

СОДЕРЖАНИЕ

Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике (Обзор)	787
Дмитренко Д. А., Цейтлин Н. М., Виноградова Л. В., Гитерман Х. Ф. Абсолютные измерения интенсивности излучения Кассиопей-А, Лебедя-А и Тельца-А в диапазоне волн 3—15 см	823
Толмачева А. В. Вклад космических лучей в ионизацию D-области ионосферы	830
Зайцев В. В. К вопросу о стабилизации пучковой неустойчивости	837
Рабинович М. И., Файнштейн С. М. О взаимодействии ионно-звуковых волн в системе поток — плазма	844
Крупина А. Е. К вопросу о влиянии соударений на поглощение плазменных волн	849
Шолохов Н. В. Нелинейное взаимодействие высокочастотных электромагнитных волн с циклотронными электростатическими колебаниями плазмы	857
Басс Ф. Г. Применение метода ВКБ к нелинейному волновому уравнению и распространение сильных электромагнитных волн в ионосфере	864
Беликович В. В., Иткина М. А. Нахождение профиля электронной концентрации в D-слое ионосферы по частотной зависимости поглощения	873
Трахтенгерц В. Ю. К вопросу о конверсии волн в магнитоактивной плазме	884
Быковский Ю. А., Дегтяренко Н. Н., Елесин В. Ф., Козырев Ю. П., Сильнов С. М. Выход и энергетическое распределение многозарядных ионов, образующихся при воздействии сфокусированного луча ОКГ на вольфрам	891
Манькин Э. А. О создании сверхизлучающих состояний посредством двухфотонного резонанса	895
Зайцев Ю. И. О естественных флуктуациях интенсивности и частоты двухмодового лазера	898
Геликонов В. М., Зайцев Ю. И. О естественных флуктуациях интенсивности He-Ne лазера на волне 1,15 мк	904
Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. Теория периодической самофокусировки световых пучков	908
Ена А. И., Литвиненко Л. Н., Шестопапов В. П. Дифракция электромагнитных волн на многоэлементных решетках	913
Филоненко Н. Н. Об эволюции нелинейной периодической волны при наличии резонансных возмущений	925
Малафеев В. М., Полякова М. С., Романовский Ю. М. О процессе синхронизации в цепочке автогенераторов, связанных через проводимость	936
Вигдорчик В. И. К кинетической теории статического режима плоского магнетрона. II. Состояние с тормозящим полем на катоде	941

Информация

Аннотации статей, помещенных в журнале «Геомagnetизм и аэрoнoмия», т. IX, № 6, 1969 г., т. X, № 1, 1970 г. 952

УДК 538.56 : 519.25 : 535

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

С. А. Ахманов, А. С. Чиркин

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ	787
2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ГЕНЕРАЦИИ ОПТИЧЕСКИХ ГАРМОНИК В ОДНОРОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ	792
1. Модели основного излучения; укороченные уравнения	
Тепловое излучение	
Лазерное излучение	
Основные уравнения процесса удвоения частоты	793
2. Удвоение частоты теплового излучения. Эффекты неполной пространственно-временной когерентности	795
Эффекты неполной временной когерентности. Средние интенсивности и спектры взаимодействующих волн	
Эффекты неполной пространственной когерентности	798
Эффекты неполной пространственно-временной когерентности	799
Законы распределения; фотостатистика второй гармоники	801
3. Удвоение частоты лазерного излучения	
Временная структура излучения гармоники; флуктуационные выбросы гармоники	
Спектр второй гармоники	
Избыточные флуктуации интенсивности гармоники	803
Статистика фотоотсчетов	804
3. ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ	805
1. Макроскопически неоднородные среды	
Полидоменные кристаллы. Нелинейная дифракция	806
Кристаллические порошки и их применение для определения нелинейных свойств кристаллов	807
2. Нелинейное молекулярное рассеяние	808
4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УСИЛЕНИИ И ВЫНУЖДЕННОМ РАССЕЙАНИИ СВЕТА	809
1. Параметрическое усиление в поле случайной накачки	
Квазистатистический режим усиления	
Нестационарный режим	810
2. Параметрическое усиление случайных сигналов в поле гармонической накачки	811
3. Статистические явления в вынужденном рассеянии	812
4. О параметрическом усилении в статистически неоднородных средах	814
5. НЕЛИНЕЙНАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИЗЛУЧЕНИЙ	815
1. Нелинейная спектроскопия с пространственным разложением спектра	
2. Нелинейная корреляционная спектроскопия	816

1. ВВЕДЕНИЕ

1. Предлагаемая статья является обзором современного состояния нового раздела статистической оптики — статистической нелинейной оптики.

Теоретические и экспериментальные исследования по статистической оптике имеют долгую историю. То обстоятельство, что обычные тепловые и газоразрядные источники света являются, по существу, гене-

раторами случайных полей, было понято достаточно давно; выяснение особенностей протекания таких фундаментальных оптических явлений, как интерференция и дифракция в поле случайно модулированных электромагнитных волн является предметом так называемой теории когерентности [1]. Другой круг оптических задач, в которых статистические явления играют решающую роль, связан с изучением рассеяния света (см. [2-5]). Важным разделом статистической оптики, тесно прилегающим к изучению статистических явлений в источниках света, является теория формы и ширины спектральных линий [6].

Следует отметить, однако, что в течение длительного времени статистическое описание, использовавшееся в перечисленных разделах оптики, не выходило, как правило, за пределы корреляционно-спектральной теории для стационарных гауссовых процессов; в подавляющем большинстве случаев речь шла только об измерении спектральных плотностей излучения.

Сильное влияние на развитие статистической оптики оказали поэтому выполненные в 1956—1957 гг. опыты Хэнбери-Брауна и Твисса [7], в которых впервые измерялась корреляционная функция интенсивности светового поля (интерферометры интенсивности)

$$G^{(2)}(\tau) = \overline{I(t) I(t + \tau)}. \quad (1.1)$$

Эти эксперименты положили начало исследованию корреляций высших порядков для оптических полей. Опыты Брауна и Твисса стимулировали также интерес к вопросу о связи между статистикой фотоэмиссии и статистикой света, вызывающего фотоэмиссию,—области, которую принято сейчас называть статистикой фотоотсчетов.

Бурный прогресс статистической оптики в последнее десятилетие связан с созданием лазеров. Резко повысился интерес к изучению статистических явлений в источниках света; важные результаты получены при изучении рассеяния света методами интерферометрии интенсивности [8-10].

Новым разделом статистической оптики, возникновение которого фактически целиком обязано лазерам, является статистическая нелинейная оптика. Речь идет о круге задач, связанных с изучением влияния статистических свойств поля («статистика излучения») и нелинейной среды («статистика среды») на протекание нелинейных оптических явлений.

2. Явления, обусловленные статистикой излучения, вызывающего нелинейный эффект, впервые наблюдались в опытах по генерации оптических гармоник, проведенных с твердотельными лазерами еще в 1963—1964 гг. [11, 12]. Речь шла о неожиданно сильных, так называемых избыточных, флуктуациях мощности второй гармоники, генерируемой многомодовым рубиновым лазером. В работах [11-13] эти флуктуации нашли удовлетворительное объяснение на основе довольно простой статистической модели — многомодового излучения со случайным (в интервале $\pi, -\pi$) разбросом фаз в эквидистантных продольных модах; вместе с тем впоследствии было показано, что в ряде случаев надо учитывать другие факторы [13].

