапазоне длин волн 2,4 ÷ 0,5 мм, причем была получена высокая чувствительность\*\*. Существенным является нулевой характер метода, при котором вне линий поглощения газа приемник не реагирует на излучение. Это позволяет, например, повысить чувствительность, повышая мощность просвечивающего ячейку, излучения. Допустимая же (не приводящая к насыщению) плотность мощности растет как квадрат ширины линии [2].

В субмиллиметровом диапазоне применяются (например, при исследовании лазеров) пироэлектрические приемники [161]. Недавно появилось сообщение о новом пироэлектрическом материале — SBN (стронций-барий-ниобат) [153], который превосходит прежние на порядок по чувствительности и несколько порядков по быстродействию. Приемник этот весьма удобен из-за малых размеров и простоты обращения.

Наибольшей чувствительностью обладают появившиеся за последние несколько лет низкотемпературные приемники; однако они еще редко применяются в радиоспектроскопии. Отметим приемник на антимониде индия [14], низкотемпературный болометр [15], весьма интересные приемники на эффекте Джозефсона [16, 154]. Обзор приемников рассматриваемого диапазона дан в [17].

#### 4. ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МИЛЛИМЕТРОВОЙ И СУБМИЛЛИМЕТРОВОЙ РАДИОСПЕКТРОСКОПИИ

Исторически развитие радиоспектроскопии началось в сантиметровом диапазоне в связи с наличием техники, разработанной для

\* См. примечание при корректуре

\*\* Например, сигнал/шум до  $10^4$ .

других целей. Однако по изобилию и интенсивности линий, по выражению Горди, «сердце радиоспектроскопии должно, по-видимому, находиться в миллиметровой или субмиллиметровой области» [8]. Действительно, в последнее время все большая часть радиоспектроскопических исследований, судя по публикациям, относится к указанным диапазонам. Можно ожидать дальнейшего развития работ, в основном, разумеется, по изучению спектров и использованию возможностей, отсутствующих в более длинноволновых диапазонах. Высокая разрешающая способность при исследованиях методами миллиметровой и субмиллиметровой радиоспектроскопии, связанная с использованием монохроматического сигнала, позволяет на несколько порядков повысить точность исследования тех спектров, которые ранее исследовались лишь методами инфракрасной спектроскопии. Сравнение радиоспектроскопов этого диапазона с соответствующими инфракрасными проведено в [19].

Работа в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах позволит значительно расширить круг веществ, структура которых изучается наиболее надежным—радиоспектроскопическим—методом, повысить точность изучения ряда взаимодействий в молекулах, исследовать процессы, сопровождающиеся образованием легких нестабильных осколков молекул, а также атомов и молекул в возбужденных состояниях. Есть предложение об использовании частот выше 450 Гц для анализа содержания таких веществ, как  $O_2$ , NO,  $O_3$ ,  $N_2O$ , CO,  $H_2O$ , OH,  $NO^*$  в следах летательных аппаратов [234]. Те же компоненты могут быть ответственными за поглощение, особенно в верхних слоях атмосферы. Ряд других примеров приведен в разд. 1.

Обнаружение в последнее время методами радиоастрономии ряда спектральных линий легких молекул в космосе (OH [35],  $NH_3$  [27],  $H_2O$  [25],  $H_2CO$  [32]) дало новый инструмент для изучения Вселенной. Исследование более высокочастотных линий этих молекул весьма актуально, например, для объяснения «космических мазеров». Такой «космической радиоспектроскопии» всегда предшествует лабораторное исследование соответствующих спектров.

В настоящее время представляется весьма перспективным применение радиоспектроскопии в создании и исследовании мазерных устройств путем поиска как методов получения инверсии, так и конкретных веществ и переходов, пригодных для использования в мазерах, а также исследования физики процессов, происходящих в мазерах. Радиоспектроскопические методы сыграли значительную роль в идентификации генерируемых переходов и объяснении механизма генерации субмиллиметровых газовых лазеров. Развитие исследований в области субмиллиметровых газовых лазеров в значительной мере стимулируется получением неожиданно больших мощностей и КПД в молекулярных лазерах инфракрасного диапазона. В свою очередь, развитие мазеров дает новые методы радиоспектроскопических исследований (см. разд. 2). Сам принцип мазерного действия является следствием развития радиоспектроскопических идей [9, 156].

Кроме указанных спектроскопических (или близких к ним), исследование спектральных линий в этом диапазоне может иметь и другие цели, связанные скорее с процессом освоения миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов радиометодами, а также с прикладными применениями радиоспектроскопии. Первым и старейшим применением радиоспектроскопии является использование узких неизменных спектральных линий для стабилизации и калибровки частоты. В рассматриваемом диапазоне также идет развитие в этом направлении. В табл. 2 приведены наиболее точно измеренные в настоящее время реперные точки миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. Начаты рабо-

Таблица 2

Наиболее точно измеренные частоты линий в миллиметровой и субмиллиметровой областях

№.№	Длина волны (Мм)	Вещество	Метод	Переход			Измеренная частота (кГц)	Точность
				колебательный	вращательный	сверхтонкой структуры		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4,14	DCN	Пучковый мазер линия излучения [148]	0	$J = 1 \rightarrow 0$	$F_N = 1 \rightarrow 1, F_D = 1 \rightarrow 0, 1, 2$ $F_N = 1 \rightarrow 1, F_D = 2 \rightarrow 1, 2$ $F_N = 1 \rightarrow 1, F_D = 0 \rightarrow 0, 1$ $F_N = 2 \rightarrow 1, F_D = 1 \rightarrow 0, 1, 2$ $F_N = 2 \rightarrow 1, F_D = 3 \rightarrow 2$ $F_N = 2 \rightarrow 1, F_D = 2 \rightarrow 1, 2$ $F_N = 0 \rightarrow 1, F_D = 1 \rightarrow 0, 1, 2$	72 413484,3 72 413514,3 72 413558,4 72 414905,4 72 414927,0 72 414973,2 72 417029,7	$\pm 1 \cdot 10^{-8}$
2	4,12	H <sub>2</sub> O	Пучковый мазер генерация [33]	0	$1_{01} \rightarrow 0_{00}$		72 838338,860	$\pm 2 \cdot 10^{-9}$
3	3,39	HCN	Пучковый мазер генерация [148]	0	$J = 1 \rightarrow 0$	$F = 1 \rightarrow 1$ $F = 2 \rightarrow 1$ $F = 0 \rightarrow 1$	88 630415,7 88 631847,3 88 633936,0	$\pm 1 \cdot 10^{-8}$
4	2,07	DCN	Пучковый мазер линия излучения [148]	0	$J = 2 \rightarrow 1$	$F_N = 1 \rightarrow 0, F_D = 1 \rightarrow 1$ $F_N = 1 \rightarrow 0, F_D = 2 \rightarrow 1$	144 826841,4 144 826809,7	$\pm 1 \cdot 10^{-8}$
5	1,78	H <sub>2</sub> S	Пучок, электрический резонанс [33]	0	$1_{01} \rightarrow 1_{10}$	$F = 0 \rightarrow 1$ $F = 1 \rightarrow 2$ $F = 2 \rightarrow 2$ $F = 1 \rightarrow 1$ $F = 1 \rightarrow 0$ $F = 2 \rightarrow 1$	168762734,310 168762737,777 168762759,521 168762775,283 168762778,950 168762796,986	$\pm 2 \cdot 10^{-10}$
6	1,7	HCN	Пучковый мазер генерация [148]	0	$J = 2 \rightarrow 1$	$F = 2 \rightarrow 2$ $F = 1 \rightarrow 0$ $F = 2 \rightarrow 1$ $F = 3 \rightarrow 2$ $F = 1 \rightarrow 1$	177259676,7 177259923,3 177261110,4 177261223,2 177263445,0	$\pm 1 \cdot 10^{-8}$
7	0,220	H <sub>2</sub> O	Лазер, генерация, провал Лэмба [38]	100—020	$5_{23} \rightarrow 5_{30}$		1361282600	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$
8	0,118	H <sub>2</sub> O	Лазер, генерация, провал Лэмба [32]	001—020	$6_{42} \rightarrow 6_{61}$		2527952800	$\pm 1 \cdot 10^{-7}$

ты по методу электрического резонанса на  $\lambda = 0,84$  мм [33]. В этом диапазоне применимы многие методы, рассмотренные в обзоре оптических стандартов частоты [66]; достоинством его служит уже имеющаяся связь с радиочастотными стандартами частоты. Наряду со стандартами повышенной точности существует потребность в простых стандартах частоты среднего качества, подобно кварцевым генераторам общего применения в радиодиапазоне. Такие стандарты рассмотрены в [60, 37, 70]. Некоторые другие метрологические применения указаны в разд. 1.

В других случаях используется значительная сила линий в рассматриваемых диапазонах. Так, при исследовании, казалось бы, общеизвестного эффекта насыщения, кроме использования его для повышения разрешающей способности радиоспектроскопов («провал Лэмба», разд. 2), недавно выяснилась возможность применения его для параметрического усиления в субмиллиметровом диапазоне [157]. Усилитель, построенный на использовании эффекта насыщения спектральной линии, основан на нелинейной зависимости поглощения от мощности.

Идеализированный график зависимости прошедшей через газ мощности от падающей приведен на рис. 17. При подаче амплитудно-

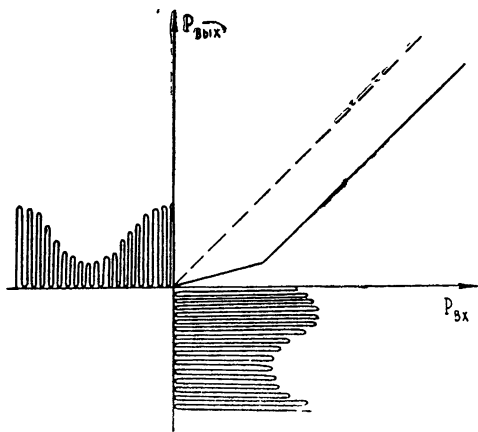


Рис. 17. Идеализированный график зависимости мощности, прошедшей через поглощающий газ, от падающей мощности с учетом насыщения.

Прохождение амплитудно-модулированного сигнала через среду с такой характеристикой приводит к ослаблению несущей и увеличению мощности боковых компонент.

модулированного сигнала достаточной мощности на среду с характеристикой рис. 17 выполняется условие

$$P_{\text{вх}}^0 P_{\text{вх}}^6 = P_{\text{вых}}^0 P_{\text{вых}}^6 \quad (6)$$

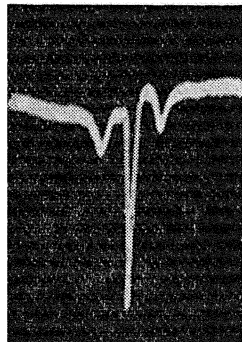
где  $P^0$ ,  $P^6$  — мощности несущей и боковых компонент соответственно. Таким образом, ослабление центральной компоненты сопровождается усилением боковых\*. В реальном усилителе роль центральной компоненты выполняет насыщающий сигнал накачки, а боковые компоненты соответствуют усиливаемому сигналу, причем коэффициент усиления пропорционален интенсивности исходной линии. Экспериментально получено усиление 16—20 дБ на волнах до  $\lambda = 1,17$  мм. Существенным является то, что параметрической средой может служить каждая достаточно сильная линия. В [30] рассмотрена система связи на  $\lambda \approx 1$  мм, использующая газовые устройства для стабилизации частоты, модуляции мощности с помощью эффекта Штарка, малошумящего усиления, а также фильтрации нежелательных спектральных компонент сигнала.

\* «Зеркальным» явлением будет ослабление амплитудной модуляции при прохождении сигнала через усиливающую среду в условиях насыщения. Эффект изменения амплитуды боковых компонент при резонансном насыщении используется в одном из вариантов балансного радиоспектроскопа [159].

Возможно, найдет применение и явление дисперсии у сильных спектральных линий (см. разд. 1). В то время как поглощение на крыльях спектральной линии падает как  $\Delta\omega^{-2}$ , где  $\Delta\omega$ —расстройка частоты от центра линии, реальная часть  $\epsilon$  уменьшается только как  $\Delta\omega^{-1}$ , т. е. величина ее может быть достаточно велика в области, где поглощение уже сравнительно мало. На фотографии рис. 18, полученной и любезно

Рис. 18. Влияние дисперсии у спектральной линии  $1_1-1_{-1}$  воды ( $\lambda = 0,538$  мм) на резонансную характеристику резонатора Фабри—Перо, заполненного парами воды.

Средний провал—линия поглощения при давлении  $\sim 10^{-2}$  мм рт. ст. При настройке резонатора на линию он резонирует на трех частотах. Средний резонанс затушевывается поглощением, боковые видны на снимке. Добротность резонансов, смещенных по частоте дисперсией за пределы линии поглощения,—порядка  $(1 \div 2) \cdot 10^5$ .



предоставленной нам Дрягиным и Паршиным, показан отклик резонатора Фабри—Перо, настроенного на линию поглощения  $1_1-1_{-1}$  воды ( $\lambda = 0,538$  мм). Благодаря дисперсии газа резонатор при одном и том же типе колебаний резонирует на трех частотах (средний резонанс тушится поглощением воды), причем добротности крайних резонансов достаточно высоки  $((1 \div 2) \cdot 10^5)$ . Как уже говорилось (разд. 1), максимальное изменение  $\epsilon$  при  $\lambda = 1$  мм для наиболее сильных линий может достигать  $\sim 5 \cdot 10^{-2}$ .

Эффект насыщения использовался также для абсолютного измерения мощности на  $\lambda = 1,17$  мм [158]. Такое измерение во многом аналогично измерению тепловым приемником. Действительно, при падении достаточно интенсивного резонансного излучения на двухуровневый газ оба уровня «нагреваются» в том смысле, что их населенности стремятся выравняться. «Температуру» их измеряют, определяя коэффициент поглощения, зависящий от разности населенности уровней. Диапазон измеряемых мощностей составляет  $10^2 \div 10^{-6}$  ватта при точности  $\sim 5\%$ . Этот метод может представлять удачное дополнение к существующим в промежуточной области, где есть трудности в применении как калориметрического метода, так и метода сравнения с тепловым излучением черного тела.

Важность применения радиоспектроскопии в химии общеизвестна; этот вопрос подробно рассмотрен в недавнем обзоре [50] и [160]. Мы ограничимся лишь несколькими замечаниями. Основной вклад радиоспектроскопии в химию — получение весьма надежных данных о структурах молекул. Вопрос о структуре нетривиален даже для простых молекул. Примерами могут служить молекулы  $S_2O$ , в которой порядок следования атомов оказался  $S-S-O$ , причем молекула изогнута;  $S_2F_2$ , существующая в двух формах — цепной и пирамидальной. Анализ квадрупольного и магнитного взаимодействий дает сведения о распределении электронов в молекулах. При этом легко устанавливается вид химических связей (ионный или ковалентный), их направление, средний квадрат расстояния электронов от центра масс. Изучение заторможенных движений в молекулах дает сведения о силах, действующих между атомами, непосредственно не связанными химической связью, определяющими конфигурацию сложных молекул. Все эти данные ши-

роко используются в теоретической химии для проверки различных теорий строения молекул, химических связей и т. д. [50].

Значительно меньше используются радиоспектроскопические методы для аналитических целей, что связано, по-видимому, с большей сложностью аппаратуры и самой методики по сравнению с другими способами исследования. Однако и в этих случаях рассматриваемые диапазоны часто бывают предпочтительнее из-за большой интенсивности линий. Радиоспектроскопическими методами можно проводить быстрый неразрушающий анализ весьма малых ( $10^{-7}$  —  $10^{-12}$  моля) количеств вещества с точностью до нескольких процентов. Важно отметить, что, благодаря большой разрешающей силе, линии изотопов разрешаются так же легко, как и линии различных веществ, и радиоспектроскопический изотопный анализ не вызывает затруднений (см. рис. 14). По этой же причине облегчается и исследование сложных смесей, обычно весьма затруднительное методами инфракрасной спектроскопии. Отметим в этой связи, что вращательный спектр является наиболее характерным для сложных молекул, так как определяется структурой всей молекулы в целом.

В последнее время значительно возрос интерес к миллиметровому и субмиллиметровому диапазонам радиоволн (см. например, [236]). Определенным образом это связано с тем, что ширина даже немногих «окон прозрачности» атмосферы в указанных диапазонах больше, чем весь остальной радиодиапазон. Однако возможные и многие применения (например, исследования строения вещества), не связанные с распространением в атмосфере. История развития радио показывает, что освоение каждого нового диапазона приносит и новые применения радиометодов. В освоении миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов должна быть, по всей вероятности, велика роль квантовых методов и устройств, в развитие которых вносит свой вклад и газовая радиоспектроскопия.

Мы попытались указать основные направления развития миллиметровой и субмиллиметровой радиоспектроскопии и исследований с ее помощью. Быстрый прогресс в этой области за последние годы позволяет надеяться на получение новых интересных результатов и приложений в будущем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. Горди, В. Смит, Р. Трамбаруло, Радиоспектроскопия, Гостехиздат, М., 1955.
2. М. Стрендберг, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1956.
3. Ч. Таунс, А. Шавлов, Радиоспектроскопия, ИЛ, М., 1959.
4. Н. Рамзей, Молекулярные пучки, ИЛ, М., 1960.
5. J. E. Wollrab, Rotational spectra and molecular structure, Academic Press, N. Y.—L., 1967.
6. P. N. Lebedev, Wied. Ann., 56, 1 (1895).
7. А. А. Глаголева-Аркадьева, Тр. III съезда Российской Ассоциации физиков в Нижнем Новгороде, 1922 г.
8. W. Gordy, Proc. Symp. on millimeter waves, p. 1, Polytechnic Press, N. Y., 1959.
9. Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 27, 431 (1954); J. P. Gordon, H. J. Zeiger, C. H. Townes, Phys. Rev., 95, 282 (1954).
10. A. Crocker, H. A. Gebbie, M. F. Kimmit, L. E. S. Mathias, Nature, 201, 250 (1964); 202, 169 (1964).
11. М. Б. Голант, Р. Л. Виленская, Е. А. Зюлина, З. Ф. Каплун, А. А. Негирев, В. А. Париков, Т. Б. Реброва, В. С. Савельев, Приборы и техника эксперимента, № 4, 136 (1965).
12. М. Б. Голант, З. Т. Алексеенко, З. С. Короткова, Л. А. Лункина, А. А. Негирев, О. П. Петрова, Т. Б. Реброва, В. С. Савельев, Приборы и техника эксперимента, № 3, 231 (1969).

13. А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1414 (1967).
14. E. H. Putley, Proc. IEEE, 51, 1412 (1963).
15. F. J. Low, Proc. IEEE, 53, 516 (1965).
16. C. C. Grimes, P. L. Richards, S. Shapiro, J. Appl. Phys., 39, № 8, 3905 (1968).
17. А. Н. Выставкин, В. В. Мигулин, Радиотехника и электроника, 12, № 11, 1989 (1967).
18. L. O. Hocker, D. R. Sokoloff, V. Danen, A. Szoke, A. Javan, Appl. Phys. Lett., 12, № 12, 401 (1968).
19. Н. А. Ирисова, Вестник АН СССР, № 10, 63 (1968).
20. А. М. Прохоров, ЖЭТФ, 34, 1658 (1958).
21. L. O. Hocker, A. Javan, D. Ramachandra Rao, L. Frenkel, T. Sullivan, Appl. Phys. Lett., 10, 147 (1967).
22. L. Frenkel, T. Sullivan, M. A. Pollack, T. J. Bridges, Appl. Phys. Lett., 11, № 11, 344 (1967).
23. V. J. Corcoran, R. E. Cupp, W. T. Smith, J. J. Gallagher, 2<sup>nd</sup> conference on chemical and molecular lasers, St. Louis, Missouri, may 22—24, 1969.
24. С. А. Жевакин, А. П. Наумов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 9—10, 1213 (1967).
25. A. C. Cheung, D. M. Rank, C. H. Townes, D. D. Thornton, W. I. Welch, Nature, 221, 626 (1969).
26. А. Н. Ораевский, Молекулярные генераторы, изд. Наука, М., 1964.
27. A. C. Cheung, D. M. Rank, C. H. Townes, D. D. Thornton, W. I. Welch, Phys. Rev. Lett., 27, 1701 (1968).
28. D. P. Akitt, C. F. Wittig, J. Appl. Phys., 40, № 2, 902 (1969).
29. D. Marcuse, J. Appl. Phys., 32, № 4, 743 (1961); Proc. IRE, 49, № 11, 1706 (1961).
30. B. Senitzky, H. Liebe, Microwave J., 10, № 12, 51 (1967).
31. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 5, № 4, 820 (1962); ЖЭТФ, 45, 101 (1963).
32. L. E. Snyder, D. Buhl, B. Zuckerman, P. Palmer, Phys. Rev. Lett., 22, № 13, 679 (1969).
33. R. E. Cupp, R. A. Kempf, J. J. Gallagher, Phys. Rev., 171, № 1, 60 (1968).
34. J. C. Hassler, P. D. Coleman, Appl. Phys. Lett., 14, № 4, 135 (1969).
35. B. J. Robinson, Scientific American, 213, № 1, 26 (1965).
36. L. Pierce, N. Gianni, R. H. Jackson, J. Chem. Phys., 38, 735 (1963).
37. А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, В. Г. Шустров, В. В. Поляков, Оптика и спектроскопия, 28, 480 (1970)
38. В. Peyton, K. Speh, R. Agrams, AIAA J., 3, 2225 (1965).
39. A. M. Pollack, L. Frenkel, T. Sullivan, Phys. Lett., A 26, № 8, 381 (1968).
40. J. S. Levine, A. Javan, Appl. Phys. Lett., 14, № 11, 348 (1969).
41. H. J. French, J. C. Angus, A. C. Walton, Science, 163, № 3865, 345 (1969).
42. А. Е. Башаринов, П. Т. Тучков, В. М. Поляков, Н. И. Ананов, Измерение радиотепловых и плазменных излучений, изд. Сов. радио, М., 1968.
43. R. L. Sorochenko, V. A. Pusanov, A. E. Salomonovich, V. V. Shteinshleger, Astrophys. J., 3, 7 (1969).
44. И. Л. Бейгман, Л. А. Вайнштейн, Р. А. Сюняев, УФН, 95, вып. 2, 267 (1968).
45. В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, В. Ф. Золин, Квантовые стандарты частоты, изд. Наука, М., 1968.
46. В. И. Гольданский, Физическая химия позитрона и позитрония, изд. Наука, М., 1968.
47. R. W. Zimmerer, M. Mizushima, Phys. Rev., 121, 152 (1961).
48. B. G. West, M. Mizushima, Phys. Rev., 143, 31 (1966).
49. J. S. Mc Knight, W. Gordy, Phys. Rev., Lett., 21, № 27, 1787 (1968).
50. E. B. Wilson, Jr., Science, 162, № 3849, 59, (1968).
51. M. Takami, T. Shimizu, J. Phys. Soc. Japan, 21, 973 (1966).
52. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 142 (1967)
53. G. Johnes, W. Gordy, Phys. Rev., 135, 295 (1964).
54. N. W. B. Stone, H. A. Gebbie, D. W. E. Fuller, A. B. Lott, C. C. Bradley, Nature, 217, 1042 (1968).



55. B. N. Bhattacharya, W. Gordy, *Phys. Rev.*, **119**, № 1, 144 (1960); W. Gordy, *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 668 (1948).
56. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, *ЖЭТФ*, **45**, 2080 (1963); *ЖЭТФ*, **47**, 1605 (1964); *Приборы и техника эксперимента*, № 1, 128 (1965).
57. R. Kewley, K. V. L. N. Sastry, M. Winnewisser, W. Gordy, *J. Chem. Phys.*, **39**, 2856 (1963); M. Winnewisser, K. V. L. N. Sastry, R. L. Cook, W. Gordy, *J. Chem. Phys.*, **41**, 1687 (1964).
58. H. E. Bates, J. J. Gallagher, V. E. Derr, *J. Appl. Phys.*, **39**, № 7, 3218 (1968).
59. I. P. French, T. E. Arnold, *J. Chem. Phys.*, **48**, № 12, 5720 (1968).
60. G. Schulten, *Microwave J.*, **10**, № 12, 71 (1967).
61. B. Starck, *Molecular Constants from Microwave Spectroscopy*, Springer, Berlin, 1967.
62. E. Pearson, W. Gordy, *Phys. Rev.*, **177**, № 1, 59 (1969).
63. W. J. Burroughs, R. G. Jones, H. A. Gebbie, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **9**, 809 (1969).
64. C. C. Bradley, W. J. Burroughs, H. A. Gebbie, W. Slough, *Infrared Physics*, **7**, № 3, 129 (1967).
65. T. Shimizu, K. Shimoda, A. Minoh, *J. Phys. Soc. Japan*, **24**, 1185 (1968).
66. Н. Г. Басов, В. С. Летохов, *УФН*, **96**, 585 (1968); R. L. Barger, J. L. Hall, *Phys. Rev. Lett.*, **22**, № 1, 4 (1969).
67. R. J. Bauer, M. Cohn, J. M. Cotton, Jr., R. F. Packard, *Proc. IEEE*, **54**, 595 (1966); C. A. Burrus, *Proc. IEEE*, **54**, 575 (1966).
68. Р. Н. Кларк, Д. Н. Мартин, *Proc. IEEE*, **54**, 528 (1966).
69. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **11**, № 8, 1186 (1968).
70. Ю. А. Дрягин, А. Ф. Крупнов, Л. М. Кукин, В. А. Скворцов, *Приборы и техника эксперимента*, № 1, 95 (1969).
71. А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, В. Г. Шустров, В. В. Поляков, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **12**, № 10, 1584 (1969).
72. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, А. В. Успенский, *Письма в ЖЭТФ*, **3**, 468 (1966); *Оптика и спектроскопия*, **23**, № 5, 680 (1967).
73. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, ч. 1, Гостехиздат, М., 1948.
74. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **7**, № 5, 991 (1964).
75. W. E. Lamb, Jr., *Phys. Rev.*, **134 A**, 1429 (1964).
76. M. S. Feld, J. H. Parks, H. R. Schlossberg, A. Javan, *Physics of Quant. Electronics*, Mc Graw-Hill, 1966, p. 567.
77. В. С. Летохов, *Письма в ЖЭТФ*, **6**, вып. 4, 597 (1967).
78. Ю. А. Дрягин, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **13**, № 1, 141 (1970).
79. C. Huiszoon, A. Dumanis, *Phys. Lett.*, **21**, № 2, 164 (1966).
80. J. R. Rusk, W. Gordy, *Phys. Rev.*, **127**, 817 (1962).
81. В. С. Летохов, *ЖЭТФ*, **56**, вып. 5, 1748 (1969).
82. R. H. Romer, R. H. Dicke, *Phys. Rev.*, **99**, 532 (1955).
83. W. Gordy, M. Cowan, *J. Appl. Phys.*, **31**, № 5, 94 (1960).
84. K. Shimoda, *Quantum Electronics*, Columbia Univ. Press, N. Y., 1960.
85. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, В. А. Щеглов, *Письма в ЖЭТФ*, **4**, вып. 2, 61 (1966).
86. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **9**, № 4, 824 (1966).
87. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко, *Приборы и техника эксперимента*, № 6, 112 (1967).
88. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **10**, № 1, 142 (1967).
89. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, А. В. Успенский, *Оптика и спектроскопия*, **23**, № 6, 923 (1967).
90. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, А. В. Успенский, *Письма в ЖЭТФ*, **3**, 468 (1966).
91. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, Г. М. Страховский, А. В. Успенский, *Оптика и спектроскопия*, **23**, № 5, 680 (1967).
92. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **8**, № 1, 200 (1965); *Радиотехника и электроника*, **10**, 378 (1965); *Приборы и техника эксперимента*, № 1, 128 (1965).
93. А. Ф. Крупнов, М. Я. Овчаров, В. А. Скворцов, А. А. Ульянов, А. П. Шеронов, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **12**, № 2, 224 (1969).
94. R. G. Strauch, R. E. Cupp, V. E. Derr, J. J. Gallagher, *Proc. IEEE*, **54**, 506 (1966).

95. L. Wharton, *Phys. Rev.*, **38**, 1203 (1963).
96. T. Oka, *J. Chem. Phys.*, **45**, 754 (1966); **47**, 13 (1967); **47**, 4852 (1967); **48**, 4919 (1968).
97. T. Yajima, *J. Phys. Soc. Japan*, **16**, 1594 (1961); **16**, 1709 (1961).
98. S. M. Bergmann, *J. Appl. Phys.*, **31**, № 2, 275 (1960).
99. W. H. Wells, *J. Appl. Phys.*, **36**, № 9, 2838 (1965).
100. А. Ф. Крупнов, С. А. Зарубин, *Оптика и спектроскопия*, **29**, вып 1, 203 (1970).
101. C. W. Flynn, *J. Mol. Spectr.*, **28**, № 1, 1 (1968).
102. M. S. Feld, A. Javan, *Phys. Rev.*, **177**, № 2, 540 (1969).
103. O. R. Frisch, *Scientific American*, **212**, № 5, 58 (1965).
104. A. G. Maki, *Appl. Phys. Lett.*, **12**, № 4, 122 (1968).
105. B. Hartmann, B. Klemm, *Appl. Phys. Lett.*, **12**, № 5, 168 (1968); W. S. Benedict, *Appl. Phys. Lett.*, **12**, № 5, 170 (1968); M. A. Pollack, W. J. Tomlinson, *Appl. Phys. Lett.*, **12**, № 5, 173 (1968).
106. С. Ф. Дюбко, В. А. Свич, Р. А. Валитов, *Письма в ЖЭТФ*, **7**, № 11, 403 (1968).
107. T. M. Hard, *Appl. Phys. Lett.*, **14**, № 4, 130 (1969).
108. J. C. Hassler, P. D. Coleman, *Appl. Phys. Lett.*, **14**, № 4, 135 (1969).
109. A. Hadni, R. Thomas, J. Weber, *J. Chim. Phys. et Phys.-Chim. Biol.*, **64**, 71 (1967).
110. W. Q. Jeffers, *Appl. Phys. Lett.*, **11**, № 6, 178 (1967).
111. J. F. Moser, H. Steffen, F. K. Kneubühl, *Helv. Phys. Acta*, **41**, № 5, 607 (1968).
112. C. K. N. Patel, W. L. Faust, R. A. McFarlane, C. G. B. Garrett, *Proc. IEEE*, **52**, № 6, 318 (1964).
113. К. Пател, *УФН*, **97**, вып 4, 697 (1969)
114. M. Lichtenstein, V. J. Corcoran, J. J. Gallagher, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-3**, № 12, 696 (1967).
115. Дж. -Поланьи, сб. *Атомные и молекулярные процессы*, изд. Мир, М., 1964, стр. 700.
116. Н. Г. Басов, А. Н. Ораевский, В. А. Щеглов, *ЖЭТФ*, **37**, вып. 2, 339 (1967).
117. W. W. Muller, G. T. Flesher, *Appl. Phys. Lett.*, **10**, № 3, 93 (1967); D. M. Staffsudd, F. A. Haak, K. Radislavljevic, *IEEE J. Quant. Electr.*, **3**, № 11, 618 (1967).
118. J. Tomlinson, M. A. Pollack, R. L. Fork, *Appl. Phys. Lett.*, **11**, № 5, 150 (1967).
119. D. P. Akitt, W. Q. Jeffers, P. D. Coleman, *Proc. IEEE*, **54**, 547 (1966).
120. M. A. Pollack, T. J. Bridges, W. J. Tomlinson, *Appl. Phys. Lett.*, **10**, 253 (1967).
121. B. F. Gordietz, N. N. Sobolev, V. V. Sokovikov, L. A. Shelepin, *Phys. Lett.*, **25 A**, № 2, 173 (1967).
122. W. Q. Jeffers, *Appl. Phys. Lett.*, **13**, 104 (1968).
123. L. O. Hocker, A. Javan, *Appl. Phys. Lett.*, **12**, № 4, 124 (1968).
124. W. S. Benedict, M. A. Pollack, W. J. Tomlinson, *IEEE J. Quant. Electr.*, **QE-5**, № 2, 108 (1969).
125. C. K. N. Patel, W. L. Faust, R. A. McFarlane, C. G. B. Garrett; *Proc. IEEE*, **52**, № 6, 318 (1964).
126. T. J. Bridges, T. Y. Chang, *Phys. Rev. Lett.*, **22**, № 16, 811 (1969).
127. J. L. Hall, W. W. Morey, *Appl. Phys. Lett.*, **10**, 152 (1967).
128. L. O. Hocker, A. Javan, *Phys. Lett.*, **26 A**, № 6, 255 (1968).
129. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко, *Изв. высш. уч. зав. — Радиопизика*, **11**, № 5, 778 (1968).
130. A. Murai, *Phys. Lett.*, **A 28**, № 8, 540 (1969).
131. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко, *Радиотехника и электроника*, **14**, № 7, 1345 (1969).
132. А. Ф. Крупнов, *Оптика и спектроскопия* (в печати).
133. S. Kobayashi, A. Minoh, *Electron. Mag.*, **13**, № 8, 915 (1968).
134. C. G. B. Garrett, *Physics of Quant. Electr.*, McGraw-Hill, 1966, p. 557.
135. L. O. Hocker, D. Ramachandra Rao, A. Javan, *Phys. Lett.*, **24 A**, № 12, 690 (1967).
136. J. P. Kotthaus, *Appl. Optics*, **7**, № 12, 2422 (1968).
137. F. Brand, *Microwave J.*, **10**, № 12, 10 (1967).
138. S. A. Marshall, J. Weber, *Rev. Sci. Instr.*, **28**, 134 (1957).
139. Н. Д. Девятков, М. Б. Голант, *Радиотехника и электроника*, **12**, № ii, 1973 (1967).

140. L. Frenkel, T. Sullivan, M. A. Pollack, T. J. Bridges, *Appl. Phys. Lett.*, **11**, № 11, 344 (1967).
141. А. Ф. Крупнов, В. А. Скворцов, Л. А. Синегубко, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **11**, № 8, 1186 (1968).
142. С. Ф. Дюбко, В. В. Шмидт, Р. А. Валитов, *Вопросы радиотехники, сер. Радиоизмерительная техника*, вып. 6, 92 (1967).
143. Ю. С. Бабкин, Р. А. Валитов, С. Ф. Дюбко, В. М. Кузьмичев, Б. И. Макаренко, А. В. Соколов, В. А. Свич, Л. И. Строганов, В. В. Шмидт, *Приборы и техника эксперимента*, № 1, 229 (1968).
144. В. В. Камышан, Р. А. Валитов, *Приборы и техника эксперимента*, № 4, 106 (1969).
145. В. В. Шмидт, С. Ф. Дюбко, В. А. Свич, А. Н. Тапков, Р. А. Валитов, *Радиотехника и электроника*, **14**, № 9, 1708 (1969).
146. А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, *Приборы и техника эксперимента*, № 1, 159 (1970).
147. E. M. Crahn, D. T. Paris, *IEEE Trans.*, **MTT-16**, № 8, 548 (1968).
148. F. DeLucia, W. Gordy, *Phys. Rev.*, **187**, № 1; 187 (1969).
149. Р. Штраух, Р. Капп, М. Лихтенштейн, Дж. Галлахер, сб. *Квазиоптика*, изд. Мир, М, 1966.
150. Е. А. Виноградов, Е. М. Дианов, Н. А. Ирисова, *Письма в ЖЭТФ*, **2**, вып. 7, 323 (1965).
151. Ю. А. Дрягин, Л. И. Федосеев, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **12**, № 6, 813 (1969).
152. М. Л. Вейнгеро, *Заводская лаборатория*, **4**, 426 (1947).
153. *Bell Labs. Record*, **47**, № 1, 27, 3<sup>2</sup> (1969); R. L. Abrams, A. M. Glass, *Appl. Phys. Lett.*, **15**, 251 (1969).
154. P. L. Richards, S. A. Sterling, *Appl. Phys. Lett.*, **14**, № 12, 394 (1969).
155. А. Ф. Крупнов, Л. И. Герштейн, В. Г. Шустров, С. П. Белов, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика* (в печати).
156. Ч. Таунс, *УФН*, **98**, вып. 1, 159 (1969).
157. B. Senitzky, G. Gould, S. Cutler, *Phys. Rev.*, **130**, 1460 (1963); B. Senitzky, S. Cutler, *Microwave J.*, **7**, 62 (1964); H. Liebe, *IEEE Trans.*, **MTT-16**, № 10, 860 (1968).
158. B. Senitzky, H. Liebe, *Rev. Sci. Instr.*, **37**, 1162 (1966).
159. J. Gibbert, R. M. Vaillancourt, *Proc. IEEE*, **54**, № 4, 514 (1966).
160. T. Nishikawa, *Kagaku no Ryoiki*, **16**, 657 (1962).
161. W. H. Steier, E. Yamashita, *Proc. IEEE*, **51**, 1145 (1963).
162. B. Senitzky, *J. Chem. Phys.*, **45**, 409 (1966) ( $\text{HCN}^{15}$ ,  $\text{DCN}^{15}$ , 70—258 Гц).
163. G. Jones, W. Gordy, *Phys. Rev.*, **136 A**, 1229 (1964) ( $\text{HCl}$ ,  $\text{HBr}$ , 510—630 Гц).
164. M. Lichtenstein, V. E. Derr, J. J. Gallagher, *J. Mol. Spectr.*, **20**, № 4, 391 (1966) ( $\text{H}_2\text{O}$ , 300—520 Гц).
165. F. A. Van Dijk, A. Dumanis, *Chem. Phys. Lett.*, **2**, № 4, 235 (1968) ( $\text{H}^{127}$ , 385 Гц).
166. P. Helminger, W. Gordy, *Phys. Rev.*, **188**, 100 (1969) ( $\text{NH}_3$ ,  $\text{PH}_3$ , 300—600 Гц) (Значение частоты  $\text{N}^{15}\text{H}_3$  ошибочно [71].)
167. D. R. Lide, Jr. P. Cahill, L. P. Gold, *J. Chem. Phys.*, **40**, № 1 (изотопы  $\text{LiCl}$ , 42 Гц).
168. M. Lichtenstein, J. J. Gallagher, V. E. Derr, *J. Mol. Spectr.*, **12**, 87 (1964) (Дейтероаммиаки, 80—210 Гц).
169. C. Huiszoo, A. Dumanis, *Physica*, **31**, № 7, 1049 (1965) ( $\text{H}_2\text{S}$ , 168 Гц и 216 Гц).
170. J. Michelsen-Effinger, *Bull. Cl. Sci. Acad. roy. Belg.*, **53**, № 3, 226 (1967) ( $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ , 13—50 Гц).
171. K. J. White, R. L. Cook, *J. Chem. Phys.*, **46**, № 1, 143 (1967) ( $\text{HNCO}$ ,  $\text{DHCO}$ ,  $\text{HN}_3$ , 81, 87—88, 94—95 Гц).
172. F. X. Powell, D. R. Johnson, *J. Chem. Phys.*, **50**, 4596 (1969) ( $\text{BrO}$ , 64 Гц).
173. P. G. Favero, A. M. Mirri, *Nuovo Cimento*, **30**, 502 (1963) ( $\text{CHCl}_3$ ,  $\text{CFCl}_3$ , 100—180 Гц).
174. L. Pierce, N. Gianni, R. H. Jackson, *J. Chem. Phys.*, **38**, 730 (1963) ( $\text{F}_2\text{O}$ , 8—60 Гц).
175. K. Takagi, T. Oka, *J. Phys. Soc. Japan*, **18**, № 8, 1174 (1963) (изотопы  $\text{H}_2\text{CO}$ , 16—10, 25—38, 55—71 Гц).
176. K. Takagi, S. Saito, *J. Phys. Soc. Japan*, **18**, 1840 (1963) ( $\text{SO}_2$ , *мм* диапазон).
177. M. Winnewisser, R. L. Cook, *J. Chem. Phys.*, **41**, 999 (1964).
178. A. Baner, J. Bellét, *Compt. Rend.*, **258**, 879 (1964) ( $\text{SO}_2$ , 50—135 Гц).
179. Le Blanc, H. Oliver, *J. Chem. Phys.*, **33**, № 2, 598 (1960) ( $\text{HCOF}$ , 11—46 Гц).
180. P. Favero, J. G. Baker, *Nuovo Cimento*, **17**, 734 (1960) ( $\text{HCOF}$ , 101,5 Гц).

181. P. Favero, A. Mirri, J. G. Baker, Nuovo Cimento, 17, 740 (1960) (HCOF, DCOF, 90—168,2 Гц).
182. A. Mirri, A. Guarnieri, P. Favero, Nuovo Cimento, 19, № 6, 1189 (1961) ( $C_2H_3F$ , 100—160 Гц).
183. P. Venkatesvarlu, J. G. Baker, W. Gordy, J. Mol. Spectr., 6, № 2, 215 (1961) ( $CH_3CN$ , 90—225 Гц).
184. R. M. Lees, J. G. Baker, J. Chem. Phys., 48, № 12, 5299 (1968) ( $CH_3OH$ , 90—200 Гц).
185. R. Van Riet, G. Steenbeckelie, Ann. Soc. Scient., Bruxelles, 82, ser. 1, № 2, 127 (1968) (изотопы  $SO_2$ , 8—60 Гц).
186. T. Amano, E. Hirota, V. Morino, J. Phys. Soc. Japan, 22, 399 (1967) (SO радикал, 12, 7—172 Гц).
187. J. R. Rusk, J. Chem. Phys., 42, 493 (1965) ( $H_2O$ , 183 Гц).
188. Г. П. Шипуло, Оптика и спектроскопия, 10, 553 (1961) ( $H_2NCN$ , 20—60 Гц).
189. R. Kewley, K. V. L. N. Sastry, M. Winnewisser, J. Mol. Spectr., 12, 387 (1964) ( $HN_3$ ,  $DN_3$ , 23, 8; 66—180 Гц).
190. A. M. Mirri, P. Favero, A. Guarnieri, G. Semerano, Boll. Sci. Fac. Chim. Ind. Bologna, 20, 110 (1962).
191. A. M. Mirri, G. Gazzoli, L. Ferret, J. Chem. Phys., 49, № 6, 2775 (1968) ( $NO_2F$ , 90—200 Гц).
192. E. F. Pearson, W. Gordy, Phys. Rev., 177, № 1, 52 (1969) (LiCl, LiF, 538 Гц).
193. A. M. Mirri, Nuovo Cimento, 18, 849 (1960) (DCOOH, HCOOD, DCOOD, 120—160 Гц).
194. J. Gordon, W. Gordy, Phys. Rev., 136, № 5A, 1229 (1964) (HCl, HBr, 500—626 Гц).
195. R. Kewley, K. V. L. N. Sastry, M. Winnewisser, J. Mol. Spectr., 10, 418 (1963) (HNCS, HNCO, 80—190 Гц).
196. A. R. Hilton, Jr. A. W. Jacke, L. B. Beal, Jr., W. D. Henderson, R. L. Robinson, J. Chem. Phys., 34, 1137 (1961) ( $F_2O$ , 52—360 Гц).
197. A. Guarnieri, P. Favero, A. M. Mirri, G. Semerano, Boll. Sci. Fac. Chim. Ind. Bologna, 20, 105 (1962) ( $H_2CO$ , мм диапазон).
198. M. A. Pollack, IEEE J. Quant. Electr., QE-5, 558 (1969).
199. А. Ф. Крупнов, Л. И Гершгейн, Приборы и техника эксперимента (в печати).
200. L. O. Hocker, J. G. Small, A. Javan, Phys. Lett., A 29, 321 (1969).
201. V. Daneu, D. Sokoloff, A. Sanchez, A. Javan, Appl. Phys. Lett., 15, 398 (1969).
202. K. M. Evenson, J. S. Wells, L. M. Matarrese, L. B. Elwell, Appl. Phys. Lett., 16, 159 (1970).
203. K. M. Evenson, J. S. Wells, L. M. Matarrese, Appl. Phys. Lett., 16, 251 (1970).
204. R. G. Strauch, Electr. Lett., 5, 246 (1969).
205. K. A. Biddgett, T. A. King, Proc. of Phys. Soc., Atomic and Molecular Physics, 2, 902 (1969).
206. W. J. Sarjeant, E. Brannen, IEEE J. Quant. Electr., QE-5, 620 (1969).
207. R. A. McFarlane, L. H. Fretz, Appl. Phys. Lett., 14, 385 (1969).
208. W. J. Witteman, R. Bleeckrode, ZAMP, 16, 87 (1965).
209. G. T. Flesher, W. M. Muller, Proc. IEEE, 54, № 4, 543 (1966).
210. E. Brannen, V. Sochor, W. J. Sarjeant, H. R. Froelich, Proc. IEEE, 55, № 3, 462 (1967).
211. W. Q. Jeffers, Appl. Phys. Lett., 11, № 6, 178 (1967).
212. A. Minoh, T. Shimizu, S. Kobayashi, K. Shimoda, Jap. J. Appl. Phys., 6, № 8, 921 (1967).
213. W. Q. Jeffers, P. D. Coleman, Appl. Phys. Lett., 13, № 8, 250 (1968).
214. W. M. Muller, G. T. Flesher, Appl. Phys. Lett., 8, № 9, 217 (1966).
215. С. Ф. Дюбко, В. А. Свиц, Р. А. Валитов, Письма в ЖЭТФ, 6, № 3, 567 (1967).
216. С. Ф. Дюбко, В. А. Свиц, Р. А. Валитов, ЖТФ, 39, вып. 6, 1135 (1969); ЖТФ, 38, 1988 (1968).
217. H. A. Gebbie, N. W. B. Stone, F. D. Findlay, Nature, 202, 685 (1964).
218. H. A. Gebbie, New Scientist, 25, № 431, 426 (1965).
219. M. Gamni, F. K. Kneubuhl, J. F. Moser, H. Steffen, ZAMP, 16, 562 (1965).
220. L. E. S. Mathias, A. Crocker, M. S. Wills, Electronics Lett., 1, 45 (1965).
221. F. Arams, C. Allen, M. Wang, K. Button, L. Rubin, Proc. IEEE, 55, 420 (1967).
222. H. A. Gebbie, N. W. B. Stone, J. E. Chamberlain, W. Slough, W. A. Sheraton, J. Chim. Phys. et Phys. Chem., biol., 64, № 1, 80 (1967).
223. Yoshinaga Hiroshi, Kon Shozo, Yamanaka Masanobu, Yamamoto Junya, Sci. Light., 16, № 1, 50 (1967).

224. L. E. S. Mathias, A. Crocker, Phys. Lett., 13, № 1, 35 (1964).  
 225. W. Q. Jeffers, P. D. Coleman, Proc. IEEE, 55, № 7, 1222 (1967).  
 226. T. Kasuya, A. Minoh, K. Shimoda, J. Phys. Soc. Japan, 25, 1201 (1968).  
 227. H. Steffen, J. Steffen, J. F. Moser, F. K. Kneubühl, Phys. Lett., 20, № 1, 20 (1966).  
 228. H. Steffen, J. Steffen, J. F. Moser, F. K. Kneubühl, Phys. Lett., 21, № 4, 425 (1966).  
 229. Masanoby Yamanaka, Shozo Kon, Junya Yamamoto, Hiroshi Yoshinaga, Jap. J. Appl. Phys., 7, № 5, 554 (1968).  
 230. L. E. S. Mathias, A. Crocker, M. S. Wills, IEEE, J. Quant. Electr., QE-3, № 4, 170 (1967).  
 231. R. G. Strauch, Electronics Lett., 5, № 11, 246 (1969).  
 232. M. M. Lichtenstein, J. J. Gallagher, R. E. Cupp, Rev. Sci. Instr., 34, № 8, 843 (1963).  
 233. I. P. French, T. E. Arnold, Rev. Sci. Instr., 38, № 11, 1604 (1967).  
 234. I. P. French, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 8, 1655 (1968).  
 235. F. R. Gilmore, E. Bauer, J. W. McGowan, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 9, 157 (1969).  
 236. Бучи, Электроника, 41, № 6, 62 (1968).  
 237. R. C. Jones, C. C. Bradley, J. Chamberlain, H. A. Gebbie, N. W. B. Stone, H. Sixsmith, Appl. Optics, 8, № 3, 701 (1969).  
 238. А. Г. Кисляков, УФН (в печати).  
 239. Н. Г. Басов, Ю. М. Попов, УФН, 72, 161 (1960).  
 240. А. Ф. Крупнов, О. Б. Щуко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 12, 1780 (1969).  
 241. F. X. Powell, D. R. Johnson, J. Chem. Phys., 50, 4596 (1969).  
 242. P. D. Coleman, IEEE Int. Convent. Digest, N. Y., 1969; Synopses papers, N. Y., 1969, p. 114.  
 243. H. D. Rudolph, Zs. Angew. Physik, 23, 49 (1967).  
 244. В. А. Бугаев, Радиотехника и электроника, 14, № 6, 1126 (1969).  
 245. L. O. Hocker, J. G. Small, A. Javan, Phys. Lett., A 29, 321 (1969).  
 246. V. Daneu, D. Sokoloff, A. Sanchez, A. Javan, Appl. Phys. Lett., 15, 398 (1969).  
 247. Н. Г. Басов, В. С. Летохов, Письма в ЖЭТФ, 2, 6 (1965); 9, 660 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
20 ноября 1969 г.

*Примечание при корректуре* За время нахождения обзора в печати появились две полезные книги Р. А. Валитов, С. Ф. Дюбко, В. В. Камышан, В. М. Кузьмичев, Б. И. Макаренко, А. В. Соколов, В. П. Шейко, «Техника субмиллиметровых волн», изд. Сов. радио, М., 1969 г. и «Техника спектроскопии в дальней инфракрасной, субмиллиметровой и миллиметровой областях спектра», под ред. Д. Мартина, изд. Мир, М., 1970 г.

УДК 551.510.535

## ПЕРЕМЕЩАЮЩИЕСЯ ВОЗМУЩЕНИЯ В $F$ -ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ И СПОРАДИЧЕСКИЙ СЛОЙ $E^*$

З. С. Шарадзе

Приведены результаты исследования перемещающихся возмущений (ПВ) над Тбилиси за период с 1964 по 1967 г. Проанализирован также вопрос о связи ПВ с  $E_s$ . Показано, что ПВ могут быть связаны с распространением в ионосфере внутренних гравитационных волн.

Среди крупномасштабных неоднородностей регистрируются так называемые перемещающиеся возмущения (ПВ). Для этих возмущений характерны перемещения в горизонтальном направлении со скоростью  $50-400 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$  на значительные расстояния без существенного изменения формы и амплитуды [1-5]. Мартин [6] и Хайнс [7] предложили связывать появление этих возмущений с распространением в ионосфере внутренних гравитационных волн.