Значительно опосредствовали дальнейшим исследованиям проблем, связанных со «статистикой излучения», успешные опыты по генерации гармоник и смещению частот с использованием нелазерных источников света [14, 133], источников гауссового шума, обладающих к тому же сравнительно небольшими масштабами временной и пространственной корреляции. Были выполнены теоретические работы, в которых исследовалось влияние временной и пространственной когерентности основного

излучения на протекание процессов генерации гармоник и оптического смещения [15–18, 34, 91, 102]. В них значительное внимание уделено существенно неквазистатистическим эффектам, приводящим к заметным изменениям и взаимовлияниям частотного и углового спектров, а также законов распределения.

Были расширены и экспериментальные средства изучения статистических явлений при нелинейных преобразованиях излучения; стали использоваться, в частности, методы фотостатистики [19, 20], позволяющие определить законы распределения интенсивности и, следовательно, высшие моменты полей. Особое значение исследования эффектов, обусловленных статистикой излучения, приобрели в связи с использованием техники синхронизации мод лазеров для генерации сверхкоротких световых импульсов. Как показали работы самого последнего времени (см., например, [21]), статистическое описание излучения многомодовых лазеров, даже работающих в режиме синхронизации мод, является наиболее адекватным подходом: в действительности, как правило, приходится иметь дело лишь с частичной синхронизацией мод. Не менее актуальны проблемы, связанные со статистикой возбуждающего излучения и для таких нелинейных эффектов, как параметрическое усиление и генерация, вынужденное рассеяние.

Пространственная и временная некогерентность накачки существенно влияет на характеристики параметрических усилителей и генераторов света [22–24, 28–31]. То же самое относится и к эффектам вынужденного рассеяния, где некогерентность накачки сильно сказывается на коэффициенте усиления стоковых компонент, форме индикатрисы рассеяния, ширине спектра рассеянного излучения [25–27, 32, 33, 35, 36, 38, 39].

Сходные статистические задачи возникают и при исследовании многофотонного поглощения и многофотонной ионизации. Представление о современном состоянии дел в этой области статистической нелинейной оптики можно получить из работ [40–49]; следует отметить, что, несмотря на обилие теоретических исследований, количество экспериментальных исследований в этой области весьма невелико. При изучении явлений, связанных со «статистикой излучения», наряду с исследованием вопроса о влиянии заданной статистики возбуждающего поля на протекание нелинейного оптического эффекта, весьма плодотворной оказывается и обратная постановка вопроса: какую информацию о статистике возбуждающего поля можно получить путем исследования того или иного нелинейного эффекта. Такие «обратные задачи» приобрели особое значение в связи с разработкой методики анализа амплитудно-фазовой структуры широкополосных оптических сигналов.

С сигналами подобного рода приходится иметь дело при синхронизации мод и при самофокусировке лазерных импульсов в жидкостях. Ширина спектров таких сигналов может достигать сотен см^{-1} , а их огибающая и фаза оказываются промодулированными по достаточно сложным законам. Использование методов нелинейной оптики позволяет сравнительно просто измерить высшие корреляционные функции оптических сигналов [127, 130–132, 136], несущие дополнительную информацию о структуре поля; немаловажным оказывается и то обстоятельство, что различные нелинейные оптические явления по-разному реагируют на амплитудную и фазовую модуляцию поля. Широкие экспериментальные исследования высших корреляционных функций оптических полей были начаты в последние два года. В работах [50–56] двухфотонная флуоресценция и удвоение частоты использовались для измерения низшей корреляционной функции интенсивности $G^{(2)}(\tau)$ (см. выше (1.1)). В ряде недавних работ [56–61] показано, что детальная информация о функции $G^{(2)}(\tau)$ позволяет сделать заключение о параметрах огибающей оптиче-

ского сигнала. Вместе с тем при определенных условиях удвоение частоты и двухфотонная флуоресценция оказываются чувствительными и к фазовой модуляции световой волны.

Не только двухфотонная флуоресценция и генерация гармоник, но и параметрическое усиление, и в особенности вынужденное рассеяние, представляют несомненный интерес и с точки зрения обратной задачи статистической нелинейной оптики. В частности, измерение индикатрисы вынужденного комбинационного рассеяния способно дать информацию о форме амплитудной модуляции накачки [38]; при определенных условиях коэффициент усиления стоксовых компонент оказывается чувствительным к виду фазовой модуляции накачки [39]. Наконец, своеобразными интерферометрами интенсивности для волны накачки могут быть рамановские лазеры.

3. Среди работ, в которых исследуются эффекты, обусловленные «статистикой среды», следует отметить [62–64, 118–120], где изучались генерация гармоник и параметрическое усиление в слабонеоднородных и полидоменных кристаллах, генерация оптических гармоник в кристаллических порошках обсуждается в [65, 66, 122, 124] (последние представляют чрезвычайно важными с практической точки зрения, поскольку открывают возможности эффективного поиска новых нелинейных материалов), вынужденное комбинационное рассеяние в порошках — в [5].

Однако наиболее интересными работами этого направления нужно признать работы по так называемому нелинейному рассеянию и работы, посвященные исследованию шумов, обусловленных спонтанными переходами, в параметрических усилителях и генераторах света и при вынужденном рассеянии. Под нелинейным рассеянием здесь понимается некогерентное рассеяние, при котором интенсивность рассеянного света нелинейно зависит от интенсивности рассеиваемого излучения*.

Впервые нелинейное рассеяние было обнаружено Терхьюном и др. [68] (теория явления развивалась в [69–71]). Речь идет о возникновении рассеяния на удвоенной частоте (и близких к ней частотах) падающего излучения в макроскопически однородных средах, в которых когерентная генерация второй гармоники из-за инверсионной симметрии среды как целого невозможна — гармоники же возникают за счет нелинейных свойств отдельных молекул.

Другим примером нелинейного рассеяния, связанного уже с макроскопическими неоднородностями, является нелинейное рассеяние на неоднородностях, возникающих вблизи критической точки. Нелинейное рассеяние этого типа (на второй гармонике падающего излучения) исследовано недавно Фрейндом [72] в кристаллах NH_4Cl вблизи точки фазового перехода второго рода. Исследование указанного рассеяния позволяет получить новую информацию о явлениях вблизи критической точки; обычная методика линейного рассеяния оказывается в этом случае неэффективной (линейные оптические свойства NH_4Cl практически не меняются вблизи критической точки). В работе [73] детально исследована угловая структура такого рассеяния; установлено, что в условиях, когда имеются квазипорядоченные системы доменов, возникает новый эффект, который может быть назван нелинейной дифракцией.

Исследование статистических явлений в параметрических процессах стимулируется в значительной мере последними успехами в создании эффективных параметрических генераторов света непрерывного действия. Интересно, что лишь в 1967 г., через два года после запуска

* Нелинейная зависимость (экспоненциальная) имеет место, как известно, и при вынужденном рассеянии, однако в последнем случае процесс является существенно когерентным, что связано с сильным воздействием рассеиваемого излучения на среду.

параметрических генераторов света, были зарегистрированы собственные шумы параметрических устройств; речь идет о специфическом спонтанном рассеянии в прозрачной среде, которое принято называть «параметрической люминесценцией»*. Это явление теоретически исследовано Клышко [74], Клейнманом [79], Джалоренци и Тангом [78]; экспериментальные данные об эффекте содержатся в [75–77].

В [82–84] рассмотрены статистические явления в оптическом параметрическом генераторе, работающем в установившемся режиме, здесь вычислены, в частности, ширина спектральной линии и уровень амплитудных флуктуаций.