В настоящее время одной из вероятных причин возникновения  $E_s$  на умеренных широтах считаются так называемые ветровые сдвиги. Эта точка зрения, выдвинутая впервые Уайтхедом [8], получила сейчас свое дальнейшее развитие и подтверждение [9-12]. Хайнс [7, 9] отметил, что появление ветровых сдвигов может быть связано с перемещающимися возмущениями. Корреляция между  $E_s$  и этими возмущениями отмечалась в работах [13-17]. Поэтому дальнейшие исследования связи между ПВ и  $E_s$  представляют определенный интерес для усовершенствования теорий распространения гравитационных волн и образования ветровых сдвигов в ионосфере.

Методы, применяющиеся для исследования ПВ, весьма разнообразны. Наиболее распространенным способом изучения ПВ является снятие через небольшие интервалы времени (в 1-5 мин) высотно-частотных характеристик на ионосферных станциях. Ниже приводятся некоторые результаты исследования ПВ и слоя  $E_s$  над Тбилиси по материалам наблюдений ионосферы с января 1964 по декабрь 1967 г.

Начало ПВ сопровождается петлеобразными искажениями ионограммы в районе критических частот  $F$ -области ( $f_0F2$ ) — в виде расслоения—или на низкочастотном конце  $F$ -области—в виде перегибов. Эти искажения чаще всего смещаются к низкочастотному концу ионограммы, и их принято называть вертикально-перемещающимися возмущениями (ВПВ) [14-17]. ВПВ являются одним из характерных проявлений перемещающихся возмущенностей.

Типичные ионограммы при наличии не очень интенсивных ПВ приведены на рис. 1. В 12 час 10 мин на высоте  $\sim 200 \text{ км}^{**}$  образуются два расслоения (на частотах 3,3 и 3,5 МГц), и почти одновременно вблизи 4,0 МГц (на высоте 240 км) начинается возникать перегиб. С 12 час 15 мин наблюдается понижение  $f_0F2$ , сопровождающееся смещением «точки» деления на  $O$ - и  $X$ -компоненты к низким частотам.

\* Доклад на Всесоюзной ионосферной конференции, Ленинград, 1968.

\*\* В работе используются местное пояснение время и действующие высоты.

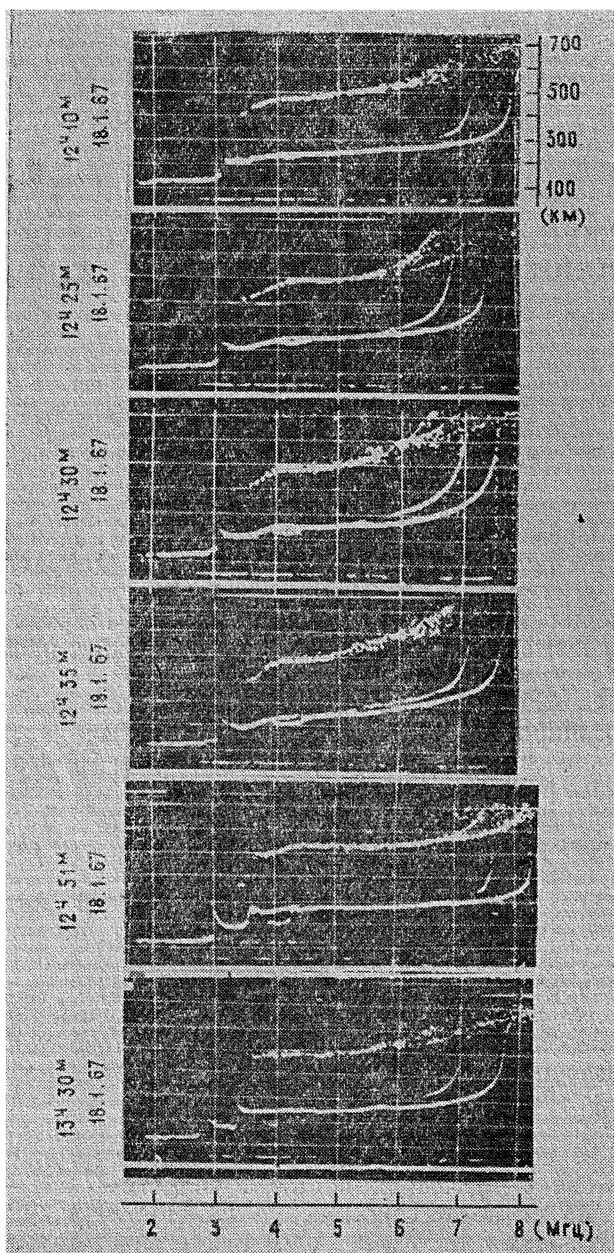


Рис. 1. Высотно-частотные характеристики ионосферы  $h'(f)$  при наличии ПВ (18 января 1967 г.).

В 12 час 35 мин эта точка приходится на частоту 5,15 Мгц. Начиная с 12 час 25 мин перегиб усиливается и перемещается вниз. Продолжая движение вниз, в 13 час 30 мин перегиб превращается в  $E_s$  типа  $h^*$ .

\* На ионограммах, приведенных на рис. 1, отчетливо виден прерывистый след отражения на высоте 50 км. Псевдобные отражения довольно часто наблюдаются на Тбилисской ионосферной станции. Это явление само по себе интересно и заслуживает внимания, однако в данной работе не ставится задача изучения причин возникновения указанных отражений.

Продолжительность этого процесса составляет  $\sim 60$  мин. Образование и превращение перегиба в  $E_s$  сопровождается квазипериодическим изменением  $f_0F2$  с периодом  $\sim 60$  мин. Во время образования спорадического слоя  $E$  типа  $h$  наблюдается уменьшение электронной плотности в  $F$ -области (см. рис. 1 работы [18]). Этот факт приводит к предположению о возможности переноса ионизации из  $F$ -области в  $E$ -область. Смещение «точки» разделения  $O$ - и  $X$ -лучей, по-видимому, также указывает на реальное перемещение уплотненных ионизованных образований. ПВ в таком же виде иногда наблюдаются на ионограммах и в ночное время [19].

Более интенсивные ПВ преимущественно наблюдаются при сравнительно низких  $f_0F2$  ( $4,5 \leq f_0F2 \leq 6,5$  МГц). На рис. 2 приводятся ионограммы, показывающие последовательное прохождение двух

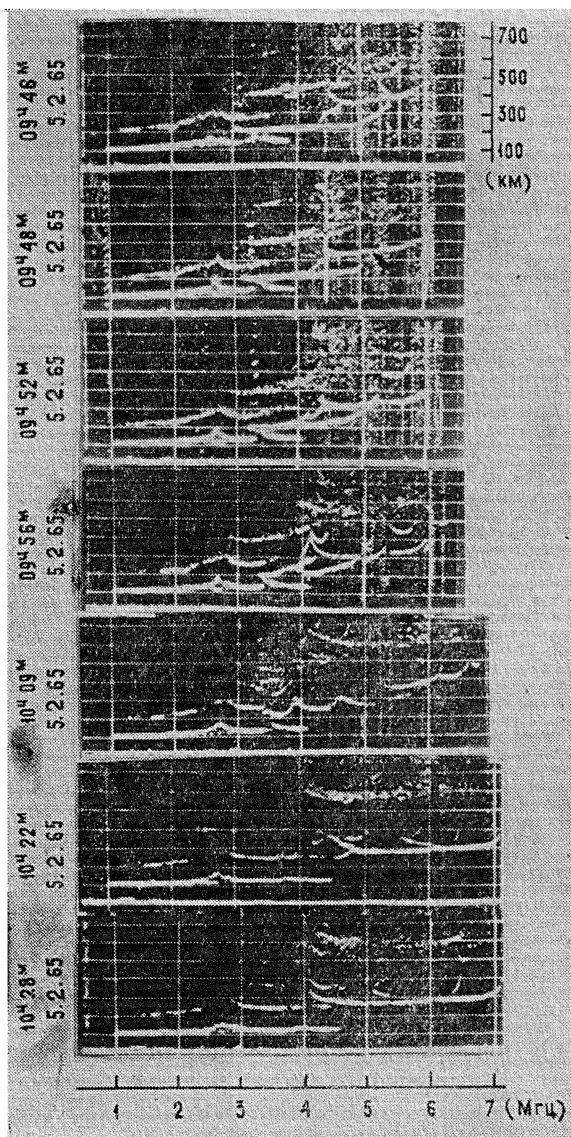


Рис. 2. Сложное искажение следа  $F$ -области и увеличение  $f_0E_s$  и  $f_bE_s$  при наличии интенсивных ПВ (5 февраля 1965 г.).



интенсивных ПВ с интервалом 15 мин. С 09 час 37 мин над  $O$ -компонентой, отраженной от  $F$ -области волны на высоте  $\sim 530$  км, начинает развиваться ВПВ типа  $A1$  [14]. Далее наблюдается перемещение вниз ВПВ и сильное изменение ионограммы. В 09 час 48 мин на ионограмме появляются следы отражения от слоев  $F2$  и  $F1$  с минимальными высотами 325 и 200 км соответственно. В 09 час 52 мин снова появляется возмущение (ВПВ на высоте 470 км). В результате этих возмущений на низкочастотном конце  $F$ -области наблюдаются расслоения  $F0$ ;  $F0,5$ ;  $F1,5$  (см. ионограмму, снятую в 10 час 09 мин, и последующие), а после исчезновения расслоений происходит заметное увеличение критической частоты обыкновенного луча  $f_0E_s$  и частоты экранировки  $f_bE_s$  спорадического слоя  $E$  типа  $C$ . Следует отметить, что увеличение  $f_bE_s$  и  $f_0E_s$  начинается через 11 мин после появления ПВ в  $F$ -области (см. ионограмму, снятую в 09 час 48 мин, и последующие).

По  $N(h)$ -профилям установлено, что высота появления перегибов на низкочастотном конце  $F$ -области меняется в пределах 160—200 км и наблюдается тенденция увеличения высоты с увеличением солнечной активности. Вертикальная скорость движения вниз перегибов лежит в пределах  $10$ — $30$  м·сек<sup>-1</sup>. Высота появления ВПВ вблизи  $f_0F2$  определена приблизительно и лежит в интервале 350—430 км. С увеличением  $f_0F2$  число интенсивных ПВ, при которых ВПВ начинаются выше  $N_{\max}F2$ , резко уменьшается и при  $f_0F2 \geq 9,5$  Мгц фактически не наблюдаются.

Исследование материалов ежеминутных наблюдений ионосферы также показало, что интенсивные ПВ иногда сопровождаются возникновением двух или трех спорадических слоев, расположенных друг над другом. Такой пример дается на рис. 3. В 10 час 00 мин на высоте  $\sim 200$  км наблюдается изгибание следа  $F$ -области вблизи 2,8 и 3,5 Мгц. Понижение  $f_0F2$  начинается с 10 час 07 мин, и на низкочастотном конце  $F$ -области вместо изгибов наблюдаются более четко выраженные расслоения, которые движутся вниз. «Отрыв» от следа  $F$ -области этих расслоений особенно заметен с 10 час 15 мин, и с этого же момента наблюдается возмущение в районе  $f_0F2$ . Сначала наблюдаются мелкие расслоения, а в 10 час 23 мин на высоте  $\sim 500$  км наблюдается ВПВ типа  $A1$ . Расслоения, образующиеся на низкочастотном конце  $F$ -области, продолжают перемещаться вниз и в 10 час 34 мин на высоте  $\sim 150$  км превращаются в  $E_s$  типа  $h$ . ВПВ, образующиеся вблизи  $f_0F2$ , в 10 час 32 мин превращаются в перегиб, перемещающийся вниз, и в 10 час 47 мин наблюдаются два  $E_s$ -слоя типа  $h$  и  $C$  на высотах  $\sim 145$  и 120 км соответственно. Спустя 2 мин на высоте 100 км наблюдается и третий прерывистый неэкранирующий  $E_s$ , существующий всего лишь 2 мин.

Следует отметить, что в момент появления этого слоя наблюдается ослабление следа и уменьшение предельной частоты отражения спорадического слоя  $E$  типа  $C$ , а после исчезновения прерывистого слоя  $E$  восстанавливается прежняя картина в  $F$ -области (ср. ионограммы, снятые в 10 час 47 мин, 10 час 49 мин и 10 час 52 мин). Два спорадических слоя далее одновременно существуют в течение 30 мин. Прерывистый слой  $E_s$  на высоте 95—105 км часто наблюдается также в начальный период развития ПВ в  $F$ -области. Такой пример представлен на рис. 4. ПВ в  $F$ -области фиксируется в 11 час 14 мин (расслоение в  $f_0F2$ ). В это время в  $E$ -области на высоте 110 км наблюдаются регулярный слой  $E$  и обыкновенная компонента спорадического слоя  $E$  типа  $C$ . В 11 час 16 мин на высоте 100 км появляется прерывистый  $E_s$ , протяженностью по частоте от 1,65 до 5,5 Мгц. В это же время в районе  $f_0F2$  на высоте  $\sim 500$  км появляется ВПВ. Из рисунка виден квазипериодический ха-

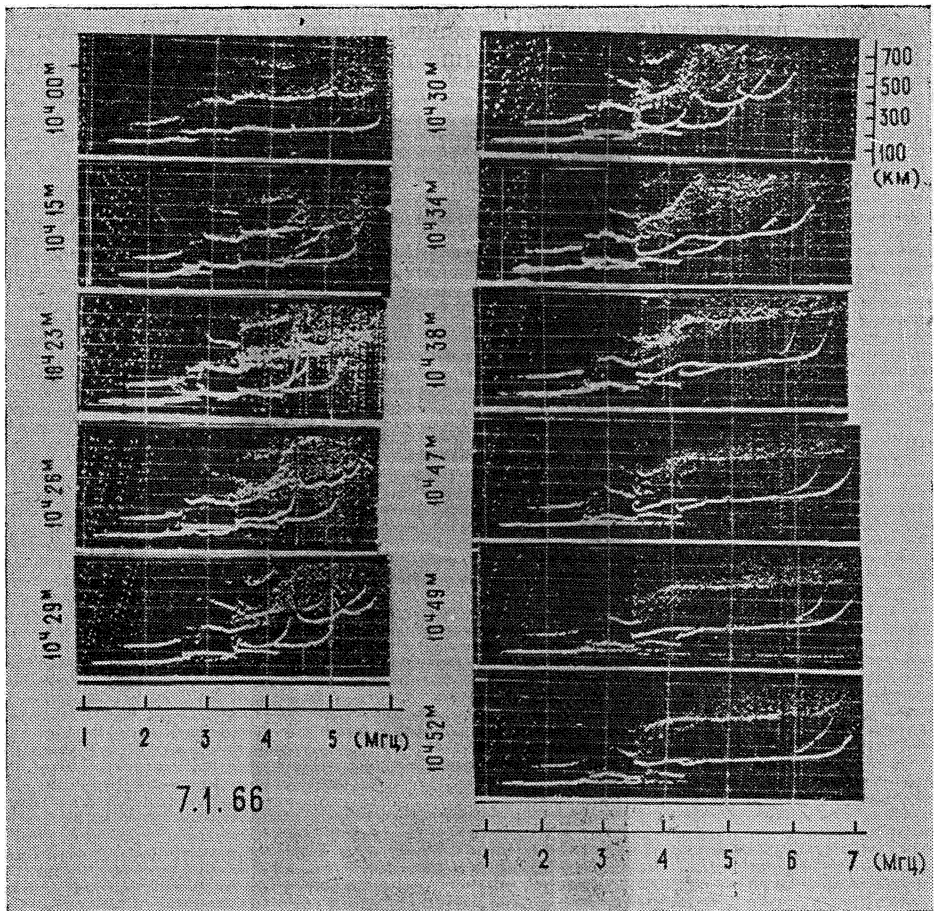


Рис. 3. ПВ, сопровождающиеся образованием трех спорадических слоев  $E$  (7 января 1966 г.).

рактически изменение интенсивности и предельной частоты отражения прозрачного  $E_s$ .

Нами произведены расчеты  $N(h)$ -профилей для некоторых случаев появления кратковременных  $E_s$ . Оказалось, что за 1—2 мин до появления таких слоев наблюдается заметное уменьшение электронной концентрации вблизи 120 км. Таким образом, можно считать, что появление или исчезновение прерывистых  $E_s$  сопровождается изменением электронной концентрации в  $E$ -области. Этого следует ожидать, если учесть, что механизм ветрового сдвига образования спорадических слоев  $E$  подразумевает перераспределение ионизации вблизи высоты, на которой регистрируется слой  $E_s$  [8, 20]. По материалам ежеминутных наблюдений ионосферы установлено, что прерывистый неэкранирующий  $E_s$  появляется внезапно с определенной предельной частотой. Продолжительность существования такого слоя колеблется от 1 до 18 мин.

Непрерывное зондирование ионосферы, проведенное в зимнее время 1964—1965 гг., показывает, что продолжительность существования двух слоев  $E_s$  колеблется от 1 до 60 мин. Наиболее часто встречаются случаи с продолжительностью непрерывного существования 5—20 мин.

Хотя приведенные картины довольно типичны для ПВ, следует отметить, что помимо описанных выше основных аномалий на ионограм-

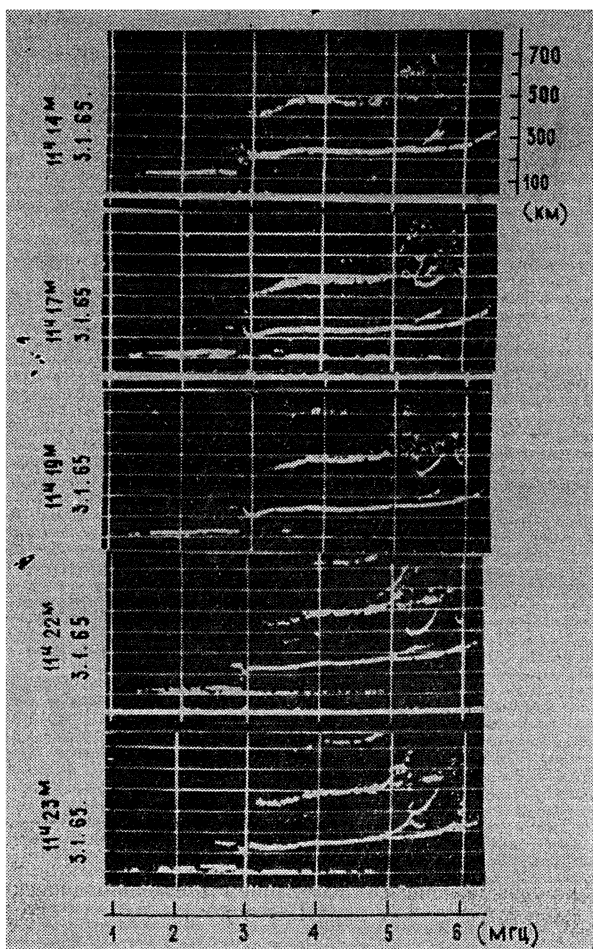


Рис. 4. Прерывистый, кратковременный  $E_s$  при наличии ПВ в  $F$ -области (3 января 1965 г.).

мах встречаются связанные с ПВ искажения других видов. Укажем, например, на расщепления, эквивалентные появлению двух отражений от  $F$ -области. Аномалии подобного типа в ночные часы описывались в работах [4, 21]. На рис. 5 представлено развитие этого явления в дневное время. Следует отметить, что только интенсивные ПВ сопровождаются искажениями подобного типа. Два отражения от  $F$ -области наблюдаются от 13 час 37 мин и особенно четко они видны в 13 час 39 мин. Их действующие высоты  $\sim 300$  и 225 км. След отражения с большей высотой (в диапазоне 4,2—6,9 Мгц) движется вверх и ослабляется. Время существования двух отражений от  $F$ -области не превышает 12—18 мин. На этом же рисунке видны заметные изменения в  $E$ -области. В момент начала возмущения наблюдаются два  $E_s$  типа  $l$  и  $C$ . Через 11 мин (см. ионограмму 13 час 26 мин) нижний  $E_s$  типа  $l$  заметно усиливается, а  $E_s$  типа  $C$  в 13 час 29 мин уже не наблюдается (ионограмма не приводится). С 13 час 32 мин начинается уменьшение предельной частоты слоя  $E_s$  типа  $l$ , и с этого же момента наблюдается

движение вниз (к низким частотам) расслоения от высоты 215 км с критической частотой 3,2 Мгц, за счет чего в 13 час 48 мин образуется  $E_s$  типа  $h$ .

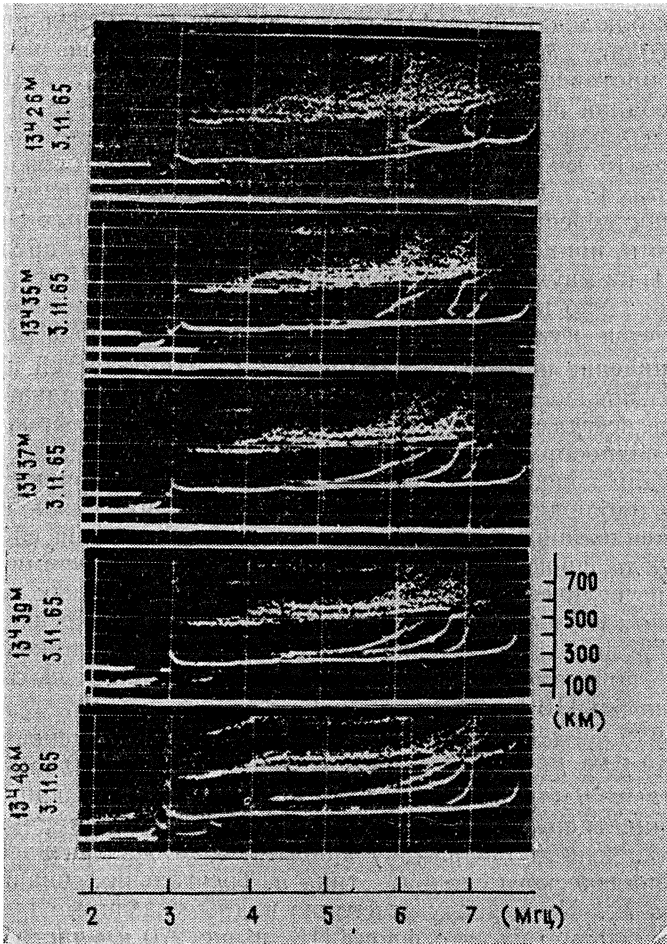


Рис. 5. Появление двух отражений от  $F$ -области, вызванное ПВ (3 ноября 1965 г.).

Из приведенных рисунков видно, что проникновение ПВ из  $F$ -области в  $E$ -область сопровождается возникновением  $E_s$ . При наличии такого слоя под действием ПВ увеличивается степень ионизации в нем, что приводит к увеличению отражательной способности  $E_s$ . В таких случаях на ионограммах преимущественно наблюдаются превращение перегиба или расслоения на низкочастотном конце  $F$ -области в  $E_s$ ; интенсивные изменения параметров  $E_s$  наблюдаются через 20—60 мин после появления ПВ в  $F$ -области. Такие наглядные превращения на ионограммах наблюдались не всегда, и тем не менее ПВ сопровождалось изменениями в  $f_o E_s$  и  $f_b E_s$ . В указанных случаях было трудно определить, связаны ли изменения параметров  $E_s$  с ПВ. Исследование этих изменений по материалам ежеминутных наблюдений показало, что они в большинстве случаев имеют квазипериодический характер, с периодом 10—60 мин, что указывает на их связь с ПВ [9].

Квазипериодические изменения  $f_o E_s$  и  $f_b E_s$  слоя  $E_s$  типа  $h$  и  $C$  довольно часто сопровождаются заметными изменениями высоты слоя

$h'E_s$ ; иногда эти изменения имеют также квазипериодический характер. Высота  $h'E_s$  слоя  $E_s$  типа  $l$  за время существования слоя независимо от изменений  $f_0E_s$  и  $f_bE_s$  существенно не изменяется. Квазипериодические изменения параметров слоя  $E_s$  типа  $l$  и  $h$  по материалам ежедневных наблюдений ионосферы показаны на рис. 6. Из рисунка видно, что колебание  $h'E_s$  типа  $h$  ( $h'E_s$  слоя  $E_s$  типа  $l$  не меняется) происходит в противофазе с колебаниями  $f_0E_s$  и  $f_bE_s$ . Макоимальный период колебаний 30—50 мин. Минимальный период  $\sim 8$ —10 мин. Амплитуда колебаний для  $f_0E_s$  и  $f_bE_s$  лежит в интервале  $0,5 \div 1,0$  Мгц, а для  $h'E_s \sim 15$  км. Подобные изменения параметров слоя  $E_s$  отмечались в работах [22—24]. Объяснение квазипериодических изменений  $f_0E_s$  и  $f_bE_s$  возникновением ветровых сдвигов, обусловленных гравитационными волнами, приводится в работе [9]. В пользу этого предположения говорит наличие двух  $E_s$ , отделенных по высоте на 8—15 км. К тому же, как было показано в [25], «эффективный ветровой сдвиг» в течение дня характеризуется изменениями с периодом от 10 мин до 1 часа и более.

Сопоставление изменения параметров  $E$ - и  $F$ -областей при наличии ПВ еще раз показало, что возмущение является фронтальным [5, 18, 25]. Фронт ПВ не всегда является строго линейным. Иногда фронт представляет собой волнообразно изгибающуюся линию. Длина этих вертикальных «волн» для колебаний с периодом около 30 мин порядка 70—100 км. Чаще всего наблюдаются ПВ, у которых фронт наклонен вперед. Наблюдается тенденция увеличения вероятности появления слоя  $E_s$  в те моменты, когда фронт пересекает  $E$ -область. В то же время иногда наблюдается и увеличение критической частоты слоя  $E_s$ , как это указывалось Боуманом [27] для ночного периода. Квазипериодические колебания  $f_0E_s$  и  $f_bE_s$  иногда в течение 1—4 час имеют одинаковую форму и сдвинуты по времени на  $\pm 5$ —25 мин, что также свидетельствует о фронтальности ПВ.

На рис. 7 представлены квазипериодические изменения критической частоты  $f_0F2$   $F$ -области, действительных высот  $h_f(t)$  на различных фиксированных частотах (в мегагерцах, обозначены у кривых), электронной концентрации  $N_h(t)$  на различных фиксированных высотах (также обозначенных цифрами у кривых), а также критической частоты  $f_0E_s$  спорадического слоя  $E_s$  типа  $h$ . Треугольник означает наличие прерывистых  $E_s$ . На записях отчетливо видны указанные выше особенности. Следует отметить, что фронт ПВ выше 270 км часто становится почти вертикальным. Хайнс [28] показал, что изгибание волнового фронта ПВ вызвано эффектом диссипации и рефракции гравитационных волн, распространяющихся в среде с меняющейся температурой и основным ветром.

Непрерывные зондирования ионосферы позволили исследовать также моменты начала изменения  $f_0E_s$  и  $f_bE_s$  при наличии ПВ в  $F$ -области. Всего было проанализировано 517 ПВ. Оказалось, что максимальное число изменений в  $E_s$  наблюдается через 10—15 мин и 30—60 мин после появления ПВ в  $F$ -области. Наблюдались случаи, когда изменения в  $E_s$  начинались в момент появления или на 5—15 мин раньше появления ПВ в  $F$ -области. Следует отметить, что увеличение  $f_0E_s$  и  $f_bE_s$  в начальный момент развития ПВ в  $F$ -области больше характерно для  $E_s$  типа  $l$  на высоте 100—110 км. Изменения  $f_0E_s$  и  $f_bE_s$  в моменты, близкие ( $\pm 5$ —15 мин) к началу ПВ в  $F$ -области, по-видимому, объясняются фронтальностью ПВ. Также установлено, что вероятность влияния ПВ на  $E_s$  увеличивается с уменьшением  $f_0F2$  и при  $4,6 \leq f_0F2 \leq 5,3$  Мгц достигает 65%.

По материалам учащенных наблюдений ионосферы исследовались периоды квазисинусоидальных возмущений в  $E$ - и  $F$ -областях по пара-

метрам  $f_b E_s$ ,  $f_o E_s$ ,  $f_o F_2$ ,  $N_h(t)$ ,  $h'_f(t)$ ,  $h_f(t)$ . Установлено, что периоды возмущений меняются в интервале 10 — 180 мин. Чаще всего наблюда-

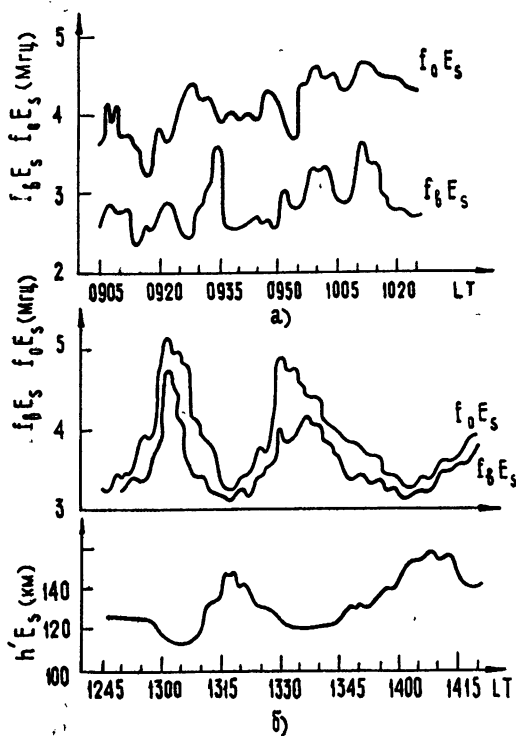


Рис. 6. Квазипериодические изменения параметров спорадического слоя  $E$  типа  $I$  (а), 26 января 1966 г., и типа  $h$  (б), 29 сентября 1969 г.

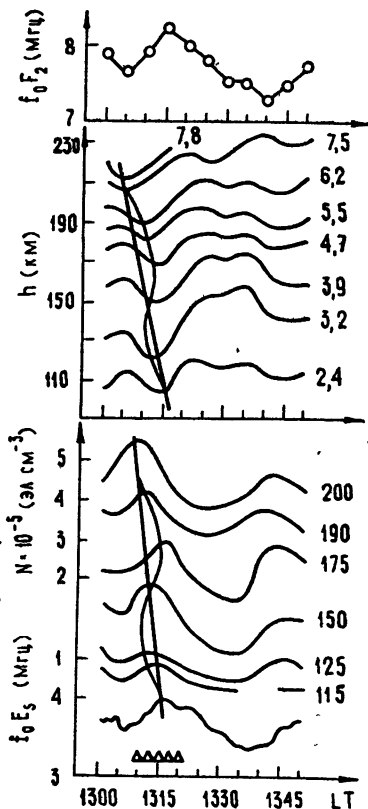


Рис. 7. Характерная картина изменений различных параметров ( $f_o F_2$ ,  $h_f(t)$ ,  $N_h(t)$ ,  $f_o E_s$ ) ионосферы при наличии ПВ (12 декабря 1966 г.).

ются возмущения с периодом 30 и 60 мин. Замечена тенденция увеличения числа возмущений с периодом  $n \times 30$  мин ( $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ). Минимальный период квазисинусоидальных изменений  $f_o E_s$  и  $f_b E_s$  не меньше 8—10 мин, а для параметров  $F$ -области  $T_{\min} \geq 15$  мин. Эти значения периодов несомненно говорят в пользу предположения о связи ПВ с внутренними гравитационными волнами. С увеличением активности Солнца число квазипериодических возмущений в  $F$ -области уменьшается и колебания с периодами, большими 90—120 мин, фактически не наблюдаются. Заметно уменьшается и амплитуда возмущений. Как правило, колебания ионосферных параметров имеют не монохроматический вид. Немонохроматичность в  $F$ -области особенно заметна при низких  $f_o F_2$ . Поэтому более правильно связывать ПВ не с отдельными монохроматическими волнами, а с группами волн [12].

Величина относительных отклонений концентрации  $\Delta N/N$  принимает значение от 3 до 7% для слабых возмущений и доходит до 15—26% для сильных ПВ. Наблюдались случаи, когда  $\Delta N/N \approx 35$ —50%. Следует отметить, что наблюдается тенденция увеличения амплитуды возмущения с уменьшением плотности в самой  $F$ -области.

Из вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1) ПВ могут быть связаны с распространением в ионосфере внутренних гравитационных волн. В рамках этого механизма можно объяснить основные особенности ПВ.

2) ВПВ является одним из характерных проявлений ПВ. Однако объяснение ВПВ как кажущегося смещения по вертикали возмущений, вызванных наклоном фронта ПВ, нуждается в уточнении, так как при этом часто наблюдается реальный перенос ионизации вблизи  $f_0F2$  и в межслоевой области  $E-F$ . Поскольку ВПВ на высотах 350—430 км в основном наблюдаются лишь при небольших  $f_0F2$ , можно предположить, что при невысокой концентрации в  $F$ -области влияние ПВ распространяется и выше  $N_{\max} F2$  (на проникновение ПВ до 500 км было указано в работе [29]).

3) Обратную зависимость числа интенсивных ПВ от солнечной активности (от  $f_0F2$ ) можно объяснить увеличением поглощения гравитационных волн в ионосфере с увеличением концентраций.

4) Межслоевые расслоения  $E2, F0, F0,5, F1,5$  часто вызываются ПВ.

5) ПВ вызывают заметные изменения параметров спорадического слоя  $E$ .

6) Квазипериодические изменения  $f_0E_s$  и  $f_bE_s$  с периодом 10—60 мин свидетельствуют в пользу предположения Хайнса о том, что появление ветровых сдвигов может быть связано с внутренними гравитационными волнами.

В заключение автор выражает благодарность С. П. Чернышевой и И. К. Рисс за помощь в вычислениях  $N(h)$ -профилей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Munro, Proc. Roy. Soc., A202, № 1069, 208 (1950).
2. G. H. Munro, Aust. J. Phys., 11, № 1, 91 (1958).
3. G. H. Munro, L. H. Heisler, Aust. J. Phys., 9, № 3, 359 (1956).
4. L. H. Heisler, J. Atmosph. Terr. Phys., 25, № 2, 71 (1963).
5. K. L. Chan, O. G. Villard, J. Geophys. Res., 67, № 4, 973 (1962).
6. D. F. Martyn, Proc. Roy. Soc., A201, № 1065, 216 (1950).
7. C. O. Hines, Canad. J. Phys., 38, № 11, 1441 (1960).
8. J. D. Whitehead, J. Atmosph. Terr. Phys., 20, № 1, 49 (1961).
9. C. O. Hines, J. Atmosph. Terr. Phys., 25, 305 (1963).
10. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, Изв. высш. уч. з-в — Радиофизика, 11, № 1, 5 (1968).
11. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, Ю. А. Игнатьев, Геомагнетизм и аэрoномия, 8, № 1, 72 (1968).
12. Б. Н. Гершман, Г. И. Григорьев, сб. Ионосферные исследования, серия Результаты исследования по международным геофизическим проектам, № 16, 34 (1968).
13. L. H. Heisler, J. D. Whitehead, Geophys. Res., 65, № 9, 2767 (1960).
14. З. С. Шарадзе, Д. К. Квавадзе, Геомагнетизм и аэрoномия, 7, № 1, 95 (1967).
15. Д. К. Квавадзе, З. С. Шарадзе, Сообщение АН ГССР, 53, № 1, 69 (1963).
16. Н. М. Боеикова, Ю. В. Кушнеревский, Ионосферные исследования, серия Результаты МГГ, № 9, 63 (1961).
17. Н. П. Попов, Геомагнетизм и аэрoномия, 3, № 3, 576 (1963).
18. И. К. Рисс, С. П. Чернышева, З. С. Шарадзе, Геомагнетизм и аэрoномия (в печати).
19. З. С. Шарадзе, Д. К. Квавадзе, Геомагнетизм и аэрoномия, 7, № 1, 186 (1967).
20. В. Л. Позигун, С. С. Чавдаров, Геомагнетизм и аэрoномия, 7, № 6, 1101 (1967).
21. R. W. E. Mc Nicol, H. C. Webster, G. G. Bowman, Aust. J. Phys., 6, № 2, 247 (1956).

22. З. С. Шарадзе, Сообщ. АН СССР, 51, № 3, 561 (1967).
23. L. H. Heisler, J. D. Whitehead, J. Atmosph. Terr. Phys., 24, № 9, 753 (1962).
24. J. W. Wright, C. H. Marply, G. V. Bull, J. Geophys. Res., 72, № 6, 1443 (1967).
25. C. A. Reddy, S. Matsushita, J. Atmosph. Terr. Phys., 30, № 5, 747 (1968).
26. Г. И. Григорьев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 4, 466 (1967).
27. G. G. Bowman, J. Atmosph. Terr. Phys., 30, № 5, 721 (1968).
28. C. O. Hines, J. Atmosph. Terr. Phys., 30, № 5, 845 (1968).
29. P. L. Dyson, Aust. J. Phys., 20, № 3, 467 (1967).

Тбилисский государственный университет

Поступила в редакцию  
23 июня 1969 г.

## TRAVELING DISTURBANCES IN THE IONOSPHERIC *F*-REGION AND THE SPORADIC *E*-REGION

*Z. S. Sharadze*

The results are given of investigating traveling disturbances (TD) over Tbilisi for the period 1964—1967. The relation of TD with  $E_s$  region is analyzed.

TD may be associated with internal gravity waves propagated in the ionosphere.

---



УДК 621.371.25 : 533.9.01

## О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВОЛН В ОГРАНИЧЕННОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

А. Н. Кондратенко, В. Г. Шантала

Рассматривается вопрос о «распадной» неустойчивости волн в плазменном цилиндрическом волноводе, находящемся в постоянном магнитном поле. Получены общие выражения и нелинейные граничные условия для полей в предположении трехплазменных взаимодействий. Детально исследуется взаимодействие высокочастотных поверхностных волн и ионно-звуковых поверхностных волн или объемных волн при различных радиусах волновода.

Отдельные случаи нелинейного взаимодействия волн в ограниченной плазме изучались в ряде работ [1-4]. В частности, в работе [4], где рассматривалось взаимодействие поверхностных волн в полуграниченной плазме, была обоснована необходимость использования нелинейных граничных условий для полей на границе плазма—вакуум. Представляет интерес рассмотреть вопрос о нелинейном взаимодействии волн в плазменном волноводе, находящемся во внешнем постоянном магнитном поле. В таком волноводе распространяются поверхностные и объемные волны, которые могут нелинейно взаимодействовать между собой. В настоящей работе в гидродинамическом приближении получены нелинейные поля в волноводе и нелинейные граничные условия в общем случае и конкретно исследовано взаимодействие высокочастотных (ВЧ) поверхностных волн (граничная частота которых  $\omega = [(\omega_e^2 + \Omega_e^2)/2]^{1/2}$ , где  $\omega_e$ ,  $\Omega_e$  — электронная циклотронная и плазменная частоты) с объемной или поверхностной низкочастотной (НЧ) ионно-звуковой волной в неизотермической плазме ( $T_e \gg T_i$ ).

### 1. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Будем исходить из нелинейной системы гидродинамических уравнений движения и уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \nabla) \mathbf{v}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} [\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}] - \frac{\nabla p_\alpha}{m_\alpha (n_0 + n_\alpha)},$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \text{div} (n_0 + n_\alpha) \mathbf{v}_\alpha = 0, \quad (1.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha e_\alpha \mathbf{v}_\alpha (n_0 + n_\alpha),$$

где индекс  $\alpha$  означает сорт частиц плазмы (электроны, ионы);  $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{z}$  — внешнее постоянное магнитное поле;  $n_\alpha$  — изменение плотности плазмы, обусловленной волной;  $p_\alpha$  — давление; остальные обозначения общепринятые.

Зависимость возмущений переменных величин, вызванных основной («фоновой») волной и волнами, возникающими вследствие развития неустойчивости («распада»), от координат и времени имеет вид

$$f_j(\mathbf{r}, t) = f_j(\mathbf{r}) \exp[i(k_{zj}z - \omega_j t)]. \quad (1.2)$$

Здесь и в дальнейшем везде величины без индекса относятся к основной волне, а с индексом  $j = 1, 2$  — к первой или второй возбуждаемым волнам.

Ограничимся случаем аксиально-симметричных волн и трехплазменных взаимодействий. В динамическом уравнении [5], описывающем изменение амплитуд взаимодействующих волн со временем, определяющими являются слагаемые, для которых выполняются законы сохранения [6]:

$$\omega_2 = \omega + \omega_1, \quad k_{z2} = k_z + k_{z1}. \quad (1.3)$$

Магнитное поле считаем достаточно сильным, так что тепловым движением электронов поперек него можно пренебречь:  $\omega_e \gg k_{\perp} v_{Te}$ . Тогда из системы (1.1) для  $E_z$  получим неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка по  $r$ , правая часть которого обусловлена нелинейным взаимодействием волн:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \Delta_{\perp}^2 E_z - k^2 [\varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1 - \beta^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)] \Delta_{\perp} E_z - k^4 \varepsilon_3 [\varepsilon_2^2 - \\ - (\varepsilon_1 - \beta^2)^2] E_z = ik^3 [\varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1 - \beta^2)^2] \xi_z - ik [(\varepsilon_1 - \\ - \beta^2) \Delta_{\perp} - k_z \varepsilon_2 \Delta_r] \xi_{\varphi} + [\beta \Delta_{\perp} + k k_z (\varepsilon_1 - \beta^2)] \Delta_r \xi_r. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $\beta = k_z/k$ ,  $k = \omega/c$ ,  $\varepsilon_{1,2,3}$  — известные компоненты тензора диэлектрической постоянной неизотермической плазмы в гидродинамическом приближении,  $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$ ,  $\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r$ . Уравнение (1.4) относится к обеим возбуждаемым волнам, в которых индексы  $j = 1, 2$  опущены. Величины  $\xi = (\xi_r, \xi_{\varphi}, \xi_z)$  определяются соотношением

$$\xi_{1,2} = \frac{2\pi}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} (n_{\alpha 2,1} \mathbf{v}_{\alpha} + n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha 2,1} + 2n_0 \delta \mathbf{v}_{\alpha 1,2}), \quad (1.5)$$

где  $\delta \mathbf{v}_{\alpha}$  — слагаемое скорости частиц, обусловленное взаимодействием волн и имеющее следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta v_{ar} &= -i \frac{\omega}{\Delta_{\alpha}} A_{ar} + \frac{\omega_{\alpha}}{\Delta_{\alpha}} A_{a\varphi}, \\ \delta v_{a\varphi} &= -\frac{\omega_{\alpha}}{\Delta_{\alpha}} A_{rr} - i \frac{\omega_{\alpha}}{\Delta_{\alpha}} A_{a\varphi}, \\ \delta v_{az} &= \frac{1}{g_{\alpha}} \left( -i\omega A_{ar} - ik_z \frac{v_{T\alpha}^2}{n_0} Q_{\alpha} + k_z v_{T\alpha}^2 \frac{\omega}{\Delta_{\alpha}} \times \right. \\ &\quad \times \Delta_r A_{ar} + ik_z v_{T\alpha}^2 \frac{\omega_{\alpha}}{\Delta_{\alpha}} \Delta_r A_{a\varphi} \left. \right), \\ \Delta_{\alpha} &= \omega_{\alpha}^2 - \omega^2, \quad g_{\alpha} = k_z^2 v_{T\alpha}^2 - \omega^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В этих выражениях величины  $A_{\alpha}$  и  $Q_{\alpha}$  обозначают нелинейные части уравнений движения и непрерывности.

Решение уравнения (1.4) имеет вид суперпозиции двух волн

$$E_z = \sum_{n=1, 2} \left[ C_n J_{0n} + \frac{\pi (-1)^n F_{zn}}{2(q_1^2 - q_2^2)} \right], \quad (1.7)$$

где  $J_{0n} \equiv J_0(q_n r)$  — функция Бесселя, а  $q_n$  — корни уравнения

$$\varepsilon_1 q^4 + k^2 [\varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1 - \beta^2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)] q^2 - k^4 \varepsilon_3 [\varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1 - \beta^2)^2] = 0. \quad (1.8)$$

Нелинейная поправка  $F_{zn}$  к полю  $E_z$

$$F_{zn} = \frac{1}{\varepsilon_1} \{ q_n [\beta q_n^2 - k k_z (\varepsilon_1 - \beta^2)] \psi_{1n} - i q_n k k_z \varepsilon_2 \psi_{2n} + \\ + i k^3 [\varepsilon_2^2 - (\varepsilon_1 - \beta^2)^2] \psi_{3n} + i k q_n^2 (\varepsilon_1 - \beta^2) \psi_{3n} \}, \quad (1.9)$$

где величины  $\psi$  определяются следующим образом:

$$\psi_{1n} = \int_0^r dr' r' \xi_r(r') [J_{0n}(r) N_{1n}(r') - N_{0n}(r) J_{1n}(r')], \\ \psi_{2n} = \int_0^r dr' r' \xi_\varphi(r') [J_{0n}(r) N_{1n}(r') - N_{0n}(r) J_{1n}(r')], \\ \psi_{3n} = \int_0^r dr' r' \xi_z(r') [N_{0n}(r) J_{0n}(r') - J_{0n}(r) N_{0n}(r')]. \quad (1.10)$$

Здесь  $N_{1,0}$  — функции Неймана.

Остальные компоненты поля определяются через  $E_z$  и имеют вид (приведем только тангенциальные составляющие)

$$E_\varphi = - \sum_{n=1, 2} \frac{k \eta_n}{q_n} \left[ C_n J_{1n} + \frac{\pi (-1)^n F_{\varphi n}}{2(q_1^2 - q_2^2)} \right], \\ H_\varphi = - i \sum_{n=1, 2} \frac{k \varepsilon_3}{q_n} \left[ C_n J_{1n} + \frac{\pi (-1)^n F_{\varphi n}}{2(q_1^2 - q_2^2)} \right], \\ H_z = i \sum_{n=1, 2} \eta_n \left[ C_n J_{0n} + \frac{\pi (-1)^n F_{zn}}{2(q_1^2 - q_2^2)} \right]. \quad (1.11)$$

Выражение для  $F_{\varphi n}$  получим из выражения для  $F_{zn}$ , если  $\psi_{1,2,3}$  заменим на  $\psi_{4,5,6}$ , где

$$\psi_{4n} = \int_0^r dr' r' \xi_r(r') [J_{1n}(r) N_{1n}(r') - N_{1n}(r) J_{1n}(r')], \\ \psi_{5n} = \int_0^r dr' r' \xi_\varphi(r') [J_{1n}(r) N_{1n}(r') - N_{1n}(r) J_{1n}(r')], \\ \psi_{6n} = \int_0^r dr' r' \xi_z(r') [N_{1n}(r) J_{0n}(r') - J_{1n}(r) N_{0n}(r')], \quad (1.12)$$

$$\eta_n = \frac{k^2 \varepsilon_3 (\varepsilon_1 - \beta^2) - \varepsilon_1 q_n^2}{k k_z \varepsilon_2}.$$

Для получения нелинейного дисперсионного уравнения или коэффициентов связи необходимо сшить тангенциальные компоненты полей

в плазме и вакууме. При этом надо иметь в виду, что тангенциальные компоненты поля  $H$  будут разрывными вследствие наличия нелинейного поверхностного тока. При выводе граничных условий не принимается во внимание структура переходного слоя, а граница плазма—вакуум задается поверхностью разрыва плотности плазмы. Тогда общий вид граничных условий будет следующим:

$$\begin{aligned} \{E_z\} &= \{E_\varphi\} = 0, \\ \{H_{z1,2}\} &= \frac{2\pi}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \left( \frac{v_{\varphi 2,1} v_r}{\omega} - i \frac{\omega_{2,1}}{g_{2,1}} v_{\varphi} v_{r 2,1} \right), \\ \{H_{\varphi 1,2}\} &= \frac{2\pi}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \left\{ \frac{2\omega_{1,2}}{q_{1,2}} \left[ \frac{\omega v_r}{2g} \left( \omega_{2,1} v_{r 2,1} - i \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_{z 2,1} \right) + \right. \right. \\ &+ \frac{\omega_{2,1} v_{r 2,1}}{g_{2,1}} \left( \omega v_z' - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_z \right) + \frac{i\omega_{2,1} v_z v_{r 2,1}}{g_{2,1}} - \frac{v_{z 2,1} v_r}{\omega} + \\ &\left. \left. + \frac{ik_{z 2,1} v_{r\alpha}^2}{cg_{2,1}} \left[ \frac{v_{r 2,1}}{\omega} (k_z v_z - \hat{P} v_r) - \frac{v_r}{\omega_{2,1}} (ik_{z 2,1} v_{z 2,1} + \hat{P} v_{r 2,1}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $\{E\}$  означает скачок величины  $E$  на границе плазма—вакуум,  $\hat{P} = 1/r + \Delta_r$ , а индекс  $\alpha$  у величин  $v_{\alpha}$  и  $g_{\alpha}$  для упрощения записи опущен.

## 2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВЧ И ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН

Полученные выше выражения слишком сложные, чтобы можно было исследовать задачу без упрощающих предположений. Поэтому рассмотрим наиболее интересный случай малых фазовых скоростей, когда  $\beta^2 = k_z^2/k^2 \gg 1$ . Тогда поля в плазме можно представить как суперпозицию несвязанных  $E$ - и  $H$ -волн. В дальнейшем рассмотрим  $E$ -волну, имеющую компоненты  $E_r$ ,  $E_z$  и  $H_{\varphi}$ . Ее тангенциальные составляющие можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_{zj} &= C_j J_{0j} + CC_{2,1} f_j(r), \\ H_{\varphi j} &= -iC_j \frac{\varepsilon_{3j} k_j}{k_{\perp j}} J_{1j} + iCC_{2,1} h_j(r), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} f_j &= -\frac{\pi k_{zj}}{2k_{j\varepsilon_{1j}}} \left\{ k_{\perp j} \int_0^r dr' r' \mu_{1j}(r') [J_{0j}(r) N_{1j}(r') - \right. \\ &- N_{0j}(r) J_{1j}(r')] + k_{zj} \int_0^r dr' r' \mu_{3j}(r') [N_{0j}(r) J_{0j}(r') - J_{0j}(r) N_{0j}(r')] \Big\}, \\ h_j &= \frac{\pi k_{zj} \varepsilon_{3j}}{2\varepsilon_{1j}} \left\{ \int_0^r dr' r' \mu_{1j}(r') [J_{1j}(r) N_{1j}(r') - N_{1j}(r) \times \right. \\ &\times J_{1j}(r')] + \frac{k_{zj}}{k_{\perp j}} \int_0^r dr' r' \mu_{3j}(r') [N_{1j}(r) J_{0j}(r') - J_{1j}(r) N_{0j}(r')] \Big\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Значения  $k_{\perp} \equiv q_1$  получим из уравнения (1.8), если  $\beta^2 \gg \varepsilon_i$  ( $i=1, 2, 3$ ):

$$k_{\perp 1}^2 = -k_z^2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} \left[ 1 - \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) + \varepsilon_2^2}{\beta^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} \right]. \quad (2.3)$$

Между величинами  $\xi$  и  $\mu$  имеют место соотношения

$$\xi_{rj} = CC_{2,1} \mu_{1j}, \quad \xi_{zj} = iCC_{2,1} \mu_{3j}.$$

Далее будем рассматривать неизотермическую плазму ( $T_e \gg T_i$ ), основную и первую возбуждаемую волны—высокочастотными ( $\omega \gg k_z v_{Te}$ ), а вторую возбуждаемую волну—низкочастотной ионно-звуковой ( $\omega_2 \ll k_{z2} v_{Te}$ ,  $\omega_2 \ll \omega$ ). При сделанных выше предположениях граничное условие для  $H_\varphi$  упрощается:

$$\begin{aligned} \{H_{\varphi i}\} &= iCC_{2,1} \beta_j, \\ \beta_1 &= -i \frac{2\pi e^2 n_0 k_1 \sigma_1}{cm_e \omega^2 k_z} \left( 1 + \frac{\omega_2 \omega}{k_{z2}^2 v_{Te}^2} \right) J_1(k_1 a) J_0(k_{1,2} a), \\ \beta_2 &= i \frac{2\pi e^2 n_0 k_1 \sigma_1}{cm_e \omega^2 k_{z1}} \left( 1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}} \frac{k_1}{k_z} \right) J_0(k_1 a) J_1(k_1 a). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )—компоненты тензора проводимости неизотермической плазмы.

Пользуясь этими граничными условиями и сшивая тангенциальные составляющие полей в плазме и вакууме, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} D_1 C_1 &= C C_2 F_1, \\ D_2 C_2 &= C C_1 F_2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$F_j = \frac{k_{1j}}{k_j} \left[ h_j - \beta_j - \frac{k_{1j} k_1(x_j a)}{x_j k_0(x_j a)} f_j \right], \quad (2.6)$$

а  $D_j$ —дисперсионные уравнения возбуждаемых волн в линейном приближении.

Нелинейное взаимодействие волн характеризуется коэффициентами связи

$$u_{1,2} = CF_1 \left( \frac{\partial D_1}{\partial \omega_1} \right)^{-1}, \quad u_{2,1} = CF_2 \left( \frac{\partial D_2}{\partial \omega_2} \right)^{-1} \quad (2.7)$$

в динамическом уравнении для амплитуд и инкрементом возбуждения  $\gamma$ . Если пренебречь зависимостью основной волны от времени, то  $\gamma^2 = -u_{1,2} u_{2,1} / \omega_2^2$ , если  $\omega \rightarrow \omega + i\gamma$ . Принимая во внимание, что  $\omega_2 \ll \omega$ , из (1.3) получим  $\omega_1 \simeq -\omega$ ,  $k_{z1} \simeq -k_z$ , что соответствует распространению первой и основной волн в одну сторону.

Рассмотрим взаимодействие поверхностных волн в широком волновом диапазоне или полуграниченной плазме ( $k_{\perp 1} a \gg 1$ ,  $k_{\perp 2} a \gg 1$ ). В этом случае линейные дисперсионные уравнения ВЧ волн имеют вид

$$\frac{k_z^2}{k^2} = \frac{2(1 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \varepsilon_3 - 1}, \quad (2.8)$$

откуда следует  $\omega \ll [(\omega_e^2 + \Omega_e^2)/2]^{1/2}$ . Для ионно-звуковых волн [7]  $\sqrt{\varepsilon_{3,2} \varepsilon_{1,2}} = 1$ , откуда

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3,$$

$$\omega_5^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_e \omega_i \left( 2 + \frac{m_e}{m_i} \right) + \Omega_i^2 - \sqrt{4\omega_e^2 \omega_i^2 + \Omega_i^4} \right]. \quad (2.9)$$

Коэффициенты связи и инкремент возбуждения соответственно равны

$$\begin{aligned} u_{12} &= \frac{eE_0 \Omega_e^2}{8m_e v_{Te}^2 k_{z2} \omega} \sqrt{\frac{k_{\perp}}{k_{\perp 2}}} \left( 1 - \frac{k_{z2}}{k_{\perp 2}} \varepsilon_3 \right) \exp(-k_{\perp} a), \\ u_{21} &\approx \frac{eE_0 m_i \omega_2^2 \Omega_e^2 k_{z2}}{4m_e^2 \omega^5} \left( \frac{k_{\perp 2}}{k_{\perp}} \right)^{3/2} \frac{\exp(k_{\perp} a)}{\varepsilon_{12} + \varepsilon_{32}}, \\ \gamma^2 &= \frac{e^2 E_0^2 \Omega_e^6 k_{\perp 2}}{32m_e^2 \omega^6 \Omega_i^2 k_{\perp} v_{Te}^2} \left( 1 - \frac{k_{z2}}{k_{\perp 2}} \varepsilon_3 \right) \frac{1}{|\varepsilon_{12} + \varepsilon_{32}|}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $E_0 = C/I_0(k_{\perp} a)$  — амплитуда поля основной волны на границе плазмы.

Рассмотрим теперь случай, когда волновод можно считать широким для ВЧ волн ( $k_{\perp} a \gg 1$ ) и узким для НЧ ( $k_{\perp 2} \ll 1$ ), так что линейное дисперсионное уравнение НЧ волн

$$\varepsilon_{32} - \frac{2}{k_{z2}^2 a^2 \ln k_{z2} a} = 0.$$

Коэффициенты связи и инкременты возбуждения в этом случае следующие:

$$\begin{aligned} u_{12} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{eE_0 \omega k_{\perp} \sqrt{k_{\perp} a}}{8m_e k_z k_{z2} v_{Te}^2} (3 - \varepsilon_1) \exp(-k_{\perp} a), \\ u_{21} &\approx - \frac{eE_0 m_i \omega_2^2}{4\sqrt{2\pi} m_e^2 \omega^3 k_{\perp} a^2} \frac{\exp(k_{\perp} a)}{\varepsilon_{12} \sqrt{k_{\perp} a} \ln k_{z2} a}, \\ \gamma^2 &\approx \frac{e^2 E_0^2 m_i (3 - \varepsilon_1)}{64 m_e^3 v_{Te}^2 k_z k_{z2} a^2 \omega^2 \varepsilon_{12} \ln k_{z2} a}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из последнего выражения видно, что  $\gamma \sim 1/a$ .

Наконец заметим, что в случае широкого волновода ( $k_{\perp} a \gg 1$ ,  $k_{\perp 2} a \gg 1$ ) и объемной НЧ волны инкремент экспоненциально мал:  $\gamma \sim \exp(-k_{\perp 2} a)$ , а в случае волновода, узкого для всех волн ( $k_{\perp} a \ll 1$ ,  $k_{\perp 2} a \ll 1$ ), «распадное» взаимодействие волн запрещено законами сохранения (1.3).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Кондратенко, ЖТФ, 33, 1397 (1963).
2. К. С. Карплюк, В. Н. Ораевский, ЖТФ, 38, 1214 (1968).
3. В. Н. Ораевский, Автореферат диссертации, ХГУ, 1969.
4. А. Н. Кондратенко, В. Г. Шаптала, УФЖ, 14, вып. 7, 1093 (1969).
5. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ЖЭТФ, 43, 2234 (1962).
6. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ, 32, 1291 (1962).
7. А. Н. Кондратенко, ЖТФ, 36, 943 (1966).

## NONLINEAR INTERACTION OF WAVES IN A BOUNDED MAGNETOACTIVE PLASMA

*A. N. Kondratenko, V. G. Shaptala*

The decay instability of waves in a plasma cylindrical waveguide being in a constant magnetic field is considered. General expressions and nonlinear boundary conditions have been derived for the fields on the assumption of three-plasmon interaction. The interaction of HF surface waves with ion-sound surface or volume waves are investigated in detail at the different radii of the waveguide.

---

УДК 621.378. 2

## К ТЕОРИИ ГЕНЕРАТОРОВ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ОПТИЧЕСКОГО ДИАПАЗОНА

Г. Л. Гуревич

Рассматриваются генераторы бегущей волны с произвольной нелинейностью. Показано, что во многих случаях можно установить связь между формой импульсов излучения и начальными условиями, не прибегая к решению нелинейных дифференциальных уравнений. В качестве примера определена форма импульсов излучения лазера в режиме модуляции добротности; найдены огибающие импульсов, формируемых однофотонными и двухфотонными насыщаемыми поглотителями. Исследована устойчивость стационарной генерации ОКГ с насыщаемым поглотителем и показано, что неустойчивость на частотах межмодовых биений возникает при ничтожных количествах поглотителя.

В последнее время при теоретическом исследовании лазеров, параметрических генераторов и пр. широкое распространение получил пространственно-временной подход, когда поле излучения ищется без разложения по модам резонатора. При таком подходе автоматически учитывается взаимодействие между модами; при этом задача сводится к интегрированию системы небольшого числа нелинейных уравнений в частных производных. Поскольку методы решения таких уравнений не разработаны, то обычно рассматривают какие-либо простейшие случаи. Ниже показано, что информацию о работе генераторов можно получить и при достаточно общих предположениях. Оказывается, что во многих случаях можно определить связь между формами сигналов до и после насыщения рабочих веществ, фактически не решая нелинейной задачи. Для простоты ниже рассматриваются генераторы бегущей волны.

1. Пусть в резонатор бегущей волны помещен слой рабочего вещества (см. рис. 1).

Уравнения для плотности числа фотонов  $m$  и разности населенностей рабочих уровней  $n$  в этом слое запишем в виде\*

$$\frac{\partial m}{\partial t} + c \frac{\partial m}{\partial z} = f(m) n; \quad (1a)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{n - \bar{n}}{T} = -f(m) n. \quad (1б)$$

Здесь  $c$  — скорость света,  $T$  — время релаксации разности населенностей,  $\bar{n}$  — равновесная раз-

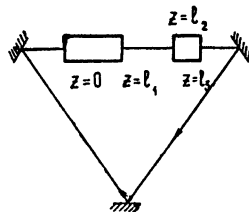


Рис. 1.

\* Такими уравнениями описываются процессы в рабочем веществе, когда можно пренебречь производной недиагонального элемента матрицы плотности. Это допустимо, если  $\frac{\partial m}{\partial t} \ll T_2^{-1} m$ , где  $T_2^{-1}$  — ширина линии;



ность неселенностей. Функцию  $f(m)$  будем считать произвольной (предполагаем лишь, что  $f(m) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow 0$  и  $f(m) \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $m$  при  $m \rightarrow \infty$ ).

В частном случае  $f(m) = Bm$ , где  $B$  — коэффициент Эйнштейна, мы будем иметь дело с однофотонным поглощением или излучением. При  $f(m) = Bm^2$  — двухфотонным и т. д. Из уравнений (1) легко установить связь между плотностью числа фотонов на входе и на выходе слоя. Для этого перейдем к переменным  $\xi = t - z/c$ ,  $\rho = z$ . Выразим из первого уравнения  $n^*$ , подставим во второе и проинтегрируем по  $\rho$ . Возвратившись к прежним переменным, получим:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T}\right) \psi(m) - \frac{\bar{n}z}{Tc} + m(t, z) = \theta(t - z/c). \quad (2)$$

Здесь  $\psi(m) = \int \frac{dm}{f(m)}$ ,  $\theta$  — произвольная функция.

Пологая поочередно  $z = 0$  и  $z = l$ , из (2) находим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T}\right) \left\{ \psi[m_1(t)] - \psi\left[m_0\left(t - \frac{l}{c}\right)\right] \right\} + \\ & + m_1(t) - m_0\left(t - \frac{l}{c}\right) = \frac{\bar{n}l}{cT}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $m_1(t) \equiv m(t, l)$ ,  $m_0(t) \equiv m(t, 0)$ .

Пусть в резонаторе помещен также линейный элемент. В качестве такового можно рассматривать, например, слой какого-либо другого вещества, находящегося в линейном режиме. Уравнение линейного элемента запишем в виде

$$m_3(t) = rm_2\left(t - \frac{l_2 - l_1}{c}\right), \quad (4)$$

где коэффициент передачи линейного элемента  $r$  может быть произвольной функцией времени. Заметим, что потери в стенках резонатора также можно включить в  $r$ . Поскольку  $m_2(t) = m_1\left(t - \frac{l_2 - l_1}{c}\right)$ ,  $m_0(t) = m_L(t) = m_3\left(t - \frac{L - l_3}{c}\right)$  ( $L$  — длина резонатора), то из (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T}\right) \left\{ \psi[m_1(t)] - \psi[rm_1(t - L/c)] \right\} + \\ & + m_1(t) - rm_1(t - L/c) = \frac{\bar{n}l}{cT}. \end{aligned} \quad (5)$$

Нелинейное дифференциально-разностное уравнение описывает изменение плотности числа фотонов в резонаторе генератора. Оно учитывает нелинейное взаимодействие различных мод\*\*.

Считаем  $f(m) \neq 0$ .

\*\* Заметим, что уравнение типа (5) можно получить и для более общего случая, когда в правых частях уравнений (1а) и (1б) стоят разные функции: в одном  $f_1(m)n$ , в другом  $f_2(m)n$ .

2. Решить уравнение (5) в общем не представляется возможным. Однако из него можно извлечь достаточно полную информацию о работе ОКГ. В дальнейшем мы будем рассматривать случай  $r = \text{const}^*$ . Положения равновесия находятся из (5) элементарно. Для этого достаточно положить  $m = \text{const}$ . Вместо (5) тогда получается алгебраическое уравнение, из которого и находится плотность числа фотонов, соответствующая стационарной генерации \*\*.

Для исследования устойчивости какого-либо положения равновесия необходимо линеаризовать уравнение (5) относительно этого положения. В результате получается линейное дифференциально-разностное уравнение, решение которого можно искать в виде суммы членов типа  $\text{const}e^{pt}$ . Для  $p$  получаем трансцендентное уравнение. Если среди корней этого уравнения нет ни одного с положительной действительной частью, то рассматриваемое положение равновесно устойчиво, в противном случае — неустойчиво.

3. Обсудим теперь возможность исследования уравнения (5) в «большом». Рассмотрим вначале случай, когда время релаксации  $T$  много меньше характерного времени изменения  $m$  («безынерционное» рабочее вещество). Тогда в (5) можно считать  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ , и вместо (5) имеем нелинейное разностное уравнение (в дальнейшем мы опускаем индекс у  $m$ )

$$\frac{1}{T} \{ \psi[m(t)] - \psi[rm(t - L/c)] \} + m(t) - rm(t - L/c) = \frac{\bar{n}l_1}{cT}. \quad (6)$$

Хотя в общем виде оно и не решается, из него можно определить связь между формой сигнала до и после просветления рабочего вещества. Покажем, как это сделать.

Решение разностного уравнения зависит от одной произвольной периодической (с периодом  $L/c$ ) функции. Поскольку в уравнение время явно не входит, эта произвольная функция войдет лишь в сумму с  $t$ , т. е. решение будет иметь вид

$$m(t) = F[t + Q(t)], \quad (7)$$

где  $F$  — некоторая, неизвестная пока функция, а  $Q(t)$  — произвольная периодическая функция с периодом  $L/c$ . Чтобы определить эту функцию, необходимо задать  $m(t)$  на интервале длительностью  $L/c$ :

$$m(t) = M(t) \quad (0 \leq t < L/c). \quad (8a)$$

Подставляя (8a) в (7), получаем

$$M(t) = F[t + Q(t)], \quad (8б)$$

откуда можно (если известна  $F$ ) найти  $Q(t)$ . Предположим теперь, что при  $F \rightarrow 0$  и при  $F \rightarrow \infty$  функцию  $F$  можно упростить и приближенно заменить ее асимптотическими выражениями  $F_0$  и  $F_\infty$ .

Будем пока считать, что  $F_0$  и  $F_\infty$  нам известны. Пусть  $M(t)$  достаточно мала. Тогда вместо (8б) можно записать

$$M(t) \simeq F_0[t + Q(t)]. \quad (8в)$$

\* Можно исследовать и случай, когда  $r$  явно зависит от времени. Особенно просто находятся установившиеся решения при периодическом (с периодом  $L/c$ ) изменении  $r$ . Полагая тогда  $m(t - L/c) = m(t)$ , сразу получаем из (5) дифференциальное уравнение для  $m$ .

\*\* Поскольку при выводе (5) предполагалось  $f(m) \neq 0$ , то из (5) нельзя найти положений равновесия, в которых  $f(m) = 0$ .

Отсюда находим  $Q(t)$ , причем найденная таким образом функция тем ближе к истинной, чем меньше  $M$ . Подставляя  $Q(t)$  в (7), можно найти  $m(t)$  в произвольный момент времени. Для достаточно больших  $m(t)$  вместо (7) можно записать

$$m(t) = F_{\infty}[t + Q(t)]. \quad (9)$$

Таким образом, для того, чтобы установить связь между формой излучения при больших  $m$  и начальными условиями, достаточно знать лишь  $F_0$  и  $F_{\infty}$ . Заметим, что при этом остается неизвестным момент времени, к которому  $m$  станет достаточно большой. Поэтому аргумент у  $F_{\infty}$  в (9) определяется указанным выше способом лишь с точностью до константы.

Аналогично можно рассмотреть и случай, когда  $M(t) \rightarrow \infty$ , и таким образом определить, какие нужны начальные условия для получения сигнала заданной формы.

Сказанное выше справедливо, если рано или поздно  $m(t)$  из области малых  $m$  попадает в область больших  $M$  (или, наоборот, из области больших  $M$  — в область малых). Это, например, имеет место, если в области «средних»  $m$  (т. е. там, где нельзя  $F$  заменить на  $F_{\infty}$  или  $F_0$ ) отсутствуют точки покоя  $m(t) = m(t - L/c)$ .

Теперь покажем, как можно найти функции  $F_0$  и  $F_{\infty}$ . При малых  $m$  из (6) получаем (учитывая, что  $\psi(m) \rightarrow \infty$  при  $m \rightarrow 0$ )

$$\psi[m(t)] - \psi[rm(t - L/c)] = \frac{\bar{nl}_1}{c}. \quad (10)$$

Легко видеть, что (10) можно получить сразу из исходных уравнений, если в них пренебречь изменением разности населенностей. Ясно, что при малых  $m$  это допустимо. Решение уравнения (10) и позволяет найти  $F_0$ . Заметим, что для случая, когда  $f(m)$  — степенная функция, уравнение (10) легко сводится к линейному. Когда  $f(m) = Bm$ , уравнение (10) линейно по отношению к  $\ln m$ ; если  $f(m) = Bm^p$ ,  $p \neq 1$ , уравнение (10) линейно по отношению к  $m^{-p+1}$ . Решение линейных уравнений элементарно (см., например, [1]).

Для определения  $F_{\infty}$  нужно в (6) считать  $m \rightarrow \infty$ . Тогда получаем линейное уравнение

$$m(t) - rm(t - L/c) = \frac{\bar{nl}_1}{cT}. \quad (11a)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$m(t) = F_{\infty}[t + Q(t)] = \frac{\bar{nl}_1}{c(1-r)} + r^{(c/L)[t+Q-\Delta]}. \quad (11b)$$

Здесь  $\Delta$  — неизвестная константа, описывающая неопределенный сдвиг во времени.

4. Вернемся теперь к уравнению (5). Рассмотрим возможность исследования этого уравнения в тех случаях, когда характерное время изменения  $m$  порядка или меньше, чем  $T$ . Теперь в (5) нельзя пренебречь  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Пусть  $r = 1$ . Покажем, что в этом случае (5) эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению. Действительно, в этом случае (5) может быть записано в виде

$$\Phi(t) - \Phi(t - L/c) = \frac{\bar{nl}}{cT}, \quad (12)$$

где

$$\Phi(t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T} \right) \psi [m(t)] + m(t). \quad (13)$$

Решая (12), можно получить

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T} \right) \psi [m(t)] + m(t) = \frac{\bar{n}l_1}{TL} t + \eta(t), \quad (14)$$

где  $\eta(t)$  — произвольная периодическая функция, которая находится из начальных условий. Заметим, что при произвольных начальных условиях  $m(t)$  может быть разрывной функцией (т. е.  $\eta(t)$  может иметь особенности). Поэтому целесообразно в (14) перейти к новой переменной  $W = \int_0^t m dt$ , которая непрерывна. Наиболее просто это сделать, когда длительность излучения много меньше, чем  $T$ . Тогда, пренебрегая членами, пропорциональными  $(1/T)$ , и интегрируя по  $t$ , вместо (14) можно получить

$$\psi \left[ \frac{dW}{dt} \right] + W = at + \theta(t). \quad (15)$$

Здесь  $a$  — произвольная константа,  $\theta(t)$  — произвольная периодическая функция. Наличие в уравнении (15) произвольной константы является отражением того обстоятельства, что интенсивность поля зависит от распределения населенности  $n(z)$  в момент времени  $t = 0$ . В случае безынерционной среды  $\left( \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$  такой зависимости не было, так как при этом  $n(t)$  однозначно определяется  $m(t)$  в тот же момент времени.

Можно показать, что  $a = (1/L) \int_0^l n(0, z) dz$  (при условии, что вначале  $m$  достаточно мало, чтобы не насыщать рабочее вещество). Произвольная функция  $\theta(t)$  может быть найдена из начальных условий типа (8а).

Если (15) и не удастся проинтегрировать, все же можно установить связь между формами сигналов до и после просветления рабочего вещества. Определим, какова должна быть форма сигнала до насыщения, чтобы после насыщения  $m(t)$  была бы заданной функцией времени. После насыщения сигнал стремится к периодическому (напомним, что мы считаем  $r = 1$ ):  $m(t) = m_{уст} \left( t - \frac{L}{c} h \right)^*$ . Задавшись  $m_{уст}$ , легко найти, что при достаточно больших  $t$

$$W = \int_0^t m(t') dt' = R + \bar{m}_{уст} t + \int_{Lh/c}^{t-h/c} \tilde{m}_{уст}(t') dt'. \quad (16)$$

Здесь  $R$  — неопределенная константа,  $\bar{m}_{уст}$  — постоянная составляющая  $m_{уст}$ ,  $\tilde{m}_{уст} = m_{уст} - \bar{m}_{уст}$ .

\* Здесь  $h = E \left( t \frac{c}{L} \right)$  — целая часть  $t \frac{c}{L}$ .

Подставляя (16) в (15), находим, что периодическая  $m_{\text{уст}}$  может удовлетворять (15) лишь при условии  $m_{\text{уст}} = a$ . При этом легко найти периодическую функцию  $\theta(t)$ :

$$\theta(t) = \psi[m_{\text{уст}}] + R + \int_{Lh/c}^{t-Lh/c} \tilde{m}_{\text{уст}} dt'. \quad (17)$$

Теперь можно определить, какова должна быть  $m(t)$  до насыщения рабочего вещества. Из (15) легко получить

$$\psi(m) = at + \psi[m_{\text{уст}}] + R + \int_{Lh/c}^{t-Lh/c} \tilde{m}_{\text{уст}} dt', \quad (18)$$

откуда легко найти  $m$ . Заметим, что одной и той же форме сигнала после насыщения могут соответствовать различные начальные  $m$ ; это обстоятельство находит отражение в том, что в (18) входит произвольная константа  $R^*$ .

Итак, в двух случаях, когда а) рабочее вещество безынерционно и б)  $r = 1$ , рабочее вещество инерционно, можно установить связь между формами сигналов до и после насыщения рабочего вещества, не решая, по существу, нелинейной задачи. Этим не исчерпываются возможности исследования в большом уравнения (5). Например, аналогично можно рассмотреть случай  $r = 1$  и без предположения  $T \rightarrow \infty$ . Для однофотонного генератора ( $f = Bm$ ) может быть исследован случай инерционного рабочего вещества и при  $r \neq 1$  (см. [2]).

5. В этом разделе мы рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие приведенные выше соображения.

а) Прежде всего, рассмотрим однофотонный генератор. В этом случае  $f(m) = Bm$ , где  $B$  — коэффициент Эйнштейна,  $r < 1$ ,  $\bar{n} = \text{const} > 0$  (активная среда). Найдем стационарный режим генератора и исследуем его устойчивость. Уравнение (5) для рассматриваемого случая имеет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{T} \right) \{ \ln m(t) - \ln [rm(t - L/c)] \} + B[m(t) - rm(t - L/c)] = \frac{B\bar{n}l}{cT}. \quad (19)$$

Стационарное состояние генератора (см. примечание на стр. 1021)

$$m_{\text{ст}} = \frac{B\bar{n}l + c \ln r}{BTc(1 - r)}. \quad (20)$$

Для определения устойчивости этого стационарного состояния подставим в (19)  $m = m_{\text{ст}} + x(t)$ ; линеаризуем уравнение относительно  $x$  и положим  $x = e^{pt}$ . Тогда для  $p$  получим уравнение

$$\left( p + \frac{1}{T} \right) \frac{1}{m_{\text{ст}}} + B - r \left[ \left( p + \frac{1}{T} \right) \frac{1}{rm_{\text{ст}}} + B \right] e^{-pL/c} = 0. \quad (21)$$

\* Для однофотонного поглощения или излучения это соответствует тому, что начальные сигналы, отличающиеся лишь амплитудой, после насыщения дадут одну и ту же форму излучения.

С помощью теоремы Руше [3] можно показать, что среди корней этого уравнения нет ни одного с положительной действительной частью. Следовательно, положение равновесия (20) устойчиво. Можно исследовать, как зависит скорость затухания возмущения вблизи этого положения равновесия от частоты возмущений. Оказывается, что чем выше частота, тем медленнее возмущение затухания.

б) Определим форму импульсов, формируемых безынерционным насыщаемым поглотителем на однофотонном поглощении при модуляции добротности лазера. Поскольку насыщение поглотителя происходит при таких полях, когда не сказывается насыщение рабочего вещества, то можно рассматривать активное вещество как линейный слой, коэффициент усиления которого мы включим в  $r$ , причем здесь  $r > 1$ ,  $\bar{n} < 0$ ,  $f(m) = Bm$ .

Уравнение (10) имеет в этом случае вид

$$\ln [m(t)] - \ln [m(t - L/c)] = \frac{B\bar{n}l}{c} + \ln r > 0.$$

Решив это уравнение, находим

$$m = F_0[t + Q] = \exp \left\{ \frac{c}{L} \left[ \frac{B\bar{n}l}{c} + \ln r \right] [t + Q(t)] \right\}. \quad (22)$$

Удовлетворяя начальным условиям (8), найдем

$$Q(t) = \left[ \ln M \left( t - \frac{L}{c} h \right) / \frac{c}{L} \left( \frac{B\bar{n}l}{c} + \ln r \right) \right] - t - \frac{L}{c} h. \quad (23)$$

После насыщения поглотителя плотность числа фотонов описывается формулой (11 б), которая с учетом (23) примет вид

$$m(t) = r^h \left[ M \left( t - \frac{L}{c} h \right) \right]^{c \ln r / (B\bar{n}l + c \ln r)} \quad (24)$$

Видно, что существенное обострение формы импульса возможно лишь в том случае, когда  $\left( \frac{B\bar{n}l}{c} + \ln r \rightarrow 0 \right)$  [4]. После насыщения фильтра на форму сигнала влияет лишь нелинейность рабочего вещества.

в) Рассмотрим влияние нелинейности активного вещества на форму выходного сигнала в режиме модуляции добротности для однофотонного генератора. Будем считать  $r = 1$  (пренебрегаем потерями в стенках резонатора). Поскольку время излучения много меньше  $T$ , можно не учитывать члены, пропорциональные  $(1/T)$ . Тогда из (19) легко перейти к уравнению типа (15), которое в данном случае принимает вид

$$\frac{1}{B} \ln \frac{dW}{dt} + W = at + \theta(t). \quad (25)$$

Начальные условия имеют вид (8).

Считаем далее  $B \int_0^{L/c} m dt \ll 1$ . В качестве  $M(t)$  здесь может быть использована, например, формула (24). Из (25) находим  $\theta(t)$ :

$$\theta = \frac{1}{B} \ln M \left( t - \frac{L}{c} h \right) - a \left( t - \frac{L}{c} h \right).$$

Теперь, когда известна  $\theta(t)$ , можно получить решение (25). Для этого положим  $W = (1/B) \ln \varphi$ . Вместо (25) получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = BM \left( t - \frac{L}{c} h \right) K^h, \quad (26)$$

где  $K = \exp \left[ B \int_0^t \bar{n}(0, z) dz \right]$ . Отсюда легко находится  $\varphi$ , а затем  $m$ :

$$m = \frac{M_i^i \left( t - \frac{L}{c} h \right) (K - 1)}{(K - 1) B \int_0^{t-Lh/c} M(t') dt' + B \int_0^{L/c} M(t') dt' + (K - 1) K^{-h}}$$

г) Рассмотрим генератор, в резонатор которого помещен фильтр с двухфотонным поглотителем. Пусть этот фильтр безынерционен. Как и в п. б), будем считать, что активное вещество находится в линейном режиме.

Будем считать, что количество поглотителя мало, так что стационарная генерация, обусловленная насыщением этого поглотителя, невозможна. Определим связь формы сигнала до и после насыщения двухфотонного поглотителя.

Воспользуемся результатами, полученными в п. 3. Для данного случая ( $f(m) = Bm^2$ ,  $n < 0$ ,  $r > 1$ ) уравнение (10) примет вид

$$-\frac{1}{m(t)} + \frac{1}{rm \left( t - \frac{L}{c} \right)} = \frac{B\bar{n}l}{c}. \quad (27)$$

Решив это уравнение, которое линейно относительно  $(1/m)$ , получим

$$\frac{1}{m(t)} = F_0(t + Q) = \frac{rB\bar{n}l}{c(r-1)} + r^{(-c/L)(t+Q)}.$$

Удовлетворяя начальным условиям типа (8), находим  $Q$ :

$$Q = -(\ln r)^{-1} \left[ \frac{1}{M} - \frac{rB|\bar{n}|l}{c(r-1)} \right] - \frac{c}{L} t + h.$$

После насыщения поглотителя  $m(t)$ , в соответствии с (11б), имеет вид

$$m(t) = \frac{|\bar{n}|l}{c(r-1)} + r^h \left[ \frac{1}{M} - \frac{rB|\bar{n}|l}{c(r-1)} \right]^{-1}. \quad (28)$$

Видно, что если  $M$  достаточно мало, то формы сигнала до и после насыщения двухфотонного поглотителя практически совпадают.

д) Развитый выше подход может быть использован и для исследования более сложных систем. В качестве примера мы исследуем здесь вопрос об устойчивости стационарной генерации однофотонного лазера с нелинейным поглотителем. Хорошо известно, что при достаточном количестве поглотителя такая генерация неустойчива. Однако при исследовании устойчивости такого генератора не принимались во внимание быстрые движения (с характерным временем  $L/c$ ), соответствующие межмодовым биениям. Оказывается, что быстрые движения стано-

вятся неустойчивыми при гораздо меньших количествах поглотителя, чем медленное. Таким образом, даже очень малые (практически не контролируемые) количества поглотителя могут быть причиной неустойчивости стационарной генерации.

Рассмотрим резонатор бегущей волны, в который помещено активное вещество, насыщаемый поглотитель на основе однофотонного поглотителя, а также линейный полосовой фильтр (см. рис. 2). Этот фильтр моделирует ограниченность полосы системы, связанную, например, с конечностью ширины полосы рабочего вещества. Аналогично тому, как это было сделано выше, получим систему уравнений, описывающих процессы в такой системе:

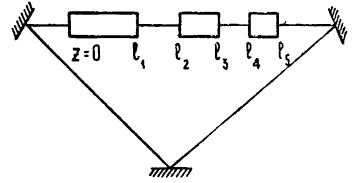


Рис. 2.

$$\begin{aligned} \left(T \frac{\partial}{\partial t} + 1\right) \ln \frac{m_1(t)}{m_0(t - \Delta/c)} + TB \left[ m_1(t) - m_0 \left( t - \frac{\Delta}{c} \right) \right] &= \frac{B\bar{n}\Delta}{c}, \\ \left(T_a \frac{\partial}{\partial t} + 1\right) \ln \frac{m_3(t)}{m_1 \left( t - \frac{l_3 - l_1}{c} \right)} + T_a B_a \left[ m_3(t) - m_1 \left( t - \frac{l_3 - l_1}{c} \right) \right] &= \\ &= \frac{B_a \bar{n}_a \Delta_a}{c}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\left(\tau \frac{\partial}{\partial t} + 1\right) m_0(t) = r m_3 \left( t - \frac{l_3 - l_1}{c} \right).$$

Здесь  $m_k(t) = m(t, l_k)$ ;  $\Delta$ ,  $\Delta_a$  — толщины слоя активного вещества и поглотителя;  $\tau$  — ширина полосы линейного фильтра; индекс  $a$  соответствует поглотителю;  $T$  — время жизни;  $B$  — коэффициент Эйнштейна.

Полагая  $m_k = \text{const}$ , из системы (29) легко найти  $m$  при стационарной генерации. Линеаризуя систему (29) относительно стационарного состояния, получим систему линейных дифференциально-разностных уравнений. Решение этой системы можно искать в виде суперпозиции членов вида  $e^{pt} \text{const}$ . В результате получается характеристическое уравнение для определения  $p = i\Omega + q$ :

$$e^{p(L/c)} = \frac{(y_0 + 1 + pT)(\gamma y_1 + 1 + pT_a)}{(y_1 + 1 + pT) \left( \frac{\gamma}{r} y_0 + 1 + pT_a \right) (1 + p\tau)}. \quad (30)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{T_a B_a}{TB}, \quad y_{0,1} = B\bar{T} \bar{m}_{0,1},$$

а  $\bar{m}_{0,1}$  — значения  $m_0$  и  $m_1$  при стационарной генерации.

Из (30) можно определить, при каком затухании в нелинейном поглотителе стационарная генерация становится неустойчивой:

$$\delta = \left[ \frac{rGA}{x^2 + \Omega^2 T^2} + \Omega^2 \tau^2 \right] \frac{D^2 + \Omega^2 T_a^2}{2\gamma D r G} (1 - r + \gamma G), \quad (31)$$

здесь  $\delta = -B\bar{n}_a \Delta_a c^{-1}$  — затухание в нелинейном поглотителе,  $G = B\bar{n}\Delta c^{-1} + \ln r$  — коэффициент усиления за один прогон (без учета затухания в нелинейном поглотителе),



$$A = 2 + \frac{1+r}{1-r} G, \quad \kappa = 1 + \frac{rG}{1-r}, \quad D = 1 + \frac{\gamma G}{1-r}.$$

В качестве примера рассмотрим генератор на рубине с нелинейным поглотителем на фталционине. Тогда  $\tau = 10^{-12}$  сек,  $T = 10^{-3}$  сек,  $T_a = 10^{-9}$  сек,  $B_a B^{-1} = 10^4$ ,  $r = 0,5$ ,  $G = 0,3$ ,  $L = 3$  м. Из (31) найдем  $\delta = 5 \cdot 10^{-5}$ . Это на два порядка меньше величины, необходимой для неустойчивости медленных движений [4].

Отметим, что  $\delta$ , определяемая (31), имеет минимум на частотах  $\Omega \sim (\tau T)^{-1/2}$ , что соответствует межмодовым биениям при  $L \sim 20$  м. В этом случае  $\delta \simeq 10^{-8}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. О. Гельфонд, Исчисления конечных разностей, Физматгиз, М., 1959.
2. Г. Л. Гуревич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 4, 503 (1968).
3. Л. Э. Эльсгольц, Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, изд. Наука, М., 1964.
4. Г. Л. Гуревич, Ю. А. Отмахов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 2, 308 (1969).
5. В. И. Беспалов, Е. И. Якубович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 5, 909 (1965).

Поступила в редакцию  
24 июля 1969 г.

#### TO THE THEORY OF TRAVELING-WAVE LASERS

G. L. Gurevich

Traveling-wave lasers with an arbitrary nonlinearity are considered. It is shown that in the most cases a relation between the form of radiation pulses and initial conditions may be established without solving nonlinear differential equations. For example, the form of radiation pulses of the laser in Q-modulation regime is determined. The envelopes of pulses formed by one-photon and two-photon saturable absorbers are found. The stability of steady-state generation of the laser with saturable absorber is investigated and the instability at the frequencies of intermodes beats is shown to occur at negligible amounts of the absorber.

УДК 538.56 · 519 25

## ОБНАРУЖЕНИЕ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ ПО ВЫБРОСАМ ОГИБАЮЩЕЙ

Г. А. Андреев

Рассмотрены возможности использования различий числа выбросов огибающих совокупности сигнала с помехой и помехи для обнаружения слабых сигналов. Приведенные результаты показывают, что в некоторых случаях использование числа выбросов огибающей на фиксированном уровне, а также нулевых выбросов производной огибающей достаточно эффективно для надежного обнаружения слабых сигналов.

Известно [1, 2], что наиболее полно проблемы обнаружения и выделения сигнала среди помех решаются с использованием всей доступной информации, содержащейся в апостериорной плотности вероятности, информативным признаком которой является корреляционный интеграл, к которому затем применяется правило статистической проверки гипотез. Использование информативного признака в виде корреляционного интеграла и его реализация с помощью коррелометра или согласованного фильтра приводит к существенному усложнению схемы приема [1, 2].

В соответствии с общепринятым подходом [1-5] будем рассматривать случайные процессы  $\xi(t) = s(t) + \zeta(t)$ , где  $s(t)$  — сигнал, отраженный движущимся телом [6], и  $\zeta(t)$  — аддитивная нормальная помеха. Для определенности математического описания сигнала и помехи будем использовать широко распространенную функциональную схему формирования сигнала и помехи, приведенную на рис. 1 [7]. При отсутствии внешней помехи и внутренних шумов сигнал на выходе фильтра нижних частот  $\Phi$  (рис. 1), обусловленный отраже-

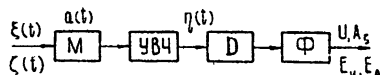


Рис. 1. Функциональная схема формирования сигнала и помехи.

нием от движущегося протяженного тела со случайными угловыми колебаниями и линейными перемещениями при синусоидальном зондирующем излучении с частотой  $\omega_0$ , описывается следующими выражениями [6]:

$$s(t) = A_s(t) \cos \Phi(t); \quad (1)$$

$$\Phi(t) = \Omega_0 t + \varepsilon(t) + \varphi_0. \quad (2)$$

В соотношении (1)  $A_s(t)$  — огибающая, описывающая случайные амплитудные флуктуации, возникающие при хаотическом сканировании по углу  $\gamma$  вторичной диаграммы излучения протяженного тела из-за случайных угловых колебаний. Соотношение (2) представляет доплере-

ровские изменения фазы  $\Phi(t)$ , включающие как детерминированную составляющую  $\Omega_0 t$ , где  $\Omega_0 = 2\omega_0 \bar{v}/c$  обусловлена постоянной скоростью перемещения тела  $\bar{v}$ , так и случайную составляющую  $\varepsilon(t)$ , создаваемую флуктуациями линейной скорости и угловых колебаний [6];  $\varphi_0$  — начальная фаза.

Помеха может быть обусловлена внутренними шумами приемного устройства, а также внешними условиями (отражения от местных предметов, пассивное и активное радиопротиводействие и т. д.). Тогда следует учитывать диаграмму направленности  $a(\theta, \gamma)$  приемной системы [7]. При обычных предположениях о нормальном распределении мгновенных значений  $\zeta(t)$  и узкой полосе УВЧ [2, 7] помеха  $\zeta(t)$  на выходе УВЧ представляется [2] как узкополосный случайный процесс

$$\zeta(t) = A_\zeta(t) \cos[\omega_0 t - \varphi_\zeta(t)], \quad (3)$$

огibaющая которого описывается распределением Рэлея [2]

$$f_\zeta(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right), \quad A \geq 0. \quad (4)$$

Что касается сигнала (1), то в случае использования только амплитудных флуктуаций  $A_s(t)$  [6] сигнал (1) представляется в виде

$$s(t) = A_0 \cos \Phi(t); \quad (5)$$

$$\Phi(t) = 2n \int_0^t \dot{\gamma}(x) dx, \quad (6)$$

где  $n$  — число лепестков диаграммы вторичного излучения на  $\pi$  радиан, а  $\dot{\gamma}(x)$  — производная по времени угловых колебаний [6]. При использовании только доплеровских флуктуаций у сигнала (1)  $A_s(t) = A_0$ , а  $\Phi(t)$  описывается соотношением (2).

Как отмечалось ранее [6], в обоих рассмотренных случаях целесообразно сигнал описывать выражением (5), конкретизируя в последующем лишь изменения фазы  $\Phi(t)$  соотношениями (2) или (6). Процесс  $\xi(t) = s(t) + \zeta(t)$ , где  $s(t) = A_s(t) \cos[\omega_c t - \varphi_s(t)]$ , на выходе УВЧ может быть представлен [2] в виде, аналогичном (3):

$$\xi(t) = U(t) \cos[\omega_c t - \varphi_\xi(t)] \quad (\text{обычно } \omega_c \sim \omega_0). \quad (7)$$

Огибающая  $U(t)$  сигнала и аддитивной помехи описывается [2] обобщенным распределением Рэлея

$$f_\xi(u) = u \exp\left(-\frac{u^2 + q^2}{2}\right) I_0(qu).$$

В этом соотношении введены обозначения  $u = U/\sigma$ ,  $q = A_0/\sigma$ . Для слабых сигналов ( $q \ll 1$ ) при разложении функции Бесселя  $I_0(qu)$  в ряд и сохранении квадратичного члена разложения обобщенное распределение Рэлея представляется в виде

$$f_\xi(u) = u \left(1 - \frac{q^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{u^2}{2} \left(1 - \frac{q^2}{2}\right)\right]. \quad (8)$$

Установление отличий в корреляционных свойствах огибающей  $A_\zeta(t)$  помехи  $\zeta(t)$  и огибающей  $u$  сигнала с помехой  $\xi(t)$ , а также последующий выбор дискретного информативного признака целесообразно выполнить с использованием числа выбросов огибающей помехи [2]

$$N_{\zeta}(c) = T \sqrt{-\frac{\ddot{\rho}_{\zeta}(0)}{2\pi}} c \exp\left(-\frac{c^2}{2}\right) \quad (9)$$

и огибающей слабого сигнала с помехой

$$N_{\xi}(c) = T \sqrt{-\frac{\ddot{\rho}_{\xi}(0)}{2\pi}} c \left(1 - \frac{q^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{q^2}{2}\right)\right] \quad (10)$$

на интервале времени наблюдения  $T$ .

В соотношениях (9) и (10)  $\ddot{\rho}_{\zeta}(0)$  и  $\ddot{\rho}_{\xi}(0)$  обозначают вторые производные по времени соответственно огибающих коэффициентов корреляции помехи (3) и сигнала с помехой (7);  $c = C/\sigma$  — стандартизованный уровень,  $\sigma$  — среднеквадратичное значение помехи на выходе УВЧ. Огибающая коэффициента корреляции пассивной помехи [10]  $\rho_{\zeta}(\tau)$  описывается гауссовой функцией, т. е.

$$\rho_{\zeta}(\tau) = \exp(-\alpha^2 \tau^2), \quad (11)$$

где  $\alpha$  — ширина спектра помехи на уровне спада в «e» раз.

В предположении статистической независимости сигнала  $s(t)$  и помехи  $\zeta(t)$  корреляционная функция  $\psi_{\xi}(\tau)$  сигнала с помехой представляется в виде  $\psi_{\xi}(\tau) = \psi_s(\tau) + \psi_{\zeta}(\tau) = \psi_{\xi}(0) \rho_{\xi}(\tau) \cos(\omega_0 \tau)$ . В работе [6] показано, что корреляционная функция сигнала (5) записывается в виде

$$\psi_s(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \exp\left[-\frac{D\{\varepsilon(\tau)\}}{2}\right] \cos(\langle\dot{\Phi}\rangle\tau) \cos(\omega_0 \tau).$$

На основании изложенного

$$\psi_{\xi}(\tau) = \left\{ \frac{A_0^2}{2} \exp\left(-\frac{D\{\varepsilon(\tau)\}}{2}\right) \cos(\langle\dot{\Phi}\rangle\tau) + \sigma^2 \rho_{\zeta}(\tau) \right\} \cos(\omega_0 \tau),$$

а огибающая коэффициента корреляции  $\rho_{\xi}(\tau)$  описывается выражением

$$\rho_{\xi}(\tau) = \frac{q^2/2 \rho_s(\tau) + \rho_{\zeta}(\tau)}{1 + q^2/2}. \quad (12)$$

В соотношении (12)  $\rho_s(\tau)$  — огибающая коэффициента корреляции сигнала.

В случае амплитудных флуктуаций  $\varepsilon(t) = \Phi(t)$  (см. (6)), а так как  $\langle\varepsilon(t)\rangle = 0$ , то  $\langle\dot{\varepsilon}(t)\rangle = \langle\dot{\Phi}(t)\rangle = 0$  и

$$\rho_s(\tau) = \exp\left(-\frac{D\{\varepsilon(\tau)\}}{2}\right). \quad (13)$$

Для доплеровских флуктуаций из (2) следует, что  $\langle\dot{\Phi}(t)\rangle = \Omega_0$  и

$$\rho_s(\tau) = \exp\left\{-\frac{D\{\varepsilon(\tau)\}}{2}\right\} \cos(\Omega_0 \tau). \quad (14)$$

Поскольку рассматривается случай слабых сигналов ( $q \ll 1$ ), в дальнейшем соотношение (12) будет использоваться в виде  $\rho_{\xi}(\tau) = (q^2 \rho_s(\tau)/2) + \rho_{\zeta}(\tau)$ , из которого следует, что  $\ddot{\rho}_{\xi}(0) = (q^2 \ddot{\rho}_s(0)/2) + \ddot{\rho}_{\zeta}(0)$ . Дважды продифференцировав по  $\tau$  (11) и (14), получим

$$\ddot{\rho}_\zeta(0) = -2\alpha^2; \quad (15)$$

$$\rho_\zeta(0) = - \left[ \frac{q^2}{2} (\Omega_0^2 + \sigma_\varepsilon^2) + 2\alpha^2 \right]. \quad (16)$$

При этом  $\sigma_\varepsilon = \sigma_\phi$ . В случае амплитудных флуктуаций  $\sigma_\varepsilon = \Delta\Omega/\sqrt{2}$ , где  $\Delta\Omega$  — ширина спектра флуктуаций. Для доплеровских флуктуаций [6]  $\sigma_\varepsilon = \Delta\Omega/\sqrt{2} = 2k_0 \sqrt{(\omega_\gamma \sigma_\gamma h)^2 + \sigma_v^2}$ .

При получении выражения (16) мы предполагали, что флуктуации фазы  $\varepsilon(t)$  стационарны, так как они обусловлены интегралом от стационарных флуктуаций  $\Delta v(t)$  и  $\dot{\gamma}(t)$  [6]. Поэтому структурная функция  $D\{\varepsilon(\tau)\}$  ( $\dot{D}\{\varepsilon(\tau)\}$  — дисперсия разности фаз в моменты  $t$  и  $t - \tau$ ) была заменена по известному соотношению [8]  $D\{\varepsilon(\tau)\} = \sigma_\varepsilon^2 [1 - R_\varepsilon(\tau)]$  через коэффициент корреляции флуктуаций фаз  $R_\varepsilon(\tau)$ . При дифференцировании учитывалось, что при существовании второй производной  $\dot{R}_\varepsilon(0)$  и вследствие четности коэффициента корреляции  $R_\varepsilon(0) = 0$ .

В случае амплитудных флуктуаций  $\Omega_0 = \langle \Phi \rangle = 0$  и

$$\ddot{\rho}_\zeta(0) = - \left[ \frac{q^2 \sigma_\phi^2}{2} + 2\alpha^2 \right] = -\alpha^2 (q^2 \Omega_\alpha^2 + 2), \quad (17)$$

где

$$\Omega_\alpha = \frac{\sigma_\phi}{\sqrt{2}\alpha} = \frac{\Delta\Omega}{2\alpha}. \quad (18)$$

Для доплеровских флуктуаций  $\ddot{\rho}_\zeta(0)$  также записывается в виде (17), однако

$$\Omega_\alpha = \sqrt{\frac{\Omega_0^2 + \sigma_\varepsilon^2}{2\alpha^2}}. \quad (19)$$

Среднее число выбросов огибающей в единицу времени как функция уровня достигает максимума при  $c = 1$ . Кроме этого, как из качественных соображений, так и из вычислений экстремума отношения сигнала к помехе как функции уровня следует, что оптимальное значение уровня при слабых сигналах  $c = 1$ . Поэтому в дальнейшем рассматривается уровень  $c = 1$ . Для уровня  $c = 1$  можно считать, что выбросы статистически независимы. Следовательно, для числа выбросов  $\tilde{N}$  применимо биномиальное распределение. В рассматриваемой здесь задаче для  $\tilde{N} \gg 1$  целесообразна асимптотика Муавра—Лапласа [8], которая приводит к лапласовой плотности вероятности

$$f_n(\tilde{N}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp \left[ -\frac{(\tilde{N} - N)^2}{2N} \right].$$

Для количественного определения качества обнаружения используем критерий Неймана—Пирсона как наиболее подходящий к рассматриваемой проблеме [2]. При отыскании вероятности правильного обнаружения  $D$  при фиксированной вероятности ложной тревоги  $F$  используем лапласову плотность вероятности случайного числа выбросов  $\tilde{N}_\varepsilon$  огибающей сигнала и помехи и плотность вероятности  $\tilde{N}_\zeta$  числа выбро-

сов огибающей помехи на интервале времени  $T$ . По определениям [1, 2] вероятность правильного обнаружения  $D$  и вероятность ложной тревоги  $F$  выражаются соотношениями в виде

$$D = \int_{N_n}^{\infty} f_{\xi}(\tilde{N}) d\tilde{N}, \quad F = \int_{N_n}^{\infty} f_{\zeta}(\tilde{N}) d\tilde{N}.$$

При лапласовском распределении информативного признака удобно  $D$  и  $F$  выразить через табулированную интегральную функцию распределения  $F_{\lambda}(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^z \exp(-x^2/2) dx$ . Заметим, что из тождества

$$(1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^z e^{(-x^2/2)} dx + (1/\sqrt{2\pi}) \int_z^{\infty} e^{(-x^2/2)} dx = 1$$

следует, что

$$1 - F_{\lambda}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{(-x^2/2)} dx = F_{\lambda}(-z).$$

При учете этих соотношений выражения для  $D$  и  $F$  приобретают вид

$$D = F_{\lambda}\left(\frac{N_{\xi} - N_n}{\sqrt{N_{\xi}}}\right); \tag{20}$$

$$F = F_{\lambda}\left(\frac{N_{\zeta} - N_n}{\sqrt{N_{\zeta}}}\right). \tag{21}$$

С использованием соотношений (9) и (10) для уровня  $c = 1$ , а также соотношений (15) и (17) выражения для  $N_{\zeta}$  и  $N_{\xi}$  представляются в виде

$$N_{\zeta} = 0,34 \alpha T = 0,34 T_*; \tag{22}$$

$$N_{\xi} = 0,24 \alpha T \sqrt{(q\Omega_{\alpha})^2 + 2} = 0,24 N_*, \tag{23}$$

где

$$N_* = T_* \sqrt{(q\Omega_{\alpha})^2 + 2}. \tag{24}$$

В соотношениях (22) и (23) введены безразмерное время наблюдения  $T_*$  и число выбросов  $N_*$  на этом интервале. Из соотношений (22) и (23) следует, что кривые обнаружения, т. е. зависимости вероятности правильного обнаружения  $D$  при заданной вероятности ложной тревоги  $F$ , целесообразно представлять в обобщенном виде, т. е. как функцию  $N_*$  с параметром  $F$ . Для вычисления  $D$ , как функции  $N_{\xi} = 0,24 N_*$  необходимо определить  $N_n$ . Величина  $N_n$  определяется из уравнения (21), которое в обозначениях обратной функции  $F_{\lambda}^{-1}$  записывается в виде

$$N_n = N_{\zeta} + \sqrt{N_{\zeta}} F_{\lambda}^{-1}(1 - F). \tag{25}$$

При заданном  $T_*$  из соотношения (22) следует величина  $N_{\zeta}$ , которая вместе с заданной величиной  $F$  позволяет по соотношению (25) определить величину  $N_n$ . Варьируя  $N_*$ , по соотношению (23) определяет-

ся  $N_{\xi}$  и, с ранее определенной величиной  $N_n$ , по выражению (20) вычисляется  $D$ .