Аналогичные вопросы возникают, разумеется, и для других видов вынужденного рассеяния. Источники флуктуаций в этих процессах детально исследованы достаточно давно, исчерпывающую информацию о них дают многочисленные работы, посвященные спонтанным вариантам указанных рассеяний. Однако в статистической теории вынужденного рассеяния сделаны лишь первые шаги; в большинстве работ этого направления рассмотрение не выходит, как правило, за рамки вычисления ширины линии в режиме заданного гармонического поля накачки (см., например, [35]). В недавних работах [36, 39] рассмотрение проведено для модулированной накачки. Дьяковым [86] была вычислена ширина линии вынужденного рассеяния Мандельштама—Бриллюэна в режиме больших коэффициентов преобразования.

Заканчивая этот краткий перечень работ по статистической нелинейной оптике, укажем еще на теоретические работы, в которых исследуются статистические явления при самофокусировке [87, 88]. По мнению Шимоды [88], в некоторых астрофизических явлениях определенную роль может играть самофокусировка естественного солнечного света в межзвездной плазме.

4. Разумеется, сколько-нибудь подробное изложение всех перечисленных вопросов статистической нелинейной оптики в пределах одной обзорной статьи невозможно. Поэтому мы ограничимся, в основном, рассмотрением влияния статистики излучения и статистики среды на так называемые когерентные нелинейные эффекты, протекание которых существенно зависит от фазовых соотношений между взаимодействующими волнами. В математическом плане речь идет о классических электродинамических задачах, связанных с взаимодействием случайно модулированных в пространстве и времени световых волн в однородных нелинейных средах и взаимодействиями волн в средах со случайными неоднородностями**.

Излагаемая ниже теория базируется на приближенных, так называемых укороченных, уравнениях для комплексных амплитуд модулированных волн; для учета статистической неоднородности среды коэффициенты в них следует считать случайными функциями. В рамках такого классического подхода спонтанные переходы учитываются введением флуктуационных сторонних сил в уравнения поля или материальные уравнения среды.

Ниже принят следующий порядок изложения материала. В разд. 2 рассмотрены эффекты статистики излучения при генерации оптических гармоник в однородных средах. Это один из наиболее разработанных разделов статистической нелинейной оптики; наряду с многочисленными теоретическими исследованиями в этой области выполнено и значитель-

* Следует отметить, что использование термина люминесценция здесь не совсем удачно; фактически речь идет о процессе, аналогичном спонтанному рассеянию (комбинационному или мандельштам-бриллюэновскому), а не люминесценции.

** Обзор работ по статистическим явлениям при многофотонном фотоэффекте выполнен недавно Гладуном и Барашевым [49].

ное количество экспериментальных работ. Разд. 3 посвящен генерации оптических гармоник в статистически неоднородных средах и нелинейному рассеянию. В разд. 4 рассмотрены статистические задачи параметрического усиления и вынужденного рассеяния; при этом анализируются не только стандартные задачи об усилении случайных сигналов в поле гармонической накачки, но и более сложные задачи, связанные с модулированной накачкой. Наконец, разд. 5 посвящен «обратным задачам» статистической нелинейной оптики — методам нелинейной спектроскопии оптического излучения.

2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ГЕНЕРАЦИИ ОПТИЧЕСКИХ ГАРМОНИК В ОДНОРОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

При анализе статистических эффектов при генерации оптических гармоник, связанных со статистикой основного излучения, можно выделить два типа задач: удвоение частоты лазерного излучения и удвоение частоты нелазерного, теплового излучения. Прежде чем перейти к их рассмотрению, остановимся кратко на статистических свойствах преобразуемых полей.

1. Модели основного излучения; укороченные уравнения

Тепловое излучение. Излучение от тепловых и газоразрядных источников представляет собой стационарный гауссов процесс; статистика такого излучения подробно рассмотрена в [105, 116]. Рассмотрим линейно поляризованные квазиплоские квазимонохроматические волны теплового излучения, распространяющиеся вдоль направления оси z , нормальной к границе нелинейной среды. В этом случае на входе нелинейной среды при $z = 0$ тепловое излучение

$$E_1(t, x, y, z) = A_{10}(t, x, y) \exp(i\omega_1 t) \quad (2.1)$$

можно считать стационарным гауссовым процессом, однородным и изотропным в плоскости (xy) , перпендикулярной оси z . Для простоты примем, что его корреляционная функция

$$\Gamma_{10}(\tau, r) = B_{10}(\tau, r) \exp(i\omega_1 \tau), \quad B_{10}(\tau, r) = \overline{A_{10}^*(t+\tau, R+r) A_{10}(t, R)} \quad (2.2)$$

разделяется на произведение пространственной и временной корреляционных функций, имеющих гауссову форму

$$B_{10}(\tau, r) = \bar{I}_{10} \exp(-\tau^2/\tau_k^2 - r^2/r_k^2), \quad (2.3)$$

где $\bar{I}_{10} = \sigma^2$ — средняя интенсивность теплового излучения, σ^2 — дисперсия напряженности поля, τ_k и r_k — время и радиус корреляции излучения. Распределение интенсивности теплового поля подчиняется экспоненциальному закону

$$w(I_{10}) = (I_{10})^{-1} \exp(-I_{10}/\bar{I}_{10}). \quad (2.4)$$

Лазерное излучение. Как уже указывалось во Введении, наибольший интерес изучение статистических эффектов представляет для многомодового лазерного излучения. В этом случае напряженность поля на границе нелинейной среды $z = 0$ можно представить в виде

$$E_{10}(t) = \sum_{n=1}^N a_{1n}(t) \exp\{i[\omega_{1n}t + \varphi_{1n}(t)]\}. \quad (2.5)$$

Здесь a_{1n} , φ_{1n} — амплитуда и фаза n -й моды — в общем случае случайные функции времени, N — общее число мод, частота $\omega_{1n} = \omega_1 + (2n -$

— $N-1$) $\Delta\omega/2$, где ω_1 — средняя частота излучения, а $\Delta\omega$ — частота межмодовых биений.

В установившемся режиме генерации лазера распределенные по гауссовому закону флуктуации амплитуды $a_{1n}(t)$ малы; в дальнейшем, пренебрегая ими, амплитуды a_{1n} считаем постоянными* и для простоты расчетов одинаковыми.

При временном анализе** преобразования лазерного излучения выражение (2.5) удобно представить в виде одной квазимонохроматической волны

$$E_{10}(t) = a_{10} \exp \{i[\omega_1 t + \varphi_1(t)]\} = A_{10}(t) \exp(i\omega_1 t), \quad (2.6)$$

где

$$a_{10} = \sqrt{a_a^2 + a_\Phi^2},$$

$$a_a^2 = \sum_{n=1}^N a_{1n}^2, \quad a_\Phi^2 = \sum_{n, j=1; n \neq j}^N a_{1n} a_{1j} \cos [(j-n)\Delta\omega t + \varphi_{1j}(t) - \varphi_{1n}(t)]. \quad (2.7)$$

Излучение лазера, вообще говоря, есть нестационарный случайный процесс. При этом не только флуктуации интенсивности излучения $I_{10} = a_{10}^2$, но и статистически усредненная интенсивность \bar{I}_{10} сильно зависят от статистических свойств фаз мод.