Минимальное значение  $N_*$  определяется из условия  $N_*/T_* = \sqrt{2}$ , которое следует из соотношения (24) при  $q\Omega_\alpha = 0$ . Для наглядности результаты вычисления  $D$  по соотношению (20) представлены сплошными кривыми на рис. 2 для различных величин  $F$  при  $T_* = 1$ . Из

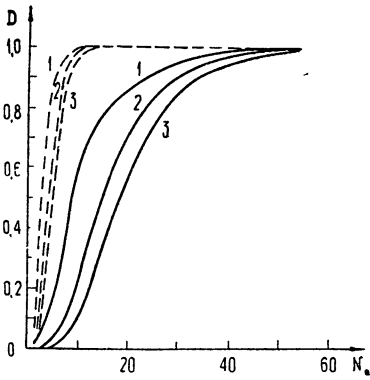


Рис. 2. Кривые обнаружения по критерию Неймана—Пирсона:  
1.— $F=10^{-4}$ ; 2.— $F=10^{-8}$ ; 3.— $F=10^{-12}$ .

приведенных кривых следует, что при  $T = \alpha (T_* = 1)$  надежное обнаружение  $D = 0,9$  получается при  $N_* = 30$ . Для  $T_* = 10$  возрастает пороговая величина ( $N_n = 17$  при  $F = 10^{-12}$ ), а  $D = 0,9$  получается при  $N_* = 10^2$ , т. е. для надежного обнаружения  $N_{\xi} \gg 1$  это оправдывает асимптотику Муавра—Лапласа [8]. Из приведенных кривых на рис. 2 и соотношения (24) следует, что при увеличении  $T_*$  при заданных вероятностях ложной тревоги и правильного обнаружения возрастает необходимое число выбросов  $N_*$ , но величина  $q\Omega_\alpha$  уменьшается. Это означает, что для фиксированного  $\Omega_\alpha$  при увеличении времени наблюдения уменьшается величина минимально обнаружимого сигнала.

Однако нагляднее всего указанное обстоятельство иллюстрируется зависимостями величины минимально обнаружимого сигнала в децибелах ( $10 \lg q^2$ ) от числа выбросов [1]. Сначала воспроизведем кривую минимально обнаружимых сигналов в зависимости от числа импульсов  $n$  (значений огибающих), рассчитанную Миддлтоном для информативного признака обнаружения числа значений огибающей и оптимального правила принятия решений. При этом будем считать, что частота повторения  $F_n$  посылок согласована с параметрами спектра сигнала. В случае сигнала с доплеровскими флуктуациями для наглядности предположим, что  $\Omega_0 \gg \sigma_\xi$ , и тогда из соотношения (19) следует, что  $\Omega_\alpha = \Omega_0/\sqrt{2}\alpha$ . Согласование означает, что  $F_n \geq 2\Omega_0/2\pi$  (условие устранения неоднозначности из-за стробоскопического эффекта [10]). При  $F_n = 2F_0$  величина  $N_*$ , число импульсов  $n$  за время  $T = n/F_n$  и  $q$  (при  $q\Omega_\alpha \gg 1$ ) связаны простой зависимостью:

$$N_* = \frac{\pi}{\sqrt{2}} nq. \quad (26)$$

В случае сигнала с амплитудными флуктуациями соотношению (26) соответствует согласование  $F_n = \Delta\Omega/\sqrt{2}$ . На основании соотношения (26) были построены графики минимально обнаружимого сигнала в зависимости от  $n$ , приведенные на рис. 3. График (I) получен Миддлтоном и приведен в [1] для  $D = 0,9$  и  $F = 10^{-12}$ . Семейство графиков (II) для  $D = 0,9$  и  $F = 10^{-12}, 10^{-8}, 10^{-4}$  соответствует кривым обнаружения на рис. 2, полученным по соотношениям (20) и (21). Как

и ожидалось, использование выбросов  $\tilde{N}$  в случае  $\Omega_\alpha > 1$  более эффективно, чем просто накопление импульсов (значений огибающей). Из общих соображений можно ожидать, что использование в качестве информативного признака числа экстремумов  $\tilde{N}_{\mu, \alpha}$ , т. е. нулей произ-

водной огибающей, будет еще эффективней, чем использование числа выбросов. При этом практически число нулей определять проще, чем число выбросов на ненулевом уровне.

Как известно [1, 2], число выбросов случайного процесса  $x(t)$  за время  $T$  определяется соотношением  $N(c) = \int_0^T \left\{ \int_0^\infty \dot{x} f_2(c, \dot{x}) \right\} dt$ , где  $\dot{x} = \dot{x}(t)$  — производная по  $t$ . Для производной огибающей  $\dot{u}$  на уровне  $c$  имеем  $N_{\dot{u}} = \int_0^T \left\{ \int_0^\infty \dot{u} f_2(\dot{u} = c, \ddot{u}) \right\} dt$ .

Известно [2], что если  $u$  описывается распределением Рэлея, то  $(n+1)$ -я производная описывается нормальным распределением вида

$$f[u^{(n+1)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(-1)^{n+1}\rho_\xi^{2(n+1)}}} \exp\left\{-\frac{[u^{(n+1)}]^2}{2(-1)^{n+1}\rho_\xi^{2(n+1)}}\right\}.$$

Для нормального стационарного процесса первая и вторая производные в совпадающие моменты времени некоррелированы, и поэтому число нулевых выбросов производной огибающей  $\dot{u}$  выражается формулой

$$N_{\dot{u}}(0) = 2Tf_{\dot{u}}(0) \int_0^\infty \dot{u} f_1(\dot{u}) d\dot{u} = \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{\rho_{\dot{u}}^{IV}(0)}{[-\rho_{\dot{u}}(0)]}}. \quad (27)$$

Аналогично выражается и число нулевых выбросов  $N_{\dot{A}}$  производной огибающей помехи

$$N_{\dot{A}}(0) = \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{\rho_{\dot{A}}^{IV}(0)}{[-\rho_{\dot{A}}(0)]}}. \quad (28)$$

Для помехи с гауссовой огибающей  $\rho_\zeta(\tau)$  коэффициента корреляции  $\rho_{\dot{\zeta}}^{IV}(0) = 12\alpha^4$  и, следовательно, по соотношению (13)

$$N_{\dot{A}}(0)/2 = 0,39T_*, \quad (29)$$

т. е. незначительно отличается от числа выбросов огибающей помехи на уровне  $c = 1$  (22). При вычислении  $\rho_{\dot{\zeta}}^{IV}(0)$  использовалось представление  $R_\zeta(\tau)$  [6] в виде

$$R_\zeta(\tau) = e^{-\alpha_\zeta|\tau|} \left[ \cos(\beta\tau) + \frac{\alpha_\zeta}{\beta} \sin(\beta|\tau|) \right].$$

По методике, изложенной в [11] с учетом соотношений  $-\ddot{R}_\zeta(0) = M_2$ ,  $R_\zeta^{IV}(0) = M_4$ , было определено, что  $R_\zeta^{IV}(0) = \ddot{R}_\zeta^2(0) + 4\alpha_\zeta^4$ , и окончательно использовалось соотношение

$$N_{\dot{u}}(0) = \frac{\alpha T}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{q^2 \Omega_\alpha^4 + 24}{q^2 \Omega_\alpha^2 + 4}} = 0,4T_* \sqrt{\frac{q^2 \Omega_\alpha^4 + 24}{q^2 \Omega_\alpha^2 + 4}}. \quad (30)$$

По расчетам [12], аналогичным изложенным выше, для вычисления кривых обнаружения и минимально обнаружимых сигналов по нулевым выбросам производной огибающей использовались соотношения (20) и (21).



На рис. 2 семейство пунктирных кривых построено для данных, аналогичных сплошным кривым. Соответствующие графики минимально обнаружимых сигналов по нулевым выбросам производной огибающей представлены в виде семейства (III) на рис. 3.

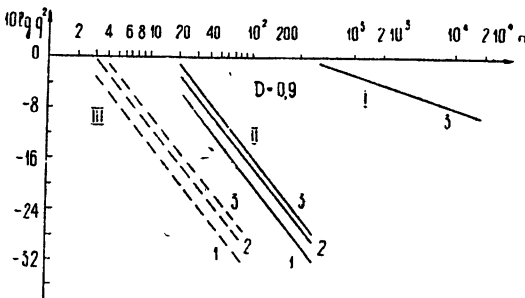


Рис. 3. Графики минимально обнаружимого сигнала по выбросам (II) и экстремумам (III) огибающей: 1.— $F=10^{-4}$ , 2.— $F=10^{-8}$ , 3.— $F=10^{-12}$ .

Рассмотрим влияние диаграммы направленности приемной системы для простоты по одной угловой координате  $\theta$ , т. е. считаем, что как сигнал с помехой, так и помеха модулируются гауссовой функцией  $a(\theta) = \exp[-(\theta/\theta_e)^2]$ , а во временном представлении  $a(t_*) = \exp(-k^2 t_*^2)$ , где  $t_*$  — безразмерное время  $t_* = at$ ; параметр  $k = (1/aT_e) = v/a$ , где  $T_e$  — время сканирования антенны с угловой скоростью на угол  $\theta_e$ , равный полуширине диаграммы направленности при спаде в «2» раз по напряженности поля;  $v = 1/T_e$ . Из простых соображений следует, что при слабом относительно помехи сигнале умножение этой совокупности на убывающую функцию приводит на интервале  $T = T_e$  к уменьшению величины помехи, а это значит, что при всех прочих одинаковых условиях — к уменьшению минимально обнаружимого сигнала, т. е. к повышению эффективности обнаружения.

Для количественной оценки рассмотрим лишь случай обнаружения по выбросам огибающей на уровне  $c = 1$ . При этом используем результаты по выбросам мультипликативно нестационарных процессов, изложенных в [7, 13]. Будем считать, что модуль частотной характеристики  $|k(i\omega)|$  фильтра  $\Phi$  в полосе частот  $\Omega_a \gg 1$  равен единице:  $|k(i\omega - v)| = 1$ , т. е. фильтр нижних частот пропускает без ослабления весь спектр как амплитудных и доплеровских флуктуаций, так и помехи. Это, в свою очередь, означает, что нестационарная огибающая на выходе фильтра нижних частот  $E_u$  сигнала с помехой представляется в виде  $E_u(t) = a(t)u(t)$ , а помехи  $E_A(t) = a(t)A_c(t)$ .

Как показано в работе [13], среднее число выбросов  $N_E$  нестационарной огибающей на уровне  $c = 1$  записывается в виде

$$N_E = \int_0^T \frac{[1 - R^2(t)] \sigma_3(t)}{\sqrt{2\pi} [1 - R^2(t)] \sigma_1(t)} \exp \left[ - \frac{1}{2 [1 - R^2(t)] \sigma_1(t)} \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2\pi} R(t)}{2 \sqrt{[1 - R^2(t)] \sigma_1(t)}} \exp \left[ \frac{R^2(t)}{2 [1 - R^2(t)] \sigma_1^2(t)} \right] \right\} \times \\ \times \left[ 1 - F_b \left[ \frac{R(t)}{\sqrt{2 [1 - R^2(t)] \sigma_1}} \right] \right] dt. \quad (31)$$

В соотношении (31), как можно показать с помощью [7] и [13], при  $a(t) = e^{-\nu^2 t^2}$  для сигнала с помехой

$$\begin{aligned}\sigma_1^2(t) &= \sigma^2 e^{-2\nu^2 t^2}, \quad \sigma_3^2(t) = \sigma^2 \{ \dot{a}^2(t) + a^2(t) [-\ddot{\rho}_\xi(0)] \} = \\ &= \sigma^2 e^{-2\nu^2 t^2} \{ [4\nu^4 t^2 + [-\dot{\rho}_\xi(0)]] \}, \\ R(t) &= - \frac{2\nu^2 t}{\sqrt{4\nu^4 t^2 + [-\dot{\rho}_\xi(0)]}}.\end{aligned}$$

Заметим, что  $\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \sqrt{4\nu^4 t^2 + [-\ddot{\rho}_\xi(0)]}$ ,  $1 - R^2(t) = \frac{[-\ddot{\rho}_\xi(0)]}{4\nu^4 t^2 + [-\dot{\rho}_\xi(0)]}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{R(t)}{\sqrt{1 - R^2(t)}} &= \frac{4\nu^4 t^2}{[-\ddot{\rho}_\xi(0)]} = \frac{4\nu^4 t^2}{\alpha^2 (q^2 \Omega_\alpha^2 + 2)} = \\ &= \frac{4k^4 \alpha^4 t^2}{\alpha^2 (q^2 \Omega_\alpha^2 + 2)} = \frac{4k^4 t_*^2}{q^2 \Omega_\alpha^2 + 2}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}R(t)/\sqrt{1 - R^2(t)} &= A^2 t_*^2, \quad A = \frac{2k^2 T_*^2}{[(q \Omega_\alpha)^2 + 2] T_*^2} \simeq \\ &\simeq \frac{2(kT_*)^2}{T_* N_*}, \quad kT_* = T/T_e.\end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений запишем выражение (31) в виде

$$\begin{aligned}N_E &= \int_0^{T_*} \frac{e^{-k^2 t_*^2}}{\sqrt{2\pi}} q \Omega_\alpha \exp \left[ - \frac{e^{2k^2 t_*^2} (1 + A^2 t_*^2)}{2} \right] \times \\ &\times \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} A t_* \exp \left( k t_* + \frac{A^2 t_*^2 e^{2k^2 t_*^2}}{2} \right) \left[ 1 - F_B \left( \frac{A t_*}{2} e^{k^2 t_*^2} \right) \right] \right\} dt_*.\end{aligned}\quad (32)$$

Из соотношения (31) при  $k = 0$ ,  $a(t_*) = 1$ ,  $A = 0$  следует выражение (23) для ненаправленного приема. На рис. 4 приведен график минимально обнаружимого сигнала, построенный по соотношениям (20) и (21) с использованием результатов численного интегрирования выражения (32) для значений  $T_* = 1$ , и  $k = 1$  (при  $T = T_e$ ).

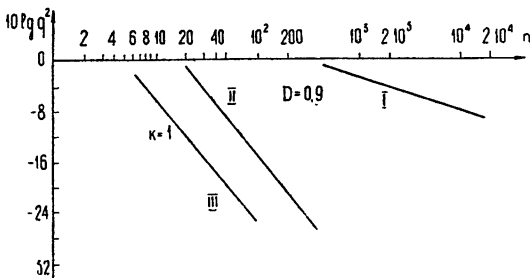


Рис. 4. Графики минимально обнаружимого сигнала при накоплении мгновенных значений огибающей (I), выбросов огибающей с ненаправленным (II) и направленным приемом (III):

I, II —  $F = 10^{-12}$ .

Приведенное рассмотрение и изложенные результаты свидетельствуют о потенциальном повышении эффективности обнаружения с использованием информативных признаков в виде числа выбросов непрерывной выборки огибающей и нулевых выбросов ее производной.

Автор благодарит В. А. Зверева за обсуждение изложенных результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Миддлтон, Введение в статистическую теорию связи, 2, изд. Сов. радио, М., 1962.
2. В. И. Тихонов, Статистическая радиотехника, изд. Сов. радио, М., 1966.
3. Н. Ф. Ключев, Обнаружение импульсных сигналов с помощью накопителей дискретного действия, изд. Сов. радио, М., 1963.
4. С. З. Кузьмин, Цифровая обработка радиолокационной информации, изд. Сов. радио, М., 1967.
5. A. J. Rainall, IEEE Trans., IM-16, № 2, 134 (1967).
6. Г. А. Андреев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 9, 1384 (1969).
7. Г. А. Андреев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 906 (1969).
8. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
9. В. И. Тихонов, УФН, 77, вып. 3, 449 (1962).
10. М. Сколник, Введение в технику радиолокационных систем, изд. Мир, М., 1965.
11. Г. А. Андреев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 7, 984 (1969).
12. Г. А. Андреев, И. Д. Гиц, Изв. высш. уч. зав. — Машиностроение, № 3, 59 (1968).
13. Г. А. Андреев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 8, 1123 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
8 августа 1969 г.

#### DETECTION OF WEAK SIGNALS BY THE ENVELOPE ZERO CROSSINGS

G. A. Andreev

The possibilities of investigating different number of zero crossings of envelopes of a set of signals with noise and noises to detect weak signals have been considered. The results presented show that in some cases the use of the number of envelope crossings at the fixed level as well as the zero crossings of the envelope derivative is rather effective for detecting weak signals.

УДК 535.5 : 621.371.24

## РАЗМЫТИЕ СВЕТОВОГО ПУЧКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Ф. В. Бункин, К. С. Гочелашвили

На основе метода плавных возмущений и метода селективного суммирования ряда теории возмущений теоретически рассматривается задача о размытии коллимированного и фокусированного пучков в турбулентной атмосфере. Изучается эффект насыщения степени фокусировки в турбулентной среде. Анализируются границы применимости метода плавных возмущений к рассматриваемой задаче.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы о влиянии флуктуаций показателя преломления на распространение световых пучков в турбулентной среде (например, земной атмосфере) приобрели в последнее время значительный интерес, в первую очередь в связи с развитием лазерной техники (в частности, лазерной связи и локации). Наиболее важным при этом является эффект размытия (расширения) светового пучка в процессе его распространения в турбулентной среде, поскольку он может существенно определять, во-первых, энергетiku системы, передающей оптическое излучение (лазерного передатчика), и, во-вторых, возможность передачи на большие расстояния в атмосфере оптических изображений.

Экспериментальному изучению этого эффекта с использованием лазеров как источников света были посвящены работы [1-4]. Наиболее интересный результат этих исследований, имеющий как общезначимое, так и большое практическое значение, заключается в существовании насыщения степени фокусировки пучка при увеличении размеров фокусирующей апертуры  $\alpha_0$ . В то время как в случае среды без турбулентности эффективный поперечный размер фокусированного пучка в фокальной плоскости  $r_{эфф} \sim 1/\alpha_0^*$ , и поэтому при увеличении  $\alpha_0$  степень фокусировки в принципе может быть сколь угодно велика ( $r_{эфф}$  — мало), при наличии турбулентности (флуктуаций показателя преломления среды  $n$ ) зависимость  $r_{эфф} \sim 1/\alpha_0$  наблюдается только при достаточно малых значениях  $\alpha_0$ , переходя далее (при увеличении  $\alpha_0$ ) в режим насыщения, когда  $r_{эфф}$  перестает зависеть от  $\alpha_0$ .

Из качественных соображений ясно, что при этом сам эффект фокусировки пучка с заданной длиной волны  $\lambda = 2\pi/k$  в турбулентной среде на заданное расстояние  $z$  оказывается возможным только при достаточно слабой турбулентности. Именно, начиная с некоторой интенсивности турбулентности (т. е. с некоторого значения структурной постоянной флуктуаций показателя преломления  $C_n$ ), эффективный размер пучка  $r_{эфф}$  всегда будет превышать  $\sqrt{z/k}$  — размер зоны Френеля — вне зависимости от апертуры фокусирующего устройства  $\alpha_0$ .

Отмеченный эффект насыщения фокусировки до сих пор не был рассмотрен количественно, хотя задаче о распространении волновых

\* Здесь и всюду в дальнейшем предполагается, что фокусирующая система (линза) является идеальной, а падающий на нее волновой пучок имеет плоский фазовый фронт.

пучков в среде с флуктуациями показателя преломления посвящено уже несколько теоретических работ [5-11].

В первой работе по рассматриваемой проблеме [5] исследуется влияние турбулентной атмосферы на среднюю диаграмму направленности излучателя; используется теорема взаимности и метод плавных возмущений (МПВ).

В работах [6-9] изучается распространение просто коллимированных пучков на основе приближенных методов решения: метода геометрической оптики [6, 9], МПВ [7], а также обобщенного на случай плавно-неоднородных сред метода Кирхгофа [8]. Вопрос о размытии фокусировки в турбулентной среде изучался на основе обобщенного метода Кирхгофа в работе [11].

Результаты этих работ близки по своему характеру, хотя и имеют различные области применимости. Наиболее широкой применимостью, по-видимому, обладают результаты работ [5, 8, 11], однако и их нельзя считать пригодными для области сильных амплитудных флуктуаций, так как по существу они основаны на МПВ.

В настоящей работе задача о размытии волнового пучка (как коллимированного, так и фокусированного) рассматривается на основе как МПВ, так и метода селективного суммирования ряда теории возмущений. Результаты рассмотрения позволили, с одной стороны, установить применимость к этой задаче МПВ и обобщенного метода Кирхгофа, а с другой — провести детальное исследование эффекта насыщения фокусировки пучков в турбулентной среде.

Мы сейчас приведем необходимые для дальнейшего определения и формулы.

Распределение комплексной амплитуды поля на выходной апертуре излучателя представляется в виде (вводится цилиндрическая система координат  $r = (\rho; z)$  с осью  $z$ , направленной вдоль оси пучка):

$$u(r)|_{z=0} = u_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\alpha_0^2} - i\frac{k\rho^2}{2f}\right), \quad (1.1)$$

где  $\alpha_0$  — эффективный размер выходной апертуры,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число. Мнимая часть экспоненты (1.1) учитывает возможность фокусировки пучка: при  $f = z$  фокальная плоскость совпадает с плоскостью наблюдения; случай  $f = \infty$  соответствует просто коллимированному пучку. С учетом естественных для оптического диапазона условий ( $z \gg \alpha_0 \gg k^{-1}$ ) интенсивность «невозмущенного пучка», т. е. интенсивность, которая наблюдалась бы в точке  $(\rho; z)$ , если бы отсутствовали флуктуации показателя преломления среды, равна

$$I_0(\rho; z) = |u|^2 = \frac{u_0^2}{\beta^2} \exp(-\rho^2/\alpha_0^2\beta^2), \quad (1.2)$$

где

$$\beta^2 = \Omega^{-2} + (1 - z/f)^2, \quad \Omega = \frac{k\alpha_0^2}{z}. \quad (1.3)$$

В реальной турбулентной среде интенсивность пучка  $I(\rho; z)$  есть случайная функция точки  $(\rho; z)$ . В дальнейшем мы будем предполагать, что среда статистически однородна и изотропна; соответственно этому статистические свойства интенсивности  $I(\rho; z)$  будут обладать аксиальной симметрией.

Нас будет интересовать средняя характеристика размытия пучка. Рассмотрим величину

$$r_{\text{эфф}}^2 = \frac{1}{\pi} \frac{\int \langle I(\rho; z) \rangle ds}{\langle I(0; z) \rangle}, \quad (1.4)$$

где интегрирование ведется по всей плоскости  $z = \text{const}$ . Очевидно, что в том случае, когда влияние турбулентности на пучок таково, что его «центр тяжести» смещается мало, величина  $\pi r_{\text{эфф}}^2$  эффективно определяет среднюю площадь сечения пучка на расстоянии  $z$ . В том же случае, когда происходит существенное смещение («бегание») центра тяжести пучка от его средней оси, величина  $\pi r_{\text{эфф}}^2$  определяет, очевидно, средние размеры той области, в которой должно наблюдаться такое «бегание» пучка. Подобная ситуация, по-видимому, может иметь место для фокусированных пучков. В дальнейшем мы будем пользоваться именно этой мерой размытия пучка, предварительно преобразовав формулу (1.4).

Прежде всего заметим, что полный поток излучения, определяемый числителем формулы (1.4), при условии отсутствия поглощения и рассеяния (молекулярного и аэрозольного) должен сохраняться и поэтому

$$\int \langle I(\rho; z) \rangle ds = \int I_0(\rho; z) ds = \pi \alpha_0^2 u_0^2.$$

Подставляя это в (1.4) и вводя обозначение  $\Omega_{\text{эфф}} = k r_{\text{эфф}}^2 / z$ , получаем

$$\Omega_{\text{эфф}} = \frac{\Omega}{\langle I(0; z) / u_0^2 \rangle}. \quad (1.5)$$

В том случае, когда одномерное распределение вероятностей для  $I(\rho; z)$  близко к логарифмически нормальному, что во всяком случае имеет место в области применимости МПВ (см. [12], а также экспериментальные работы [3, 13, 14]), среднее значение  $\langle I(0; z) \rangle$  целесообразно представить в виде

$$\langle I(0; z) \rangle = I_0(0; z) \exp[-Q(z; \Omega)]; \quad (1.6)$$

$$Q(z; \Omega) = 2(\langle \chi \rangle - \sigma_\chi^2) + \frac{2}{3} \sigma_\chi^3 (2\gamma_{1\chi} - \sigma_\chi \gamma_{2\chi}) + \dots, \quad (1.7)$$

где  $\langle \chi \rangle$ ,  $\sigma_\chi^2$ ,  $\gamma_{1\chi}$ ,  $\gamma_{2\chi}$ , ... — соответственно среднее значение, дисперсия, коэффициент асимметрии, коэффициент эксцесса и т. д. для распределения уровня излучения  $\chi$  на оси пучка, определяемого соотношением\*

$$\chi(0; z) = \frac{1}{2} \ln \frac{I_0(0; z)}{I(0; z)}. \quad (1.8)$$

Подстановка (1.6) с учетом (1.2) в формулу (1.5) дает

$$\Omega_{\text{эфф}} = [\Omega(1 - z/f)^2 + \Omega^{-1}] e^{Q(z; \Omega)}. \quad (1.9)$$

Целесообразность представления  $\Omega_{\text{эфф}}$  в такой форме обусловлена тем, что при логарифмически нормальном распределении для  $I$  все моменты распределения  $\chi$ , кроме  $\langle \chi \rangle$  и  $\sigma_\chi^2$ , равны нулю, и функция  $Q(z; \Omega)$  в точности определяется первым членом разложения (1.7). Далее, предэк-

\* Напомним определения:

$$\sigma_\chi^2 = \langle (\chi - \langle \chi \rangle)^2 \rangle; \quad \gamma_{1\chi} = \langle (\chi - \langle \chi \rangle)^3 \rangle / \sigma_\chi^3; \\ \gamma_{2\chi} = [\langle (\chi - \langle \chi \rangle)^4 \rangle - 3\sigma_\chi^4] / \sigma_\chi^4.$$

пониженный член в (1.9) не зависит от флуктуаций показателя преломления среды и определяет чисто дифракционную расходимость пучка. Влияние турбулентности среды на размытие пучка определяется экспонентой, и оно существенно, когда показатель  $Q(z; \Omega)$  не мал по сравнению с единицей.

Укажем на некоторые общие свойства функции  $\Omega(z; \Omega)$ , вытекающие из условия статистической однородности и изотропности флуктуаций показателя преломления среды. При этом условии для волн, которые в «невозмущенном состоянии» являются сферическими или плоскими, очевидно, в любой точке пространства должно выполняться условие  $\langle I \rangle = I_0$ . С другой стороны, при  $\alpha_0 \rightarrow 0$  ( $\Omega \rightarrow 0$ ) рассматриваемый нами пучок должен переходить в сферическую волну. Отсюда следует, что как для коллимированного, так и фокусированного пучков

$$\lim Q(z; \Omega) = 0 \quad (\Omega \rightarrow 0). \quad (1.10)$$

Далее, коллимированный пучок ( $f = \infty$ ) при  $\alpha_0 \rightarrow \infty$  ( $\Omega \rightarrow \infty$ ) должен переходить в плоскую волну и, следовательно, для такого пучка

$$\lim Q_{\text{кол}}(z; \Omega) = 0 \quad (\Omega \rightarrow \infty). \quad (1.11)$$

В следующих разделах статьи формулы (1.5) и (1.9) используются при получении окончательных выражений для  $\Omega_{\text{эфф}}$ . В разд. 2 вычисления проводятся на основе непосредственного применения МПВ, а в разд. 3 — на основе метода селективного суммирования, при котором вычисляется непосредственно величина  $\langle I(0; z) \rangle$ .

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Как уже было сказано во Введении, в области применимости МПВ флуктуации интенсивности  $I(\rho; z)$  можно считать логарифмически нормальными, и поэтому функция  $Q(z; \Omega)$  определяется первым членом разложения (1.7), т. е. моментами  $\langle \chi \rangle$  и  $\sigma_\chi^2$ .

Дисперсия уровня  $\sigma_\chi^2$  на оси как коллимированного, так и фокусированного пучка была вычислена в работе [10] с использованием МПВ на основе общих результатов работы [15]. Оказывается, что для обоих типов пучков дисперсия  $\sigma_\chi^2$  может быть представлена в виде

$$\sigma_\chi^2 = \sigma_{\chi\text{сф}}^2 F_{\sigma_\chi^2}(\Omega), \quad (2.1)$$

где  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2$  — дисперсия уровня для сферической волны в приближении МПВ, определяемая формулой [12, 10]

$$\sigma_{\chi\text{сф}}^2 = 0,124 C_n^2 k^{7/6} z^{11/6}, \quad (2.2)$$

а «апертурный фактор»  $F_{\sigma_\chi^2}(\Omega)$  зависит только от волнового параметра  $\Omega$  и для коллимированного и фокусированного пучков соответственно имеет вид [10]

$$F_{\sigma_\chi^2}^{\text{кол}} = \frac{(1 + \Omega^2)^{11/6}}{\cos(5\pi/12)} \cdot \sin \left[ (11/6) \arctg \frac{1}{\Omega} \right] - \frac{\Gamma(11/3)}{\Gamma^2(11/6) \cos(5\pi/12)} \times \\ \times \left\{ \frac{3}{8} \left( \frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right)^{5/6} + \frac{6}{11} \Omega^{11/6} \text{Im}_2 F_1 \left( \frac{11}{6}, -\frac{5}{6}; \frac{17}{6}; -\frac{i\Omega}{1 - i\Omega} \right) \right\}; \quad (2.3)$$

$$F_{\sigma_\chi^2}^{\text{фок}} = \frac{\sin(11/6 \arctg \Omega^{-1})}{\cos(5\pi/12) (1 + \Omega^2)^{11/12}} - \frac{\Gamma(11/3)}{\Gamma^2(11/6) \cos(5\pi/12)} \left\{ \frac{3}{8} \Omega^{5/6} + \right.$$

$$+ \frac{6}{11} \frac{\Omega^{11/6}}{1 + \Omega^2} \left[ \operatorname{Im} {}_2F_1 \left( 1, -5, 6; 17, 6; \frac{i\Omega}{1 + i\Omega} \right) - \Omega \operatorname{Re} {}_2F_1 \left( 1, -5, 6; 17, 6; \frac{i\Omega}{1 + i\Omega} \right) \right] \quad (2.4)$$

Здесь  ${}_2F_1(a; b; c; \zeta)$  — гипергеометрическая функция. В работе [10] проведен числовой анализ поведения функций  $F_{\chi}^{\text{кол}}(\Omega)$  и  $F_{\chi}^{\text{фок}}(\Omega)$  в широком диапазоне значений  $\Omega$ .

Общие результаты работы [15] позволяют вычислить также величину  $\langle \chi \rangle$ , что нами и было сделано. В результате получено

$$\langle \chi \rangle = \sigma_{\chi\text{ф}}^2 F_{\langle \chi \rangle}(\Omega), \quad (2.5)$$

где

$$F_{\langle \chi \rangle} = \frac{\Gamma(5/3)}{0,27 \Gamma^2(11/6) \cos(5\pi/12)} \int_0^1 dx x^{5/6} \operatorname{Re} \left[ M(x; \Omega) \exp \left( i \frac{5\pi}{12} \right) \right],$$

$$M(x; \Omega) = \frac{6}{5} {}_2F_1 \left( \frac{1}{6}, \frac{5}{6}; \frac{11}{6}; \zeta \right) - \frac{12}{11} \zeta {}_2F_1 \left( \frac{1}{6}; \frac{11}{6}; \frac{17}{6}; \zeta \right) + \quad (2.6)$$

$$+ \frac{6}{17} \zeta^2 {}_2F_1 \left( \frac{1}{6}, \frac{17}{6}; \frac{23}{6}; \zeta \right),$$

причем для коллимированного пучка

$$\zeta = \frac{x}{x - i\Omega},$$

а для фокусированного пучка

$$\zeta = \frac{x(1 + i\Omega)}{x - i\Omega(1 - x)}.$$

Таким образом, в рамках МПВ функция  $Q(z; \Omega)$  может быть представлена в виде

$$Q(z; \Omega) = 2\sigma_{\chi\text{ф}}^2 F(\Omega), \quad (2.7)$$

где  $F(\Omega) = F_{\langle \chi \rangle}(\Omega) - F_{\sigma_2}(\Omega)$ . Функция  $F(\Omega)$ , очевидно, должна удовлетворять тем же предельным условиям (1.10) и (1.11), что и функция  $Q(z; \Omega)$ . В этом действительно можно убедиться на основании формул (2.3), (2.4) и (2.6).

В табл. 1 приведены значения  $F(\Omega)$  в интервале  $\Omega$  от 0,005 до 128. Из таблицы видно, что при малых  $\Omega$  (фраунгоферова зона) значения апертурных факторов  $F^{\text{кол}}(\Omega)$  и  $F^{\text{фок}}(\Omega)$ , как и должно быть, совпадают. Далее при увеличении  $\Omega$  функция  $F^{\text{кол}}(\Omega)$  медленно растет до своего максимального значения  $F_{\text{макс}}^{\text{кол}} = 3,687$  при  $\Omega = 1$  и затем снова стремится к нулю; функция же  $F^{\text{фок}}(\Omega)$  является монотонно возрастающей.

Разберем теперь отдельно случаи коллимированного и фокусированного пучков.



Таблица 1

$\Omega$	$F_{\text{кол}}(\Omega)$	$F_{\text{фок}}(\Omega)$	$\Omega$	$F_{\text{кол}}(\Omega)$	$F_{\text{фок}}(\Omega)$
0,005	0,082	0,083	0,60	3,322	4,292
0,01	0,143	0,144	0,70	3,500	4,881
0,02	0,250	0,249	0,80	3,612	5,454
0,03	0,355	0,355	0,90	3,670	6,017
0,04	0,449	0,450	1,0	3,687	6,570
0,05	0,539	0,54	2,0	3,061	11,706
0,10	0,956	0,964	4,0	1,966	20,858
0,15	1,326	1,352	8,0	1,144	37,165
0,20	1,662	1,718	16,0	0,643	66,220
0,25	1,967	2,069	32,0	0,356	118
0,30	2,242	2,409	64,0	0,180	210
0,40	2,705	3,061	128,0	0,135	374
0,50	3,061	3,687			

а) *Коллимированный пучок*. В этом случае на основании (1.9) ( $f = \infty$ ) и (2.7) имеем

$$\Omega_{\text{эфф}} = (\Omega + \Omega^{-1}) \exp [2\sigma_{\text{хсф}}^2 F_{\text{кол}}(\Omega)]. \quad (2.8)$$

Указанный результат существенно отличается от соответствующих результатов цитированных выше работ [6-9] тем, что согласно (2.8), турбулентность, вообще говоря, вносит (в противоположность выводам [6-9]) неаддитивный вклад в  $r_{\text{эфф}}^2$ . Аддитивность имеет место только при условии

$$2\sigma_{\text{хсф}}^2 F_{\text{кол}}(\Omega) \ll 1, \quad (2.9)$$

но при этом вклад турбулентности в  $r_{\text{эфф}}^2$  всегда мал. Поскольку функция  $F_{\text{кол}}(\Omega)$  удовлетворяет предельным условиям (1.10) и (1.11), неравенство (2.9) выполняется как при достаточно больших, так и при достаточно малых значениях  $\Omega$ .

Таким образом, как в ближней зоне ( $\Omega \gg 1$ ), так и в зоне фраунгоферовой дифракции ( $\Omega \ll 1$ ) турбулентность среды вносит в размытие коллимированного пучка лишь малый аддитивный вклад.

Легко дать количественные критерии этого важного вывода. На основании (2.3) и (2.4) получаем следующие асимптотики для функции  $F_{\text{кол}}(\Omega)$ :

$$F_{\text{кол}}(\Omega) \simeq 6,6\Omega^{-5/6} \quad (\Omega \gg 1); \quad (2.10)$$

$$F_{\text{кол}}(\Omega) \simeq 6,6\Omega^{5/6} \quad (\Omega \ll 1). \quad (2.11)$$

Соответственно условия (2.9) малого вклада в  $r_{\text{эфф}}^2$  турбулентности выглядят следующим образом:

$$13,2\sigma_{\text{хсф}}^2 \Omega^{-5/6} \ll 1 \quad (\Omega \gg 1); \quad (2.12)$$

$$13,2\sigma_{\text{хсф}}^2 \Omega^{5/6} \ll 1 \quad (\Omega \ll 1). \quad (2.13)$$

Для выполнения указанных неравенств, очевидно, достаточно потребовать одного условия  $\sigma_{\text{хсф}}^2 \ll 1$ , что формально совпадает с условием применимости МПВ к сферическим волнам [12]. Выражения для самих  $r_{\text{эфф}}^2$  на основании (2.8) при этом принимают вид

$$r_{\text{эфф}}^2 \simeq \alpha_0^2 + 1,6C_n^2 k^{1/3} \alpha_0^{1/3} z^{2/3} \quad (\Omega \gg 1); \quad (2.14)$$

$$r_{\text{эфф}}^2 \simeq \left( \frac{z}{k\alpha_0} \right)^2 + 1,6C_n^2 \alpha_0^{-1/3} z^3 \quad (\Omega \ll 1). \quad (2.15)$$

Наиболее существенный вклад в  $r_{\text{эфф}}^2$  турбулентность вносит при  $\Omega \sim 1$ . Максимум функции  $F^{\text{кол}}(\Omega)$  достигается в той же точке  $\Omega = 1$ , где  $(\Omega + \Omega^{-1})$  минимальна; это означает, что турбулентность не влияет на положение минимума функции  $r_{\text{эфф}}^2(\Omega)$ , который всегда должен наблюдаться при  $\Omega = 1$ . Минимальный поперечный размер пучка (пятна) при заданных расстоянии  $z$  и длине волны  $\lambda = 2\pi/k$  дается формулой

$$r_{\text{эфф мин}} = \sqrt{2z/k} \exp(F_{\text{макс}}^{\text{кол}} \sigma_{\chi\text{сф}}^2) = \sqrt{2z/k} \exp(0,457C_n^2 k^{7/6} z^{11/6}). \quad (2.16)$$

Экспоненциальный фактор определяет увеличение минимального пятна, обусловленное турбулентностью. Например, при  $C_n^2 = 10^{-15} \text{ см}^{-2/3}$ ,  $\lambda = 1 \text{ мкм}$ ,  $z = 1,5 \text{ км}$  величина  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2 \simeq 0,1$  и экспоненциальный фактор равен приблизительно 1,5.

Вопрос о применимости МПВ к расчету  $r_{\text{эфф}}^2$  для коллимированного пучка по существу сводится к вопросу о том, до каких значений  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2$  можно пользоваться формулой (2.16). Этот вопрос будет обсужден в следующем разделе.

б) *Фокусированный пучок*. В этом случае на основании (1.9) ( $f=z$ ) и (2.7) имеем

$$\Omega_{\text{эфф}} = \Omega^{-1} \exp[2\sigma_{\chi\text{сф}}^2 F^{\text{Фок}}(\Omega)]. \quad (2.17)$$

Из табл. 1 видно, что функция  $F^{\text{Фок}}(\Omega)$  при  $\Omega \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности гораздо быстрее, чем  $\ln \Omega$ . Отсюда следует, что выражение (2.17) имеет минимум в некоторой точке  $\Omega^*$  ( $\sigma_{\chi\text{сф}}^2$ ) с быстрым возрастанием  $\Omega_{\text{эфф}}$  при  $\Omega > \Omega^*$ . Этот вывод находится в резком противоречии с экспериментальными данными [2, 4] по фокусировке в турбулентной среде, обнаруживающими насыщение степени фокусировки, т. е. стремление  $\Omega_{\text{эфф}}$  при  $\Omega \rightarrow \infty$  к константе. Факт противоречия, в свою очередь, указывает на неприменимость МПВ для расчета средней интенсивности фокусированного пучка в фокальной плоскости, начиная с некоторых значений  $\Omega > 1^*$ . Однако можно надеяться, что при достаточно слабой турбулентности, когда  $\Omega^* (\sigma_{\chi\text{сф}}^2) \gg 1$ , имеется довольно широкий интервал значений  $\Omega$ :  $1 < \Omega < \Omega^*$ , для которых МПВ дает удовлетворительную точность. Мы вернемся к этому вопросу в следующем разделе.

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕЛЕКТИВНОГО СУММИРОВАНИЯ

В последнее время были достигнуты существенные успехи в изучении статистических характеристик поля излучения в случайных средах с крупномасштабными неоднородностями методом селективного суммирования [16–20]. В работе [16] получено решение уравнения Бете—Солпитера в лестничном приближении (условия применимости этого приближения подробно обсуждены в [20]; в практически интересных ситуациях они всегда выполняются) для корреляционной функции  $\langle u(\mathbf{r}) u^*(\mathbf{r}') \rangle$  поля, создаваемого некоторым произвольным распределением источников в плоскости излучения. На основании этого общего решения можно получить выражение для интересующего нас среднего значения интенсивности на оси пучка  $\langle I(0; z) \rangle$ , задавая вид граничного

\* Область  $\Omega < 1$  соответствует фраунгоферовой зоне, где фокусировка вообще невозможна.

распределения поля в форме (1.1) и используя хорошо известные свойства двумерного спектра флуктуаций показателя преломления (см. [12]).

При этом, не выходя за пределы применимости параболического уравнения, имеем согласно [16]

$$\begin{aligned} \langle I(0; z)/u_0^2 \rangle = & \frac{|\alpha^2|^2}{(2\pi)^4} \int dk_{t1, 2} dk_{ta, b} d\sigma \delta(k_{ta} - k_{t1} - \\ & - k_{tb} + k_{t2}) \exp \left\{ \frac{iz}{2k} (k_{t2}^2 - k_{t1}^2) - \frac{1}{2} \alpha^2 k_{ta}^2 - \frac{1}{2} \alpha^{*2} k_{tb}^2 - \right. \\ & - i(k_{ta} - k_{t1}) \sigma + 2\pi k^2 \int_0^z d\eta \int dk_t \Phi(0; k_t) \times \\ & \left. \times \left[ \exp \left[ ik_t \sigma - \frac{i\eta}{k} k_t (k_{ta} - k_{tb}) \right] - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $\Phi(x)$  — трехмерный спектр флуктуаций показателя преломления,

$$\alpha^2 = \frac{z}{k} \frac{\Omega [1 - i\Omega(z/f)]}{1 + \Omega^2(z/f)^2}.$$

Проведем интегрирование по  $k_{ta}$  и  $k_{tb}$ , затем, перейдя к переменной  $k'_t = k_{t2} - k_{t1}$ , интегрируем по  $k_{t1}$  и  $\sigma$ ; в результате имеем

$$\begin{aligned} \langle I(0; z)/u_0^2 \rangle = & \frac{|\alpha^2|^2}{4\pi \operatorname{Re}(\alpha^2)} \int dk'_t \exp \left\{ \left[ \frac{1}{4\operatorname{Re}(\alpha^2)} \left( \alpha^4 - \frac{z^2}{k^2} \right) - \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{iz}{2k} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\operatorname{Re}(\alpha^2)} \right) \left. \right] k_t'^2 + 2\pi k^2 \int_0^z d\eta \int dk_t \times \\ & \left. \times \Phi(0; k_t) \left[ \exp \left[ -\frac{i(z-\eta)}{k} k_t k'_t \right] - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для турбулентного спектра флуктуаций показателя преломления (см. [12])

$$\Phi(x) = \frac{8,16}{(2\pi)^3} C_n^2 x^{-11/3} \exp(-x^2/x_m^2),$$

где

$$x_m = 5,92/l_0.$$

Последнее слагаемое в экспоненте формулы (3.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & - 35\sigma_{\text{сф}}^2 D^{-5/6} \int_0^1 ds \{ {}_1F_1(-5/6; 1; -s^2 t D) - 1 \} = \\ & = - 35\sigma_{\text{сф}}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5/6)_n}{n!} (1 - D^{-1})^n {}_2F_2 \left( \begin{matrix} -5/6 + n; & 1/2; \\ & 1; & 3/2; \end{matrix} -t \right) + \\ & + 35\sigma_{\text{сф}}^2 D^{-5/6}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $D \equiv x_m^2 z/k$ ,  $t \equiv k_t'^2 z/4k$ ,  ${}_1F_1$  и  ${}_2F_2$  — гипергеометрические функции.

Таблица 2

Коллимированный пучок

Ω	$\sigma_{\chi_{сф}}^2 = 10^{-2}$		$\sigma_{\chi_{сф}}^2 = 5 \cdot 10^{-2}$		$\sigma_{\chi_{сф}}^2 = 10^{-1}$		$\sigma_{\chi_{сф}}^2 = 5 \cdot 10^{-1}$		$\sigma_{\chi_{сф}}^2 = 1,0$	
	$\langle I(0; z)/u_0^2 \rangle$	$\Omega_{эфф}$	$\langle I(0; z)/u_0^2 \rangle$	$\Omega_{эфф}$	$\langle I(0; z)/u_0^2 \rangle$	$\Omega_{эфф}$	$\langle I(0; z)/u_0^2 \rangle$	$\Omega_{эфф}$	$\langle I(0; z)/u_0^2 \rangle$	$\Omega_{эфф}$
1										
0,005	$2,5 \cdot 10^{-5}$	$2,00 \cdot 10^2$	$2,48 \cdot 10^{-5}$	$2,02 \cdot 10^2$	$2,43 \cdot 10^{-5}$	$2,03 \cdot 10^2$	$2,31 \cdot 10^{-5}$	$2,16 \cdot 10^2$	$2,15 \cdot 10^{-5}$	$2,32 \cdot 10^2$
0,01	$9,97 \cdot 10^{-5}$	$1,00 \cdot 10^2$	$9,86 \cdot 10^{-5}$	$1,01 \cdot 10^2$	$9,72 \cdot 10^{-5}$	$1,03 \cdot 10^2$	$8,74 \cdot 10^{-5}$	$1,14 \cdot 10^2$	$7,73 \cdot 10^{-5}$	$1,29 \cdot 10^2$
0,02	$3,98 \cdot 10^{-4}$	$5,03 \cdot 10^1$	$3,90 \cdot 10^{-4}$	$5,13 \cdot 10^1$	$3,80 \cdot 10^{-4}$	$5,26 \cdot 10^1$	$3,17 \cdot 10^{-4}$	$6,31 \cdot 10^1$	$2,60 \cdot 10^{-4}$	$7,69 \cdot 10^1$
0,03	$8,93 \cdot 10^{-4}$	$3,36 \cdot 10^1$	$8,68 \cdot 10^{-4}$	$3,45 \cdot 10^1$	$8,39 \cdot 10^{-4}$	$3,57 \cdot 10^1$	$6,56 \cdot 10^{-4}$	$4,57 \cdot 10^1$	$5,08 \cdot 10^{-4}$	$5,90 \cdot 10^1$
0,04	$1,58 \cdot 10^{-3}$	$2,53 \cdot 10^1$	$1,53 \cdot 10^{-3}$	$2,62 \cdot 10^1$	$1,46 \cdot 10^{-3}$	$2,73 \cdot 10^1$	$1,08 \cdot 10^{-3}$	$3,69 \cdot 10^1$	$8,00 \cdot 10^{-4}$	$5,00 \cdot 10^1$
0,05	$2,47 \cdot 10^{-3}$	$2,03 \cdot 10^1$	$2,36 \cdot 10^{-3}$	$2,11 \cdot 10^1$	$2,25 \cdot 10^{-3}$	$2,22 \cdot 10^1$	$1,58 \cdot 10^{-3}$	$3,16 \cdot 10^1$	$1,12 \cdot 10^{-3}$	$4,45 \cdot 10^1$
0,10	$9,71 \cdot 10^{-3}$	$1,03 \cdot 10^1$	$9,03 \cdot 10^{-3}$	$1,11 \cdot 10^1$	$8,28 \cdot 10^{-3}$	$1,21 \cdot 10^1$	$4,79 \cdot 10^{-3}$	$2,09 \cdot 10^1$	$3,00 \cdot 10^{-3}$	$3,33 \cdot 10^1$
0,15	$2,14 \cdot 10^{-2}$	$7,00$	$1,94 \cdot 10^{-2}$	$7,74$	$1,73 \cdot 10^{-2}$	$8,69$	$8,70 \cdot 10^{-3}$	$1,72 \cdot 10^1$	$5,08 \cdot 10^{-3}$	$2,96 \cdot 10^1$
0,20	$3,72 \cdot 10^{-2}$	$5,37$	$3,29 \cdot 10^{-2}$	$6,08$	$2,85 \cdot 10^{-2}$	$7,01$	$1,30 \cdot 10^{-2}$	$1,54 \cdot 10^1$	$7,23 \cdot 10^{-3}$	$2,77 \cdot 10^1$
0,25	$5,66 \cdot 10^{-2}$	$4,42$	$4,89 \cdot 10^{-2}$	$5,11$	$4,16 \cdot 10^{-2}$	$6,01$	$1,74 \cdot 10^{-2}$	$1,43 \cdot 10^1$	$9,42 \cdot 10^{-3}$	$2,66 \cdot 10^1$
0,30	$7,9 \cdot 10^{-2}$	$3,8$	$6,71 \cdot 10^{-2}$	$4,47$	$5,60 \cdot 10^{-2}$	$5,36$	$2,20 \cdot 10^{-2}$	$1,36 \cdot 10^1$	$1,16 \cdot 10^{-2}$	$2,58 \cdot 10^1$
0,40	$1,31 \cdot 10^{-1}$	$3,06$	$1,08 \cdot 10^{-1}$	$3,71$	$8,73 \cdot 10^{-2}$	$4,58$	$3,13 \cdot 10^{-2}$	$1,28 \cdot 10^1$	$1,60 \cdot 10^{-2}$	$2,49 \cdot 10^1$
0,50	$1,88 \cdot 10^{-1}$	$2,65$	$1,52 \cdot 10^{-1}$	$3,30$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$4,15$	$4,06 \cdot 10^{-2}$	$1,23 \cdot 10^1$	$2,04 \cdot 10^{-2}$	$2,45 \cdot 10^1$
0,60	$2,48 \cdot 10^{-1}$	$2,42$	$1,97 \cdot 10^{-1}$	$3,05$	$1,54 \cdot 10^{-1}$	$3,90$	$4,98 \cdot 10^{-2}$	$1,20 \cdot 10^1$	$2,48 \cdot 10^{-2}$	$2,42 \cdot 10^1$
0,70	$3,07 \cdot 10^{-1}$	$2,28$	$2,41 \cdot 10^{-1}$	$2,91$	$1,87 \cdot 10^{-1}$	$3,75$	$5,89 \cdot 10^{-2}$	$1,19 \cdot 10^1$	$2,91 \cdot 10^{-2}$	$2,40 \cdot 10^1$
0,80	$3,64 \cdot 10^{-1}$	$2,20$	$2,83 \cdot 10^{-1}$	$2,83$	$2,18 \cdot 10^{-1}$	$3,67$	$6,78 \cdot 10^{-2}$	$1,18 \cdot 10^1$	$3,34 \cdot 10^{-2}$	$2,39 \cdot 10^1$
0,90	$4,17 \cdot 10^{-1}$	$2,16$	$3,23 \cdot 10^{-1}$	$2,78$	$2,48 \cdot 10^{-1}$	$3,62$	$7,66 \cdot 10^{-2}$	$1,17 \cdot 10^1$	$3,77 \cdot 10^{-2}$	$2,39 \cdot 10^1$
1,0	$4,65 \cdot 10^{-1}$	$2,15$	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$2,77$	$2,77 \cdot 10^{-1}$	$3,61$	$8,52 \cdot 10^{-2}$	$1,17 \cdot 10^1$	$4,19 \cdot 10^{-2}$	$2,39 \cdot 10^1$
2,0	$7,53 \cdot 10^{-1}$	$2,65$	$6,07 \cdot 10^{-1}$	$3,30$	$4,82 \cdot 10^{-1}$	$4,15$	$1,62 \cdot 10^{-1}$	$1,23 \cdot 10^1$	$8,17 \cdot 10^{-2}$	$2,45 \cdot 10^1$
4,0	$9,05 \cdot 10^{-1}$	$4,42$	$7,83 \cdot 10^{-1}$	$5,11$	$6,66 \cdot 10^{-1}$	$6,01$	$2,79 \cdot 10^{-1}$	$1,43 \cdot 10^1$	$1,51 \cdot 10^{-1}$	$2,66 \cdot 10^1$
8,0	$9,62 \cdot 10^{-1}$	$8,31$	$8,82 \cdot 10^{-1}$	$9,07$	$7,96 \cdot 10^{-1}$	$1,00 \cdot 10^1$	$4,28 \cdot 10^{-1}$	$1,87 \cdot 10^1$	$2,57 \cdot 10^{-1}$	$3,11 \cdot 10^1$
16,0	$9,83 \cdot 10^{-1}$	$1,63 \cdot 10^1$	$9,35 \cdot 10^{-1}$	$1,71 \cdot 10^1$	$8,80 \cdot 10^{-1}$	$1,82 \cdot 10^1$	$5,86 \cdot 10^{-1}$	$2,74 \cdot 10^1$	$3,99 \cdot 10^{-1}$	$4,01 \cdot 10^1$
32,0	$9,92 \cdot 10^{-1}$	$3,23 \cdot 10^1$	$9,64 \cdot 10^{-1}$	$3,32 \cdot 10^1$	$9,3 \cdot 10^{-1}$	$3,44 \cdot 10^1$	$7,22 \cdot 10^{-1}$	$4,43 \cdot 10^1$	$5,55 \cdot 10^{-1}$	$5,76 \cdot 10^1$
64,0	$9,96 \cdot 10^{-1}$	$6,43 \cdot 10^1$	$9,80 \cdot 10^{-1}$	$6,53 \cdot 10^1$	$9,6 \cdot 10^{-1}$	$6,67 \cdot 10^1$	$8,26 \cdot 10^{-1}$	$7,75 \cdot 10^1$	$6,98 \cdot 10^{-1}$	$9,17 \cdot 10^1$
128,0	$9,98 \cdot 10^{-1}$	$1,28 \cdot 10^2$	$9,89 \cdot 10^{-1}$	$1,29 \cdot 10^2$	$9,77 \cdot 10^{-1}$	$1,31 \cdot 10^2$	$8,95 \cdot 10^{-1}$	$1,43 \cdot 10^2$	$8,08 \cdot 10^{-1}$	$1,58 \cdot 10^2$

В области  $D \gg 1$  (т. е. во фраунгоферовой зоне внутреннего масштаба турбулентности; при  $z = 2$  км,  $\lambda = 1$  мкм параметр  $D \sim 10^4$ ) это выражение может быть существенно упрощено. Действительно, в большей части области интегрирования по  $s$  и  $t$  при этом можно пользоваться асимптотикой функции  ${}_1F_1$  для больших отрицательных значений аргумента [21]:

$${}_1F_1(a; c; x) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-x)^{-a} \quad (|x| \gg 1).$$

Подставляя эту формулу в (3.3) и проводя интегрирование по  $s$ , получаем последнее слагаемое в экспоненте формулы (3.2) в виде

$$-13,95 \sigma_{\chi_{\text{сф}}}^2 t^{5/6} + 35 \sigma_{\chi_{\text{сф}}}^2 D^{-5/6}. \quad (3.4)$$

Используя (3.4), после несложных преобразований запишем (3.2) в форме

$$\begin{aligned} \langle I(0; z)/u_0^2 \rangle &= \frac{\Omega}{\mu} \exp(35 \sigma_{\chi_{\text{сф}}}^2 D^{-5/6}) \int_0^{\infty} dx \times \\ &\times \exp(-13,95 \sigma_{\chi_{\text{сф}}}^2 \mu^{-5/6} x^{5/6} - x), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где

$$\mu = \left( \frac{1}{\Omega} \right) \left[ 1 + \Omega^2 \left( 1 - \frac{z}{f} \right)^2 \right].$$

Экспоненциальный фактор в формуле (3.5) может играть роль только при очень сильной турбулентности и больших дистанциях  $z$ , когда  $\sigma_{\chi_{\text{сф}}}^2 \gg 10^{-2} D^{5/6}$ . Практически это условие почти никогда не выполняется, поскольку обычно  $D > 10^3$ , и поэтому в дальнейшем изложении этот фактор нами не учитывается.

Формула (3.5) применительно к фокусированному пучку (без экспоненциального фактора) получена также в работе [11]\* при помощи обобщенного метода Кирхгофа. Поскольку один из этапов этого метода основан на МПВ, в [11] считалось, что необходимым условием применимости формулы (3.5) является условие  $\sigma_{\chi_{\text{сф}}}^2 \ll 1$ . Из нашего вывода этой формулы следует, что такое условие излишне, а формула (3.5) справедлива и в области сильных флуктуаций, когда  $\sigma_{\chi_{\text{сф}}}^2 \gg 1$ .

Рассмотрим теперь отдельно случаи коллимированного и фокусированного пучков и сравним получающиеся при этом результаты с соответствующими результатами предыдущего раздела.

а) *Коллимированный пучок.* Подстановка (3.5) в (1.5) дает

$$\Omega_{\text{эфф}} = (\Omega + \Omega^{-1}) \left[ \int_0^{\infty} dx e^{-x} \exp \left( - \frac{13,95 \sigma_{\chi_{\text{сф}}}^2}{[\Omega + \Omega^{-1}]^{5/6}} x^{5/6} \right) \right]^{-1}. \quad (3.6)$$

Отсюда, так же как и из (2.8), видно, что вклад турбулентности в  $r_{\text{эфф}}^2$ , вообще говоря, неаддитивен. Аддитивный вклад всегда мал и должен наблюдаться только при условии

$$\frac{13,95 \sigma_{\chi_{\text{сф}}}^2}{(\Omega + \Omega^{-1})^{5/6}} \ll 1. \quad (3.7)$$

\* См. также работу [5].

Таблица 3

Фокусированный лучок

Ω	σ <sub>хсф</sub> <sup>2</sup> = 10 <sup>-2</sup>		σ <sub>хсф</sub> <sup>2</sup> = 5 · 10 <sup>-2</sup>		σ <sub>хсф</sub> <sup>2</sup> = 10 <sup>-1</sup>		σ <sub>хсф</sub> <sup>2</sup> = 5 · 10 <sup>-1</sup>		σ <sub>хсф</sub> <sup>2</sup> = 1,0	
	⟨I(0; z)/μ <sub>0</sub> <sup>2</sup> ⟩		Ω <sub>эфф</sub>		⟨I(0; z)/μ <sub>0</sub> <sup>2</sup> ⟩		Ω <sub>эфф</sub>		⟨I(0; z)/μ <sub>0</sub> <sup>2</sup> ⟩	
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,005	2,50 · 10 <sup>-5</sup>	2,00 · 10 <sup>2</sup>	2,48 · 10 <sup>-5</sup>	2,02 · 10 <sup>2</sup>	2,46 · 10 <sup>-5</sup>	2,03 · 10 <sup>2</sup>	2,31 · 10 <sup>-5</sup>	2,16 · 10 <sup>2</sup>	2,15 · 10 <sup>-5</sup>	2,32 · 10 <sup>2</sup>
0,01	9,97 · 10 <sup>-5</sup>	1,00 · 10 <sup>2</sup>	9,86 · 10 <sup>-5</sup>	1,01 · 10 <sup>2</sup>	9,72 · 10 <sup>-5</sup>	1,03 · 10 <sup>2</sup>	8,74 · 10 <sup>-5</sup>	1,14 · 10 <sup>2</sup>	7,73 · 10 <sup>-5</sup>	1,29 · 10 <sup>2</sup>
0,02	3,98 · 10 <sup>-4</sup>	5,02 · 10 <sup>1</sup>	3,9 · 10 <sup>-4</sup>	5,13 · 10 <sup>1</sup>	3,81 · 10 <sup>-4</sup>	5,25 · 10 <sup>1</sup>	3,17 · 10 <sup>-4</sup>	6,3 · 10 <sup>1</sup>	2,6 · 10 <sup>-4</sup>	7,69 · 10 <sup>1</sup>
0,03	8,94 · 10 <sup>-4</sup>	3,36 · 10 <sup>1</sup>	8,69 · 10 <sup>-4</sup>	3,45 · 10 <sup>1</sup>	8,4 · 10 <sup>-4</sup>	3,57 · 10 <sup>1</sup>	6,57 · 10 <sup>-4</sup>	4,57 · 10 <sup>1</sup>	5,08 · 10 <sup>-4</sup>	5,9 · 10 <sup>1</sup>
0,04	1,59 · 10 <sup>-3</sup>	2,52 · 10 <sup>1</sup>	1,53 · 10 <sup>-3</sup>	2,61 · 10 <sup>1</sup>	1,47 · 10 <sup>-3</sup>	2,73 · 10 <sup>1</sup>	1,08 · 10 <sup>-3</sup>	3,69 · 10 <sup>1</sup>	8,01 · 10 <sup>-4</sup>	5,0 · 10 <sup>1</sup>
0,05	2,47 · 10 <sup>-3</sup>	2,02 · 10 <sup>1</sup>	2,37 · 10 <sup>-3</sup>	2,11 · 10 <sup>1</sup>	2,25 · 10 <sup>-3</sup>	2,22 · 10 <sup>1</sup>	1,58 · 10 <sup>-3</sup>	3,16 · 10 <sup>1</sup>	1,12 · 10 <sup>-3</sup>	4,45 · 10 <sup>1</sup>
0,1	9,81 · 10 <sup>-3</sup>	1,02 · 10 <sup>1</sup>	9,11 · 10 <sup>-3</sup>	1,10 · 10 <sup>1</sup>	8,35 · 10 <sup>-3</sup>	1,20 · 10 <sup>1</sup>	4,81 · 10 <sup>-3</sup>	2,08 · 10 <sup>1</sup>	3,01 · 10 <sup>-3</sup>	3,32 · 10 <sup>1</sup>
0,15	2,19 · 10 <sup>-2</sup>	6,85	1,98 · 10 <sup>-2</sup>	7,58	1,76 · 10 <sup>-2</sup>	8,54	8,78 · 10 <sup>-3</sup>	1,71 · 10 <sup>1</sup>	5,11 · 10 <sup>-3</sup>	2,94 · 10 <sup>1</sup>
0,20	3,87 · 10 <sup>-2</sup>	5,17	3,40 · 10 <sup>-2</sup>	5,88	2,94 · 10 <sup>-2</sup>	6,80	1,32 · 10 <sup>-2</sup>	1,52 · 10 <sup>1</sup>	7,29 · 10 <sup>-3</sup>	2,75 · 10 <sup>1</sup>
0,25	6,00 · 10 <sup>-2</sup>	4,17	5,15 · 10 <sup>-2</sup>	4,85	4,35 · 10 <sup>-2</sup>	5,75	1,78 · 10 <sup>-2</sup>	1,4 · 10 <sup>1</sup>	9,52 · 10 <sup>-3</sup>	2,63 · 10 <sup>1</sup>
0,30	8,58 · 10 <sup>-2</sup>	3,49	7,21 · 10 <sup>-2</sup>	4,16	5,95 · 10 <sup>-2</sup>	5,04	2,26 · 10 <sup>-2</sup>	1,33 · 10 <sup>1</sup>	1,18 · 10 <sup>-2</sup>	2,55 · 10 <sup>1</sup>
0,40	1,51 · 10 <sup>-1</sup>	2,65	1,21 · 10 <sup>-1</sup>	3,30	9,63 · 10 <sup>-2</sup>	4,15	3,25 · 10 <sup>-2</sup>	1,23 · 10 <sup>1</sup>	1,63 · 10 <sup>-2</sup>	2,45 · 10 <sup>1</sup>
0,50	2,33 · 10 <sup>-1</sup>	2,15	1,80 · 10 <sup>-1</sup>	2,77	1,38 · 10 <sup>-1</sup>	3,61	4,26 · 10 <sup>-2</sup>	1,17 · 10 <sup>1</sup>	2,09 · 10 <sup>-2</sup>	2,39 · 10 <sup>1</sup>
0,60	3,31 · 10 <sup>-1</sup>	1,81	2,48 · 10 <sup>-1</sup>	2,42	1,85 · 10 <sup>-1</sup>	3,25	5,29 · 10 <sup>-2</sup>	1,13 · 10 <sup>1</sup>	2,56 · 10 <sup>-2</sup>	2,35 · 10 <sup>1</sup>
0,70	4,46 · 10 <sup>-1</sup>	1,57	3,22 · 10 <sup>-1</sup>	2,17	2,34 · 10 <sup>-1</sup>	2,99	6,33 · 10 <sup>-2</sup>	1,10 · 10 <sup>1</sup>	3,02 · 10 <sup>-2</sup>	2,32 · 10 <sup>1</sup>
0,80	5,76 · 10 <sup>-1</sup>	1,39	4,04 · 10 <sup>-1</sup>	1,98	2,87 · 10 <sup>-1</sup>	2,79	7,38 · 10 <sup>-2</sup>	1,08 · 10 <sup>1</sup>	3,48 · 10 <sup>-2</sup>	2,30 · 10 <sup>1</sup>
0,90	7,22 · 10 <sup>-1</sup>	1,25	4,91 · 10 <sup>-1</sup>	1,83	3,41 · 10 <sup>-1</sup>	2,64	8,43 · 10 <sup>-2</sup>	1,07 · 10 <sup>1</sup>	3,95 · 10 <sup>-2</sup>	2,28 · 10 <sup>1</sup>
1,0	8,82 · 10 <sup>-1</sup>	1,13	5,84 · 10 <sup>-1</sup>	1,71	3,98 · 10 <sup>-1</sup>	2,51	9,48 · 10 <sup>-2</sup>	1,05 · 10 <sup>1</sup>	4,41 · 10 <sup>-2</sup>	2,27 · 10 <sup>1</sup>
2,0	3,21	6,22 · 10 <sup>-1</sup>	1,71	1,17	1,03	1,95	9,07 · 10 <sup>-2</sup>	9,94	9,07 · 10 <sup>-2</sup>	2,21 · 10 <sup>1</sup>
4,0	1,07 · 10 <sup>1</sup>	3,73 · 10 <sup>-1</sup>	4,52	8,85 · 10 <sup>-1</sup>	2,42	1,65	2,01 · 10 <sup>-1</sup>	9,64	1,84 · 10 <sup>-1</sup>	2,17 · 10 <sup>1</sup>
8,0	3,09 · 10 <sup>1</sup>	2,59 · 10 <sup>-1</sup>	1,08 · 10 <sup>1</sup>	7,41 · 10 <sup>-1</sup>	5,32	1,50	4,15 · 10 <sup>-1</sup>	9,48	3,7 · 10 <sup>-1</sup>	2,16 · 10 <sup>1</sup>
16,0	7,69 · 10 <sup>1</sup>	2,08 · 10 <sup>-1</sup>	2,39 · 10 <sup>1</sup>	6,69 · 10 <sup>-1</sup>	1,12 · 10 <sup>1</sup>	1,43	8,43 · 10 <sup>-1</sup>	9,41	7,44 · 10 <sup>-1</sup>	2,15 · 10 <sup>1</sup>
32,0	1,74 · 10 <sup>2</sup>	1,84 · 10 <sup>-1</sup>	5,06 · 10 <sup>1</sup>	6,33 · 10 <sup>-1</sup>	2,30 · 10 <sup>1</sup>	1,39	3,41	9,37	1,49	2,15 · 10 <sup>1</sup>
64,0	3,70 · 10 <sup>2</sup>	1,73 · 10 <sup>-1</sup>	1,04 · 10 <sup>2</sup>	6,15 · 10 <sup>-1</sup>	4,66 · 10 <sup>1</sup>	1,37	6,84	9,35	2,98	2,15 · 10 <sup>1</sup>
128,0	7,64 · 10 <sup>2</sup>	1,67 · 10 <sup>-1</sup>	2,11 · 10 <sup>2</sup>	6,06 · 10 <sup>-1</sup>	9,39 · 10 <sup>1</sup>	1,35	13,7	9,34	5,97	2,15 · 10 <sup>1</sup>

В предельных областях  $\Omega \gg 1$  и  $\Omega \ll 1$  это условие совпадает с условиями (2.12) и (2.13), а для самих  $r_{эфф}^2$  при этом получаются те же формулы (2.14) и (2.15).

Сохраняется также вывод предыдущего раздела о том, что турбулентность не влияет на положение минимума функции  $r_{эфф}^2(\Omega)$ , который имеет место при  $\Omega = 1$ . Для  $r_{эфф\ мин}$  формула (3.6) дает

$$r_{эфф\ мин} = \sqrt{2z/k} \left[ \int_0^{\infty} e^{-x} \exp\left(-\frac{13,95 \sigma_{\chi\text{сф}}^2}{2^{5/6}} x^{5/6}\right) dx \right]^{-1/2}. \quad (3.8)$$

На основании этой более точной, чем (2.16), формулы можно установить границу применимости МПВ к задаче о размытии коллимированного пучка. Отношение квадратов правых частей (2.16) и (3.8) определяет функцию

$$\eta_{\text{кол}}(\sigma_{\chi\text{сф}}^2) = \exp(-7,4\sigma_{\chi\text{сф}}^2) \left[ \int_0^{\infty} e^{-x} \exp(-7,5\sigma_{\chi\text{сф}}^2 x^{5/6}) dx \right]^{-1}, \quad (3.9)$$

график которой приведен на рис. 1. Тот факт, что при всех  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2 > 0$  величина  $\eta < 1$ , указывает, что МПВ всегда дает завышенные значения  $r_{эфф}$ . Однако с 20%-й точностью, например, можно использовать МПВ со значениями  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2$  вплоть до 0,12. На рис. 2 приведены графики зависимостей  $\Omega_{эфф}(\Omega)$  при различных значениях  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2$ .

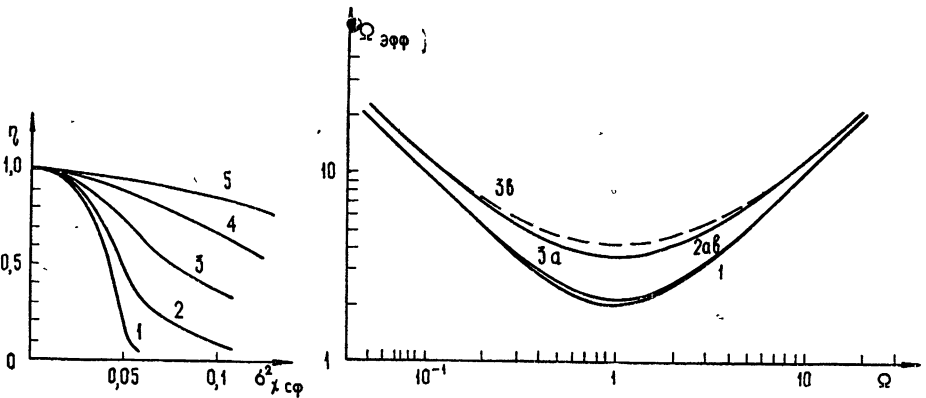


Рис. 1. 1)  $\eta_{\text{фок}}(\sigma_{\chi\text{сф}}^2, 8)$ ; 2)  $\eta_{\text{фок}}(\sigma_{\chi\text{сф}}^2, 4)$ ; 3)  $\eta_{\text{фок}} \times (\sigma_{\chi\text{сф}}^2, 2)$ ; 4)  $\eta_{\text{фок}}(\sigma_{\chi\text{сф}}^2, 1)$ ; 5)  $\eta_{\text{кол}}(\sigma_{\chi\text{сф}}^2)$ .

Рис. 2. Коллимированный пучок: 1)  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2 = 0$ ; 2а)  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2 = 0,01$ ; 2б) МПВ; 3а)  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2 = 0,1$ ; 3б) МПВ.

б) **Фокусированный пучок.** Подстановка (3.5) и (1.5) дает

$$\Omega_{эфф} = \Omega^{-1} \left[ \int_0^{\infty} e^{-x} \exp\left(-13,95 \sigma_{\chi\text{сф}}^2 \Omega^{5/6} x^{5/6}\right) dx \right]^{-1}. \quad (3.10)$$

Эта формула описывает эффект насыщения фокусировки в турбулентной среде. При

$$13,95 \sigma_{\chi\text{сф}}^2 \Omega^{5/6} \gg 1 \quad (3.11)$$

под интегралом можно положить  $e^{-x} \simeq 1$ . В результате получаем следующее выражение для минимального размера фокусного пятна в состоянии насыщения:

$$r_{\text{эфф насыщ}} \simeq 4,3 \sigma_{\chi\text{сф}}^{5/6} \sqrt{z/k}. \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что при достаточно сильной турбулентности, когда  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2 \gg 1$ , возможность фокусировки совсем исключена, поскольку при этом условие (3.11) выполняется при всех  $\Omega \gg 1$ , а  $r_{\text{эфф насыщ}} > \sqrt{z/k}$ .

Можно ввести понятие минимальной турбулентности, характеризующейся  $C_{n\text{мин}}^2(z; \lambda)$  и определяемой таким образом, что при  $C_n^2 \geq C_{n\text{мин}}^2$  турбулентность оказывает существенное влияние на фокусировку пучка с длиной волны  $\lambda$  на расстоянии  $z$  уже при  $\Omega \sim 1$ , а при  $\Omega \gg 1$  всегда должно наблюдаться насыщение. Согласно (3.11), величину  $C_{n\text{мин}}^2$  можно, конечно, условно, определить из условия  $13,95\sigma_{\chi\text{сф}}^2 = 1$ . С учетом (2.2) это дает

$$C_{n\text{мин}}^2 \simeq 10^{-15} \lambda^{7/6} z^{-11/6} \text{ (см}^{-2/3}\text{)}, \quad (3.13)$$

где  $z$  — в километрах,  $\lambda$  — в микронах. При  $C_n^2 = C_{n\text{мин}}^2$  размер фокусного пятна в состоянии насыщения ( $\Omega \gg 1$ ), согласно (3.12), определяется формулой

$$r_{\text{эфф насыщ}} \simeq 0,9 \sqrt{z/k}. \quad (3.14)$$

Для выяснения границ применимости МПВ к задаче фокусировки рассмотрим функцию  $\eta_{\text{фок}}(\sigma_{\chi\text{сф}}^2; \Omega)$ , определяемую как отношение правых частей формул (2.17) и (3.10):

$$\eta_{\text{фок}}(\sigma_{\chi\text{сф}}^2; \Omega) = \exp[-2\sigma_{\chi\text{сф}}^2 F^{\text{фок}}(\Omega)] \times \left[ \int_0^\infty e^{-x} \exp(-13,95\Omega^{5/6} \sigma_{\chi\text{сф}}^2 x^{5/6}) dx \right]^{-1}. \quad (3.15)$$

Семейство графиков этой функции для значений  $\Omega = 1, 2, 4$  и  $8$  приведено на рис. 1. Из графиков видно, что при слабой турбулентности, когда, например,  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2 \simeq 0,03$ , можно пользоваться МПВ с 20%-й точностью для значений  $\Omega \leq 8$ . Но уже начиная со значения  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2 = 0,07$ , МПВ не в состоянии дать правильного описания влияния турбулентности на фокусировку даже с такой точностью, поскольку при  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2 > 0,07$  и  $\Omega = 1$   $\eta_{\text{фок}} < 0,8$ .

На рис. 3 приведены графики зависимостей  $\Omega_{\text{эфф}}(\Omega)$  при различных значениях  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2$ .

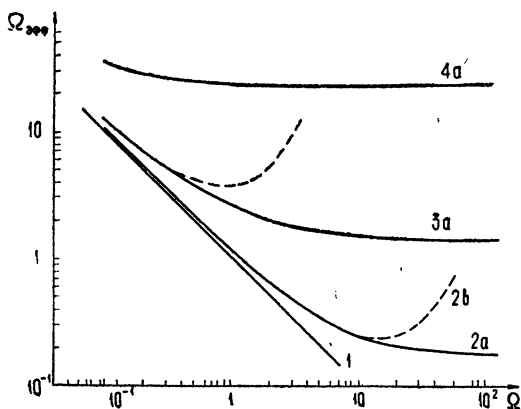


Рис. 3. Сфокусированный пучок:  
 1)  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2=0$ ; 2а)  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2=0,01$ ; 2б) МПВ;  
 3а)  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2=0,1$ ; 3б) МПВ; 4а)  $\sigma_{\chi\text{сф}}^2=1,0$ .



В заключение выражаем благодарность Е. А. Зубовой за проведение вычислений на ЭВМ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. W. R. Hinchman, A. L. Buck, Proc. IEE, **52**, 305 (1964).
2. A. L. Buck, Appl. Optics, **6**, 703 (1967)
3. G. R. Ochs, C. G. Little, Conf. Troposph. wave propagation, London, 1968
4. В. Я. Съедин, С. С. Хмелевцов, Тезисы конференции по распространению волн, Харьков, 1969.
5. Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, Радиотехника и электроника, **9**, 1944 (1964).
6. P. Beckman, J. Res. NBS, **69**, 629 (1965), пер. Зарубежная радиоэлектроника, № 7, 116; № 8, 109 (1965).
7. А. И. Кон, В. И. Татарский, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **8**, № 5, 870 (1965).
8. З. И. Фейзулин, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 1, 68 (1967).
9. В. М. Комиссаров, ЖЭТФ, **52**, 711 (1967).
10. D. L. Fried, J. B. Seidmann, JOSA, **57**, 181 (1967).
11. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **13**, № 1, 61 (1970)
12. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
13. М. Е. Грачева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **10**, № 6, 775 (1967).
14. D. L. Fried, G. E. Mevers, M. D. Keister, JOSA, **57**, 787 (1967).
15. R. A. Schmeltzer, Quart. Appl. Mathem., **24**, 339 (1967).
16. W. P. Brown, Jr., IEEE Trans., AP-15, 81 (1967).
17. D. A. de Wolf, Radio Sci., **2**, 1379 (1967).
18. D. A. de Wolf, JOSA, **58**, 461 (1968).
19. S. Okafuji, Technol. Rept. Kiushu Univers., **41**, 123 (1968).
20. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, **11**, № 6, 866 (1968)
21. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, **1**, изд. Наука, М., 1965.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
23 июня 1969 г.

## DIFFUSION OF LIGHT BEAM IN A TURBULENT MEDIUM

*F. V. Bunkin, K. S. Gochelashvili*

The diffusion of collimated and focused beams in the turbulent atmosphere is theoretically considered, based on the smooth perturbation method and the method of selective series summation of the perturbation theory. The saturation effect of the focusing degree in the turbulent medium is studied. The limits of applicability of the smooth perturbation method to the problem considered are analysed.

УДК 535 224 : 538 56

## УШИРЕНИЕ СВЕТОВОГО ПУЧКА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

*В. В. Воробьев*

На основании параболического уравнения в пренебрежении флуктуациями нелинейной части диэлектрической проницаемости получено уравнение для функций когерентности электромагнитного поля. Показано, что наличие нелинейности среды может существенно уменьшить случайное уширение пучка, если мощность в пучке больше критической, а наличие достаточно сильных флуктуаций может препятствовать схлопыванию пучка.

Учет влияния случайных неоднородностей показателя преломления среды на самофокусировку световых пучков представляет большой интерес при изучении распространения пучков на длинных трассах. Случайное уширение светового пучка может привести к тому, что самофокусировка может не успеть развиться, и, в свою очередь, наличие нелинейности среды может изменить характер рассеяния волн из-за существования в такой среде регулярных волноводных каналов.

Обычно процесс распространения в нелинейной среде с крупномасштабными неоднородностями описывается параболическим уравнением [1]

$$\Delta_{\perp} E + 2ik \frac{\partial E}{\partial x} + k^2[\varepsilon_1(x, y, z) + \varepsilon_2(|E|^2)] E = 0, \quad (1)$$

где  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $k = k_0 \sqrt{\varepsilon_0}$ ,  $\varepsilon_1(x, y, z)$  и  $\varepsilon_2(|E|^2)$  — флуктуационная и нелинейная части диэлектрической проницаемости  $\varepsilon = \varepsilon_0[1 + \varepsilon_1(x, y, z) + \varepsilon_2(|E|^2)]$ , причем  $\langle \varepsilon_1 \rangle = 0$ . Далее значком  $\langle \dots \rangle$  обозначаются средние по реализациям  $\langle \varepsilon_1 \rangle$  величины  $\varepsilon_1$ .

Как показано в работах [2, 3], те предположения, которые обычно делаются при расчетах моментов случайного поля  $E$  в методах возмущений для уравнения (1) без нелинейного члена (именно, что на длине трассы укладывается много неоднородностей и что флуктуации геометрической фазы поля распределены по нормальному закону), позволяют при расчетах полагать флуктуации  $\varepsilon_1(x, y, z)$  — гауссовыми и  $\delta$  — коррелированными функциями  $x$ , а это, в свою очередь, позволяет составлять уравнения для различных моментов, не прибегая к методам возмущений.

Однако даже при этих предположениях из-за того, что уравнение (1) нелинейно, получить замкнутые уравнения для моментов поля  $E$  нельзя, и, вообще говоря, чтобы получить информацию о моментах, нужно решать уравнение в вариационных производных для характеристического функционала. Хотя указанное уравнение и оказывается линейным, найти его решение не представляется возможным, так как методов решения подобных уравнений пока не существует.

В какой-то мере учесть влияние нелинейности среды на рассеяние можно, если пренебречь флуктуациями нелинейной части диэлектрической проницаемости, предполагая их малыми:

$$\varepsilon_2(|E|^2) - \varepsilon_2(\langle |E|^2 \rangle) \ll \varepsilon_2(\langle |E|^2 \rangle). \quad (2)$$

Тогда из уравнения

$$\Delta_{\perp} E + 2ik \frac{\partial E}{\partial x} + k^2[\varepsilon_1(x, y, z) + \varepsilon_2(\langle |E|^2 \rangle)] E = 0, \quad (3)$$

воспользовавшись методикой, предложенной в работе [2], можно получить замкнутые уравнения для моментов поля  $E$ .

В частности, для функции когерентности  $\Gamma(x, \rho_1, \rho_2) = \langle E(x, \rho_1) \times E^*(x, \rho_2) \rangle$  получим уравнение

$$\begin{aligned} & [\Delta_{\perp}(\rho_1) - \Delta_{\perp}(\rho_2)] \Gamma(x, \rho_1, \rho_2) + 2ik \frac{\partial \Gamma(x, \rho_1, \rho_2)}{\partial x} + \\ & + \frac{ik^3}{2} [A(0) - A(\rho_1 - \rho_2)] \Gamma(x, \rho_1, \rho_2) + k^2[\varepsilon_2[\Gamma(x, \rho_1, \rho_1)] - \\ & - \varepsilon_2[\Gamma(x, \rho_2, \rho_2)]] \Gamma(x, \rho_1, \rho_2) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$A(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\varepsilon_1}(x, \rho) dx = 2\pi \int \int \Phi_{\varepsilon_1}(0, \mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x}\rho) d^2\mathbf{x}; \quad (5)$$

$B_{\varepsilon_1}(x, \rho) = \langle \varepsilon_1(x_1, \rho_1) \varepsilon_1(x_2, \rho_2) \rangle$ ;  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — векторы в плоскости, перпендикулярной оси  $x$ ;  $\Phi_{\varepsilon_1}(\mathbf{x})$  — трехмерный спектр флуктуаций  $\varepsilon_1$ .

Нахождение точного решения для  $\Gamma(x, \rho_1, \rho_2)$ -функции пяти независимых переменных из нелинейного уравнения (4) представляет большие трудности даже при использовании ЭВМ. Однако так же, как находится приближенное решение уравнения (1) без флуктуационного члена для приосевой части пучка [1, 4], можно найти решение для средней интенсивности светового поля, которая определяется как  $\Gamma(x, \rho_1, \rho_2)$  при  $\rho_1 = \rho_2$ .

Предполагая  $\varepsilon_2(\langle |E|^2 \rangle) = \varepsilon_{22} \langle |E|^2 \rangle - \varepsilon_{24} \langle |E|^2 \rangle^2$ , рассмотрим сначала случай аксиально-симметричного светового пучка, распределение поля в поперечном сечении которого на границе среды имеет вид

$$E(0, \rho) = E_0 \exp \left[ -\frac{\rho^2}{2a_0^2} + \frac{is(0)}{2} \rho^2 \right],$$

где  $s(0) = -kR^{-1}$ ,  $R$  — радиус кривизны фазового фронта. Будем искать решение уравнения (4) при  $\rho_1 \rightarrow \rho_2$  в следующем виде:

$$\Gamma(x, \rho_1, \rho_2) = \frac{E_0^2 a_0^2}{a^2(x)} \exp \left[ -\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2a^2(x)} + \frac{is(x)}{2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) - \varphi(x) (\rho_1 - \rho_2)^2 \right]. \quad (6)$$

Раскладывая в уравнении (4) функции  $A(0) - A(\rho)$  и  $\varepsilon_2[\Gamma(x, \rho_1, \rho_1)] - \varepsilon_2[\Gamma(x, \rho_2, \rho_2)]$  в ряд по  $\rho_1, \rho_2$ , ограничиваясь квадратичными членами разложения (при условиях  $\rho_1 - \rho_2 \rightarrow 0$ ;  $\rho_1^2, \rho_2^2 \ll a^2$ )

$$A(0) - A(\rho) = D\rho^2, \quad D = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 A(\rho)}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=0} = \pi^2 \int_0^{\infty} x^3 \Phi_{\varepsilon_1}(0, \mathbf{x}) dx, \quad (7)$$

получим следующую систему уравнений для  $a(x)$ ,  $s(x)$ ,  $\varphi(x)$ :

$$s = k \frac{a'}{a}, \quad \varphi' + \frac{2s}{k} \varphi = \frac{k^2}{4} D, \quad (8)$$

$$k^2 a^3 a'' - 4a^2 \varphi = 1 - k^2 \varepsilon_{22} E_0^2 a_0^2 + \frac{k^2 \varepsilon_{24} E_0^4 a_0^4}{(a^2 x)}$$

с начальными условиями  $s(0) = -kR^{-1}$ ,  $a(0) = a_0$ ,  $\varphi(0) = 0$ .

Интегрируя второе уравнение (8), для ширины пучка по средней интенсивности получим уравнение

$$a^3 a'' = k^{-2} - \varepsilon_{22} E_0^2 a_0^2 + \varepsilon_{24} E_0^4 a_0^4 a^{-2} + D \int_0^x a^2(y) dy. \quad (9)$$

В отсутствие нелинейности ( $\varepsilon_2 = 0$ ) уравнение (9) имеет точное решение

$$a^2 = a_0^2 \left(1 - \frac{x}{R}\right)^2 + \frac{x^2}{k^2 a_0^2} + \frac{Dx^3}{3}, \quad (10)$$

что совпадает с результатами расчетов ширины пучка по методу плавных возмущений [5]. Кроме того, как показано в Приложении, результаты такого приближения при решении уравнения для функции когерентности совпадают также с результатами расчетов на основании уравнений геометрической оптики, когда в линейной среде имеется волновод с квадратичным профилем средней диэлектрической проницаемости.

В случае, когда мощность пучка меньше или равна критической ( $k^2 \varepsilon_{22} E_0^2 a_0^2 \leq 1$ ), так что можно пренебречь членом с  $\varepsilon_{24} E_0^4$ , решение уравнения (9) отличается от решения (10) только значением постоянной во втором слагаемом и имеет вид

$$a^2 = a_0^2 \left(1 - \frac{x}{R}\right)^2 + \frac{(1 - k^2 \varepsilon_{22} E_0^2 a_0^2)}{k^2 a_0^2} x^2 + \frac{Dx^3}{3}. \quad (11)$$

Из формулы (11) видно, что в случае слабой нелинейности последняя никак не сказывается на случайном уширении пучка и приводит только к уменьшению дифракционной расходимости, что можно трактовать также как некоторое увеличение волнового числа  $k$ .

Случайное же уширение пучка может оказаться настолько большим, что не произойдет схлопывания в точку и при мощностях, больших критической. При  $R \rightarrow \infty$  условие того, что  $a^2(x)$  не обращается в нуль, будет следующим:

$$D^2 > \frac{4}{3} \alpha^2 k^{-6} a_0^{-8}, \quad \alpha = k^2 \varepsilon_{22} E_0^2 a_0^2 - 1. \quad (12)$$

При  $\alpha \sim 1$ ,  $k = 10^5 \text{ см}^{-1}$ ,  $a_0 = 10 \text{ см}$  даже такие малые флуктуации показателя преломления, при которых  $D = 10^{-19} \text{ см}^{-1}$ , приведут к тому, что самофокусировки в точку не будет.

Для исследования влияния насыщения нелинейности в том случае, когда условие (12) не выполняется, удобнее перейти к безразмерным переменным  $f = a^2/a_0^2$  и  $t = \sqrt{c_1} x/a_0$ , где  $c_1 = \alpha(k a_0)^{-2} - a_0^2 R^{-2} - \frac{1}{2} \varepsilon_{24} E_0^4$ .

Уравнение для функции  $f$  будет тогда иметь вид

$$f'' - \beta f^{-2} = -2 + 2\gamma t, \quad (13)$$

где  $\beta = \varepsilon_{24} E_0^4 c_1^{-1}$ ,  $\gamma = D a_0 c_1^{-3/2}$ , а вместо условия (12) получим  $\gamma^2 > 4/3$ .

Поскольку коэффициент  $\beta$  в уравнении (13) очень мал ( $\beta \sim (10^{-8} - 10^{-12})$  при  $a_0 \sim (0,1 - 10 \text{ см})$ ,  $\alpha \sim 1$ ), то учитывать член с  $\beta f^{-2}$  нужно только в малой окрестности точки  $t_0$ , где  $f_0(y)$  — решение уравнения  $f_0'' = -2 + 2\gamma t$  — обращается в нуль. Вблизи этой точки правую часть уравнения (13) можно считать постоянной и записать первый интеграл этого уравнения в виде

$$\frac{1}{2}(f')^2 + \beta f^{-1} = -2(1 - \gamma t_0) f + 2c_2, \quad (14)$$

где в качестве постоянной  $c_2$  можно выбрать величину  $(f_0')^2/4$ , если только она не обращается в этой точке в нуль. Из уравнения (14), приравнявая  $f'$  нулю, можно получить размер фокусного пятна в нелинейной среде с неоднородностями:

$$f_{\min} = \frac{c_2}{2(1 - \gamma t_0)} [1 - \sqrt{1 - 2\beta c_2^{-2}(1 - \gamma t_0)}] \simeq \frac{\beta}{2c_2} \simeq 2\beta [f_0'(t_0)]^{-2}.$$

В частном случае  $R \rightarrow \infty$ ,  $f_0(y) = 1 - t^2 + \gamma t^3/3$ , размер первого фокусного пятна будет

$$f_1 = \frac{1}{2} \beta t_0^{-2} \left(1 - \frac{\gamma}{2} t_0\right)^{-2}. \quad (14a)$$

Как показывает исследование этого выражения, величина  $f_1 > \beta/2$  при условии, что  $\gamma^2 < 4/3$ , т. е. наличие неоднородностей увеличивает размер фокального пятна, величина которого в отсутствие неоднородностей равна  $\beta/2$ .

При нахождении решения уравнения (13) за фокальной точкой также можно не учитывать нелинейного члена, задавая значение производной за этой точкой равным с обратным знаком значению ее до фокальной точки. Дойдя до следующей фокальной точки, можно повторить ту же процедуру.

Решения, полученные таким способом, представлены графически на рис. 1 для значений параметров

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0,15, \quad \gamma_3 = 0,3, \quad \gamma_4 = 1,5, \quad R \rightarrow \infty.$$

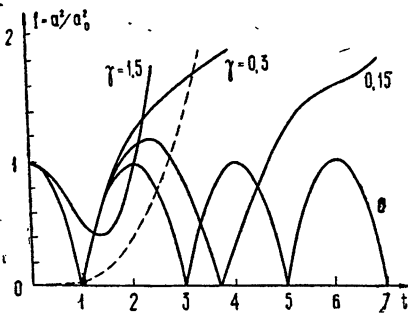


Рис. 1. График функции  $f(t) = a^2(t)/a_0^2$  для различных значений параметра  $\gamma$ ,  $s(0) = 0$ . Пунктирная кривая соответствует  $f = \gamma t^3/3$ ,  $\gamma = 0,15$ .

Здесь же приведен график функции  $f = 0,05 x^3$ , сравнение которого с графиком 2 показывает, что диффузионное уширение аксиально-симметричного пучка в нелинейной среде при мощностях, больших критической, может быть значительно меньше, чем в линейной среде. Но для этого, как видно из соотношения (12), пучок на входе в среду должен быть достаточно узким.

В случае пучка другой формы, в частности, двумерного, который мы здесь рассмотрим, влияние нелинейности может сказаться на случайном уширении и при меньших мощностях, когда можно не учитывать насыщения нелинейности.

Если на границе среды задано одномерное гауссово распределение поля

$$E(0, \rho) = E_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2a_0^2} + \frac{is(0)}{2} y^2\right),$$

будем искать решение уравнения (4) при  $\rho_1 \rightarrow \rho_2$  в следующем виде:

$$\Gamma(x, \rho_1, \rho_2) = \frac{E_0^2 a_0}{a(x)} \exp\left[-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2a^2(x)} + \frac{is(x)}{2}(y_1^2 - y_2^2) - \varphi_1(x)(y_1 - y_2)^2 - \varphi_2(x)(z_1 - z_2)^2\right].$$

Так же как и в случае симметричного пучка, для функций  $a(x)$ ,  $s(x)$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  получим систему уравнений

$$\begin{aligned} s &= k \frac{a'}{a}, & \varphi_1' + \frac{2s}{k} \varphi_1 &= \frac{k^2}{4} D, & \varphi_2' &= \frac{k^2}{4} D, \\ k^2 a^3 a'' - 4a^2 \varphi_1 &= 1 - k^2 \varepsilon_2 E_0^2 a_0 a, \end{aligned} \quad (15)$$

из которой, интегрируя уравнение для  $\varphi_1$ , найдем

$$a^3 a'' = k^{-2} - \varepsilon_2 E_0^2 a_0 a + D \int_0^x a^2(y) dy. \quad (16)$$

При решении этого уравнения мы ограничимся методом возмущений, считая диффузионное уширение пучка малым. Будем для простоты предполагать, что на границе среды задан пучок с плоским фазовым фронтом  $s(0) = 0$ . Кроме того, считаем, что мощность в пучке равна критической, так что  $k^2 \varepsilon_2 E_0^2 a_0^2 = 1$ , и решение уравнения (16) при

$$D = 0 \text{ будет } a^2 = a_0^2 = \frac{1}{k^2 \varepsilon_2 E_0^2} = \text{const.}$$

Переходя в уравнении (16) к переменной  $f = a^2$ ,

$$ff'' - \frac{1}{2} (f')^2 = 2k^{-2} - 2\varepsilon_2 E_0^2 a_0 f^{1/2} + 2D \int_0^x f(y) dy,$$

и линеаризуя это уравнение, положив  $f = a_0^2 + f_1$ , для  $f_1$  получим

$$f_1'' + \mu^2 f_1 = 2Dx, \quad \mu^2 = \frac{1}{R_{\text{нл}}^2} = \varepsilon_2 E_0^2 a_0^{-2}.$$

Из решения этого уравнения

$$f_1 = 2D\mu^{-2}[x - \mu^{-1} \sin(\mu x)] \quad (17)$$

видно, что случайное уширение двумерного пучка в нелинейной среде при мощности порядка критической меньше, чем в линейной.

В заключение отметим еще раз, что уравнения (10) и (16) для ширины пучка по средней интенсивности получены в пренебрежении флуктуациями нелинейной части диэлектрической проницаемости, которые могут оказаться существенными, особенно при распространении

узких пучков. Учет этих флуктуаций при распространении ограниченных пучков, хотя бы на основе метода возмущений, как это сделано в работе [1] для случая плоской волны, представляется, однако, очень сложной задачей.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

#### УШИРЕНИЕ СВЕТОВОГО ПУЧКА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ В ВОЛНОВОДНОМ КАНАЛЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ В ЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Распространение интенсивных световых пучков в нелинейной среде имеет тесную аналогию с распространением в линейной среде, средняя диэлектрическая проницаемость которой зависит от поперечных координат. Хотя это и не эквивалентные задачи, поскольку в линейной среде отсутствует взаимодействие между полем волны и средой, мы рассмотрим здесь этот случай, чтобы выявить различие в диффузионном уширении пучка в линейном и нелинейном волноводных каналах, и покажем, что расчеты уширения пучка из-за флуктуаций на основе уравнения для функции когерентности совпадают с результатами расчета в приближении геометрической оптики, которые в линейном случае несложно сделать.

Рассмотрим для простоты случай стационарного волноводного канала с квадратичным профилем средней диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[ 1 + \varepsilon_1(x, \rho) - \varepsilon_2 \frac{\rho^2}{r_0^2} \right].$$

Из уравнения

$$\Delta_{\perp} E + 2ik \frac{\partial E}{\partial x} + k^2 \left( \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \frac{\rho^2}{r_0^2} \right) E = 0 \quad (18)$$

так же, как из уравнения (3), можно получить уравнение для функции когерентности

$$\begin{aligned} [\Delta_{\perp}(\rho_1) - \Delta_{\perp}(\rho_2)] \Gamma + 2ik \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{ik^3}{2} [A(0) - A(\rho_1 - \rho_2)] \Gamma + \\ + \frac{k^2 \varepsilon_2}{r_0^2} (\rho_2^2 - \rho_1^2) \Gamma = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Находя решение этого уравнения в форме (6) для ширины пучка по средней интенсивности, получим уравнение

$$a^3 a'' = k^{-2} - \varepsilon_2 a^4 r_0^{-2} + D \int_0^x a^2(y) dy, \quad (20)$$

которое допускает точное решение

$$a^2 = A \cos(2\mu_1 x) + B \sin(2\mu_1 x) + c + \frac{D}{2\mu_1^2} [x - (2\mu_1)^{-1} \sin(2\mu_1 x)], \quad (21)$$

где  $\mu_1^2 = \varepsilon_2 r_0^{-2}$ ,  $c^2 = A^2 + B^2 - (k\mu_1)^{-2}$ , постоянные  $A$  и  $B$  определяются начальными условиями.

Из формулы (21) видно, что наличие волноводного канала в линейной среде приводит к уменьшению диффузионной расходимости симмет-

ричного пучка, аналогично уменьшению ее в случае двумерного пучка в нелинейной среде.

Покажем, что диффузионное уширение пучка, описываемое последним членом формулы (21), рассчитанное на основе уравнения для функции когерентности, совпадает с результатами расчета в приближении геометрической оптики.