В режиме несвязанных мод фазы φ_{1n} статистически независимы и имеют равномерное распределение на интервале $(-\pi, \pi)$:

$$\omega(\varphi_{1n}) = 1/2\pi. \quad (2.8)$$

Статистика поля лазерного излучения при этом гауссова***; интенсивность излучения лазера, согласно (2.4), равна $\bar{I}_{10} = a_a^2$. В общем случае фазы мод оказываются связанными; возникает более или менее сильная синхронизация мод. Однако даже в том случае, когда синхронизация мод желательна, полностью синхронный режим обычно недостижим. В [21, 61, 137] рассмотрены следующие модели неполной синхронизации мод: 1) доменная модель [137]: моды синхронизованы между собой отдельными группами; 2) часть мод, занимающая центральную область спектрального распределения излучения, полностью синхронизована, а моды в «крыльях» спектра несинхронизованы [61]; 3) фазы мод φ_{1n} флуктуируют на интервале, меньшем, чем 2π [21]:

$$\omega(\varphi_{1n}) = 1/2\varphi_0 \quad (-\varphi_0 \leq \varphi_{1n} \leq \varphi_0). \quad (2.9)$$

Для последних двух моделей формы огибающей многомодового лазерного излучения приведены на рис. 1.

Основные уравнения процесса удвоения частоты. Интересуясь лишь принципиальной стороной дела, мы ограничимся ниже рассмотрением только взаимодействия типа $\gamma_0(\omega_1) + \gamma_0(\omega_1) \rightarrow \gamma_e(2\omega_1)$ (сокращенно — $oo-e$); для этого процесса генерация гармоник излучением, модулированным в пространстве и во времени, описывается в общем случае уравнениями [89]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{1}{2k_1} \Delta_\perp - i \frac{1}{2} g_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} A_1 = -i\beta A_2 A_1^* e^{i\Delta z}; \quad (2.10a)$$

* Для нелинейных процессов в поле лазерного излучения с неполностью синхронизованными модами существенную роль играют флуктуации фаз мод (см., например, п. 3 настоящего раздела).

** Временной подход позволяет рассматривать задачи о преобразовании лазерного излучения как при малых, так и больших коэффициентах преобразования.

*** Это обстоятельство экспериментально подтверждено в работе [85]

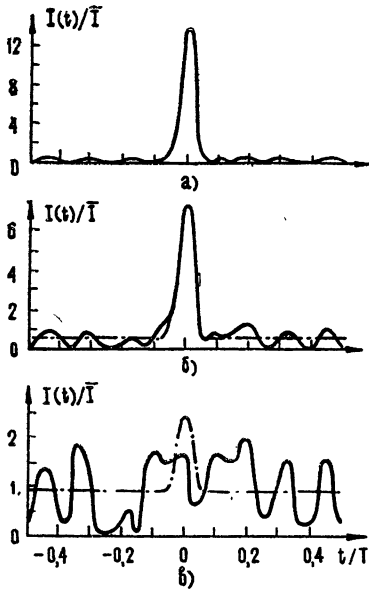


Рис. 1а, б, в. Форма огибающей многомодового лазерного излучения при различной статистике мод.

На рис. 1а, б, в изображены случаи, когда фазы всех мод (построение выполнено для 31 моды) равномерно распределены в интервале $(-\varphi_0, \varphi_0)$. Рис. 1а соответствует $\varphi_0 = \pi/4$; 1б — $\varphi_0 = \pi/2$; 1в — $\varphi_0 = 3\pi/4$. Пунктиром отмечена средняя интенсивность, T — период межмодовых биений [21].

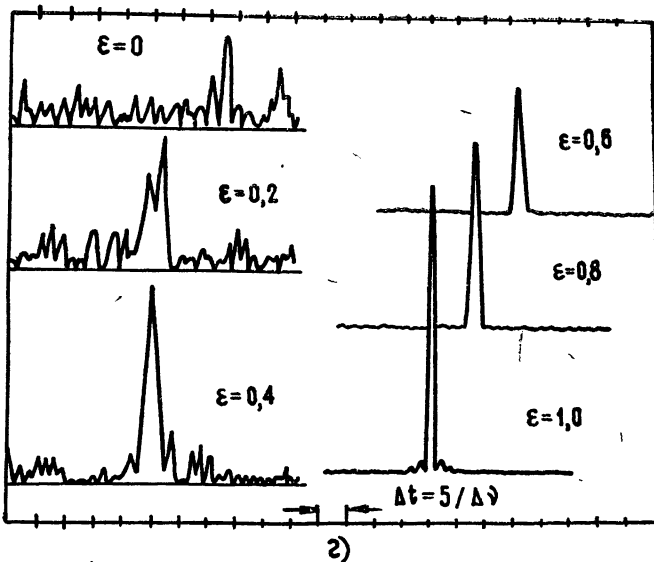


Рис. 1г соответствует другой модели частичной синхронизации мод; предполагается, что лишь центральные моды полностью синхронизированы, а моды, соответствующие краям линии генерации, имеют совершенно случайные фазы. Параметр синхронизации ϵ равен отношению числа синхронизованных мод к полному числу мод [61], $\Delta\omega_1$ — ширина спектра излучения.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_2} \frac{\partial}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{1}{2k_2} \Delta_{\perp} - i \frac{1}{2} g_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} A_2 = -i\beta A_1^2 e^{-i\Delta z}. \quad (2.106)$$

Здесь и далее индекс 1 относится к основному излучению, а 2 — ко второй гармонике. В уравнениях (2.10) A_j — комплексные амплитуды взаимодействующих волн, β — коэффициент нелинейной связи волн; ось z направлена вдоль нормали к границе раздела сред, Δ_{\perp} — лапласиан в плоскости (xy) , ρ — угол двулучепреломления, u_j — групповые скоро-

сти, параметр $g_j = \frac{\partial^2 k_j}{\partial \omega_j^2}$ характеризует дисперсию групповой скорости, k_j — волновые числа, $\Delta = 2k_1 - 2k_2$ — расстройка волновых чисел.

Систему уравнений (2.10) будем решать с условиями при $z = 0$ вида

$$A_1(t, x, y, z = 0) = A_{10}(t, x, y), \quad A_2(t, x, y, z = 0) = 0, \quad (2.11)$$

где $A_{10}(t, x, y)$ — случайная функция. Уравнения (2.10) не удается точно решить аналитически; особенности же генерации оптических гармоник случайно модулированными волнами можно выявить, рассматривая практически интересные случаи.

2. Удвоение частоты теплового излучения. Эффекты неполной пространственно-временной когерентности

Эффекты неполной временной когерентности. Средние интенсивности и спектры взаимодействующих волн. При рассмотрении этих эффектов в (2.10) надо положить $\rho = \Delta_{\perp} = 0$. Тогда в первом приближении теории дисперсии ($g_j = 0$) при наличии группового ($u_1 = u_2 = u$, квазистатический режим генерации) и фазового ($\Delta = 0$) синхронизма решение уравнений (2.10) с условиями (2.11) приводит к следующим выражениям для амплитуд и фаз взаимодействующих волн ($A_j = a_j \exp(i\varphi_j)$):

$$\begin{aligned} a_1(t, z) &= a_{10}(t - z/u) \operatorname{sech} [\beta a_{10}(t - z/u) z], \\ a_2(t, z) &= a_{10}(t - z/u) \operatorname{th} [\beta a_{10}(t - z/u) z], \\ \varphi_1(t, z) &= \varphi_{10}(t - z/u), \quad \varphi_2 = 2\varphi_{10}(t - z/u) - \pi/2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Выражения (2.12) позволяют исследовать статистические свойства основного излучения и второй гармоники в любом сечении нелинейной среды. Рассчитаем среднюю интенсивность и спектральное распределение излучения гармоники.