Уравнение эйконала  $\theta$  для уравнения (18) при  $E(x, \rho) = E_0(x, \rho) \exp(ik\theta)$  будет иметь вид

$$2 \frac{\partial \theta}{\partial x} + (\nabla_{\perp} \theta)^2 = \varepsilon_1(x, \rho) - \varepsilon_2 \frac{\rho^2}{r_0^2}. \quad (22)$$

Отсюда можно получить уравнение для поперечных смещений лучей

$$\frac{d^2 \rho}{dx^2} + \mu_1^2 \rho = \frac{1}{2} \nabla_{\perp} \varepsilon_1(x, \rho). \quad (23)$$

Это уравнение можно записать в интегральной форме:

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{2\mu_1} \int_0^x \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\zeta, \rho) \sin[\mu_1(x - \zeta)] d\zeta. \quad (24)$$

Здесь  $\rho_0 = A \cos(\mu_1 x) + B \sin(\mu_1 x)$  — решение уравнения (23) без правой части

Приближенное решение нелинейного интегрального уравнения (24) можно найти, положив аргумент  $\rho$  функции  $\varepsilon_1(\zeta, \rho)$  равным  $\rho_0$ . Для среднего квадрата поперечных смещений тогда получим

$$\begin{aligned} \langle \rho^2 \rangle &= \rho_0^2 + (2\mu_1)^{-2} \int_0^x \int_0^x \langle \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\zeta', \rho) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\zeta'', \rho) \rangle |_{\rho=\rho_0} \times \\ &\times \sin[\mu_1(x - \zeta')] \sin[\mu_1(x - \zeta'')] d\zeta' d\zeta''. \end{aligned} \quad (25)$$

Чтобы выполнить интегрирование в (25), можно, как это обычно делается, ввести разностную координату  $\zeta = \zeta' - \zeta''$  и проинтегрировать по ней в бесконечных пределах. Как уже отмечалось, эта процедура эквивалентна замене реальной корреляционной функции на  $\delta$ -функцию от  $x$ . Полагая  $B(x, \rho) = A(\rho) \delta(x)$  и учитывая, что

$$\langle \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\zeta', \rho) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\zeta'', \rho) \rangle |_{\rho=\rho_0} = -2 \frac{\partial^2 B}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} = 4D \delta(\zeta' - \zeta''), \quad (26)$$

получим

$$\langle \rho^2 \rangle = \rho_0^2 + \frac{D}{2\mu_1^2} [x - (2\mu_1)^{-1} \sin(2\mu_1 x)].$$

Последний член этой формулы, описывающий диффузионное уширение, в точности совпадает с соответствующим членом формулы (21), различие из-за учета в последней дифракции проявляется только во влиянии ее на регулярный ход лучей в такой среде.

Автор пользуется случаем поблагодарить В. И. Татарского за помощь в работе, а также В. И. Таланова и А. Г. Литвака за обсуждение полученных результатов и ценные советы.



## ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
2. В. И. Татарский, ЖЭТФ (в печати).
3. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ (в печати).
4. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ, 50, 1537 (1966).
5. З. И. Фейзулин, Ю. А. Кравцов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 68 (1967).

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
17 июля 1969 г.

NARROWING OF LIGHT BEAM IN A NONLINEAR MEDIUM WITH RANDOM  
INHOMOGENEITIES OF THE REFRACTIVE INDEX

*V. V. Vorob'ev*

The equation is derived for the coherence function of the electromagnetic field based on the parabolic equation when the fluctuations of a nonlinear part of the dielectric permittivity are neglected. It is shown that in the presence of the medium nonlinearity, a random narrowing of the beam may decrease considerably if the beam power exceeds the critical value and the presence of sufficiently strong fluctuations may prevent the beam collapse.

---

УДК 535.224 538.56

**К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В СРЕДЕ  
СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

*В. И. Кляцкин, В. И. Татарский*

Задача о распространении света в среде со случайными неоднородностями рассматривается в приближении параболического уравнения и марковской модели, когда все моменты случайного поля волны описываются замкнутыми дифференциальными уравнениями. Рассматривается решение уравнения для функции взаимной когерентности и в качестве примера рассчитана средняя интенсивность света в пучке с гауссовым распределением амплитуды и квадратичным распределением фазы. Рассматриваются также случайные блуждания центра тяжести пучка.

Будем описывать распространение света в приближении скалярного параболического уравнения (квазиоптика)

$$2ik \frac{\partial u(x, \rho)}{\partial x} + \Delta_{\perp} u + k^2 \epsilon(x, \rho) u(x, \rho) = 0, \tag{1}$$

где  $u(x, \rho)$  связано с полем  $E(x, \rho)$  соотношением  $E(x, \rho) = \exp\{ikx\} u(x, \rho)$ , ось  $x$  выбрана по направлению распространения исходного пучка,  $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ ,  $\epsilon(x, \rho)$  — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости, причем  $\langle \epsilon \rangle = 0$ .

В работе [1] была рассмотрена марковская модель, в которой реальная корреляционная функция  $B_{\epsilon}(x-x'; \rho-\rho') = \langle \epsilon(x, \rho) \epsilon(x', \rho') \rangle$  заменяется на функцию

$$\tilde{B}_{\epsilon}(x-x', \rho) = \delta(x-x') A(\rho), \quad A(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\epsilon}(\xi, \rho) d\xi, \tag{2}$$

и было показано, что если  $\epsilon(\xi, \rho)$  — гауссово случайное поле с корреляционной функцией вида (2), то случайное поле  $u(x, \rho)$  описывается бесконечномерным аналогом уравнения Фоккера—Планка, и для любых моментов поля  $u$  из него могут быть получены замкнутые дифференциальные уравнения. При выводе этих уравнений не делается никаких предположений о малости флуктуаций  $\epsilon$  или  $u$ .

В работе [2] рассматривались погрешности, связанные с аппроксимацией (2), и было найдено, что поправки к решениям марковского типа, обусловленные конечностью продольного радиуса корреляции, становятся существенными лишь в той области, где и среднее поле, и функция взаимной когерентности практически равны нулю.

Наконец, в работе [3] был рассмотрен вопрос о применимости самого параболического уравнения к рассматриваемой задаче и были получены ограничения на величину флуктуаций  $\epsilon$ . Эти ограничения оказались достаточно слабыми и допускают сильные флуктуации поля  $u$ .

Пусть

$$\Gamma_2(x, \rho, \mathbf{R}) = \left\langle u\left(x, \mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho\right) u^*\left(x, \mathbf{R} - \frac{1}{2}\rho\right) \right\rangle; \quad (3)$$

$$\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = \langle u(x, \rho_1) u(x, \rho_2) u^*(x, \rho_3) u^*(x, \rho_4) \rangle \quad (4)$$

— функции когерентности второго и четвертого порядка. Уравнения для этих функций, полученные в [1], имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma_2(x, \rho, \mathbf{R}) + \frac{1}{ik} \nabla_\rho \nabla_{\mathbf{R}} \Gamma_2 + \frac{\pi k^2}{4} D(\rho) \Gamma_2(x, \rho, \mathbf{R}) = 0; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) + \frac{1}{2ik} (\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4) \Gamma_4 + \\ + \frac{\pi k^2}{4} F(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \Gamma_4 = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$D(\rho) = 2 \int d\mathbf{x} [1 - \cos \mathbf{x}\rho] \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{x}), \quad (7)$$

$\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \mathbf{x})$  — трехмерный спектр флуктуаций  $\varepsilon$ ,  $F(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = D_{1,3} + D_{1,4} + D_{2,3} - D_{2,4} - D_{1,2} - D_{3,4}$ ,  $D_{\alpha,\beta} \equiv D(\rho_\alpha - \rho_\beta)$  и  $\Delta_\alpha$  — оператор Лапласа по переменной  $\rho_\alpha$ .

Уравнение (5) было получено ранее Долиным [4] и Черновым [5] с точностью до членов второго порядка малости по  $\varepsilon$ . Частный случай уравнения (6) был получен Шишовым [6] путем выборочного суммирования рядов теории возмущений для  $\Gamma_4$ .

Как было показано в работе Долина [4], уравнение (5) эквивалентно малоугловому приближению уравнения переноса излучения

$$\frac{\partial}{\partial x} J + \frac{\mathbf{x}}{k} \nabla_{\mathbf{R}} J + \alpha J(x, \mathbf{x}, \mathbf{R}) = \int d\mathbf{x}' f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') J(x, \mathbf{x}', \mathbf{R}), \quad (8)$$

где

$$J(x, \mathbf{x}, \mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\rho \Gamma_2(x, \rho, \mathbf{R}) \exp\{-i\mathbf{x}\rho\},$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \pi k^2 \Phi_\varepsilon(0, \mathbf{x}), \quad \alpha = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}).$$

Уравнение (5) с произвольным начальным условием

$$\Gamma_2(0, \rho, \mathbf{R}) = \Gamma_2^0(\rho, \mathbf{R}) = u_0\left(\mathbf{R} + \frac{1}{2}\rho\right) u_0^*\left(\mathbf{R} - \frac{1}{2}\rho\right);$$

где  $u_0(\mathbf{R}) = u(0, \mathbf{R})$ , может быть решено в общем виде, если в (5) произвести преобразование Фурье по  $\mathbf{R}$ . Это решение было получено в работе Долина [7] применительно к уравнению (8)

$$\Gamma_2(x, \rho, \mathbf{R}) = \int dq \gamma_0\left(\rho - \frac{q\mathbf{x}}{k}, q\right) \exp\left\{iq\mathbf{R} - \frac{\pi k^2}{4} \int_0^x d\xi D\left(\rho - \frac{q\xi}{k}\right)\right\}, \quad (9)$$

где

$$\gamma_0(\rho, q) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\mathbf{R}' \Gamma_2^0(\rho, \mathbf{R}') \exp\{-iq\mathbf{R}'\}.$$

Следует отметить, что решение (9) может быть получено при помощи метода Кирхгофа, если в нем функцию Грина взять в приближении метода плавных возмущений и логарифмической нормальности поля (пример такого построения можно найти в работе Кона [8]). Однако такое совпадение результатов имеет место лишь для функции  $\Gamma_2$  и несправедливо для  $\Gamma_4$ .

Эквивалентное (9) общее решение уравнения (8) имеет вид\*

$$J(x, \mathbf{x}, R) = \int d\mathbf{x}_1 dR_1 G(x, \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, R - R_1) J_0(\mathbf{x}_1, R_1), \quad (10)$$

где

$$J_0(\mathbf{x}, R) = J(0, \mathbf{x}, R),$$

$$G(x, \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, R - R_1) = (2\pi)^{-4} \int d\rho dq \exp \left\{ i q \left( R - R_1 - \frac{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}}{k} \right) - i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot \rho - x \left[ \alpha - \int d\mathbf{x}' f(\mathbf{x}') \cos \left( \mathbf{x}' \cdot \rho - \frac{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{q} x}{k} \right) \frac{\sin(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{q} x / 2k)}{\mathbf{x}' \cdot \mathbf{q} x / 2k} \right] \right\}.$$

Заметим, что решение (10) имеет смысл и в том случае, когда  $\alpha = \infty$  за счет обращения в бесконечность функции  $f(\mathbf{x}')$  при  $\mathbf{x}' = 0$ , если только функция  $\mathbf{x}^2 f(\mathbf{x})$  интегрируема в нуле. Это становится ясным, если в (10) подставить выражение  $\alpha$  через  $f(\mathbf{x})$ . Именно этот случай имеет место, когда флуктуации  $\varepsilon$  обусловлены турбулентностью и  $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = AC_\varepsilon^2 \mathbf{x}^{-11/3}$ ,  $D(\rho) = pC_\varepsilon^2 \rho^{5/3}$ , где  $p = 2^{1/3} \pi^2 A / \Gamma^2(11/6)$ .

В качестве примера рассмотрим пучок, распределение поля в начальном сечении которого имеет вид

$$u_0(\rho) = u_0 \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{2a^2} + \frac{ik\rho^2}{2F} \right\}. \quad (11)$$

Здесь  $a$  — эффективная ширина пучка,  $F$  — расстояние до центра излучения (если  $F = \infty$ , то пучок коллимированный, если  $F > 0$  — пучок расходящийся, если  $F < 0$  — сфокусированный на расстоянии  $x = |F|$ ). Функция  $\gamma_0(\rho, q)$ , входящая в (9), равна в этом случае

$$\gamma_0(\rho, q) = \frac{u_0^2 a^2}{4\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[ \frac{\rho^2}{a^2} + \left( \frac{k\rho}{F} - q \right)^2 a^2 \right] \right\}. \quad (12)$$

Рассмотрим распределение средней интенсивности в пучке  $I(x, R) = \Gamma_2(x, 0, R)$  для случая турбулентных пульсаций  $\varepsilon$ . Вычисление входящих в (9) интегралов при  $\rho = 0$  приводит к выражению

$$\begin{aligned} \bar{I}(x, R) &= \frac{2u_0^2 k^2 a^4}{x^2 g^2(x)} \int_0^\infty dt t J_0(2kaRt/xg(x)) \times \\ &\times \exp \left\{ -t^2 - \frac{3\pi p}{32} C_\varepsilon^2 k^2 x \left( \frac{2a}{g(x)} \right)^{5/3} t^{5/3} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $g(x) = \{1 + k^2 a^4 [(1/x) + (1/F)]^2\}^{1/2}$  и  $J_0$  — функция Бесселя. Фигурирующая в экспоненте (13) величина  $C_\varepsilon^2 k^2 x (2a/g)^{5/3}$  пропор-

\* В работе Долина [7], где указан способ получения (10), само решение не приводится из-за неудобства его использования. Представляется, однако, что формула (10) может быть полезной для численных расчетов в широком круге задач, особенно если они обладают какой-либо симметрией.

циональна среднему квадрату разности фаз на базе  $2a/g(x)$ . В случае  $F < 0$  и  $x = |F|$  ( $g(|F|) = 1$ ) выражение (13) совпадает с формулой, полученной Коном [8] методом Кирхгофа (в этой работе содержатся результаты численных расчетов  $\bar{I}(x, 0)$ ).

Перейдем теперь к вопросу о флуктуациях положения пучка. Будем характеризовать его поперечное положение при помощи координаты центра тяжести случайного распределения интенсивности  $I(x, \rho) = u(x, \rho) u^*(x, \rho)$

$$R_0(x) = \frac{\int d\rho \rho I(x, \rho)}{\int d\rho I(x, \rho)}. \quad (14)$$

Легко показать, что знаменатель в (14) является величиной постоянной. Действительно, из (1) следует уравнение для функции  $\varphi(x, R, \rho) = u(x, R + \rho/2) u^*(x, R - \rho/2)$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{i}{k} \nabla_\rho \nabla_R \varphi + \frac{ik}{2} \left[ \varepsilon \left( x, R + \frac{1}{2} \rho \right) - \varepsilon \left( x, R - \frac{1}{2} \rho \right) \right] \varphi.$$

Интегрируя это уравнение по  $R$  и предполагая, что поле  $u$  убывает в поперечном направлении быстрее, чем  $R^{-1}$ , имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int dR \varphi(x, R, \rho) = \frac{ik}{2} \int dR \left[ \varepsilon \left( x, R + \frac{1}{2} \rho \right) - \varepsilon \left( x, R - \frac{1}{2} \rho \right) \right] \varphi,$$

откуда при  $\rho=0$  получаем интеграл энергии

$$\frac{d}{dx} \int dR I(x, R) = 0. \quad (15)$$

В дальнейшем мы будем считать поле  $u$  нормированным так, что

$$\int dR I(x, R) = 1. \quad (15a)$$

Заметим, что в (15) входит случайное распределение интенсивности и это соотношение справедливо для каждой реализации. Что касается средних значений, то из (5) легко получить формулу

$$\int dR \Gamma_2(x, \rho, R) = \int dR \Gamma_2(0, \rho, R) \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{2} D(\rho) x \right\}, \quad (16)$$

которая при  $\rho=0$  совпадает с усредненным соотношением (15).

Рассмотрим средний квадрат флуктуаций координат центра тяжести пучка. С учетом (14) и (15a) имеем

$$\langle R_0^2(x) \rangle = \int d\rho_1 d\rho_2 \rho_1 \rho_2 \langle I(x, \rho_1) I(x, \rho_2) \rangle.$$

Но, согласно (4),

$$\langle I(x, \rho_1) I(x, \rho_2) \rangle = \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_1, \rho_2),$$

откуда

$$\langle R_0^2(x) \rangle = \int d\rho_1 d\rho_2 \rho_1 \rho_2 \Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_1, \rho_2). \quad (17)$$

Оказывается удобным преобразовать эту формулу, используя уравнение (6).

Введем в (6) вместо  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  новые переменные

$$R = \frac{1}{4} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4), \quad \rho' = (\rho_1 + \rho_2 - \rho_3 - \rho_4),$$

$$r = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4), \quad \rho = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2 - \rho_3 + \rho_4)$$

и обозначим  $\Gamma_4(x, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, \rho, \rho')$ . Если  $\rho_1 = \rho_3$ ,  $\rho_2 = \rho_4$ , то  $\rho = \rho' = 0$ ,  $R = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2)$ ,  $r = \rho_1 - \rho_2$  и  $\tilde{\Gamma}_4(x, r, R, 0, 0)$  представляет собой ковариацию интенсивностей:

$$\tilde{\Gamma}_4(x, r, R, 0, 0) = \left\langle I\left(x, R + \frac{1}{2}r\right) I\left(x, R - \frac{1}{2}r\right) \right\rangle.$$

Из (6) следует, что  $\tilde{\Gamma}_4(x, r, R, \rho, \rho')$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\Gamma}_4 = \frac{i}{k} (\nabla_{\rho'} \nabla_R + \nabla_r \nabla_{\rho}) \tilde{\Gamma}_4 - \frac{\pi k^2}{4} F(r, \rho, \rho') \tilde{\Gamma}_4, \quad (6a)$$

причем  $F$ , выраженное через переменные  $r, \rho, \rho'$ , имеет вид

$$F(r, \rho, \rho') = 4 \int d\mathbf{x} \Phi_i(\mathbf{x}) \left[ 1 - \cos(\mathbf{x}\rho) \cos\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}\rho'\right) - \right. \\ \left. - \cos(\mathbf{x}r) \cos\left(\frac{1}{2}\mathbf{x}\rho'\right) + \cos(\mathbf{x}r) \cos(\mathbf{x}\rho) \right]. \quad (18)$$

Выражая  $\Gamma_4$  в (17) через  $\tilde{\Gamma}_4$ , получаем

$$\langle R_0^2(x) \rangle = \int drdR \left( R^2 - \frac{r^2}{4} \right) \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, 0, 0). \quad (19)$$

Продифференцируем (19) по  $x$  и используем (6a):

$$\frac{d}{dx} \langle R_0^2(x) \rangle = \int drdR \left( R^2 - \frac{r^2}{4} \right) \left[ \frac{i}{k} (\nabla_{\rho'} \nabla_R + \nabla_r \nabla_{\rho}) \tilde{\Gamma}_4 - \frac{\pi k^2}{4} F \tilde{\Gamma}_4 \right]_{\rho=\rho'=0}.$$

Так как  $F(r, 0, 0) = 0$ , то второе слагаемое в квадратной скобке можно опустить. Повторяя операцию дифференцирования и снова используя (6a), получим

$$\frac{d^2}{dx^2} \langle R_0^2(x) \rangle = -\frac{1}{k^2} \int drdR \left( R^2 - \frac{r^2}{4} \right) [(\nabla_{\rho'} \nabla_R + \nabla_r \nabla_{\rho})^2 \times \\ \times \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, \rho, \rho')]_{\rho=\rho'=0}.$$

Интегрируя по частям, перенесем действие операторов  $\nabla_R$  и  $\nabla_r$  на множитель  $(R^2 - r^2/4)$ . После этого будем иметь

$$\frac{d^2}{dx^2} \langle R_0^2(x) \rangle = -\frac{1}{k^2} \int drdR \left[ 2\Delta_{\rho'} - \frac{1}{2}\Delta_{\rho} \right] \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, 0, 0). \quad (20)$$

Остается найти подынтегральное выражение в (20).

Проинтегрируем уравнение (6a) по  $r$  и  $R$ . С учетом убывания поля вне пучка получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int drdR \Gamma_4(x, r, R, \rho, \rho') = -\frac{\pi k^2}{4} \int drdR F(r, \rho, \rho') \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, \rho, \rho'). \quad (21)$$

Полагая здесь  $\rho = \rho' = 0$  и учитывая, что согласно (18)  $F(r, 0, 0) = 0$ , получаем интеграл уравнения (6a)

$$\frac{d}{dx} \int dr dR \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, 0, 0) = 0, \quad (22)$$

являющийся следствием закона сохранения энергии для  $\tilde{\Gamma}_4$ .

Поддействуем на (21) оператором  $\Delta_{\rho'}$ , а затем положим  $\rho = \rho' = 0$ . Учитывая, что  $\nabla_{\rho'} F|_{\rho=\rho'=0} = 0$ , получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int dr dR \Delta_{\rho'} \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, 0, 0) = \\ & = -\frac{\pi k^2}{4} \int dr dR \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, 0, 0) \Delta_{\rho'} F(r, 0, 0). \end{aligned}$$

Точно такое же соотношение справедливо и в случае, если на (21) подействовать оператором  $\Delta_{\rho}$ . В итоге получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int dr dR \left[ 2\Delta_{\rho'} - \frac{1}{2} \Delta_{\rho} \right] \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, 0, 0) = \\ & = -\frac{\pi k^2}{4} \int dr dR \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, 0, 0) \left[ 2\Delta_{\rho'} - \frac{1}{2} \Delta_{\rho} \right] F(r, 0, 0). \end{aligned}$$

Согласно (18)

$$\left[ 2\Delta_{\rho'} - \frac{1}{2} \Delta_{\rho} \right] F|_{\rho=\rho'=0} = 4 \int dx x^2 \Phi_{\epsilon}(x) \cos(xr) = 2\Delta_r D(r).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \int dr dR \left[ 2\Delta_{\rho'} - \frac{1}{2} \Delta_{\rho} \right] \tilde{\Gamma}_4|_{\rho=\rho'=0} = \\ & = -\frac{\pi k^2}{2} \int dr \Delta_r D(r) \int dR \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, 0, 0). \end{aligned}$$

Дифференцируя (20) по  $x$  и подставляя последнее выражение, получаем

$$\frac{d^3 \langle R_0^2(x) \rangle}{dx^3} = \frac{\pi}{2} \int dr \Delta_r D(r) \int dR \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, 0, 0). \quad (23)$$

Для симметричных пучков с нулевыми начальными условиями уравнение (23) после интегрирования приводит к формуле

$$\langle R_0^2(x) \rangle = \frac{\pi}{4} \int_0^x d\xi (x - \xi)^2 \int dr \Delta_r D(r) \int dR \tilde{\Gamma}_4(\xi, r, R, 0, 0). \quad (24)$$

Заметим, что это же выражение можно было бы получить и другим путем, исходя непосредственно из стохастического уравнения (1). Умножая (1) на  $\rho$  и интегрируя по  $\rho$ , после преобразований, аналогичных проделанным выше, можно получить формулу

$$R_0(x) = \frac{1}{2} \int_0^x d\xi (x - \xi) \int d\rho I(\xi, \rho) \nabla_{\epsilon}(\xi, \rho). \quad (25)$$

Усредняя квадрат этого выражения, можно получить (24), однако при этом приходится использовать более сложные математические приемы, аналогичные употреблявшимся в [1].

Как следует из (24),  $\langle R_0^2 \rangle$  определяется функцией

$$f(x, r, \rho, \rho') = \int \tilde{\Gamma}_4(x, r, R, \rho, \rho') dR \quad (26)$$

при  $\rho = \rho' = 0$ . Существенным преимуществом представления (24) перед исходным представлением (19) является то обстоятельство, что функция  $f$  удовлетворяет более простому уравнению, чем  $\tilde{\Gamma}_4$ . Чтобы получить это уравнение, проинтегрируем (6 а) по  $R$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{i}{k} \nabla_\rho \nabla_r f - \frac{\pi k^2}{4} F(r, \rho, \rho') f(x, r, \rho, \rho'). \quad (27)$$

Так как переменная  $\rho'$  здесь является параметром, то ее можно положить равной нулю и тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, r, \rho, 0) = \frac{i}{k} \nabla_r \nabla_\rho f - \frac{\pi k^2}{4} F(r, \rho, 0) f(x, r, \rho, 0). \quad (27a)$$

Входящая в (24) величина  $f(x, r, 0, 0)$  может быть получена после решения (27 а) при  $\rho=0$ . В отличие от уравнения (5) для  $\Gamma_2$  уравнение (27 а) в общем виде решить не удастся, так как функция  $F$  зависит от обоих аргументов  $r$  и  $\rho$  (в (5) входила функция  $D(\rho)$ , зависящая лишь от одного переменного, что и позволило проинтегрировать это уравнение).

Несмотря на то, что решить уравнение (27 а) не удастся, можно сделать некоторые качественные выводы о флуктуациях центра тяжести пучка в области сильных флуктуаций интенсивности. Для этого произведем преобразование Фурье уравнения (27 а) по переменной  $\rho$ . Учигывая, что

$$F(r, \rho, 0) = 4 \int d\mathbf{x} \Phi_s(\mathbf{x}) [1 - \cos(\mathbf{x}r)] [1 - \cos(\mathbf{x}\rho)],$$

для функции

$$\varphi(x, r, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\rho f(x, r, \rho, 0) \exp\{-i\mathbf{x}\rho\}$$

можно получить уравнение типа малоуглового приближения уравнения переноса излучения в среде с переменной (зависящей от координат) индикатрисой рассеяния:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, r, \mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\mathbf{x}}{k} \nabla_r \varphi + \frac{\pi k^2}{2} D(r) \varphi(x, r, \mathbf{x}) - \\ - \pi k^2 \int d\mathbf{x}' \Phi_s(\mathbf{x}') [1 - \cos(\mathbf{x}'r)] \varphi(x, r, \mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим теперь, что методу возмущений соответствует замена в уравнении (27) функции  $f$  в последнем слагаемом правой части на начальное условие  $f(0, r, \rho, \rho')$  или же замена функции  $\varphi$  в двух последних слагаемых (28) на  $\varphi(0, r, \mathbf{x})$ . Уравнение (28) можно решить в приближении однократного рассеяния, заменяя  $\varphi$  на  $\varphi_0$  лишь в интегральном члене (здесь термин «однократное рассеяние» по своему смыслу отличается от такого же термина применительно к решению волнового уравнения, ибо там он означает описанный выше первый член ряда теории возмущений). Это решение имеет вид

$$\varphi_1(x, r, \mathbf{x}) = \varphi\left(0, r - \frac{\mathbf{x}x}{k}, \mathbf{x}\right) \exp\left\{-\frac{\pi k^2}{2} \int_0^x d\xi D\left(r - \frac{\mathbf{x}\xi}{k}\right)\right\} +$$



$$\begin{aligned}
 & + \int_0^x d\xi \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{2} \int_{\xi}^x d\xi' D \left( r - \frac{x}{k} (x - \xi') \right) \right\} \pi k^2 \int d\mathbf{x}' \Phi_{\epsilon}(\mathbf{x}') \times \\
 & \times \left\{ 1 - \cos \left[ \mathbf{x}' \left( r - \frac{x}{k} (x - \xi) \right) \right] \right\} \varphi \left( 0, r - \frac{x}{k} (x - \xi), \mathbf{x} - \mathbf{x}' \right). \quad (29)
 \end{aligned}$$

Величина  $\beta^2 = (\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2) / \langle I \rangle^2$ , связанная с  $\varphi_1$  соотношением  $\beta^2(x) = \int d\mathbf{x} \varphi_1(x, 0, \mathbf{x}) - 1$ , как легко показать, стремится при  $x \rightarrow \infty$  к постоянному пределу, вообще говоря, зависящему от  $\Phi_{\epsilon}(\mathbf{x})$ , что находится в согласии с экспериментальными данными [9, 10].

Так как уравнение (28) формально имеет вид уравнения переноса излучения, то из физических соображений ясно, что заменяя в источнике рассеянных волн (последний член в (28)) истинный «поток»  $\varphi$  на неослабленный поток  $\varphi_0$ , мы можем лишь увеличить «интенсивность» излучения на оси, т. е. величину  $1 + \beta^2(x)$ . Так что в общем случае можно утверждать, что решение (29) уравнения (28) при расчете  $f(x, r, 0, 0)$  дает завышенную оценку.

Если обратиться теперь к смещениям луча, выражаемым формулой (24), то отсюда сразу же следует, что в области сильных флуктуаций интенсивности величина  $\langle R_0^2 \rangle$  будет меньше, чем дает расчет по теории возмущений, когда в правую часть (24) подставляется невозмущенное значение  $\Gamma_4$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, 2106 (1969).
2. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 57, 952 (1969).
3. В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, ЖЭТФ, 58, № 2 (1970).
4. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 840 (1968).
5. Л. А. Чернов, Тезисы доклада на 6-й Всесоюзной акустической конференции (1968).
6. В. И. Шишов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 6, 866 (1968).
7. Л. С. Долин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 2, 380 (1964).
8. А. И. Кон, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 1, 61 (1970).
9. М. Е. Грачева, А. С. Гурвич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 4, 717 (1965).
10. М. Е. Грачева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 6, 775 (1967).

Институт физики атмосферы АН СССР

Поступила в редакцию  
23 июня 1969 г.

#### TO THE THEORY OF PROPAGATION OF LIGHT BEAMS IN A MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

V. I. Klyatskin, V. I. Tatarskii

The propagation of light in a medium with random inhomogeneities is considered on the assumption of the parabolic equation and Markov's model when all the moments of the random wave field are described by closed differential equations. A solution of the equation for the function of mutual coherence is considered. The example is the calculated mean intensity of light in the beam with Gauss amplitude distribution and square phase distribution. There are also discussed random variations of the gravity center of the beam.

УДК 535 224 : 538.56

## О ПРОДОЛЬНЫХ КОРРЕЛЯЦИЯХ ПОЛЯ СВЕТОВОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

В. И. Кляцкин

Задача о распространении света в среде со случайными неоднородностями рассматривается в приближении параболического уравнения и марковской модели [1]. Показано, что продольные моменты (по оси  $x$ ) случайного поля волны выражаются через моменты поля волны в плоскости  $x = \text{const}$  (ось  $x$  выбрана по направлению первоначального распространения волны).

Будем описывать распространение света в приближении скалярного параболического уравнения

$$\frac{\partial u(x, \rho)}{\partial x} = \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} u + \frac{ik}{2} \varepsilon(x, \rho) u(x, \rho), \quad (1)$$

где ось  $x$  выбрана по направлению первоначального распространения волны, через  $\rho$  и  $\Delta_{\perp}$  обозначены поперечные координаты и оператор Лапласа по ним, а через  $\varepsilon$  обозначены отклонения диэлектрической проницаемости от своего среднего значения, которое будем считать равным единице. Поле случайной величины  $\varepsilon(x, \rho)$  будем считать гауссовым однородным полем. Уравнение (1) следует решать с граничным условием

$$u(0, \rho) = u_0(\rho). \quad (2)$$

В работе [1] была рассмотрена марковская модель, в которой корреляционная функция поля  $\varepsilon$  имеет вид

$$B_{\varepsilon}(x - x', \rho - \rho') = \langle \varepsilon(x, \rho) \varepsilon(x', \rho') \rangle = \delta(x - x') A(\rho - \rho'), \quad (3)$$

и было показано, что любые моменты поля  $u$  в плоскости  $x = \text{const}$  описываются замкнутыми дифференциальными уравнениями.

В работе [2] рассматривались погрешности, связанные с указанной аппроксимацией, и было найдено, что поправки, обусловленные конечностью продольного радиуса корреляции поля  $\varepsilon$ , становятся существенными лишь в той области, где и среднее поле и функция когерентности практически равны нулю.

Функция когерентности, определяемая как  $\Gamma(x; \rho_1, \rho_2) = \langle u(x, \rho_1) \times u^*(x, \rho_2) \rangle$ , описывается уравнением, полученным в [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x; \rho_1, \rho_2) = \frac{i}{2k} [\Delta_{\rho_1} - \Delta_{\rho_2}] \Gamma - \frac{\pi k^2}{4} D(\rho_1 - \rho_2) \Gamma, \quad (4)$$

где  $\pi D(\rho) = A(0) - A(\rho)$ .

Рассмотрим функцию  $\Gamma(x, \rho_1; y, \rho_2) = \langle u(x, \rho_1) u^*(y, \rho_2) \rangle$ , описывающую также и продольную корреляцию полей. Уравнение для нее получим, умножая уравнение (1) на  $u^*(y, \rho_2)$  и усредняя по ансамблю реализаций поля  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, \rho_1; y, \rho_2) &= \frac{i}{2k} \Delta_{\rho_1} \Gamma(x, \rho_1; y, \rho_2) + \\ &+ \frac{ik}{2} \langle \varepsilon(x, \rho_1) u(x, \rho_1) u^*(y, \rho_2) \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть теперь будет  $x > y$ . В этом случае, в силу марковости рассматриваемого процесса, поля  $\varepsilon(x, \rho_1)$  и  $u^*(y, \rho_2)$  будут некоррелированы [1, 2]. Производя усреднение в (5) аналогично тому, как это делалось в работе [1] при выводе уравнения (4), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, \rho_1; y, \rho_2) &= \frac{i}{2k} \Delta_{\rho_1} \Gamma - \frac{\pi k^2}{8} A(0) \Gamma(x, \rho_1; y, \rho_2) \\ &(x > y). \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) следует решать с условием

$$\Gamma(y, \rho_1; y, \rho_2) = \Gamma(y; \rho_1, \rho_2). \quad (7)$$

Аналогичным методом легко получить и уравнение для  $\Gamma$  в случае  $x < y$ .

Решение уравнения (6) с граничным условием (7) имеет вид\*

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \rho_1; y, \rho_2) &= \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{8} A(0)(x-y) \right\} \int d\rho' \times \\ &\times g(x-y, \rho') \Gamma(y; \rho_1 - \rho', \rho_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$g(x-x', \rho - \rho') = \frac{k}{2\pi i(x-x')} \exp \left\{ \frac{ik(\rho - \rho')^2}{2(x-x')} \right\} \quad (9)$$

является функцией Грина для уравнения (1) при отсутствии неоднородностей, т. е. при  $\varepsilon \equiv 0$ .

В случае, когда падающая волна является плоской, т. е.  $u^0(\rho) = u_0$  [1],

$$\Gamma(y; \rho_1, \rho_2) = \Gamma_0 \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{4} D(\rho_1 - \rho_2) y \right\}. \quad (10)$$

В этом случае выражение (8) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y, \rho) &= \Gamma_0 \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{8} A(0)(x-y) \right\} \int d\rho' g(x-y, \rho') \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\pi k^2}{4} D(\rho - \rho') y \right\} \quad (\rho = \rho_1 - \rho_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что, в то время как выражение (10) совпадает с выражением, соответствующим методу плавных возмущений, формулы (8), (11) не могут быть получены на основе метода плавных возмущений.

Из (8), (11) видно, что продольная корреляционная функция полей определяется крупномасштабными флуктуациями поля диэлектрической проницаемости, что описывается наличием множителя

\* Условие применимости (8) в области  $x \neq y$  очевидно будет условие  $l_0/(x-y) \ll 1$ , где  $l_0$  — характерный масштаб неоднородностей [2].

$\exp\left\{-\frac{\pi k^2}{8} A(0)(x-y)\right\}$ , связанного с затуханием среднего поля на трассе длиной  $(x-y)$ .

Это обстоятельство не справедливо, если рассматривать продольные корреляции интенсивности волны, которые будут описываться мелкомасштабными флуктуациями поля  $\epsilon$ .

В заключение отметим, что рассматриваемым методом могут быть получены уравнения для любых продольных моментов полей световой волны, решения которых будут выражаться через моменты в плоскости  $x = \text{const}$ , описываемые уравнениями, полученными в [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Татарский, ЖЭТФ, 56, 2106 (1969).
2. В. И. Кляцкин, ЖЭТФ, 57, 3 (9) (1969)

Институт физики атмосферы  
АН СССР

Поступила в редакцию  
23 июня 1969 г.

#### LONGITUDINAL CORRELATIONS OF THE FIELD OF A LIGHT WAVE PROPAGATING IN A MEDIUM WITH RANDOM INHOMOGENEITIES

*V. I. Klyatskin*

The propagation of light in a medium with random inhomogeneities is considered on the assumption of the parabolic equation and Markov's model [1]. The longitudinal moments (along  $x$ -axis) of the random field of the wave are shown to be expressed through the moments of the field of the wave in the plane  $x = \text{const}$  ( $x$ -axis is chosen in the direction of the initial propagation of the wave).

---

УДК 538.56 : 519.23

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОГЕРЕНТНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫМ МЕТОДОМ

*В. И. Вайцель, С. С. Хмелевцов*

Получена связь средней интенсивности сигнальной компоненты интерференционного приемника с характеристиками излучения, прошедшего через случайную среду. На основе этой связи развит интерференционный метод измерения пространственной и временной функций когерентности. Приведены результаты измерений когерентности излучения, распространяющегося через турбулентную атмосферу.

Распространение светового сигнала в случайной среде, практически важным примером которой является реальная атмосфера, сопровождается искажениями формы волнового фронта и перераспределением его интенсивности. Эти эффекты приводят к ухудшению пространственной и временной когерентности излучения и определяют эффективность работы когерентных оптических линий связи и приемников оптического изображения [1, 2]. С другой стороны, может быть решена обратная задача — нахождение статистических характеристик среды по измеренной когерентности излучения.

Исследование когерентности излучения основано на анализе интерференционной картины, возникающей в результате сложения опорного и сигнального полей. В схеме оптического гетеродинамирования [3] анализируется интерференционная картина в полосах бесконечной ширины, и с помощью полученного в [4] выражения по сигналу с ФЭУ вычисляется функция пространственной когерентности. В проведенных экспериментах по интерферометрии с большей базой [5-7] на фотопластинке регистрируются интерференционные полосы конечной ширины. По существу эти работы сводятся к констатации возможности наблюдения интерференционных картин со значительной видностью; количественная связь видности со статистическими характеристиками излучения в них не рассматривается. В настоящем сообщении описывается интерференционный метод и результаты прямого определения с его помощью пространственной и временной функций когерентности излучения, прошедшего через турбулентную атмосферу.

### 1. ВЛИЯНИЕ ФЛУКТУАЦИИ СВЕТОВОГО ПОЛЯ НА СИГНАЛ С ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО ПРИЕМНИКА

В качестве интерференционного приемника рассматривается ФЭУ, используемый в схеме оптического гетеродинамирования, и фотослой, на котором фиксируется интерференционная картина, создаваемая опорным и сигнальным лучом (голографическая схема).

Сигналом в первом случае будет спектральная компонента в разложении Фурье тока с ФЭУ с частотой, равной разности частот опорного и сигнального лучей. Во втором случае сигналом является спектральная компонента в пространственном разложении Фурье поля за фотопластинкой, полученной описанным выше способом, с пространственной частотой, равной разности пространственных частот опорного и сигналь-

ного лучей. Обе системы формально одинаковы и при переходе от одной из них к другой достаточно заменить пространственный аргумент на временной и наоборот. Для более полной аналогии введем постоянную времени применительно к обеим схемам. В первом случае это постоянная времени ФЭУ, т. е. величина порядка  $10^{-7} - 10^{-10}$  сек, во втором — время экспозиции  $T$ .

В дальнейшем в качестве приемника будем рассматривать фотопластинку. Нашей задачей является вычисление сигнала с приемника и выражение его через статистические параметры опорного и сигнального полей.

Поле, создаваемое опорным лучом в точке фотопластинки с координатой  $x$ , запишем в виде

$$V_0 = V \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha\right), \quad (1)$$

где  $V$  — габоровский аналитический сигнал

$$V = \int A_\nu(t) \exp(2\pi i \nu t) d\nu.$$

Здесь  $\alpha$  — угол между направлением распространения опорного луча и нормалью к фотопластинке,  $A_\nu(t)$  — амплитуда спектральной компоненты опорного сигнала с частотой  $\nu$  в момент времени  $t$ .

Поле  $V_s$ , создаваемое в этой же точке лучом, прошедшим через случайную среду, запишется следующим образом:

$$V_s = \int A'_\nu(t + \tau_0, x) \exp[2\pi i \nu(t + \tau_0) + i \varphi_\nu(t + \tau_0, x)] d\nu, \quad (2)$$

где  $\tau_0 = d/c$ ,  $d$  — оптическая разность хода между опорным и сигнальным лучом,  $A'_\nu(t + \tau_0, x)$  — амплитуда спектральной компоненты сигнального поля с частотой  $\nu$  в точке  $x$  фотопластинки в момент времени  $t$ . Полагаем также, что  $|V_s(t)| < |V_0|$  при всех  $t$ .

Если спектр используемого источника достаточно узкий (например, в случае лазера), флуктуации амплитуды  $\chi_\nu(t + \tau_0, x) = \ln[A'_\nu(t + \tau_0, x)/\bar{A}'_\nu]$  и фазы  $\varphi_\nu(t + \tau_0, x)$ , вносимые случайной средой, можно считать не зависящими от частоты излучения и (2) записать в виде

$$V_s = \exp[\chi(t + \tau_0, x) + i \varphi(t + \tau_0, x)] \int \bar{A}'_\nu \exp[2\pi i \nu(t + \tau_0)] d\nu. \quad (3)$$

Здесь  $\bar{A}'_\nu$  — среднее значение величины  $A'_\nu(t + \tau_0, x)$ , определяемое как результат усреднения по времени и координате:

$$\overline{A'_\nu(t + \tau_0, x)} = \left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A'_\nu(t + \tau_0, x) dt \right\rangle_x.$$

В предположении стационарности флуктуаций характеристик среды по времени и в пространстве двойное усреднение может быть заменено одним — по времени или по координате. В этом случае справедливы равенства

$$\overline{A'_\nu(t + \tau_0, x)} = \left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A'_\nu(t + \tau_0, x) dt \right\rangle_x = \langle A'_\nu(x) \rangle_x = \langle A'_\nu(t) \rangle_t.$$

В дальнейшем этот переход от одного усреднения к другому будет использоваться без дополнительных оговорок.

Интенсивность  $I(x, t)$ , создаваемая полями в точке  $x$  фотопластинки, равна

$$I(x, t) = (V_0 + V_s)(V_0 + V_s)^* \quad (4)$$

Пусть зависимость амплитудного пропускания фотопластинки  $n$  от экспозиции  $D$  дается функцией  $n(D)$ . Разложим эту функцию в ряд относительно  $D = 0$  и ограничимся двумя первыми членами:

$$n(D) = 1 - \beta D; \quad \beta = \left. \frac{dn}{dD} \right|_{D=0}$$

Если такую фотопластинку, экспонированную в течение времени  $T$  полем с интенсивностью  $I(x, t)$ , осветить плоской волной  $V_r = V_r \exp[i(2\pi/\lambda)x \sin \alpha]$ , то поле вблизи ее противоположной стороны будет иметь вид

$$V_r \left[ 1 - \beta \int_0^T I(t, x) dt \right] \quad (5)$$

Обозначим через  $\mathcal{E}(x)$  поле сигнальной компоненты с пространственной частотой  $(2\pi/\lambda) \sin \varphi = 0$  ( $\varphi$  — угол между нормалью к фотопластинке и направлением распространения сигнальной компоненты).

После подстановки (3) в (4) и (5) и выделения сигнальной компоненты получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) \sim \int_0^T V_s V^* dt = \int_0^T \exp[\chi(t + \tau_0) + i\varphi(t + \tau_0, x)] \left\{ \int_{\nu} \bar{A}_{\nu} \exp[-2\pi i \nu(t + \tau_0)] d\nu \times \right. \\ \left. \times \int_{\nu} A_{\nu} e^{2\pi i \nu t} d\nu \right\} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая, что периодическая функция времени, стоящая в фигурных скобках, имеет период (совпадающий по порядку с собственным временем когерентности излучения источника  $\tau$ ), много меньший характерного периода случайной функции  $\exp[\chi(t) + i\varphi(t)]$ , т. е. величины порядка  $10^{-3} - 10^{-5}$  сек, можно записать

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) \sim \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} \left\{ \int_{\nu} \bar{A}_{\nu} \exp[-2\pi i \nu(t + \tau_0)] d\nu \int_{\nu} A_{\nu} e^{2\pi i \nu t} d\nu \right\} dt \times \\ \times \int_0^T e^{i\chi + i\varphi} dt. \end{aligned}$$

Здесь  $10^{-5} \gg \Delta T \gg \tau$ , т. е.  $\Delta T$  достаточно для усреднения периодической функции в фигурных скобках. Поэтому (6) легко преобразовать к виду

$$\mathcal{E}(x) \sim \frac{\bar{A}_{\nu}}{A_{\nu}} |\Gamma(\tau_0)| \exp(2\pi i \nu \tau_0) \int_0^T e^{i(\chi + i\varphi)} dt, \quad (7)$$

где

$$|\Gamma(\tau_0)| = \int_{\nu} A_{\nu}^2 d\nu |\gamma(\tau_0)| = I_0 |\gamma(\tau_0)|$$

— временная функция когерентности источника,  $|\gamma(\tau_0)|$  — его нормированная функция когерентности,  $I_0$  — интенсивность опорного луча.

При преобразованиях предполагалось, что величина  $A_v^2(t)$ , равная интенсивности спектральной компоненты опорного сигнала с частотой  $\nu$ , не зависит от времени и равна  $A_v^2$ .

Найдем среднюю интенсивность поля сигнальной компоненты

$$I_1 \sim \overline{|\mathcal{E}(x)|^2} = \frac{\overline{A_v^2}}{A_v^2} I_0^2 |\gamma(\tau_0)|^2 \int_0^T \overline{\exp\{\chi(t) + \chi(t') + i[\varphi(t) - \varphi(t')]\}} dt dt'. \quad (8)$$

В силу стационарности случайных функций  $\chi(t)$ ,  $\varphi(t)$  величина  $\overline{\exp\{\chi(t) + \chi(t') + i[\varphi(t) - \varphi(t')]\}}$  зависит только от разности  $t - t' = \tau$ , и (8) преобразуется к виду

$$I_1 \sim I_0^2 |\gamma(\tau_0)|^2 k^2 T \int_0^T 2 \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_0(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где

$$k^2 = \overline{A_v^2}/A_v^2, \quad R_0(\tau) = \overline{\exp\{\chi(t) + \chi(t+\tau) + i[\varphi(t) - \varphi(t+\tau)]\}} \overline{A_v^2}/\overline{A_v^2}^2$$

— нормированная функция временной когерентности излучения, прошедшего сквозь случайную среду.

Если  $\chi(t)$ ,  $\varphi(t)$  являются нормальными функциями, как это обычно считается для излучения, прошедшего через турбулентную атмосферу [8], то можно получить следующее выражение  $R_0(\tau)$  через дисперсии и корреляционные функции флуктуаций фазы и логарифма амплитуды —  $\sigma_\varphi^2$ ,  $\sigma_\chi^2$ ,  $\rho_\varphi(\tau)$ ,  $\rho_\chi(\tau)$  [1, 9]:

$$R_0(\tau) = \exp\{-\sigma_\chi^2[1 - \rho_\chi(\tau)] + \sigma_\varphi^2[1 - \rho_\varphi(\tau)]\}.$$

Полагая в дальнейшем  $k^2 = \text{const}$  и  $I_0 T = \text{const}$  при всех значениях интенсивности опорного луча  $I_0$ , запишем зависимость средней интенсивности сигнала от постоянной времени приемника  $T$  и характеристики поля  $R_0(\tau)$  в виде

$$I_1 \sim \left|\gamma\left(\frac{d}{c}\right)\right|^2 \frac{1}{T} \int_0^T 2 \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_0(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Если постоянная времени приемника  $T \rightarrow 0$  (для ФЭУ, и при малом времени экспозиции фотопластинки), то

$$I_1 \sim |\gamma(d/c)|^2,$$

т. е. средняя интенсивность сигнала с приемника не зависит от флуктуаций параметров волны  $\chi(t)$ ,  $\varphi(t)$ .

Практическое использование рассмотренной выше схемы может быть ограничено малым коэффициентом временной когерентности излучения при большой оптической разности хода  $d$ . Для увеличения  $|\gamma|$  ( $|\gamma(0)| = 1$ ) нужно уравнивать оптические длины опорного и сигнального лучей. Это можно сделать, пропустив опорный луч через среду на то же расстояние, что и сигнальный. Считая флуктуации полей лучей одинаковыми и независимыми (трассы проходят друг от друга на расстоянии, много большем радиуса корреляции исследуемого излучения), можно получить рассмотренным выше способом

$$I_1 \sim \left|\gamma\left(\frac{d}{c}\right)\right|^2 \frac{1}{T} \int_0^T R_0^2(\tau) \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau. \quad (11)$$



Среднюю интенсивность сигнала с фотопластинки при малых выдержках  $T$  и среднюю мощность сигнала с ФЭУ найдем из (11) при  $T \rightarrow 0$ :  $I_1 \sim |\gamma(d/c)|^2$ , т. е. и в этом случае  $I_1$  не зависит от флуктуаций поля, вносимых случайной средой.

## 2. МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ПО СИГНАЛУ С ФОТОПЛАСТИНКИ

В общем случае, когда коэффициент корреляции флуктуаций интерферирующих полей не равен нулю, для средней интенсивности сигнала с фотопластинки можно получить следующее выражение (считая для определенности,  $\chi(t)$ ,  $\varphi(t)$  нормальными случайными функциями):

$$I_1 \sim |\gamma|^2 \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \exp \left\{ -2\sigma_\chi^2 [1 - (\rho_{1\chi}(r) + \rho_{2\chi}(\tau) + \rho_{1\chi}(r + V_{\text{эфф}}\tau))] - \right. \\ \left. - 2\sigma_\varphi^2 [1 - (\rho_{1\varphi}(r) + \rho_{2\varphi}(\tau) - \rho_{1\varphi}(r + V_{\text{эфф}}\tau))] \right\} d\tau. \quad (12)$$

Здесь использовано хорошо проверенное экспериментально соотношение  $\rho(r, \tau) = \rho(r + V_{\text{эфф}}\tau)$ , где  $\rho(r, \tau)$  — коэффициент корреляции флуктуаций в точках, разделенных расстоянием  $r$  и временем  $\tau$ ;  $V_{\text{эфф}}$  — эффективная скорость переноса неоднородностей поля;  $\rho_\chi(r)$ ,  $\rho_\varphi(r)$  — пространственные корреляционные функции флуктуаций логарифма амплитуды и фазы. Учтено также, что  $\rho_1(V_{\text{эфф}}\tau) = \rho_2(\tau)$ .

Формула (12) может быть использована при измерении статистических характеристик излучения.