Пусть вторая гармоника возбуждается тепловым излучением, обладающим симметричным распределением спектра относительно частоты ω_1 , $B_{10}(\tau) = |B_{10}(\tau)|$. При произвольных коэффициентах преобразования для корреляционных функций $B_1(\tau, z)$ и $B_2(\tau, z)$ [90, 92] аналитически удается получить лишь приближенные выражения. Для корреляционной функции гармоники, в частности, имеем [92]

$$\begin{aligned} B_2(\tau, z) &= \left\{ 2 \left(\frac{\tilde{z}}{\operatorname{ch}^2 \tilde{z}} \right)^2 + 3 \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left[\frac{\tilde{z} \operatorname{th} \tilde{z}}{\operatorname{ch}^2 \tilde{z}} - \left(\frac{\tilde{z}}{\operatorname{ch}^2 \tilde{z}} \right)^2 \right] + \right. \\ &\left. + \frac{9\pi}{32} \left(\operatorname{th} \tilde{z} - \frac{\tilde{z}}{\operatorname{ch}^2 \tilde{z}} \right)^2 F \left(0,5; 0,5; 3, \frac{B_{10}^2(\tau)}{\sigma^4} \right) \right\} \frac{B_{10}^2(\tau)}{\sigma^2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\tilde{z} = z/L_n$, $L_n = 1/\beta\sigma$ — длина, на которой для случая плоских монохроматических волн происходит 70% перекачки основного излучения в гармонику. Гипергеометрическая функция $F(1/2, 1/2, 3, x)$ изменяется незначительно (от 1 до 1,13) при изменении x от 0 до 1; вследствие этого $B_2(\tau, z)$; а следовательно, форма и ширина спектра гармоники очень слабо зависят от расстояния z .

При малых коэффициентах преобразования (приближение заданного поля, $\tilde{z} \ll 1$) средняя интенсивность гармоники

$$\bar{I}_2(z) = B_2(0, z) = 2\beta^2 z^2 (\bar{I}_{10})^2 \quad (2.14)$$

оказывается в два раза больше, чем при возбуждении монохроматической волной такой же интенсивности. Физически это обусловлено тем, что спектральные линии гармоники образуются не только за счет удвоения, но и за счет смещения разных частот спектра основного излучения.

В приближении заданного поля спектральная плотность гармоники определяется сверткой

$$S_2(\Omega, z) = (\beta z)^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_{10}(\Omega - \Omega') S_{10}(\Omega') d\Omega', \quad (2.15)$$

где Ω — отклонение от средней частоты излучения, $S_{10}(\Omega)$ — спектральная плотность основного излучения. Для случаев лоренцевой и гауссовой форм $S_{10}(\Omega)$ вид распределения $S_2(\Omega, z)$ сохраняется с тем лишь отличием, что его ширина оказывается соответственно в 2 и $\sqrt{2}$ раз больше ширины $S_{10}(\Omega)$ [90–92].

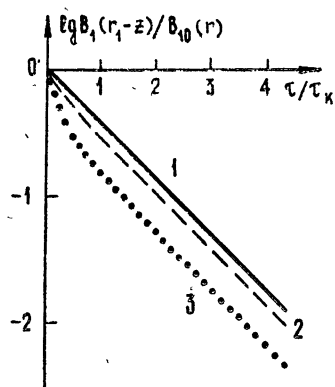


Рис. 2. Графики корреляционной функции основного излучения $B_1(\tau, z)$, экспоненциальной на входе нелинейной среды (кривая

1) для приведенных длин $\tilde{z} = z/L_H = 1$ (кривая 2) и $\tilde{z} = 2$ (кривая 3) [90].

где $\nu = 1/u_2 - 1/u_1$ характеризует расстройку групповых скоростей [12, 15, 89].

На длинах $z < L_\nu = \tau_k/|\nu|$ из (2.16) получаем

$$B_2(\tau, z) = 2\beta^2 \frac{\sin^2(\Delta z/2)}{(\Delta/2)^2} B_{10}^2(\tau). \quad (2.17)$$

Отсюда следует, что средняя интенсивность гармоники $\bar{I}_2(z)$ зависит от z точно так же, как для монохроматических волн; процесс удвоения частоты, несмотря на наличие групповой расстройки ($\nu \neq 0$), остается квазистатическим (при $\Delta = 0$, ср. с (2.14)). Напротив, при $z \gg L_\nu$ картина удвоения частоты существенно изменяется; в этом случае (см. также [15])

$$\bar{I}_2(z) = 4\beta^2 z L_\nu \int_0^{\infty} B_{10}^2(x) \cos(L_\nu \Delta x) dx. \quad (2.18)$$

* Следует отметить, что даже в случае волн с регулярной модуляцией система (2.10) аналитически решается только для амплитудно-модулированных волн [89].

Корреляционная функция, спектральное распределение и ширина спектра основного излучения в значительной степени зависят от обратной реакции гармоники. Вид функции $B_1(\tau, z)$ в полулогарифмическом масштабе для различных z представлен на рис. 2. Видно, что ширина спектра основного излучения увеличивается по мере перекачки его энергии во вторую гармонику (см. также [93]).

При учете группового запаздывания взаимодействующих волн ($u_1 \neq u_2$) уравнения (2.10) для волн со случайной временной модуляцией удастся решить только в приближении заданного поля*. В этом случае корреляционная функция гармоники определяется выражением [15]

$$B_2(\tau, z) = 2\beta^2 \iint_0^z B_{10}^2(\tau + \nu(\xi_2 - \xi_1)) \times \\ \times \exp[i\Delta(\xi_2 - \xi_1)] d\xi_2 d\xi_1, \quad (2.16)$$

Темп роста интенсивности гармоники с координатой z не зависит от дисперсионных свойств среды: независимо от величины Δ , $\bar{I}_2 \sim z$. График $\bar{I}_2(z)$ представлен на рис. 3. Видно, что при $\Delta \neq 0$ на достаточно больших длинах z процесс удвоения монохроматического излучения становится более эффективным, нежели процесс удвоения монохроматического излучения, причем при оптимальных условиях генерации в $\Delta z/4$ раз.

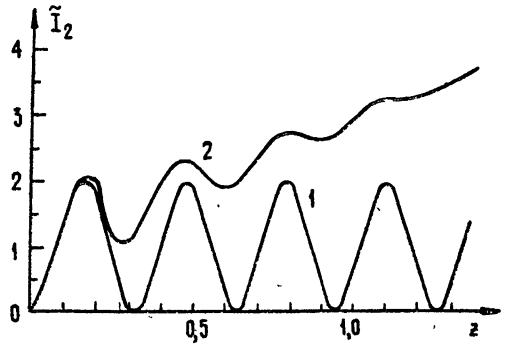


Рис. 3. Зависимость приведенной средней интенсивности второй гармоники \bar{I}_2 от расстояния z для лоренцевой формы спектральной линии основного излучения при волновой расстройке $\Delta = 20 \text{ см}^{-1}$ и различных значений нелинейной когерентной длины L_v : 1) $L_v \rightarrow \infty$, 2) $L_v = 1 \text{ см}$.

Перечисленным результатам можно дать весьма наглядную физическую интерпретацию. Характер энергообмена между волнами гармоники и основного излучения существенно зависит от их взаимной корреляции в рассматриваемом сечении среды. Во всех точках $z \ll L_v$, волны основной частоты и гармоники практически полностью коррелированы и взаимодействие происходит как и в случае волн с фиксированными фазами. При $z \gg L_v$, взаимодействуют полностью некоррелированные волны — нарастание мощности гармоники с расстоянием идет по такому же закону, как для спонтанного рассеяния или нелинейного рассеяния в статистически неоднородной среде (см. разд. 3). В связи со сказанным, характерную длину L_v , на которой время группового запаздывания взаимодействующих волн

$$T = L_v \left| \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right| = \tau_k, \quad (2.19)$$

естественно назвать когерентной длиной* нелинейного взаимодействия.

Отметим, что переход от закона (2.14) к (2.18) происходит на длине, существенно превышающей длину когерентного пучка $L_k = \tau_k u$, фигурирующую в линейной оптике при одном и том же τ_k , $L_v \gg L_k$.

Пользуясь (2.16), можно определить и спектр второй гармоники:

$$S_2^{\text{нк}}(\Omega, z) = \frac{\sin^2 [(\Delta + \nu\Omega) z/2]}{[(\Delta + \nu\Omega) z/2]^2} S_2(\Omega, z). \quad (2.20)$$

Распределение $\bar{I}_2(\Omega, z)$ дается выражением (2.15). Из (2.20) следует, что при $z \gg L_v$ (нестационарный режим) ширина спектра гармоники, определенная по нулевым значениям, равна

$$\Delta\omega_2 = 2\pi/\nu z \quad \text{или} \quad \Delta\lambda_2 = \lambda_2^2/c\nu z \quad (2.21)$$

и с ростом z сужается.

Пользуясь развитой методикой, можно показать, что рассмотренный случай удвоения частоты квазимонохроматического излучения при малых коэффициентах преобразования на длинах $z > L_v$ может быть

* Заметим, что в нелинейной оптике монохроматических волн когерентной длиной часто называют также не связанный со статистикой пространственный масштаб $L_\Delta = 2\pi/\Delta$.

описан с помощью уравнения для средней интенсивности гармоник (или числа фотонов при квантовом подходе). Ранее возможность такого описания рассматривалась в [93, 98, 99].

В работах [98, 99] «скоростные» уравнения трехчастотного взаимодействия получены для «временной» задачи, в которой заранее задаются быстрые флуктуации фаз взаимодействующих волн. Следует отметить, однако, что проведенный в [93] с помощью уравнений для интенсивности анализ генерации гармоник в нелинейном режиме нуждается в дополнительном обосновании по следующим причинам. В нелинейном режиме для получения «скоростных» уравнений оказывается необходимым предположение о полной некоррелированности интенсивностей I_1 и I_2 . Поскольку, из сказанного выше, это предположение верно лишь при $z > L_{\perp}$, то речь идет о режиме генерации, где фазовые соотношения несущественны и, следовательно, дисперсия среды не препятствует генерации высших гармоник.

Эффекты неполной пространственной когерентности. Процесс генерации гармоник в этом случае описывается уравнениями (2.10), в которых временные производные отсутствуют. Если к тому же можно пренебречь вторыми производными по координатам ($\Delta_{\perp} = 0$, простейшее приближение геометрической оптики), то, в силу существования в теории нелинейного взаимодействия модулированных волн пространственно-временной аналогии [89], все сказанное относительно эффектов неполной временной когерентности оказывается применимым к эффектам неполной пространственной когерентности. Поведение интенсивности и углового спектра гармоник вдоль оси x определяется соотношением между длиной z и нелинейной когерентной длиной $L_{\perp} = r_k / \rho$, представляющей собой аналог длины $L_{\parallel} = \tau_k / |\nu|$. Здесь мы кратко проанализируем процесс генерации гармоник с учетом дифракционных эффектов ($\Delta_{\perp} \neq 0$).

В приближении заданного поля средняя интенсивность гармоник в рассматриваемом случае определяется выражением (см. [16, 92])

$$\bar{I}_2(z) = 4\beta^2 (\bar{I}_{10})^2 \int_0^z (z - \xi) \frac{\cos(\Delta\xi) + (\xi/L_{\perp}) \sin(\Delta\xi)}{1 + (\xi/L_{\parallel})^2} \times \\ \times \exp \left[-2 \left(\frac{\xi}{L_{\perp}} \right)^2 \right] d\xi, \quad (2.22)$$

$$L_{\perp} = r_k / \rho, \quad L_{\parallel} = (1/2) k_1 r_k^2.$$

Характерная длина L_{\parallel} — линейная когерентная длина*, ее также называют продольной когерентной или дифракционной длиной [103].

Графики \bar{I}_2 в зависимости от Δ представлены на рис. 4. Максимальное значение $\bar{I}_{2, \max}$ при $L_{\parallel} \simeq L_{\perp} > z$ достигается в области $\Delta > 0$. При $L_{\perp} < (k_1 \rho^2)^{-1}$ получаем приближенно (см. [92]).

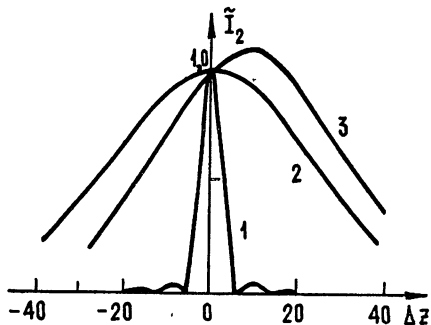
$$\bar{I}_{2, \max} \simeq 2,24 \beta^2 (k_1 \rho^2)^{-1} z (\bar{I}_{10})^2 \exp(k_1 \rho r_k / \sqrt{2}) \quad (2.23)$$

при $\Delta_0 \simeq 2,8 L_{\perp}^{-1}$. Отсюда следует, что с уменьшением радиуса пространственной корреляции r_k (увеличением расходимости) интенсивность гармоник $\bar{I}_{2, \max}$ падает, а значение Δ_0 растет. Экспериментально

* Здесь уместно заметить, что с параметром g в уравнениях (2.10) и временем когерентности основного излучения τ_k можно связать линейную когерентную длину $L_g = r_k^2 / 2g$, являющуюся аналогом L_{\parallel} .

подобные зависимости наблюдались Макмагоном [14], исследовавшим генерацию второй гармоники от излучения ксеноновой лампы:

Рис. 4. Зависимость приведенной средней интенсивности второй гармоники $\tilde{I}_2 = \overline{I_2(z, \Delta)} / \overline{I_2(z, 0)}$ от приведенной расстройки при различных значениях когерентных длин L_{\perp} и L_{\parallel} [93]: 1) $z \ll L_{\perp}, L_{\parallel}$ (зависимость аналогична таковой для плоских волн); 2) $z = 9L_{\perp}, z \ll L_{\parallel}$; 3) $z = 9L_{\perp}, z = 5L_{\parallel}$.