### 1. При $T \rightarrow 0$

$$I_1 \sim \exp 4\sigma_\chi^2 \rho_\chi(r)$$

не зависит от фазовых флуктуаций. Это значит, что в схемах с малой постоянной времени может быть измерена только амплитудная корреляционная функция.

2. Полагая  $\rho_\varphi(r) \ll 1$ ,  $\rho_\chi(r) \ll 1$ , что выполняется при  $r \gg d_0$  (радиус корреляции излучения), и дифференцируя (12) по  $T$ , получим выражение временной функции когерентности через экспериментально измеряемую среднюю интенсивность:

$$R_0^2(T) = \alpha \left[ \frac{\partial(I_1 T)}{\partial T} + \frac{T}{2} \frac{\partial^2(I_1 T)}{\partial T^2} \right] = \left[ R^2(T) + \frac{T}{2} \frac{\partial R^2}{\partial T} \right] \alpha, \quad (13)$$

где  $\alpha$  определяется из нормировочного равенства  $R_0^2(0) = 1$ . При  $T \sim 0$

$$R_0^2 \simeq R^2(T) = \frac{\partial(I_1 T)}{\partial T}.$$

3. Функцию пространственной когерентности  $\gamma^2(r)$  получим из (12) при  $T \rightarrow \infty$ :

$$I_1 \sim \exp \{ -2\sigma_\chi^2 [1 - \rho_\chi(r)] - 2\sigma_\varphi^2 [1 - \rho_\varphi(r)] \} = \gamma^2(r). \quad (14)$$

Соотношение, подобное (14), получено в [10] при рассмотрении влияния когерентности излучения, используемого при получении голограмм, на яркость восстановленного изображения. Выражения (13) и (14) использовались при экспериментальном определении временной и пространственной функций когерентности.

### 3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ВРЕМЕННОЙ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ

Рассмотренным выше методом измерялись функции когерентности излучения, прошедшего через турбулентную атмосферу на трассах длиной 200 и 2400 м.

Схема экспериментальной установки для измерения временной функции когерентности приведена на рис. 1 а. Луч лазера, работающего в режиме осевых колебаний, расширяется и коллимируется 160 мм коллиматором  $K_1$ , проходит через атмосферу, отражается от зеркала, снова проходит атмосферу и попадает на приемный коллиматор  $K_2$ , аналогичный  $K_1$ . Диаметр пятна, формируемого коллиматором  $K_2$  на фотопластинке,  $\sim 0,6$  см.

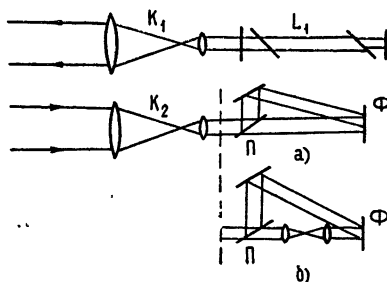


Рис. 1. Схема экспериментальной установки для определения когерентности излучения интерференционным методом.

Далее атмосферный луч при помощи делительной пластины разделяется на два. Оба луча попадают на фотопленку  $\Phi$  так, что расстояние между центром пятен  $r$  много больше волнового радиуса корреляции  $d_0$  (практически  $r = 6 d_0$ ). Интерференционная картина регистрируется на пленке с высоким разрешением—«Микрат-300» (число штрихов в интерференционной картине 200—300 штрих·мм<sup>-1</sup>) при разных выдержках  $T$ .

При всех  $T$  экспозиция  $I_0 T$  сохраняется постоянной путем введения в световой пучок нейтральных светофильтров. Проявленная фотопленка освещалась модулированным лазерным лучом, и измерялся поток света в первом дифракционном порядке. Для регистрации потока  $I_1$  использовался фотоумножитель и микровольтметр.

Для измерения пространственной функции когерентности использовалась схема рис. 1 б. Как и в предыдущем случае, атмосферный луч делится на два, затем на пути одного из них ставится переворачивающий коллиматор с увеличением, равным единице. На фотопластинке оба луча совмещаются. Время экспозиции  $T$  определяется из условия  $T \gg T_{\text{корр}}$ ;  $T_{\text{корр}}$  — время корреляции атмосферных флуктуаций (практически  $T \sim 5 \div 10$  сек). Проявленная фотопленка сканируется узким лазерным лучом (0,2—0,3 мм), и измеряется интенсивность света  $I_1$  в первом дифракционном порядке. Как показано в разд. 2 настоящей работы,  $I_1 \sim \gamma^2(r)$ , т. е. в одном кадре содержится вся информация о функции пространственной когерентности.

Сканируя в разных направлениях  $\alpha$ , можно получить  $|\gamma(r, \alpha)|$  и для анизотропной турбулентности.

На рис. 2 изображена функция  $I_1 T$  для расстояния 2,4 км. На рис. 3 —  $R^2(T)$ , т. е. дифференцированная кривая рис. 2.

Для сравнения с теорией нужно знать флуктуации направления и скорость ветра, так как в опытах ветер дул вдоль луча со скоростью (2—5) м·сек<sup>-1</sup>, и перпендикулярная компонента скорости  $V_{\perp} = 0$ . Измерение этих флуктуаций не проводилось.

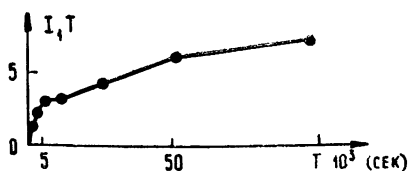
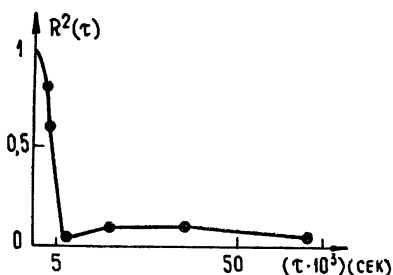


Рис. 2. Интегральная функция временной когерентности излучения для дистанции 2,4 км.

Рис. 3. Дифференцированная кривая рис. 2, совпадающая при малых  $T$  с временной функцией когерентности.



Результаты измерений пространственной функции когерентности приведены на рис. 4. На трассе 2,4 км измерения проводились при двух эффективных градиентах температур  $\Delta T$  в тех же условиях, что и  $R^2(\tau)$  рис. 2. Радиус и время корреляций определялись из условий

$$R_0^2(\tau_0) = 0,6; \quad \gamma^2(r_0) = 0,6.$$

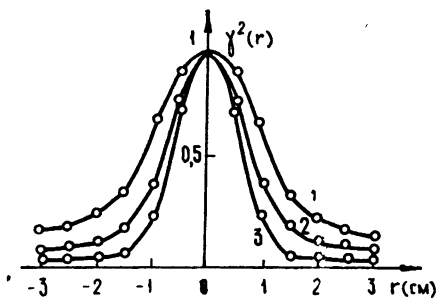


Рис. 4. Пространственная функция когерентности излучения. Кривая 1—для трассы длиной 0,2 км; кривые 2 и 3—для трассы длиной 2,4 км.

Из рис. 3 и 4 найдем:  $\tau_0 \sim 5 \cdot 10^{-3}$  сек,  $r_0 \sim 0,6$  см. Отсюда получаем эффективную скорость переноса неоднородностей:

$$V_{\text{эфф}} = \frac{r_0}{\tau_0} \sim 1 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Функция пространственной когерентности (кривая 1) получена при градиенте температур  $\Delta T = 1,2-1,4^\circ\text{C м}^{-1}$  на 200 м трассе; кривые 2, 3 получены на трассе длиной 2,4 км при градиентах температур соответственно  $0,6^\circ\text{C м}^{-1}$  и  $0,8^\circ\text{C м}^{-1}$ .

Приведем значения структурных постоянных  $C_n^2$ , вычисленные по результатам измерений пространственной волновой функции когерентности на дистанции 2,4 км:  $C_n^2 = 2,1 \cdot 10^{-16} \text{ см}^{-2/3}$  при  $\Delta T = 0,8^\circ\text{C м}^{-1}$ ;  $C_n^2 = 1,6 \cdot 10^{-16} \text{ см}^{-2/3}$  при  $\Delta T = 0,6^\circ\text{C м}^{-1}$ . Отсюда их отношение  $\alpha_1 \approx 1,6$ . Сравним это отношение с теоретическим— $\beta_1$ , равным [8]

$$\frac{C_{n_3}^2}{C_{n_2}^2} = \left( \frac{\text{grad } T_3}{\text{grad } T_2} \right)^2 = 1,7.$$

Сравнение  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  показывает их совпадение с хорошей точностью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. D. Fried, J. Opt. Soc. Am., **56**, № 10, 1372 (1966).
2. R. E. Hufnagel, N. R. Stanley, J. Opt. Soc. Am., **54**, № 1, 52 (1964).
3. Гольдстейн, Майлс, Шабо, ТИИЭР, **53**, № 9, 1333 (1965)
4. S. Gardner, IEEE Intern. Conv. Rec., **12**, № 6, 337 (1964).
5. R. B. Herrick, J. B. Meyer-Arendt, Appl. Opt., **5**, № 6, 981 (1966).
6. T. Morocuma, K. F. Nefflen, T. R. Lawrence, T. M. Klucier, J. Opt. Soc. Am., **53**, № 3, 394 (1963).
7. A. G. McNish, Science, **146**, № 3641, 177 (1964).
8. В. И. Татарский, Распространение волн в турбулентной атмосфере, изд. Наука, М., 1967.
9. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, изд. АН СССР, М., 1958
10. M. Lurie, J. Opt. Soc. Am., **56**, № 10, 1369 (1966).

Сибирский научно-исследовательский  
физико-технический институт  
при Томском университете

Поступила в редакцию  
21 октября 1968 г.

## INVESTIGATION COHERENCE OF RADIATION BY INTERFERENCE METHOD

*V. I. Vaitzel', S. S. Khmelevtsov*

The relation between the average intensity of the signal component of the interference receiver and the characteristics of radiation passed through a random medium is obtained. An interference method for measuring the spatial and time function of coherence is developed on the basis of this relation. The results are given of measuring the coherence of radiation propagating through the turbulent atmosphere.

---

УДК 551.510.535

## ПРОДОЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В КОЛЬЦЕВЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ПУЧКАХ

### 1. ЭФФЕКТ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАССЫ

*А. Г. Бонч-Осмоловский, Э. А. Перельштейн*

Анализируется продольная неустойчивость тонкого кольца электронов, вращающихся в магнитном поле внутри металлической идеально проводящей трубы. В рамках самосогласованной задачи получено общее дисперсионное уравнение для колебаний плотности пучка, которое анализируется для случая, когда условия излучения поперечных волн не выполняются. Вблизи стенки для тонкого кольца моноэнергетических электронов возникает неустойчивость отрицательной массы как в нерелятивистском, так и в релятивистском случаях. Для  $E$ -слоя в ультрарелятивистском случае происходит срыв неустойчивости. Однако инкременты неустойчивости для кольца значительно меньше по величине. Вдали от стенки имеет место чередование полос неустойчивости отрицательной массы в окрестностях линий резонансных частот камеры.

Продольные (азимутальные) неустойчивости кольцевых заряженных пучков с большим числом частиц изучались в работах [1-8]. Эти неустойчивости можно разделить на три основных типа: неустойчивость, связанная с эффектом отрицательной массы (НОМ), резистивная неустойчивость и неустойчивость на собственных модах камеры, в которую помещен сгусток. Поскольку последняя неустойчивость связана с излучением электромагнитных волн, будем называть ее радиационной (РН).

В настоящей работе рассматриваются только неустойчивости типа НОМ и РН; заметим, что в отдельных случаях разделение этих двух типов неустойчивостей оказывается несколько условным.

В цитированных работах [2-5] указанные типы неустойчивостей исследовались раздельно. Использование в данной работе кинетического подхода и аппарата разложения полей возмущения по собственным модам колебаний камеры [1, 6] позволяет рассмотреть в общем виде продольные неустойчивости заряженного кольца.

Мы будем анализировать устойчивость кольца электронов, помещенного внутрь бесконечно длинной идеально проводящей круглой трубы (учет конечной проводимости и связанных с этим резистивных неустойчивостей также возможен в данном методе).

### 1. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Интересуясь только азимутальным движением частиц, удобно применить метод, развитый в работах [1, 2]; при этом продольное движение частиц описывается функцией распределения в пространстве канонических переменных  $\vartheta$  и  $\omega$ , где  $\vartheta$  — азимутальная координата и  $\omega$  — обобщенный канонический импульс. Невозмущенное состояние пучка считается азимутально однородным и не зависящим от времени. В соответствии с этим представим функцию распределения в виде

$$f(\omega, \vartheta, t) = \psi_0(\omega) + \psi(\omega, \vartheta, t).$$

Предполагая малость возмущения, для добавки к начальной функции распределения получаем линеаризованное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + 2\pi eR \frac{\partial \psi_0}{\partial \omega} \bar{\mathcal{E}} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\omega$  — частота обращения частиц;  $R$  — средний радиус кольца;  $\bar{\mathcal{E}}$  — азимутальное электрическое поле, усредненное по сечению пучка.

Усреднение проводится с помощью функции  $Q(r, z)$  (которая дает распределение частиц в поперечном сечении кольца) следующим образом:

$$\bar{\mathcal{E}} = \int_s Q(r, z) \mathcal{E}_\vartheta r dr dz, \quad (1.2)$$

где  $s$  — сечение камеры в плоскости  $r, z$ . Полная функция распределения частиц записывается как

$$F = \frac{N}{2\pi} Q(r, z) f(\vartheta, \omega, t), \quad (1.3)$$

где  $N$  — полное число частиц в кольце, а функции  $Q$  и  $\psi_0$  удовлетворяют условиям нормировки

$$\int_s Q(r, z) r dr dz = 1, \quad (1.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(\omega) d\omega = 1.$$

Выражения для возмущений плотности заряда и азимутального тока имеют вид

$$\rho = \frac{eN}{2\pi} Q(r, z) \int \psi d\omega; \quad (1.5)$$

$$j = \frac{eN}{2\pi} r Q(r, z) \int \omega(\omega) \psi d\omega. \quad (1.6)$$

Представляя возмущения плотности заряда и тока в виде разложений Фурье по гармоникам  $\exp[i(\Omega t - n\vartheta)]$ , из формул (1.1), (1.5) и (1.6) получим

$$\rho_{\Omega, n} = ie^2 RN \bar{\mathcal{E}}_{\Omega, n} Q(r, z) \int \frac{\partial \psi_0}{\partial \omega} d\omega; \quad (1.7)$$

$$j_{\Omega, n} = r \frac{\Omega}{n} \rho_{\Omega, n} \simeq R \frac{\Omega}{n} \rho_{\Omega, n}. \quad (1.8)$$

Для нахождения полей возмущения используем разложения по собственным модам колебаний, которые делятся на  $E$ - и  $H$ -типы волн и продольные волны [6]. Система собственных функций выбирается ортонормированной, согласно условию

$$\int_V E_s(r) E_{s'}^*(r) dV = \delta_{s, s'}, \quad (1.9)$$

где  $V$  — объем камеры. В случае непрерывного спектра символ  $\delta_{s, s'}$  понимается в смысле  $\delta$ -функции. Ортонормированные поперечные собственные функции имеют следующий вид:

$E$ -волны —

$$\begin{aligned} E_s^r &= \frac{\sqrt{2} i c k_z}{2\pi b \omega_s J_{n+1}(\lambda_{np})} J_n'(k, r) \exp(-ik_z z - in\vartheta), \\ E_s^\vartheta &= \frac{\sqrt{2} c n k_z}{2\pi b \omega_s r k_r J_{n+1}(\lambda_{np})} J_n(k, r) \exp(-ik_z z - in\vartheta), \\ E_s^z &= \frac{\sqrt{2} c k_r}{2\pi b \omega_s J_{n+1}(\lambda_{np})} J_n(k, r) \exp(-ik_z z - in\vartheta), \\ k_r &= \frac{\lambda_{np}}{b}; \end{aligned} \quad (1.10)$$

$H$ -волны —

$$\begin{aligned} E_s^r &= - \frac{\sqrt{2} n}{2\pi r k_r' J_n(\lambda_{np}') \sqrt{1 - n^2/\lambda_{np}'^2}} J_n'(k_r', r) \exp(-ik_z z - in\vartheta), \\ E_s^\vartheta &= \frac{\sqrt{2} i}{2\pi b J_n(\lambda_{np}') \sqrt{1 - n^2/\lambda_{np}'^2}} J_n'(k_r', r) \exp(-ik_z z - in\vartheta), \\ E_s^z &= 0, \\ k_r' &= \frac{\lambda_{np}'}{b}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь  $\omega_s^2 = c^2(k_r^2 + k_z^2)$ ;  $\lambda_{np}$  и  $\lambda_{np}'$  — корни функций Бесселя  $J_n$  и  $J_n'$  соответственно;  $b$  — радиус трубы.

Продольные собственные поля находятся из соотношения

$$E_s^z = -\nabla \Phi_s, \quad (1.12)$$

и  $\Phi_s$  находится как решение уравнения

$$\Delta \Phi_s = \lambda_s \Phi_s \quad (1.13)$$

с граничным условием  $\Phi_s|_{r=b} = 0$ . Ортонормированные функции  $\Phi_s$  есть

$$\Phi_s = \frac{1}{\sqrt{2} \pi b J_{n+1}(\lambda_{np})} J_n(k, r) \exp(-ik_z z - in\vartheta). \quad (1.14)$$

Собственные значения  $\lambda_s$  равны  $\lambda_s = -k_r^2 - k_z^2$ , причем  $k_r = \lambda_{np}/b$ .

Разложим поля возмущения, заряды и токи по ортонормированным собственным функциям и решим уравнения Максвелла, пренебрегая при этом поперечными составляющими тока по сравнению с продольной. В результате находим линейную связь между азимутальным электрическим полем и усредненным полем  $\bar{\mathcal{E}}$  возмущения. После выполнения усреднения в полученном соотношении получаем дисперсионное уравнение в форме, предложенной Лебедевым [6]:

$$1 = \frac{ie^2 \Omega N}{2\pi n} Z(\Omega, n) \int \frac{\partial \psi_0}{\partial \omega} \frac{d\omega}{\Omega - n\omega}, \quad (1.15)$$

где функция  $Z(\Omega, n)$ , так называемый импеданс камеры с пучком, имеет вид

$$Z(\Omega, n) = 16\pi^3 R^2 i \sum_p \int dk_z \left[ \frac{\Omega |\bar{E}_{\theta, s}^{tr}|^2}{\Omega^2 - c^2(k_r^2 + k_z^2)} + \frac{n^2 |\bar{\Phi}_s|^2}{\Omega R^2 (k_r^2 + k_z^2)} \right]. \quad (1.16)$$

Здесь черта означает усреднение соответствующих величин в смысле (1.2), а значок «tr» — сумму вкладов электрического и магнитного типов.

Предположим, что функция  $Q(r, z)$  имеет вид

$$Q(r, z) = Q(r)Q(z). \quad (1.17)$$

Далее для простоты положим, что распределение частиц по оси  $z$  можно аппроксимировать ступенькой

$$Q(z) = \frac{1}{2a_z} \sigma(z)\sigma(2a_z - z), \quad (1.18)$$

где

$$\sigma(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases},$$

$2a_z$  — размер кольца в направлении оси  $z$ .

В результате получим

$$|\bar{E}_s^{tr}|^2 = \frac{1 - \cos(2k_z a_z)}{4\pi^2 b^2 a_z^2} \left\{ \frac{n^2 I_\Phi^2(k_r)}{k_r^2 (k_r^2 + k_z^2) J_{n+1}^2(\lambda_{np})} + \frac{R^2 I_M^2(k'_r)}{k_z^2 J_n^2(\lambda'_{np}) (1 - n^2/\lambda'^2_{np})} \right\}, \quad (1.19)$$

$$|\bar{\Phi}_s|^2 = \frac{R^2 I_\Phi^2}{4\pi^2 a_z^2 k_z^2 b^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np})} [1 - \cos(2k_z a_z)].$$

Здесь

$$I_\Phi = \frac{1}{R} \int_0^b Q(r) J_n(k_r r) r dr,$$

$$I_M = \frac{1}{R} \int_0^b Q(r) J'_n(k'_r r) r dr.$$

Будем считать, что в формуле (1.16) частота  $\Omega$  имеет отрицательную мнимую часть, что соответствует неустойчивости. Выполнив интегрирование по  $k_z$  в (1.16), получим следующий результат:

$$Z(\Omega, n) = \frac{8\pi^2 R^2 i}{a_z \Omega} n^2 \sum_p \frac{I_\Phi^2}{\lambda_{np}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np})} - \frac{4\pi^2 R^2 i b}{a_z^2 \Omega} \sum_p \left\{ \frac{n^2 I_\Phi^2 \left( \sin \frac{\varphi(\lambda_{np})}{2} + i \cos \frac{\varphi(\lambda_{np})}{2} \right)}{\lambda_{np}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np}) \left| \sqrt{(\Omega^2 b^2 / c^2) - \lambda_{np}^2} \right|} \left[ 1 - \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
 & - \exp\left(2i \frac{a_z}{b} \sqrt{(\Omega^2 b^2/c^2) - \lambda_{np}^2}\right) \Big] + \frac{R^2 I_m^2 \Omega^2}{c^2 J_n^2(\lambda'_{np}) [1 - (n^2/\lambda_{np}'^2)]} \times \\
 & \times \left[ \sin[\varphi(\lambda'_{np})/2] + i \cos[\varphi(\lambda'_{np})/2] \left[ 1 + 2i \frac{a_z}{b} \sqrt{\frac{\Omega^2 b^2}{c^2} - \lambda_{np}'^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \exp\left(2i \frac{a_z}{b} \sqrt{\frac{\Omega^2 b^2}{c^2} - \lambda_{np}'^2}\right) \right] \right] \Big/ \left[ \left| \sqrt{(\Omega^2 b^2/c^2) - \lambda_{np}'^2} \right| [(\Omega^2 b^2/c^2) - \lambda_{np}'^2] \right].
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

В формуле (1.20)  $\varphi(\lambda_{np})$  определяется условием

$$\operatorname{tg} \varphi(\lambda_{np}) = \frac{2 \operatorname{Re} \Omega \operatorname{Im} \Omega b^2}{c^2 [(\operatorname{Re} \Omega)^2 b^2/c^2 - (\operatorname{Im} \Omega)^2 b^2/c^2 - \lambda_{np}^2]} \tag{1.21}$$

и аналогично  $\varphi(\lambda'_{np})$ . При этом значение  $\varphi$  заключено в интервале  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Формула (1.20) дает импеданс бесконечной круглой трубы с кольцом конечного размера по направлению  $z$ . Нам еще понадобится выражение для импеданса бесконечно длинного цилиндрического заряженного слоя ( $E$ -слой). В этом случае из формулы (1.20) предельным переходом  $a_z \rightarrow \infty$ , сохраняя линейную плотность  $\sigma = N/2a_z = \text{const}$ , получаем

$$\begin{aligned}
 NZ(\Omega, n) &= \frac{i 16\pi^2 R^2 n^2 \sigma}{\Omega} \times \\
 & \times \left[ \sum_p \frac{I_\Phi^2(\lambda_{np})}{\lambda_{np}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np})} + \sum_p \frac{\Omega^2 R^2 I_m^2(\lambda'_{np})}{n^2 c^2 J_n^2(\lambda'_{np}) (1 - n^2/\lambda_{np}'^2) [(\Omega^2 b^2/c^2) - \lambda_{np}'^2]} \right].
 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Из этой формулы видно, что для  $E$ -слоя вклад в импеданс дают только продольная часть поля и магнитные волны, что вполне естественно в отсутствие винтовых возмущений.

Следует иметь в виду, что применяемый нами метод усреднения азимутального электрического поля по сечению пучка предполагает по крайней мере монотонность изменения поля по сечению, что эквивалентно требованиям

$$\frac{\lambda'_{np} a_r}{b} \ll 1, \quad k_z a_z \ll 1, \tag{1.23}$$

где  $a_r$  и  $a_z$  — малые размеры пучка. Первое условие ограничивает сумму по  $p$  и номера гармоник  $n$ , которые можно рассматривать. Второе условие ограничивает длину волны возмущения в  $z$ -направлении, и его следовало бы учитывать при интегрировании по  $k_z$  в (1.16). Однако вклад больших значений  $k_z$  в интегралы мал, поэтому интегрирование велось в бесконечных пределах.

Таким образом, мы рассматриваем лишь такие возмущения, длина волны которых много больше радиального размера пучка. Поэтому в дальнейшем можно считать пучок бесконечно тонким. На языке кинетики это означает, что разброс частиц по энергиям должен быть достаточно мал.

2. ЭФФЕКТ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАССЫ (НОМ)

Исследование продольных неустойчивостей в кольце начнем со случая, когда условие излучения поперечных волн не выполняется. Это означает, что мы рассматриваем некоторую выбранную гармонику средней частоты обращения, которая примерно совпадает с частотой волны возмущения и достаточно сильно отличается от собственных частот камеры, соответствующую этой гармонике.

В частности, это условие выполняется, когда кольцо (*E*-слой) находится вблизи стенки трубы. Математически сильное различие частот возмущения и собственных частот камеры записывается в соответствии с резонансным знаменателем в формуле (1.20):

$$\left| \lambda'_{np} - n^2 \beta^2 \frac{b^2}{R^2} \right| \gg 2n^2 \beta^2 \frac{b^2}{R^2} \frac{|\text{Im } \Omega|}{n \omega_0}. \quad (2.1)$$

Здесь  $\omega_0$  — средняя частота обращения частиц в пучке. При малости инкремента по сравнению с частотой  $\omega_0$ , условие (2.1) выполняется вблизи стенки на расстояниях, удовлетворяющих требованию

$$\frac{b - R}{R} \ll \frac{1}{n\beta^2} + \frac{1}{2\beta^2 \gamma^2}. \quad (2.2)$$

Предполагая выполненным условие (2.2), импеданс для *E*-слоя можно представить в виде

$$NZ(\Omega, n) = \frac{i 16\pi^2 R^2 n^2 \sigma}{\Omega} \times \sum_p \left[ \frac{I_\phi^2(\lambda_{np})}{\lambda_{np}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np})} - \beta^2 \frac{I_m^2(\lambda'_{np})}{J_n^2(\lambda'_{np}) [1 - (n^2/\lambda'^2_{np})] [\lambda'^2_{np} - (n^2 \beta^2 b^2/R^2)]} \right]. \quad (2.3)$$

В соответствии с формулами (1.23) выберем  $Q(r) = \delta(r - |R|)/r$ . Тогда выражение для импеданса приобретает вид

$$NZ(\Omega, n) = \frac{i 16\pi^2 n^2 \sigma}{\Omega} \times \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \frac{J_n^2(\lambda_{np} R/b)}{J_{n+1}^2(\lambda_{np}) \lambda_{np}^2} - \beta^2 \frac{J_n'^2(\lambda'_{np} R/b)}{J_n^2(\lambda'_{np}) [1 - (n^2/\lambda'^2_{np})] [\lambda'^2_{np} - (n^2 \beta^2 b^2/R^2)]} \right]. \quad (2.4)$$

Рассмотрим случай не очень больших  $n$ , таких, что

$$\frac{b - R}{b} \lambda_{np_{\max}} \ll \frac{\lambda_{np_{\max}} - \lambda_{np_{\max}-1}}{2} \simeq \pi/2, \quad (2.5)$$

где  $\lambda_{np_{\max}}$  может быть большим числом ( $p_{\max} \sim b/(b - |R|)$ ). Тогда сумму в (2.4) можно разбить на две: сумму по  $p$  от единицы до  $p_{\max}$  и сумму от  $p_{\max}$  до бесконечности.

В первой сумме проведем разложение функций Бесселя следующим образом:

$$J_n^2(\lambda_{np} R/b) \simeq \left( \frac{b - R}{b} \right)^2 \lambda_{np}^2 J_{n+1}^2(\lambda_{np}). \quad (2.6)$$

Соответственно проведем разложение для  $J_n'^2(\lambda_{np} R/b)$ . Во второй сумме

воспользуемся асимптотикой функций Бесселя, полагая  $\lambda_{np}$  и  $\lambda'_{np}$  значительно большими  $n$ . В результате после суммирования будем иметь:

а) для нерелятивистского случая

$$NZ(\Omega, n) \simeq \frac{16\pi^2 in^2 \sigma}{\Omega} \frac{b-R}{b} \alpha_1, \quad (2.7)$$

где  $\alpha_1$  — коэффициент, меньший единицы;

б) в релятивистском случае, когда  $|(1/\gamma^2) - [(b^2 - R^2)/b^2]| \ll 1$ ,

$$NZ(\Omega, n) \simeq \frac{16\pi^2 in^2 \sigma}{\Omega} \frac{b-R}{b} \left[ \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_2 \frac{b-R}{b} \right], \quad (2.8)$$

где коэффициент  $\alpha_2$  несколько больше единицы.

Таким образом, в соответствии с результатами работы [7], для нерелятивистского пучка импеданс имеет емкостной характер ( $Z = iA$ ,  $A > 0$ ) и может возникнуть неустойчивость типа НОМ на любых малых расстояниях от стенки. В релятивистском случае, как видно из формулы (2.8), импеданс может быть как емкостным, так и индуктивным ( $Z = -iA$ ,  $A > 0$ ); в последнем случае неустойчивость не возникает.

Как видно из выражений (2.8), импеданс для малых  $n$  пропорционален  $n^2$ . Если  $n$  велико, но еще удовлетворяет условию  $n < b/(b-R)$  (пучок находится вблизи стенки:  $b/(b-R) \gg 1$ ), то в формуле (2.4) можно воспользоваться асимптотическим представлением бесселевых функций, когда индекс и аргумент велики и сравнимы по величине [9]. В результате оказывается, что для достаточно больших  $n$  импеданс убывает с ростом номера гармоники. Подстановка полученных выражений для импеданса (2.7) и (2.8) в дисперсионное уравнение (1.15) дает для моноэнергетических пучков инкременты, совпадающие с полученными в работах [3, 7]. Для пучков с энергетическим разбросом инкремент НОМ уменьшается и существует порог неустойчивости (аналогично результатам [1, 2].) Даже для максимальных инкрементов, получающихся в случае моноэнергетических пучков, условие (2.1) может выполняться как для малых, так и для больших  $n$ .

Таким образом, вблизи стенки неустойчивость типа НОМ может существовать в чистом виде вплоть до очень больших номеров гармоник.

Займемся теперь исследованием НОМ для кольца. Предположим опять, что условие (2.2) выполняется. Тогда из общего выражения для импеданса (1.20), считая малый размер кольца много меньшим расстояния до стенки,

$$\frac{2\alpha_z}{b-R} \ll 1, \quad (2.9)$$

и проделывая те же операции, что и в случае  $E$ -слоя, получим

$$Z \simeq \frac{8\pi^2 in^2}{b\Omega} \left[ \frac{\alpha}{\gamma^2} + \beta^2 \frac{b-R}{2b} + O\left(\frac{\alpha_z}{b}\right) \right], \quad (2.10)$$

где  $\alpha$  — коэффициент порядка единицы. В ультрарелятивистском случае при  $\gamma^2 \gg b/(b-R)$  имеем

$$Z(\Omega, n) \simeq \frac{4\pi^2 in^2}{b\Omega} \frac{b-R}{b}. \quad (2.11)$$

Для малых  $\gamma$ , когда  $\gamma^2 \ll b/(b-R)$ , импеданс равен

$$Z(\Omega, n) \simeq \frac{4\pi^3 in^2 \alpha}{b\Omega\gamma^2}. \quad (2.12)$$

В отличие от  $E$ -слоя, для очень тонкого кольца без учета энергетического разброса срыв неустойчивости в релятивистском случае не имеет места, но инкремент уменьшается пропорционально величине  $(b - R)/b$ . Однако с увеличением размера  $a_z$  возможен срыв неустойчивости, т. е. при  $a_z/(b - R) \gtrsim 1$  кольцо ведет себя так же, как и  $E$ -слой. Для сравнения инкрементов НОМ в кольце и  $E$ -слое введем для кольца линейную плотность  $\sigma = N/2a_z$ . Тогда из формул для импедансов (2.12) и (2.7) или соответствующей формулы (2.8) следует уменьшение инкремента для кольца в  $\sqrt{a_z/(b - R)}$  раз при равных линейных плотностях  $\sigma$ .

До сих пор мы занимались эффектом отрицательной массы для пучка вблизи стенки, когда выполняется условие (2.2). Теперь перейдем к большим расстояниям от стенки, но по-прежнему будем считать, что условие (2.1) выполняется. Оказывается, что оно может удовлетворяться в полосах между резонансами, когда ширина полосы достаточно велика. Поскольку аналитическое рассмотрение НОМ в этом случае провести нелегко, мы сделаем некоторые качественные выводы, основываясь на численном расчете импеданса для  $E$ -слоя вдали от стенки и ограничиваясь лишь первыми гармониками. Как видно из рис. 1 ( $R_1/b = n\beta/\lambda'_{n,1}$ ;  $R_2/b = n\beta/\lambda'_{n,2}$ ), можно выделить различные области по радиусу, в которых импеданс имеет существенно различный характер. В заштрихованной области импеданс имеет чисто емкостной характер, в незаштрихованной — индуктивный, в дважды заштрихованной области импеданс имеет большую активную часть. Поэтому последняя область соответствует радиационной неустойчивости, которая будет рассмотрена далее. Как уже говорилось раньше, области с емкостным импедансом соответствует неустойчивость НОМ для моноэнергетического пучка. Характерно, что чередование полос с различными свойствами импеданса повторяется в каждой полосе между резонансами (на рисунке для наглядности изображены лишь первые две полосы).

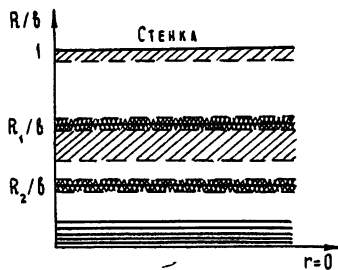


Рис. 1.

Областям, соответствующим радиационной неустойчивости, будет посвящена следующая работа.

Авторы глубоко признательны Я. Б. Файнбергу, А. Н. Лебедеву, В. И. Курилко, И. Н. Иванову и товарищам по работе за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, Атомная энергия, 7, 549 (1959).
2. С. Е. Nielsen, A. Sessler, K. Symon, CERN Symposium, 1959, p 115 (русс. перев., Накопление релятивистских частиц, Госатомиздат, 1963).
3. И. Н. Иванов, Препринт ОИЯИ Р9-3476-2, Дубна (1967).
4. R. Briggs, Symposium ERA, Berkelay, 1968, p. 434.
5. А. В. Гапонов, В. К. Юлпатов, Радиотехника и электроника, 7, № 4, 631 (1962).
6. А. Н. Лебедев, Диссертация, ФИАН, 1968.
7. R. Briggs, V. Neil, Plasma Physics, 9, 2 (1967).
8. А. Н. Диденко, Ю. А. Саливон, ЖТФ, 34, 1979 (1964).
9. Г. Бейтман, А. Эрдейн, Высшие трансцендентные функции, изд. Наука, 2, М., 1966.

## LONGITUDINAL INSTABILITIES IN RING CHARGED BEAMS. I. THE NEGATIVE MASS EFFECT

*A. G. Bonch-Osmolovskii, E. A. Perel'shtein*

A longitudinal instability of a thin ring of electrons rotating in the magnetic field inside a metal perfectly conducting tube is analyzed. In the frames of self-consistent problem a general dispersion equation is derived for oscillations of the beam density, which is analysed for the case when the conditions of radiation of transverse wave are not satisfied. The instability of the negative mass occurs near the wall for a thin ring of monoenergetic electrons both in nonrelativistic and relativistic cases. In the ultra-relativistic case, the instability stopping in the  $E$ -region. However, the instability increments for the ring are considerably less. Far from the wall there takes place the sequence of bands of the negative mass instability in the vicinity of the camera resonance lines.

---

УДК 551.510 535

## ПРОДОЛЬНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В КОЛЬЦЕВЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ПУЧКАХ.

### II. РАДИАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

*А. Г. Бонч-Осмоловский, Э. А. Перельштейн*

Для пучка релятивистских частиц, вращающихся в магнитном поле внутри металлической трубы, изучается азимутальная неустойчивость, связанная с когерентным синхротронным излучением. Получены выражения для инкрементов при различных функциях распределения пучка по энергии на разных расстояниях от стенки камеры. Показано, что тепловой разброс в пучке уменьшает инкременты неустойчивости и вдали от стенки камеры (переход к свободному пространству) приводит к срыву неустойчивости, обусловленному затуханием Ландау.

Данная работа является продолжением предыдущей работы [1], и в дальнейшем ссылки на формулы из этой работы будут обозначаться просто как (1). Все обозначения ниже совпадают с принятыми ранее.

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИМПЕДАНСОВ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

В [1] мы выделили продольную неустойчивость отрицательной массы как эффект, имеющий место при достаточно большом разделении гармоник частоты обращения частиц (и частот полей возмущения) и собственных мод колебаний камеры.

Теперь мы рассмотрим противоположный предельный случай близости к резонансу, так что выполняется условие, обратное (1.2.1) :

$$2n^2\beta^2 \frac{b^2}{R^2} \frac{|\operatorname{Im} \Omega|}{n\omega_0} \gg \left| \lambda_{np_0}'^2 - n^2\beta^2 \frac{b^2}{R^2} \right|. \quad (3.1)$$

Рассмотрим два крайних случая:  $p_0 \ll n$  и  $p_0 \gg n$ . Как видно из формулы (3.1), первому случаю соответствует близость пучка к стенке и относительно большое разделение резонансных линий. Второй случай может встретиться, если пучок находится далеко от стенки камеры. При этом резонансы весьма близки друг к другу. Смысл такого разделения состоит в том, что в первом случае время развития неустойчивости много больше времени прохождения сигнала от пучка до стенки, во втором случае имеет место обратное условие.

*Пучок вблизи стенки.* В этом случае в формулах (1.1.20) и (1.1.22) для импедансов  $E$ -слоя и кольца можно оставить по одному резонансному члену. Тогда, учитывая, что  $\operatorname{Im} \Omega \ll \operatorname{Re} \Omega$ ,  $\operatorname{Re} \Omega \simeq nc\beta/R$  и  $\varphi(\lambda_{np_0}') \simeq \pi/2$ , будем иметь:

$E$ -слой —

$$NZ(\Omega, n) \simeq \frac{8\pi^2\sigma}{\Omega \operatorname{Im} \Omega} \frac{c\beta R}{b^2} f(n), \quad (3.2)$$

кольцо —

$$Z(\Omega, n) = -\frac{4\pi^2(1+i)R}{\Omega b^2} \beta \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} \Omega / \operatorname{Re} \Omega|}} f(n). \quad (3.3)$$

Здесь в соответствии с условиями (1.1.23) вместо  $Q(r)$  выбрана функция  $\delta(r - R)/r$ . Функция  $f(n)$  определяется следующим образом:

$$f(n) = \frac{n J_n'^2(\lambda'_{np_0} R/b)}{J_n^2(\lambda'_{np_0}) [1 - (n^2/\lambda_{np_0}'^2)]}. \quad (3.4)$$

Вблизи стенки, как уже упоминалось,  $n$  достаточно велики и можно пользоваться асимптотическими представлениями функций Бесселя, аргумент и индекс которых велики и близки друг к другу [2]. Для релятивистских пучков  $\beta \simeq 1$  и в силу условия резонанса (3.1) аргумент функции Бесселя  $\lambda'_{np_0} R/b \simeq n\beta$ . Функция (3.4) тогда ведет себя следующим образом:

$$f(n) \sim n^{4/3} \quad (1 \ll n \ll \gamma^3); \quad (3.5)$$

$$f(n) \sim n^{11/3} \exp(-2n/\gamma^3) \quad (n \gg \gamma^3). \quad (3.6)$$

*Пучок далеко от стенки.* При больших  $p$ , когда электроны вращаются далеко от стенки,  $b/R$  велико, резонансные линии близки друг к другу и вклад в импеданс будут давать многие соседние резонансы. В пределе  $(b/R) \rightarrow \infty$  пучок ведет себя как в свободном пространстве. Рассмотрим этот предельный переход для наиболее интересного случая тонкого электронного кольца. Анализ будем проводить, исходя из общего выражения (1.1.20). Нетрудно убедиться, что при  $(b/R) \rightarrow \infty$  основной вклад в сумму (1.1.20) дают большие значения корней функции Бесселя, т. е. большие значения  $p$ . Тогда в (1.1.20) можно перейти от суммирования к интегрированию, положив  $\lambda_{np} \simeq \lambda'_{np} \simeq \pi p$ . Раскладывая при этом экспоненты в (1.1.20) до второго порядка по  $a_z$ , получим импеданс

$$Z(\Omega, n) = \frac{4\pi^2}{b\Omega} \int_0^{\operatorname{Re} \Omega b/\pi c} \left[ \frac{n^2 J_n^2(\pi p R/b) \sqrt{(\Omega b/c)^2 - \pi^2 p^2}}{p} + \frac{R^2 \Omega^2}{c^2} \frac{J_n'^2(\pi p R/b) \pi^2 p}{\sqrt{(\Omega b/c)^2 - \pi^2 p^2}} \right] dp. \quad (3.7)$$

Можно показать, что мнимая часть этого выражения пренебрежимо мала, если выполняется условие  $\sqrt{|\operatorname{Im} \Omega / \operatorname{Re} \Omega|} \ll 1$ , а вещественная часть импеданса с помощью замены переменной интегрирования  $\pi p R/b = n\beta \sin \theta$  представляется в виде

$$\operatorname{Re} Z(\Omega, n) = -\frac{2\pi^2 n^2}{c} \int_0^\pi [J_n^2(n\beta \sin \theta) \operatorname{ctg}^2 \theta + \beta^2 J_n'^2 \times (n\beta \sin \theta)] \sin \theta d\theta. \quad (3.8)$$

Заметим здесь, что вещественная часть импеданса характеризует работу поля над пучком, а именно, мощность потерь пучка на излучение  $n$ -й гармоники дается произведением импеданса на квадрат фурье-компоненты тока. Использование формулы (3.8) для определения мощности излучения приводит к известной формуле Шотта [3] (см. также работу [4], где вычисляется излучение кольца в приближении заданного тока). Формулу (3.8) можно также представить в виде

$$\operatorname{Re} Z(\Omega, n) = -\frac{4\pi^2}{R\omega_0} \left[ n\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - \frac{n^2}{\gamma^2} \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi) d\xi \right] \quad (3.9)$$

и дальше пользоваться асимптотическими выражениями из [2].

#### 4. РАДИАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Как видно из выражений для импеданса, полученных в предыдущем разделе, вблизи резонансов с собственными частотами камеры импеданс содержит вещественную часть, связанную с потерями энергии на излучение. Поэтому неустойчивость пучка, появляющаяся в этом случае, можно назвать радиационной. Эта неустойчивость была исследована в работах [5, 6] и называется также индуцированным циклотронным излучением (см. также [9]).

Для получения инкрементов этой неустойчивости будем подставлять полученные формулы для импедансов в дисперсионное уравнение (1.1.15). Исследование уравнения (1.1.15) для произвольной функции распределения сложно, поэтому зададимся некоторыми частными видами функций распределения.

а) Выберем сначала наиболее простую для анализа функцию распределения — ступеньку:

$$\psi_0(W) = \frac{1}{W_2 - W_1} \sigma(W - W_1) \sigma(W_2 - W); \quad (4.1)$$

здесь  $W_2 > W_1$ . Тогда дисперсионное уравнение можно привести к виду

$$1 = -\frac{e^2 N \Omega i}{(2\pi)^2 M R^2} Z(\Omega, n) \frac{1}{(\Omega - n\omega_1)(\Omega - n\omega_2)}, \quad (4.2)$$

где  $\omega_{1,2} = \omega(W_{1,2})$ , а так называемая эффективная масса определена следующим образом:

$$M = \left( 2\pi R^2 \frac{d\omega}{dW} \right)^{-1}. \quad (4.3)$$

Подставляя в формулу (4.2) выражение для импеданса  $E$ -слоя, расположенного вблизи стенки, из (3.2) получаем алгебраическое уравнение, из которого находится инкремент неустойчивости:

$$A^2 x^3 - 4n^2 \Delta \omega^2 x - 4 = 0. \quad (4.4)$$

Здесь

$$x = \frac{1}{(\operatorname{Im} \Omega)^2}, \quad A = \frac{2e^2 \sigma c \beta}{M R b^2} f(n), \quad \Delta \omega = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}$$

— полуразброс частот обращения частиц в пучке. В крайнем случае малого энергетического разброса, чему соответствует условие

$$\frac{|A|}{(n\Delta\omega)^3} \gg 1, \quad (4.5)$$

инкремент радиационной неустойчивости равен

$$\operatorname{Im} \Omega = \pm \sqrt[3]{\frac{e^2 \sigma c \beta}{M R b^2} f(n)}. \quad (4.6)$$



Верхний знак здесь и дальше всегда соответствует отрицательной массе. Вещественная часть частоты мало стлчается от средней частоты обращения частиц и равна

$$\operatorname{Re} \Omega = n\omega_0 \pm \left( \frac{e^2 \alpha c \beta}{|M| R b^2} f(n) \right)^{2/3}. \quad (4.7)$$

В другом предельном случае большого разброса, отвечающего обратному условию (4.5), получаем инкремент

$$\operatorname{Im} \Omega = - \sqrt{\frac{e^2 \alpha c \beta f(n)}{|M| R b^2 n \Delta \omega}}. \quad (4.8)$$

Вещественная часть частоты при этом примерно равна

$$\operatorname{Re} \Omega \simeq n(\omega_0 \pm \Delta \omega). \quad (4.9)$$

Далее, подставим выражение (3.3) для импеданса кольца вблизи стенки в формулу (4.2). Решая получившееся дисперсионное уравнение, получаем в случае малого разброса (см. формулу (4.5)) инкремент

$$\operatorname{Im} \Omega \simeq - \left( \frac{e^2 N \beta \sqrt{n \omega_0}}{|M| R b_0} f(n) \right)^{2/5} \quad (4.10)$$

и вещественную часть частоты

$$\operatorname{Re} \Omega \simeq n\omega_0 \pm \left( \frac{e^2 N \beta \sqrt{n \omega_0}}{|M| R b^2} f(n) \right)^{2/5}. \quad (4.11)$$

Для большого разброса получаем

$$\operatorname{Im} \Omega \simeq - \left( \frac{e^2 N \beta f(n)}{\sqrt{n \Delta \omega_0} |M| R b^2} \right)^{2/3}; \quad (4.12)$$

$$\operatorname{Re} \Omega \simeq n(\omega_0 \pm \Delta \omega). \quad (4.13)$$

Если кольцо расположено вдали от стенки, то для оценки инкремента неустойчивости можно решать дисперсионное уравнение с импедансом (3.9). В результате для малого разброса, что эквивалентно требованию  $|\operatorname{Im} \Omega|/n\Delta\omega \gg 1$ , получаем

$$\operatorname{Im} \Omega \simeq - \sqrt{|A|}; \quad (4.14)$$

$$\operatorname{Re} \Omega \simeq n\omega_0 \pm \sqrt{|A|}, \quad (4.15)$$

а для большого разброса

$$\operatorname{Im} \Omega \simeq \pm \frac{A}{n\Delta\omega}. \quad (4.16)$$

Вещественная часть частоты остается той же, что и в случаях большого разброса. В формулах (4.14)–(4.16) через  $A$  обозначена следующая величина:

$$A = \frac{e^2 N}{2MR^3} \left[ n\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - \frac{n^2}{\gamma^2} \int_0^\beta J_{2n}(2n\xi) d\xi \right]. \quad (4.17)$$

Сравнение инкрементов для кольца и  $E$ -слоя при равных линейных плотностях на расстояниях, не очень далеких от стенки, показывает, что инкремент неустойчивости для кольца меньше соответствующего

инкремента для  $E$ -слоя и пропорционален малой величине  $(na_z/b)^{1/2}$ . Это объясняется тем, что для  $E$ -слоя резонанс имеет место на одной гармонике по  $k_z$  ( $k_z = 0$ ), в случае кольца в резонансе участвует непрерывный спектр гармоник по  $k_z$ , и возбуждение основной резонирующей гармоники с  $k_z$ , равным нулю, оказывается меньшим, чем для  $E$ -слоя.

Как показывает анализ, этот же эффект имеет место при переходе от кольца, близкого к стенке, к кольцу в свободном пространстве. Для дальнейшего анализа рассмотрим еще две простых функции распределения.

б) *Распределение Гаусса.* Функция распределения имеет вид

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} W_0} \exp\left(-\frac{W^2}{2W_0^2}\right). \quad (4.18)$$

Мы рассматриваем достаточно узкие пучки. При этом дисперсионное уравнение (1.15) можно записать как

$$1 = \frac{ie^2\Omega NZ(\Omega, n)}{(2\pi)^2 n^2 (\Delta\omega)^2 R^2 M} \left\{ 1 - J_- \left( \frac{\Omega - n\omega_0}{n\Delta\omega} \right) \right\}. \quad (4.19)$$

Здесь  $\Delta\omega = |\omega(W_0) - \omega(0)|$ ,  $J_-(x) = xI_-(x)/\sqrt{2\pi}$ ,  $I_-$  — интеграл, введенный Фоком и равный [7]

$$I_-(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \frac{dx}{\beta - x} \quad (\text{Im } \beta < 0). \quad (4.20)$$

Нас интересует зависимость полученных в п. а) результатов от выбора функции распределения. Поэтому нет необходимости повторять все предыдущие выкладки. Выясним влияние формы распределения на примере  $E$ -слоя вблизи стенки. Тогда, используя соответствующий импеданс (3.2) в уравнении (4.19) для большого разброса, т. е.  $\text{Im } \Omega/n\Delta\omega \ll 1$ , получаем

$$\text{Im } \Omega \simeq - \frac{e^2\alpha\beta f(n)}{|M| R b^2 n^2 (\Delta\omega)^2}; \quad (4.21)$$

$$\text{Re } \Omega \simeq n(\omega_0 \pm \Delta\omega). \quad (4.22)$$

в) *Распределение Лоренца.* Выберем функцию распределения в виде [8]

$$\psi_0 = \frac{1}{\pi W_0 (1 + W^2/W_0^2)}.$$

Дисперсионное уравнение для  $E$ -слоя вблизи стенки записывается в виде

$$1 = \frac{-ie^2\alpha\beta}{MRb^2n^2(\Delta\omega)^2 \text{Im } \Omega} \frac{1}{[(\Omega - n\omega_0)/n\Delta\omega - i]^2} \quad (4.23)$$

и имеет решение, соответствующее радиационной неустойчивости:

$$\text{Im } \Omega = - \frac{e^2\alpha\beta f(n)}{2|M| R b^2 n^2 (\Delta\omega)^2}, \quad (4.24)$$

$$\text{Re } \Omega \simeq n(\omega_0 \pm \Delta\omega).$$

Таким образом, сглаживание функции распределения приводит к уменьшению инкрементов неустойчивости (ср. (4.8), (4.21), (4.24)), но порог неустойчивости отсутствует. Это же справедливо для тонкого кольца.