Эффекты неполной пространственно-временной когерентности. До сих пор влияние пространственной и временной некогерентности основного излучения на процесс удвоения частоты света рассматривалось порознь. Одновременное наличие в основном излучении указанных некогерентностей может приводить в некоторых случаях к новым эффектам [102, 104]. Так, например, нестационарный режим генерации второй гармоники тепловым излучением с учетом эффектов пространственной когерентности в приближении геометрической оптики при малых коэффициентах преобразования описывается корреляционной функцией ($\Delta = 0$)

$$B_2(\tau, x, y, z) = 2\beta^2 \int_0^z (z-\xi) [B_{10}^2(\tau+\nu\xi, x+\beta\xi, y) + B_{10}^2(\tau-\nu\xi, x-\beta\xi, y)] d\xi. \quad (2.24)$$

Отсюда, вообще говоря, следует, что в процессе умножения частоты возникает взаимовлияние пространственной и временной модуляций. В самом деле, для корреляционной функции $B_{10}(\tau, x, y)$ (2.3) выражение (2.24) на длинах $z > L_{\nu}, L_{\perp}$ преобразуется к виду

$$B_2(\tau, x, y, z) = \frac{\sqrt{2\pi} \beta^2 z}{4(L_{\nu}^{-2} + L_{\perp}^{-2})^{1/2}} (\overline{I_1})^2 \exp \left[-\frac{(\beta\tau - \nu x)^2}{(\nu r_k)^2 + (\beta r_x)^2} - 2\frac{y^2}{r_k^2} \right]. \quad (2.25)$$

Спектральное распределение гармоники сглаживается по сравнению с (2.20), имеющим место для пространственно-когерентного излучения.

Время корреляции для второй гармоники равно

$$\tau_2 = (1/\sqrt{2}) \tau_k [1 + (L_{\perp}/L_{\nu})^2]^{1/2}. \quad (2.26)$$

При помощи изменения L_{\perp} возможны изменения τ_2 от квазистатистического значения $\tau_2^{(кв)} = \tau_k/\sqrt{2}$ до нестационарного $\tau_2^{(н)} = |\nu|z$, определяемого дисперсионными свойствами нелинейного кристалла. Отмеченные обстоятельства на спектральном языке связаны с векторными синхронными взаимодействиями

$$\mathbf{k}_2(2\omega_1 + \Omega) = \mathbf{k}_1(\omega_1 + \Omega') + \mathbf{k}_1(\omega_1 + \Omega''). \quad (2.27)$$

Аналогичные утверждения справедливы и для углового распределения гармоники.

Законы распределения; фотостатистика второй гармоники. Сведения о законе распределения светового излучения можно получить, исследуя статистику электронов фотодетектора, регистрирующего световой пучок [105, 116]. При полуклассическом описании процесса регистрации вероятность появления n фотоэлектронов за время наблюдения T дается выражением (см. [105, 116])

$$P_j(n, T) = \int_0^{\infty} \frac{U_j^n}{n!} \exp(-U_j) \omega(U_j) dU_j; \quad (2.28)$$

$$U_j = \int_t^{t+T} I_j(t') dt' \quad (j = 1, 2). \quad (2.29)$$

Для простоты квантовая эффективность детектора принята за единицу. Относительные флуктуации величины U_j связаны с моментами числа фотоотсчетов n_j соотношением

$$d_j = [\overline{U_j^2} - (\overline{U_j})^2]^{1/2} / \overline{U_j} = [\overline{n_j^2} - (\overline{n_j})^2 - \overline{n_j}]^{1/2} / \overline{n_j}. \quad (2.30)$$

Распределения интенсивности и фотоотсчетов гармоник для времен $T \ll \tau_k$, возбуждаемой тепловым излучением в квазистатистическом режиме (2.14), определяются соответственно выражениями [19]

$$\omega(I_2) = (2\overline{I_2})^{-1/2} \exp[-(2I_2/\overline{I_2})^{1/2}]; \quad (2.31)$$

$$P_2(n) = \frac{(2n)!}{n! 2^n \sqrt{\overline{n_2}}} \exp\left(\frac{1}{4} \overline{n_2}\right) D_{-(1+2n)}\left(\frac{1}{\sqrt{\overline{n_2}}}\right), \quad (2.32)$$

$D_{-n}(x)$ — функция Вебера, $\overline{n_2} = 2(\beta_2 \overline{I_{10}})^2 T$. Функции распределения $\omega(I_1)$ (2.4) и $\omega(I_2)$ изображены на рис. 5. Распределение фотоотсчетов* (2.32), для которого $d_2 = \sqrt{5}$, сильно отличается как от пуассоновского распределения ($d=0$), так и от распределения Бозе—Эйнштейна ($d=1$), которому подчиняется фотостатистика теплового излучения [116].

В нестационарном режиме генерации (при $z > L$, или $z > L_{\perp}$) статистика гармоник стремится к гауссовой; тогда должно быть $d_2 \rightarrow 1$. Сказанное иллюстрируется приведенной на рис. 6 расчетной зависимостью d_2 от z . Эту зависимость, по-видимому, можно использовать для измерения времени или радиуса когерентности основного излучения.

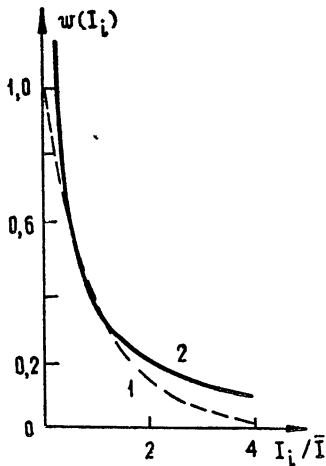


Рис. 5. Распределение интенсивности теплового излучения (кривая 1) и второй гармоники (кривая 2), возбуждаемой тепловым излучением в квазистатистическом режиме.

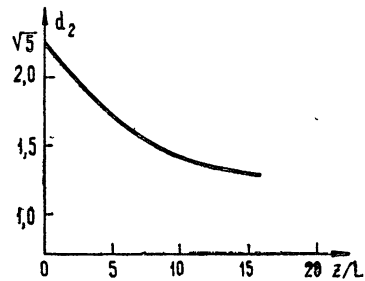


Рис. 6. Схематическая зависимость относительных флуктуаций интенсивности второй гармоники $d_2 = [(\overline{I_2} - \overline{I_2})^2]^{1/2} / \overline{I_2}$, возбуждаемой в нестационарном режиме, от длины z .

* Квантовый вывод распределения фотоотсчетов второй гармоники, возбуждаемой тепловым излучением, дан в недавней работе [117].

3. Удвоение частоты лазерного излучения

Рассмотренные выше вопросы в той или иной мере представляют интерес и в задачах удвоения частоты лазерного излучения. Введенные для характеристики процесса генерации гармоники тепловым излучением длины L , L_{\perp} , L_g и L_1 можно отнести и к случаю лазерного излучения, заменяя параметры теплового излучения на лазерные параметры. Вместе с тем физическая интерпретация указанных длин для случая лазерного излучения в большинстве ситуаций оказывается отличной от случая теплового излучения (ср., например, [15, 106]). Не имея здесь возможности на этом остановиться сколько-нибудь подробнее, мы ограничимся рассмотрением, главным образом, задач об удвоении частоты лазерного излучения в квазистатическом режиме.

Временная структура излучения гармоники; флуктуационные выбросы гармоники. Анализ флуктуационных выбросов гармоники, возбуждаемой лазерным излучением с частично синхронизованными модами, представляет собой довольно сложную задачу. Рассмотрение значительно упрощается для излучения с несинхронизованными модами, статистика которого гауссова. При помощи (2.4) и в случае квазистатического режима возбуждения гармоники при помощи (2.31) нетрудно найти вероятности значений интенсивностей, превышающих средние значения в α раз:

$$P_1(\alpha) = e^{-\alpha}, \quad P_2(\alpha) = e^{-\sqrt{2\alpha}}. \quad (2.33)$$

Для $\alpha > 2$ $P_2(\alpha) > P_1(\alpha)$ (см. также рис. 5), т. е. флуктуации лазерного излучения в гармонике подчеркиваются. Вообще говоря, подобное явление происходит в любом нелинейном процессе, использующем в качестве накачки излучение с флуктуирующей интенсивностью. Пользуясь (2.33) и следуя работе [138], можно показать, что если в основном излучении возможны периодически повторяющиеся выбросы с интенсивностью, превышающей среднюю почти на порядок, то в гармонике возможны выбросы, интенсивность которых больше средней на несколько порядков. При больших коэффициентах преобразования ($\text{th } \beta a_1 z \rightarrow 1$, см. (2.17)) и в нестационарном режиме генерации временная структура гармоники становится близкой к таковой для основного излучения.