Анализ дисперсионного уравнения для кольца в свободном пространстве показывает, что существует порог радиационной неустойчивости. Условие срыва неустойчивости при этом имеет вид

$$\nu/\gamma \leq \alpha n^{2/3} \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2. \quad (4.25)$$

Здесь  $\nu = (e^2/mc^2)(N/2\pi R)$  — «погонный» электрон,  $\alpha$  — численный коэффициент порядка единицы, зависящий от конкретной формы распределения. Например, для распределения Лоренца  $\alpha \approx 1,22$ . Физический смысл появления порога неустойчивости связан с тем, что для гладких функций распределения гидродинамическая радиационная неустойчивость демпфируется коллективным радиационным затуханием Ландау.

Радиационная неустойчивость связана с тем, что в системах с существенной кривизной фазовая скорость электромагнитных волн в азимутальном направлении может быть меньше скорости света в пустоте. При этом средняя скорость обращения частиц в пучке может быть близка к фазовой скорости волн в азимутальном направлении. В случае, когда эффективная масса частиц положительна, средняя скорость частиц больше азимутальной фазовой скорости волны. Когда же эффективная масса отрицательна, соотношение скорости обратное. В обоих случаях, если благодаря флуктуации в азимутальном однородном пучке возникает волна, частицы пучка со скоростями, близкими к средней, будут эффективно взаимодействовать с волной и часть из них будет захватываться в областях, где выполнены условия автофазировки. Для частиц с отрицательной массой область захвата сдвинута по фазе на величину  $\pi$  по отношению к области захвата, соответствующей частице с положительной массой. Таким образом, пространственная плотность частиц, связанных с флуктуацией, будет расти, а вместе с ней возрастает и когерентное излучение, что в свою очередь приведет к дополнительному захвату.

Обратим еще внимание на зависимость инкремента радиационной неустойчивости от номера гармоники возмущения. Большая вещественная часть импеданса естественным образом связана с потерями энергии пучка, и поскольку механизм потерь — синхротронное излучение, максимальное значение импеданса лежит в области значений  $n$  порядка  $\gamma^3$ . Однако при сильном релятивизме длины соответствующих волн становятся гораздо меньшими малых размеров кольца и наше рассмотрение становится незаконным. Поэтому можно лишь утверждать, что для достаточно малых длин волн (но все же много больших размеров пучка) инкременты растут с номером гармоники.

В заключение авторы выражают свою благодарность Я. Б. Файнбергу, И. Н. Иванову, В. И. Курилко, А. Н. Лебедеву за обсуждения и полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Бонч-Осмоловский, Э. А. Перельштейн, Препринт ОИЯИ, Р-9-4424, Дубна, 1969.
2. Г. Бейтмен, А. Эрдейн, Высшие трансцендентные функции, 2, изд. Наука, М., 1966.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Физматгиз, М., 1962.
4. А. Г. Бонч-Осмоловский, К. А. Решетникова, Препринт ОИЯИ, Р-9-3415-2, Дубна, 1967.

5. А. В. Гапонов, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 2, № 5, 836 (1959).
6. J. Schneider, Phys. Rev Letters, 2, 504 (1959).
7. В. П. Силли, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмонодобных сред, Госатомиздат, 1961.
8. А. Н. Лебедев, Диссертация, ФИАН, 1968.
9. А. Н. Диденко, Ю. А. Саливон, ЖТФ, 34, 1979 (1964)

Поступила в редакцию  
10 июня 1969 г.

## LONGITUDINAL INSTABILITIES IN RING CHARGED BEAMS. II. RADIATION INSTABILITY

*A. G. Bonch-Osmolovskii, E. A. Perel'shtein*

The azimuthal instability associated with coherent synchrotron radiation is studied for the beam of relativistic particles rotating in the magnetic field inside a metal tube. Expressions are derived for the increments at different energy distribution functions of the beam for variable distances from the camera wall. It is shown that the thermal spread in the beam decrease the increments of instability and far from the camera wall (transition to the free space) leads to stopping the instability due to Landau damping.

---

УДК 538.3

## О РАСЧЕТЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО ПЛОСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА В СКРЕЩЕННЫХ ПОЛЯХ

*П. В. Романов, А. С. Рошаль, В. Н. Галимуллин*

Дан расчет методом Монте-Карло нелинейных процессов в квазипериодическом электронном потоке, распространяющемся в бесконечном плоском промежутке между катодом и анодной структурой. Метод успешно сочетает высокую точность и скорость решения. Приводятся некоторые результаты расчетов.

Расчет методом Монте-Карло процессов в электронных потоках описан в [1] в применении к одномерному плоскому диоду. Ввиду ограниченной емкости оперативной памяти электронной вычислительной машины (ЭВМ) среднее количество электронов в диодном промежутке в [1] составляло около 400. Поэтому для получения нормальной плотности заряда приходилось брать короткие диодные промежутки ( $\sim 0,2$  мм), что затрудняло практически полезные расчеты.

Эти трудности можно преодолеть, используя укрупненные заряды — жесткие электронные сгустки в виде бесконечно тонких плоскостей, дисков, колец или стержней [2, 3]. Отношение заряда к массе для сгустков равно  $\eta = |e|/m$ , так что их уравнения движения не отличаются от уравнений движения отдельного электрона. В настоящей работе исследуется взаимодействие электронного потока с бегущей волной в бесконечном плоском промежутке. При этом как «микроскопические» (координаты и скорости элементарных зарядов), так и «макроскопические» (токи, напряжения) величины являются случайными (точнее — псевдослучайными). Для получения правильной статистики метод Монте-Карло, как и все статистические методы, требует большого времени счета на ЭВМ и значительного объема памяти машины. Приведенные результаты получены на больших ЭВМ с помощью специально разработанных алгоритмов, сокращающих время счета до разумной величины при сохранении достаточной точности.

### 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем рассматривать распространение электронного потока в бесконечном плоском промежутке (рис. 1), ограниченном катодом  $K$  и анодной структурой  $A$ . Ненормированные размерные переменные величины будем отмечать штрихами. Протяженность промежутка в направлении оси  $z'$  полагаем равной  $k_z$ , однако краевые эффекты не учитываются, так что задача является двумерной.

В промежутке имеются постоянное поперечное магнитное поле  $B'_0$  и электрическое поле потенциала  $U'$ . Поле  $U'$  складывается из постоянного поля, создаваемого потенциалом анода  $U'_a$ , поля  $U'_c$ , создаваемого высокочастотным (ВЧ) потенциалом структуры, и поля пространственного заряда. Поле структуры  $U'_c$  представляет собой совокупность бесконечного числа пространственных гармоник с соответствующими постоянными распространения. Будем полагать, что

электронный поток близок к синхронизму и сильно взаимодействует лишь с пространственной гармоникой номера  $r$  с частотой  $\omega'$  и постоянной распространения  $\beta'_r$ , так что все остальные пространственные гармоники поля  $U'_c$  можно опустить.

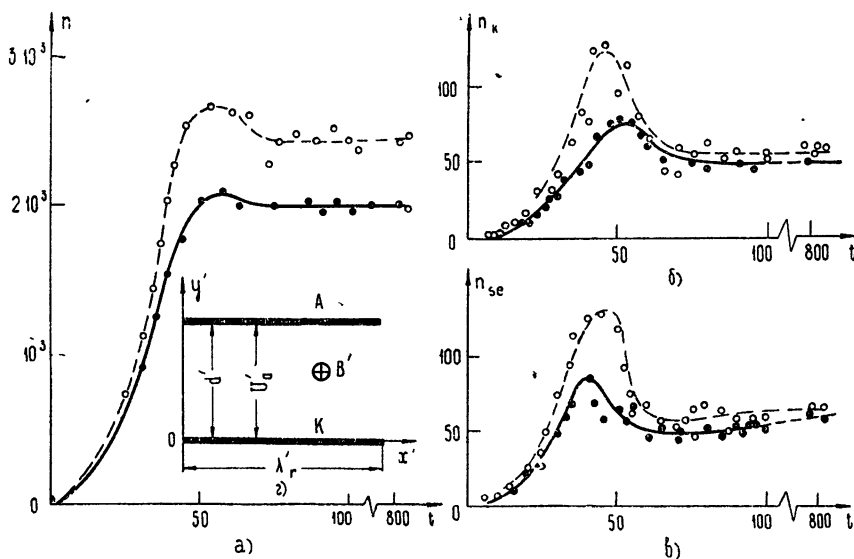


Рис 1. Изменение  $n(a)$ ,  $n_k(б)$  и  $n_{se}(в)$  в ходе установления стационарного режима электронного потока, распространяющегося в изображенном промежутке ( $\Gamma$ ), при  $U'_a=15$  кВ,  $U_a=415$  (сплошные кривые) и  $U'_a=17$  кВ,  $U_a=470$  (пунктир).

Введем систему координат  $x'oy'$ , которая движется относительно неподвижной (лабораторной) системы  $x''_1oy'$  вдоль оси  $x''_1$  с фазовой скоростью  $\omega'/\beta'_r$  гармоники  $r$ . В системе  $x'oy'$  поле структуры  $U'_c(x', y')$  является электростатическим. В приближении медленно меняющихся амплитуд можно полагать, что потенциал  $U'$  имеет по оси  $x'$  период  $\lambda'_r=2\pi/\beta'_r$ , т. е.  $U'(x', y') = U'(x' + \lambda'_r, y')$ . Поэтому при исследовании процессов в промежутке можно ограничиться областью  $[0, \lambda'_r; 0, d']$  [3].

Зададимся некоторым единичным зарядом

$$-|q_1| k_z \quad (\kappa), \quad (1)$$

где  $q_1$  имеет размерность  $\kappa \cdot \text{м}^{-1}$ . Единичный заряд будем представлять себе в виде жесткого сгустка электронов — бесконечно тонкого стержня длиной  $k_z$ , нормального к плоскости  $x'oy'$ . Будем измерять заряд  $q' < 0$  в единичных зарядах, т. е. положим

$$q' = -|q_1| k_z q, \quad (2)$$

где  $q$  — количество единичных зарядов (стержней), создающее заряд  $q'$ .

Оптимальную величину  $q_1$  можно определить по типичной плотности электронов  $n_0$  (в приборах со скрещенными полями  $n_0 \approx 10^{19} \text{ м}^{-3}$ ). Если принять

$$|q_1| = n_0 |e| \lambda'_r d' \bar{n}, \quad (3)$$

то в исследуемой области  $[0, \lambda'_r; 0, d']$  в типовом режиме будет находиться около  $\bar{n}$  стержней.

Для получения правильной статистики среднее количество стержней  $\bar{n}$  должно быть достаточно велико, по некоторым данным [3] более 2000. Максимальная величина  $\bar{n}$  ограничивается возможностями используемой ЭВМ.

Аппроксимируем область  $[0, \lambda'; 0, d']$  сеточной областью с размерами  $N, M$  и введем безразмерные (нештрихованные) переменные  $x_n, x, y, U, t, \omega$ :

$$\begin{aligned} x'_n &= k_x x_n, & x' &= k_x x, & y' &= k_y y, \\ U' &= k_U U, & t &= \omega'_c t', & \omega' &= \omega'_0 \omega. \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) нормировочные коэффициенты

$$k_x = \frac{\lambda'_r}{N} = \frac{2\pi}{\beta'_r N}, \quad k_y = \frac{d'}{M}, \quad k_U = \frac{(\omega'_c k_y)^2}{\eta} \quad (5)$$

имеют размерность соответствующих штрихованных переменных;  $\omega'_0$  — частота  $r$ -й гармоники в «холодной» системе;  $\omega'_c = \eta B'_0$  — циклотронная частота. Производные по  $t$  будем обозначать точкой.

Плотность пространственного заряда

$$\rho' = \frac{dq'}{dV'} \quad (6)$$

где  $dq'$  — заряд в элементе объема  $dV' = dx' dy' k_z$ . С учетом (2)

$$\rho' = - \frac{|q_1|}{k_x k_y} \rho(x, y), \quad (7)$$

где  $\rho(x, y)$  — поверхностная плотность единичных зарядов в плоскости  $xy$ :

$$\rho(x, y) \equiv \frac{dq}{dxdy}. \quad (8)$$

Разностное уравнение Пуассона в безразмерных переменных (4), (8)

$$\alpha^2 (U_{i-1, k} - 2U_{ik} + U_{i+1, k}) + U_{i, k-1} - 2U_{ik} + U_{i, k+1} = \alpha q_U \rho_{ik}, \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, \dots, M - 1$$

имеет краевые условия

$$U_{i0} = 0, \quad U_{iM} = U_a + U_{cm} \sin\left(\frac{2\pi}{N} i\right), \quad U_{cm} = U_{rm} \operatorname{sh} Y_a, \quad (10)$$

причем индекс  $i$  ввиду предполагаемой периодичности  $U$  следует брать по модулю  $N$ . В (9), (10)

$$q_U \equiv \frac{|q_1|}{\epsilon_0 k_U}, \quad U_{rm} = U_a U_r, \quad U_a = \frac{U'_a}{k_U}, \quad \alpha = \frac{k_y}{k_x}; \quad (11)$$

$$Y_a \equiv \beta'_r d', \quad (12)$$

$U_{rm}$  — амплитуда ВЧ потенциала,

$$U_c(x, y) = U_{rm} \operatorname{sh}\left(Y_a \frac{y}{M}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{N} x\right). \quad (13)$$

Уравнения взаимодействия потока с полем даны в ряде работ [3, 4]. Используя [3] и переходя к безразмерным мощностям по формулам вида

$$P' = k_P P, \quad k_P = \varepsilon_0 \omega'_c k_U^2 \quad [вт \cdot м^{-1}], \quad (14)$$

где  $P'$  — мощность в ваттах на 1 м длины системы, имеем

$$2FU_a^2 U_r \dot{U}_r \operatorname{sh}^2 Y_a = P_g - P_i; \quad (15)$$

$$P_i = \gamma F U_a^2 U_r^2 \operatorname{sh}^2 Y_a \omega(Q_n)^{-1}; \quad (16)$$

$$\omega = 1 - \Delta\omega, \quad \Delta\omega = R_g (2\gamma F U_a^2 U_r^2 \operatorname{sh}^2 Y_a)^{-1}; \quad (17)$$

$$\gamma \equiv \omega'_0 / \omega'_c. \quad (18)$$

Здесь  $P_g$ ,  $R_g$  — генерируемые активная и реактивная мощности,  $P_i$  — суммарная мощность потерь в нагрузке (полезная мощность) и структуре,  $Q_n$  — нагруженная добротность,  $\Delta\omega$  — электронное смещение частоты;  $F$  — так называемый коэффициент формы [3], связывающий энергию ВЧ электрического поля структуры с амплитудой ВЧ потенциала анода  $U_{cm}$ :

$$F = C_{T0} / \varepsilon_0, \quad (19)$$

где  $C_{T0} [\phi/м]$  — полная емкость на 1 м длины структуры.

Уравнения движения электрона (стержня) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{v}_{x_l} &= -\alpha^2 E_x + \alpha v_y & \left( E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \right), \\ \alpha \dot{v}_y &= -\alpha E_y - v_{x_l} & \left( E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\dot{x}_l = v_{x_l}, \quad \dot{y} = v_y$$

или

$$\ddot{r}_+ + j\dot{r}_+ = -E_+; \quad (21)$$

$$r_+ \equiv x_l + j\alpha y, \quad E_+ \equiv \alpha^2 E_x + j\alpha E_y. \quad (22)$$

Координата  $x_l$  и скорость  $v_{x_l}$  в лабораторной системе  $x_l o_l y$  связаны с координатой  $x$  и скоростью  $v_x$  в подвижной системе  $x o y$  соотношениями

$$x_l = x + \int_0^t \beta \omega d\tau, \quad v_{x_l} = v_x + \beta \omega \quad (v_x = \dot{x}), \quad \beta \equiv \frac{\gamma N}{2\pi}. \quad (23)$$

Безразмерная скорость движения подвижной системы координат относительно лабораторной, т. е. фазовая скорость гармоники номер  $r$ , равна  $\beta\omega$  (в размерных величинах  $\omega'/\beta'_c$ ). Благодаря изменению скорости  $\beta\omega$  в ходе установления колебаний возможна синхронизация электронного облака и волны системы.

Решение (21) имеет вид

$$r_+(t + \Delta t) = r_+(t) - j\dot{r}_+(t) (1 - e^{-j\Delta t}) + j \int_t^{t+\Delta t} (1 - e^{-i(t-\tau)}) E_+ d\tau. \quad (24)$$



Полагая при малых  $\Delta t$  поле  $E_+ \simeq \text{const}$ ,

$$\int_t^{t+\Delta t} \beta \omega d\tau \simeq \beta \omega(t) \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \beta \dot{\omega}(t), \quad (25)$$

находим из (22)–(24)

$$x(t + \Delta t) = x(t) - \beta \omega(t) \Delta t - 0,5(\Delta t)^2 \beta \dot{\omega}(t) + v_{x_n}(t) s + \alpha v_y(t) a - \alpha E_y b - \alpha^2 E_x a \quad (v_{x_n} = v_x(t) + \beta \omega(t)); \quad (26)$$

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) s - v_{x_n}(t) a \alpha^{-1} + \alpha E_x b - E_y a; \quad (27)$$

$$a \equiv 1 - \cos \Delta t, \quad s \equiv \sin \Delta t, \quad b \equiv \Delta t - s. \quad (28)$$

Заменяя в (26), (27)  $\Delta t$  на  $-\Delta t$ , находим из полученной системы двух уравнений

$$v_x(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{s}{a} \left( \Delta x + \beta \omega(t) \Delta t - \frac{(\Delta t)^2}{2} \beta \dot{\omega}(t) \right) + \alpha \Delta y - \alpha^2 E_x \Delta t - \left( 2 - \frac{s \Delta t}{a} \right) \alpha E_y \right] - \beta \omega(t); \quad (29)$$

$$v_y(t) = \frac{1}{2\alpha} \left[ -\Delta x - \beta \omega(t) \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \beta \dot{\omega}(t) + \frac{s}{a} \alpha \Delta y + \left( 2 - \frac{s \Delta t}{a} \right) \alpha^2 E_x - \alpha E_y \Delta t \right]; \quad (30)$$

$$\Delta x \equiv x(t) - x(t - \Delta t), \quad \Delta y \equiv y(t) - y(t - \Delta t). \quad (31)$$

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Будем моделировать процессы, протекающие в области  $[0 \leq x \leq N; 0 \leq y \leq M]$  с шагом по времени  $\Delta t$ . Электронный поток будем рассматривать как совокупность некоторого переменного числа  $n(t)$  единичных зарядов (1), называя их для простоты электронами.

Пусть в текущий момент  $t$  известны координаты  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $y(t - \Delta t)$  всех  $n(t)$  электронов. Из этого числа некоторое количество  $n_k(t)$  попало на катод; признаком этого является  $y(t) = 0$ . Для каждого из этих  $n_k(t)$  электронов известна кинетическая энергия падения в безразмерных потенциалах  $U_p$  — энергия первичных электронов. Для всех остальных  $n(t) - n_k(t)$  электронов известны координаты  $x(t - \Delta t)$ .

Вычисления на текущем шаге начнем с того, что для каждого из  $n_k(t)$  электронов по известному  $U_p$ , используя соответствующие графики или формулы (см., например, [5–7]), найдем коэффициент вторичной эмиссии  $\sigma$ . Полагая, что количество вторичных электронов имеет пуассоновское распределение со средним, равным  $\sigma$ , находим с помощью генераторов псевдослучайных чисел случайное количество вторичных электронов при данном соударении. Случайную энергию вторичных электронов  $U_e$  можно определить, например, по экспериментальным результатам, приведенным в [7]. Координаты вылета вторичных электронов  $x(t)$  равны координатам падения.

Далее рассчитаем тепловую эмиссию, т. е. зная среднее количество тепловых электронов  $n_e$ , эмиттируемых с участка  $[0, N]$  катода, найдем случайное количество  $n_{te}$  тепловых электронов (с пуассоновским распределением), их координаты  $x(t)$ , равновероятные в  $[0, N]$ , и случай-

ные максвелловские энергии  $U_e$  [1]. Для всех эмиттируемых электронов  $y(t) = 0$ . После этого прибавим к  $n(t)$  величину  $(n_{se}(t) + n_{te}(t) - n_k(t))$ , где  $n_{se}(t)$  — общее количество вторичных электронов.

Если полученное на этапе эмиссии  $n(t)$  оказывается больше некоторого  $n_{max}$ , вычисления прекращаются. В наших расчетах в одной из программ допускалось  $n_{max} = 3000$ , в другой  $n_{max} = 6000$ .

При правильном выборе параметров  $q_1$ ,  $n_e$ , и других, количество электронов  $n$  в области взаимодействия ограничивается автоматически благодаря анодному току и образованию при больших  $n$  тормозящего поля вблизи катода. Под действием тормозящего поля эмиттированные электроны на следующих шагах  $t + \Delta t$ ,  $t + 2\Delta t$ , ... возвращаются на катод. При этом их энергия падения  $U_p$  и, следовательно, коэффициент вторичной эмиссии  $\sigma$  обычно малы, так что оказывается  $n_{se} < n_k$ .

Потенциал  $U(x, y)$  в момент  $t$  находится из (9), (10). В качестве  $p_{ik}$  примем количество электронов, для которых ближайшее целое от  $x(t)$  равно  $i$ , а ближайшее целое от  $y(t)$  равно  $k$ . Очевидно, это электроны, находящиеся в момент  $t$  в единичном квадрате в окрестности узла  $(i, k)$ . Решение (9), (10) выполняется по ускоренным алгоритмам [8, 9]. При  $M = 48$ ,  $N = 96$  и относительной точности  $10^{-7}$  время решения на ЭВМ М-220 составляет около 15 сек.

Вычислив поле  $U(x, y)$ , найдем скорости электронов  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ . Для эмиттированных электронов  $v_{xk}(t) = 0$ ,

$$v_x(t) = -\beta\omega(t), \quad v_y(t) = \sqrt{2U_e}, \quad (32)$$

где  $U_e$  — энергия в безразмерных потенциалах, вычисленная на этапе эмиссии. Для остальных  $n - (n_{se} + n_{te})$  электронов используем (29) — (31). Входящее в (26), (27), (29), (30) поле

$$E_x = \text{sgn}(i_1 - i) (U_{ik} - U_{i_1, k}), \quad E_y = \text{sgn}(k_1 - k) (U_{ik} - U_{i, k_1}). \quad (33)$$

В (33) соседние узлы  $(i, k)$ ,  $(i_1, k)$ ,  $(i, k_1)$  являются вершинами треугольника, в котором находится электрон, причем узел  $(i, k)$  — ближайший к электрону.

Активная мощность  $P_g$  определяется по формуле [3]

$$P_g(t) = -\frac{\alpha q_U U_a U_r(t) H}{N} \sum_n \left\{ v_y(t) \text{ch} \left[ Y_a \frac{y(t)}{M} \right] \sin \left[ \frac{2\pi}{N} x(t) \right] + \right. \\ \left. + \frac{v_{xk}}{\alpha} \text{sh} \left[ Y_a \frac{y(t)}{M} \right] \cos \left[ \frac{2\pi}{N} x(t) \right] \right\} \quad (v_{xk}(t) = v_x(t) + \beta\omega(t)), \quad (34)$$

где сумма берется по всем  $n(t)$  электронам;  $H \equiv \beta'_k z_k$ . Формулу для  $R_g(t)$  получаем из (34) заменой  $x(t)$  на  $x(t) + N/4$ . Кроме того, вычисляется количество электронов в каждой строке и в каждом столбце сеточной области, а также средние и среднеквадратичные значения скоростей  $v_{xk}(t)$ ,  $v_y(t)$  в каждой строке.

Далее находим  $y(t + \Delta t)$  (см. (27)). Если  $y(t + \Delta t) \geq M$ , полагаем  $y(t + \Delta t) = M$ , если же  $y(t + \Delta t) \leq 0$ , полагаем  $y(t + \Delta t) = 0$ . Это означает, что на следующем шаге электрон попадает соответственно на анод или на катод. Для таких электронов вычисляем кинетическую энергию в безразмерных потенциалах

$$U_p = \frac{1}{2} \left[ v_y^2(t) + \frac{1}{\alpha^2} v_{xk}^2(t) \right] \quad (35)$$

и мощности тепловых потерь на 1 м на катоде  $P_{kt}(t + \Delta t)$  и на аноде  $P_{at}(t + \Delta t)$ :

$$P_{ki}(t + \Delta t) = \frac{q_U H}{2\pi\Delta t} \sum_{n_k} U_p, \quad P_{ai}(t + \Delta t) = \frac{q_U H}{2\pi\Delta t} \sum_{n_a} U_p, \quad (36)$$

где сумма берется соответственно по всем  $n_k(t + \Delta t)$  электронам, попадающим на катод, или по  $n_a(t + \Delta t)$  электронам, попадающим на анод.

Для электронов с  $0 < y(t + \Delta t) < M$  вычисляется  $x(t + \Delta t) \pmod{N}$ , где  $x(t + \Delta t)$  дается формулой (26). (Для того, чтобы вычисление  $x(t + \Delta t) \pmod{N}$  не повлияло на разность  $\Delta x$  в (31) на следующем шаге,  $\Delta x$  перед подстановкой в (29), (30) необходимо соответствующим образом корректировать.)

После вычисления  $P_g$ ,  $R_g$  находим  $P_r$ , угол сдвига  $\theta_m = \text{arctg}(R_g/P_g)$ , полезную мощность  $P_n = \eta_c P_t (\eta_c - \text{КПД контура})$ ,  $U_r(t + \Delta t)$  (из решения (15) по формулам Адамса 4-го порядка),  $\omega(t + \Delta t)$  и  $\omega(t + \Delta t)$  по формулам численного дифференцирования для четырех равноотстоящих узлов (используя результаты, полученные на предыдущих шагах).

Ток возвращающихся электронов на 1 м катода

$$I'_k = k_f I, \quad k_f = k_p/k_U, \quad I_k = \frac{q_U H}{2\pi\Delta t} n_k. \quad (37)$$

Аналогично

$$I_a = \frac{q_U H}{2\pi\Delta t} n_a, \quad I_{te} = \frac{q_U H}{2\pi\Delta t} n_{te}, \quad I_{se} = \frac{q_U H}{2\pi\Delta t} n_{se}, \quad (38)$$

где  $I_a$  — конвекционный ток на анод,  $I_{te}$  — ток тепловой эмиссии,  $I_{se}$  — ток вторичной эмиссии.

После печати результатов все  $n(t)$  упорядочиваются по строкам, т. е. по величине  $y(t + \Delta t)$ . Электроны, попадающие на анод, удаляются\* и в качестве значения  $n(t + \Delta t)$  принимается  $n(t) - n_a(t + \Delta t)$ . На этом вычисления для данного шага заканчиваются. Общее время счета шага на ЭВМ М-220 при  $n(t) \simeq 3000$  составляет  $\sim 60$  сек.

### 3. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Как видно из предыдущего, описанный метод расчета позволяет получить обширную информацию о характере нелинейных процессов в электронном потоке. На рис. 1—3 представлены некоторые результаты расчетов для магнетрона, геометрические размеры которого соответствуют магнетрону 4J52 [10]. При моделировании эмиссии предполагалось, что катод платиновый.

На рис. 1 показана зависимость от времени  $t$  количества электронов  $n$  в пространстве взаимодействия, количества возвращающихся электронов  $n_k$  и количества вторичных электронов  $n_{se}$ . Как и ожидалось, общее количество электронов  $n$  ограничивается автоматически благодаря анодному току и образованию тормозящего поля вблизи катода. Стационарное значение  $n$  достигается за сравнительно короткое время, которое, в основном, определяется величиной термоэмиссии и характеристикой вторичной эмиссии. В дальнейшем  $n$  слабо зависит от времени. Число возвращающихся на катод электронов  $n_k$  тоже почти не зависит от времени. Число вторичных электронов  $n_{se}$  со временем несколько увеличивается благодаря росту амплитуды ВЧ поля.

\* Вторичной эмиссией с анода пренебрегаем.

На рис. 2 изображены конфигурации электронного облака в стационарном режиме при различных напряжениях на структуре. Каждой точке соответствует заряд порядка  $10^7$  электронов. Из рисунка видно, что с увеличением анодного напряжения  $U_a$  расширяется область,

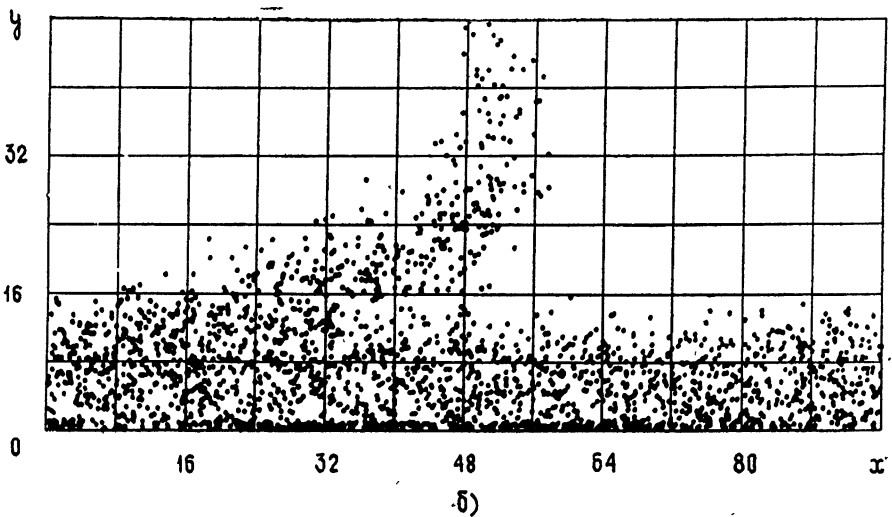
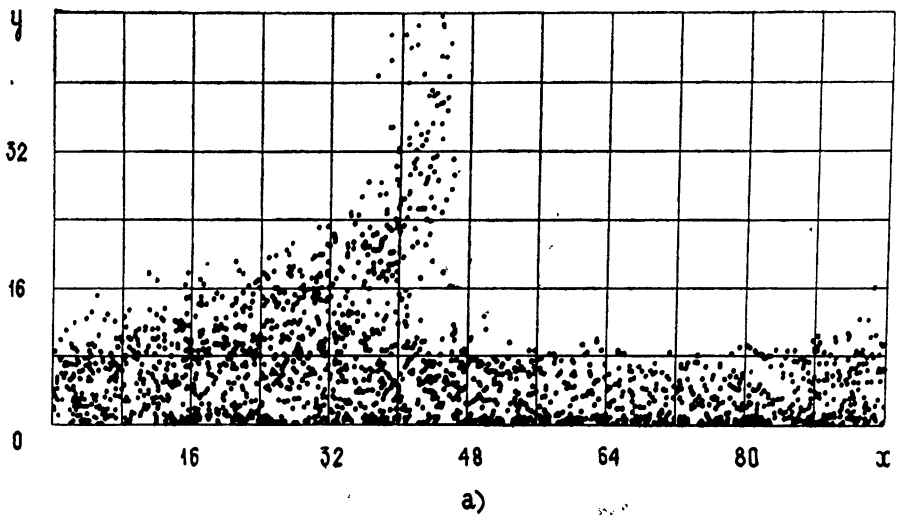


Рис. 2. Конфигурации электронного облака в стационарном режиме:  
а)  $U'_a = 15$  кв,  $U'_{cm} = 13,3$  кв,  $n = 2018$ ; б)  $U'_a = 18,1$  кв,  $U'_{cm} = 7,5$  кв,  $n = 2509$ .

занимаемая прикатодными электронами («втулка») вследствие роста радиуса трохиоды. Электроны, расположенные ближе к аноду (в «спице»), заметно смещаются в направлении скорости дрейфа.

Такое смещение спицы вызывает рост анодного тока и уменьшение реактивной мощности  $R_g$  вплоть до изменения ее знака. Возможность изменения знака реактивной мощности зависит от величины нагруженной добротности  $Q_H$  и эмиссионных свойств катода. При больших добротностях  $Q_H$  велика амплитуда ВЧ напряжения и велик анодный ток. Вследствие ограниченной эмиссии катод не может вос-

полнять уходящие на анод электроны, их число в пространстве взаимодействия быстро уменьшается, облако пространственного заряда разрушается и колебания срываются.

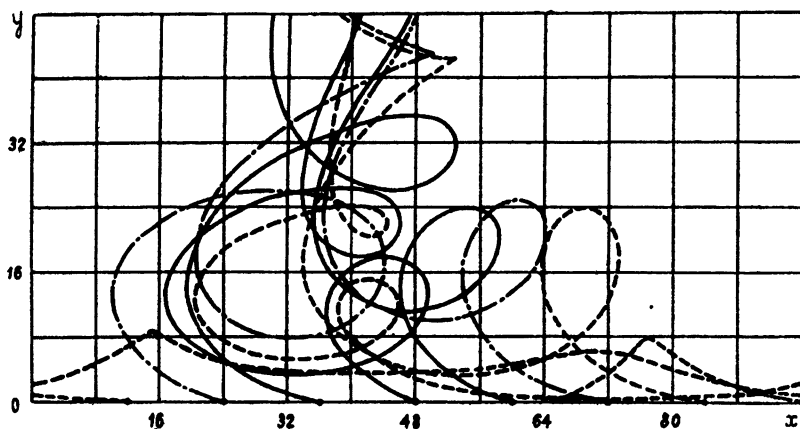


Рис. 3. Типичные траектории электронов с различными координатами вылета с катода в облаке пространственного заряда:

$$U'_a = 15 \text{ кВ}, U'_{cm} = 13,4 \text{ кВ}, t_0 = 607,5.$$

На рис. 3 изображены типичные траектории в облаке пространственного заряда восьми электронов с координатами вылета  $y(t_0) = 0$ ,  $x(t_0) = 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84$  ( $t_0$  — момент вылета). Электрон с координатой вылета  $x(t_0) = 0$  возвращается на катод. Среди электронов имеется «долгоживущий» электрон с координатой вылета  $x(t_0) = 12$ , достигающий затем анода. Сравнительно быстро достигают анода электроны с координатами вылета  $x(t_0) = 24, 36, 48, 60, 72, 84$ . Среди выбранных электронов лишь один возвращается на катод. Если, однако, рассчитать траектории большего числа эмиттированных электронов, можно установить, что, как правило, большинство их возвращается на катод после более или менее долгого пребывания в пространстве взаимодействия.

Статистическое моделирование является эффективным методом изучения нелинейных процессов в электронных потоках. Описанный метод решения основных уравнений обладает преимуществами в отношении скорости и точности перед некоторыми другими, в частности, перед методами, основанными на использовании функции Грина. Реализация метода на ЭВМ повышенного быстродействия создаст возможности более глубокого анализа нелинейных процессов в электронных потоках.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Р. К. Тien, J. Moshman, J. Appl. Phys., **27**, 1067 (1956).
2. С. П. Ломнев, Расчет и исследование электрофизических установок и электрофизических явлений на цифровых вычислительных машинах, Вычислительный центр АН СССР, М., 1965.
3. С. Р. Yu, G. P. Kooyers, O. Vineman, J. Appl. Phys., **36**, 2550 (1965).
4. Л. А. Вайнштейн, Электроника больших мощностей, 3, изд. Наука, М., 1964.
5. Л. М. Роголя, Радиотехника и электроника, **12**, 1680 (1967).
6. И. М. Бронштейн, В. А. Долинин, Радиотехника и электроника, **13**, 181 (1968).

- 7 Н. Д. Моргулис, А. Т. Нагорский, ЖЭТФ, 8, 1159 (1938).
8. R. W. Hoskney, J. ACM, 12, 95 (1965).
9. J. W. Cooley, J. W. Tukey, Math. Comput., 19, 297 (1965).
- 10 Д. ж. Коллинз, Магнетроны сантиметрового диапазона, 2, перевод с англ под ред С. А. Зусмановского, изд. Сов. радио, М., 1951.

Поступила в редакцию  
23 июня 1969 г.

## CALCULATION OF A PLANE ELECTRON BEAM IN INTERSECTED FIELDS BY MONTE-KARLO METHOD

*P. V. Romanov, A. S. Roshal', V. N. Galimullin*

A calculation (by Monte-Karlo method) is given of nonlinear processes in a quasi-periodic electron beam propagating in an infinite plane gap between the cathode and anode structure. The method is very accurate and give a quick solution. Some results of calculations are presented.

---

**КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ  
И ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ**

УДК 621.371.25

**ОБ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОМ ПЛАЗМЕННОМ СЛОЕ**

*И. Г. Кондратьев, Г. А. Марков*

Предположим, что плазма однородна и заполняет пространство между плоскостями  $x = -x_0$  и  $x = x_0$ , а поверхностная волна (ТМ-типа) распространяется в  $z$ -направлении ( $e^{i\omega t - ihz}$ ) и не зависит от координаты  $y$ . Тогда характеристические уравнения для волновых чисел запишутся в виде

$$px_0 = -\varepsilon^{-1} \kappa x_0 \begin{cases} \operatorname{cth}(\kappa x_0) & \text{— для четных волн} & (E_z(x) = E_z(-x)) \\ \operatorname{th}(\kappa x_0) & \text{— для нечетных волн} & (E_z(x) = -E_z(-x)) \end{cases} \quad (1)$$

причем

$$(\kappa x_0)^2 + (px_0)^2 = (k_0 x_0)^2 (1 - \varepsilon). \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $p^2 = h^2 - k_0^2$ ,  $\kappa^2 = h^2 - k_0^2 \varepsilon$ ,  $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость плазмы,  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  — проницаемости вакуума (практическая рационализированная система единиц). Для обеспечения локализации поля необходимо, чтобы  $\operatorname{Re} p > 0$ . Считая, что частота  $\omega$  заметно превышает эффективную частоту соударений электронов  $\nu_{эфф}$ , для  $\varepsilon$  будем иметь [1]

$$\varepsilon = 1 - \omega_0^2 / \omega^2 (1 - i\nu), \quad (3)$$

где  $\nu = \nu_{эфф} / \omega$ ,  $\omega_0$  — плазменная частота.

Наиболее полное исследование уравнений (1), (2) в случае отсутствия соударений ( $\nu = 0$ ) было проведено в [2]. При этом был обнаружен целый ряд специфических особенностей, оставшихся ранее [3] незамеченными: возможность одновременного существования двух (или даже трех) нечетных поверхностных волн, из которых одна — обратная (групповая скорость противоположна фазовой); возможность существования волн с комплексными постоянными распространения и т. п. Наличие своеобразных областей «стыкования» различных волн — прямой, обратной и «комплексных» нечетных волн\* — и областей существенного разделения соответствующих волн — где для одной из волн имеет место бесконечное (резонансное) возрастание замедления (это область  $\varepsilon \sim -1$ ) — делает принципиально важным учет влияния соударений, чему и посвящена настоящая заметка\*\*.

На рис. 1 (а, б) и 2 представлена зависимость действительной ( $h_r$ ) и мнимой ( $h_i$ ) частей постоянной распространения ( $h = h_r - ih_i$ ), нормированных на волновое

\* Для достаточно тонкого слоя, согласно [4], это, в частности, область значений  $\varepsilon$  вблизи  $\varepsilon_c \sim -2(k_0 x_0) [1 + (k_0 x_0)]$ .

\*\* Знание соответствующего коэффициента затухания оказывается необходимым также при исследовании резонансного рассеяния на больших плазменных объектах (объектах, окруженных плазменной оболочкой), обусловленного резонансным возбуждением слабо излучающих квазиповерхностных волн (см. [5]).

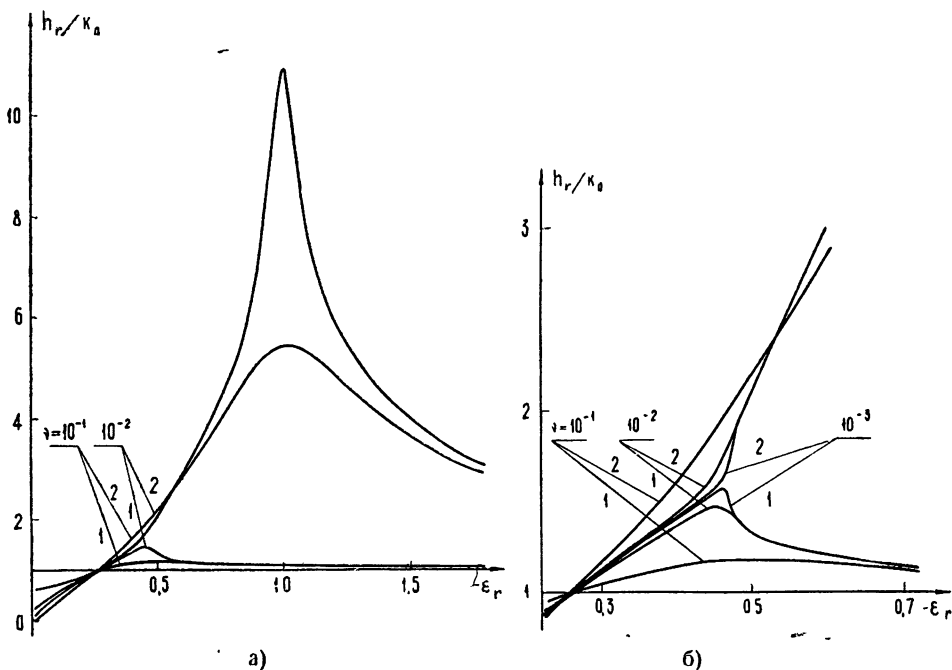


Рис. 1.

число вакуума ( $k_0$ ), от действительной части  $\epsilon$  ( $\epsilon_r$ ) для нечетных поверхностных волн при трех значениях  $\nu=10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ ; толщина слоя, измеренная в длинах волн падающего излучения,  $2k_0x_0 = 0,4$ . Значки 1 и 2 отмечают две ветви, отвечающие наличию двух (в области  $\epsilon > \epsilon_c - 1$ ) нечетных поверхностных волн в отсутствие соударений. Расчеты были выполнены на электронно-вычислительной машине.

Основная отличительная особенность, связанная с учетом соударений, состоит в следующем: участки общей дисперсионной кривой, соответствующие разным поверхностным волнам (см. [2]), теперь раздвигаются, и образовавшиеся отдельные ветви смыкаются с соответствующими ветвями, описывающими волны с комплексными постоянными распространения. Таким образом, различие между «действительными» (поверхностными) и комплексными волнами полностью стирается—образуются единые ветви.

Для достаточно тонкого слоя в отмеченной выше области значений  $\epsilon \sim \epsilon_c$  (представленной для большей наглядности отдельно на рис. 1 б) постоянная распространения соответствующих волн, как нетрудно получить (см. [4]), записывается в виде

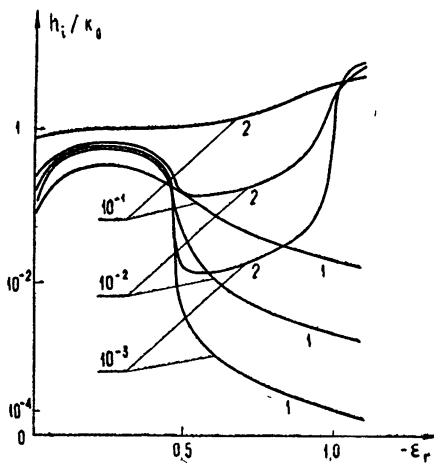


Рис. 2.

$$[(hx_0)^2]_{1,2} = \epsilon \left\{ 2^{-1} [\epsilon + 2(k_0x_0)^2] \pm \sqrt{\epsilon^2/4 - (k_0x_0)^2(1-\epsilon)} \right\} \quad (4)$$

Отсюда в «точке стыкования»  $\epsilon = \epsilon_c$ , которая находится, очевидно, из условия равенства нулю подкоренного выражения (в отсутствие соударений), при учете соударений (считая  $\nu \ll 1$ ) имеем

$$[(hx_0)^2]_2 - [(hx_0)^2]_1 = -2\epsilon \sqrt{i\nu(1-\epsilon_c)(k_0x_0)} \quad (5)$$



В области  $\epsilon \sim -1$  (аномально высоких замедлений при  $\nu = 0$ ) наличие соударений приводит к существенному ограничению коэффициента замедления; причем даже при сравнительно малых  $\nu$  ( $\sim 10^{-2}$ ) значительной оказывается мнимая часть  $h$  ( $h_i$ ). Сказанное относится и к четным поверхностным волнам, для которых соответствующие кривые (так же, впрочем, как и кривые, отвечающие третьей нечетной волне) имеют вид, аналогичный кривым 2 рис. 1 и поэтому не приводятся.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, изд. Наука, М., 1967.
2. A. A. Oliner, T. Tamir, Proc. IEEE, 51, 347 (1963).
3. W. O. Schumann, Sud-Bayer, Akad. d. Wiss, Mathnaturwiss, Abt 225, 255 (1948).
4. И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, 124 (1964).
5. В. Б. Гильденбург, Ю. М. Жидко, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, 1358 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
20 октября 1969 г.

**ХРОНИКА****МЕЖДУНАРОДНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО ТЕОРИИ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

г. Тбилиси, СССР

9—15 сентября 1971 г.

**ОРГАНИЗАТОРЫ****Международный научный радиосоюз (УРСИ).****Советский национальный комитет УРСИ.****Отделение математики и физики АН Грузинской ССР.****Институт радиотехники и электроники АН СССР.***Первое сообщение*

С 9 (четверг) по 15 (среда) сентября 1971 года в г. Тбилиси (СССР) предполагается провести Международный симпозиум по теории электромагнитных волн. Данный симпозиум является очередным из серии симпозиумов (1953, Канада, Монреаль; 1955, США, Энн Арбор, Мичиган; 1962, Дания, Копенгаген; 1965, Голландия, Дельфт; 1968, Италия, Стреза), проводимых по программе VI комиссии УРСИ.

Целью Симпозиума является обсуждение современного состояния теории электромагнитных волн.

Предполагается обсудить вопросы по следующим разделам.

1. Излучение, распространение, дифракция и рассеяние волн в сложных средах: неоднородных, анизотропных (в том числе и в плазме) и флуктуирующих.
2. Асимптотические методы теории дифракции.
3. Открытые линии. Открытые резонаторы. Квазиоптика.
4. Численные методы и применение ЭВМ в теории дифракции и распространения волн.
5. Теория антенн и фидерных устройств.
6. Нелинейные и параметрические явления при распространении волн.

Доклады могут быть как оригинальными, так и обзорными.

Рабочими языками являются английский и французский. Доклады должны зачитываться на Симпозиуме автором (или одним из авторов) на одном из рабочих языков.

Тезисы докладов, содержащие не менее 800 слов и не более 1200 слов, должны быть присланы в секретариат Симпозиума не позднее 1 января 1971 года советскими авторами и не позднее 1 марта 1971 года иностранными авторами.

Советские авторы должны представить тезисы докладов на русском и английском языках.

Иностранные авторы могут посылать тезисы докладов через свой национальный комитет УРСИ или непосредственно по указанному ниже адресу на одном из рабочих языков Симпозиума.

Доклады, тезисы которых будут представлены до 1 мая 1971 года, будут размножены и розданы участникам Симпозиума.

Для участия в Симпозиуме иностранные участники могут оформить свое пребывание в Советском Союзе через любую туристскую фирму в своей стране, сотрудничающую с «Интуристом».

При регистрации участникам Симпозиума необходимо будет уплатить взнос в размере 20 долларов США (18 руб.).

Вся корреспонденция должна посылаться на имя ученого секретаря Оргкомитета Симпозиума, кандидата физико-математических наук В. В. ШЕВЧЕНКО по адресу: г. Москва, Центр, ГСП-3, проспект Маркса, 18, Советский национальный комитет УРСИ, Секретариат Симпозиума по теории электромагнитных волн.

ОРГКОМИТЕТ

## МЕЖВУЗОВСКАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ СТУДЕНТОВ ПО РАДИОФИЗИКЕ

Со 2 по 6 февраля 1970 г. в Горьком состоялась межвузовская всесоюзная научная конференция студентов по радиофизике. Конференция была организована Горьковским университетом при участии Горьковского правления НТОРЭС им. А. С. Попова. Она была посвящена знаменательной дате: 75-летию изобретения радио А. С. Поповым.

На конференции работали секции: 1) распространения волн и физики ионосферы, 2) статистической радиофизики, 3) электродинамики, 4) теории колебаний, 5) электроники, 6) теоретической радиотехники, 7) квантовой радиофизики. Всего на заседаниях секций было заслушано 118 докладов студентов Башкирского, Воронежского, Горьковского, Днепропетровского, Иркутского, Казанского, Киевского, Саратовского, Томского, Туркменского и Харьковского университетов, Горьковского, Кировского и Томского политехнических институтов, Мишского, Рязанского и Таганрогского радиотехнических институтов, МВТУ им. Баумана, Московского авиационного института, Томского института радиоэлектроники и электронной техники и Харьковского института радиоэлектроники.

На 3 пленарных заседаниях были заслушаны доклады Ф. А. Лбова «В. И. Ленин и Нижегородская радиолоборатория», проф. В. А. Зверева «Применение голографии в радиофизике» и проф. С. А. Каплана «Проблемы радиосвязи с внеземными цивилизациями». Чл.-корр. АН СССР, проф. В. И. Сифоров выступил с лекцией «Современная радиоэлектроника и перспективы ее развития».

Во время работы конференции состоялось совещание по обмену опытом организации научной работы студентов, на котором присутствовали руководители и активисты научных студенческих обществ ряда вузов страны. Для участников конференции были организованы экскурсии по достопримечательным местам Горького и по кафедрам и лабораториям радиофизического факультета Горьковского университета.

В решении конференции отмечается, что она позволила студентам получить новую полезную информацию по различным разделам радиофизики. Доклады в основном были актуальны по тематике и содержали интересные научные или практические результаты. Получила поддержку и одобрение инициатива Горьковского университета, который впервые организовал всесоюзную студенческую научную конференцию в области радиофизики.

Конференция помогла студентам установить новые научные контакты и обменяться опытом постановки научной работы. В дальнейшем признано целесообразным сделать такого типа конференции традиционными и проводить их в различных вузах, имеющих специализацию по радиофизике, ежегодно.

Б. Н. ГЕРЦМАН.