Спектр второй гармоники. Здесь наибольший интерес представляет спектральное распределение гармоники, возбуждаемой в нестационарном режиме. При малых коэффициентах преобразования анализ спектра гармоники можно провести, воспользовавшись (2.20) и подставляя $\bar{I}_2(\Omega, z)$ в виде

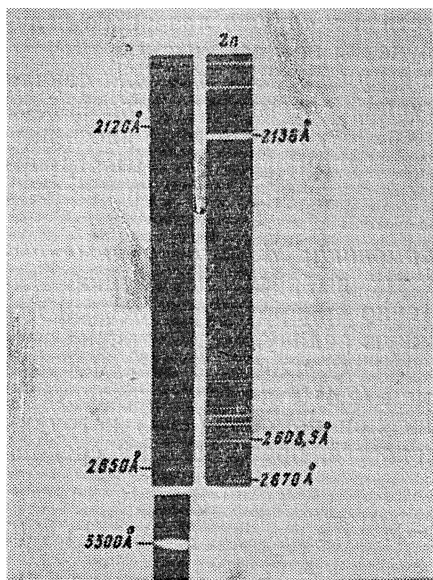
$$S_2(\Omega, z) = (\beta z)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} A_{10}(\Omega - \Omega') A_{10}(\Omega') d\Omega' \right|^2 \quad (2.34)$$

($A_{10}(\Omega)$ — фурье-спектр комплексной амплитуды основного излучения). Здесь $S_{20}(\Omega)$ существенно зависит от фазовых соотношений между модами излучения лазера. Нестационарный режим генерации гармоники излучением с несинхронизованными модами проанализирован в [166], а случай полностью синхронизованных мод — в [107, 108].

В существенно нестационарном режиме структура спектра второй гармоники определяется дисперсионной функцией, стоящей в (2.20) перед $S_{20}(\Omega)$, а его ширина — (2.21). В соответствии с (2.21) в [134] за счет сильной дисперсии нелинейных кристаллов в ультрафиолетовой области наблюдалось значительное сужение спектра генерируемой пятой гармоники (см. рис. 7). В работах [100, 101] сжатие спектра второй гармоники,

по сравнению со спектром лазерного излучения, использовалось для создания генератора с перестраиваемой частотой; перестроечная кривая такого генератора определяется выражением

$$\omega' = 2\omega_1 - \Delta/\nu. \quad (2.35)$$



Указанные обстоятельства могут быть положены в основу создания сканирующего монохроматора (см. разд. 5).

Экспериментальное исследование нестационарного режима возбуждения гармоник проведено также в работах [104, 109, 110]. Шапиро [110] при помощи двухфотонной флуоресценции исследовал длительность импульсов гармоники в зависимости от длины и дисперсионных свойств нелиней-

Рис. 7. Спектры излучения 2-й, 4-й, 5-й гармоник, возбуждаемых в кристаллах KDP излучением неодимового лазера [104];

$$\Delta\lambda_2 = 30 \text{ \AA}, \Delta\lambda_4 < 1 \text{ \AA}, \Delta\lambda_5 \sim 1 \text{ \AA}.$$

ных кристаллов (см. рис. 8). В [104] найдена зависимость спектра гармоники от расходимости лазерного излучения; полученные спектраль-

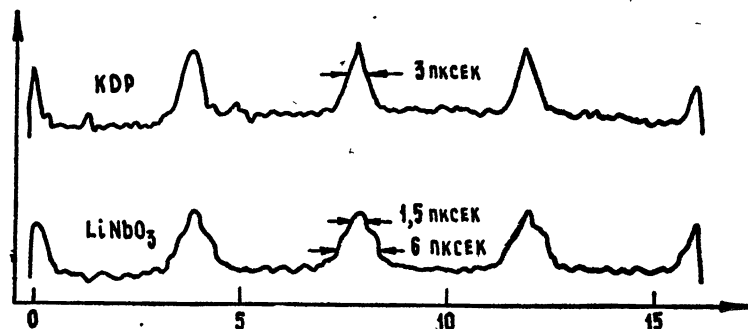


Рис. 8. Треки двухфотонной флуоресценции для второй гармоники, возбуждаемой в кристаллах KDP (верхняя кривая) и LiNbO₃ (нижняя кривая) [110];

длительности импульсов гармоники соответственно равны 4 псек и 9 псек.

ные распределения представлены на рис. 9. Видно, что в соответствии с результатами п. 2, разд. 2 увеличение расходимости основного излучения приводит к расширению спектра гармоники. Ранее вопрос о влиянии расходимости лазерного излучения на спектр гармоники теоретически рассматривал Фрейдман [102].

В задаче об удвоении частоты одномодового излучения наиболее интересным оказывается вопрос о преобразовании ширины спектральной линии. Можно показать (см. [139]), что в квазистатическом режиме ширина линии гармоники больше линии основного излучения в два раза

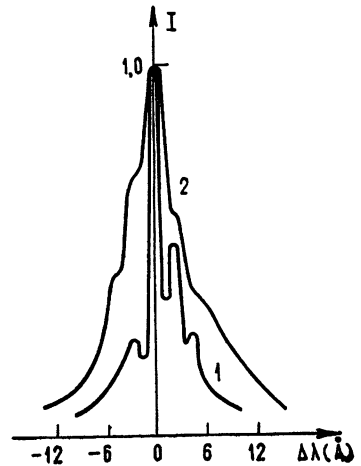
для гауссовой формы и в четыре раза для лоренцевой формы — результаты, существенно отличающиеся от таковых для гауссового шума (ср. с формулой (2.15)).

Избыточные флуктуации интенсивности гармоники. Поскольку лазерное излучение обычно регистрируется приборами с постоянной времени $T \gg \Delta\omega^{-1}$, то его интегральная интенсивность за это время равна (см. (2.6) и (2.7))

$$U_1 = \int_t^{t+T} a_{i0}^2(t') dt' = T a_a^2 \quad (2.36)$$

Рис. 9. Экспериментальные кривые спектра второй гармоники, возбуждаемой в кристалле LiNbO_3 расходящимся пучком, формируемым линзой с фокусным расстоянием:

1) $R = -25$ см; 2) $R = -10$ см.



и постоянна для принятой в п. 1 разд. 2 модели излучения с нефлуктуирующими амплитудами мод.

Интенсивность второй гармоники за время T в случае квазистатического режима генерации определяется выражением

$$U_2 = \int_t^{t+T} a_{i0}^2(t') \text{th}^2 [\beta a_{i0}(t') z] dt'. \quad (2.37)$$

Величина U_2 зависит от флуктуаций фаз в модах лазера; последние приводят к так называемым избыточным флуктуациям интенсивности гармоники, не связанным непосредственно с флуктуациями интенсивности излучения лазера (см. рис. 10). Избыточные флуктуации возникают,

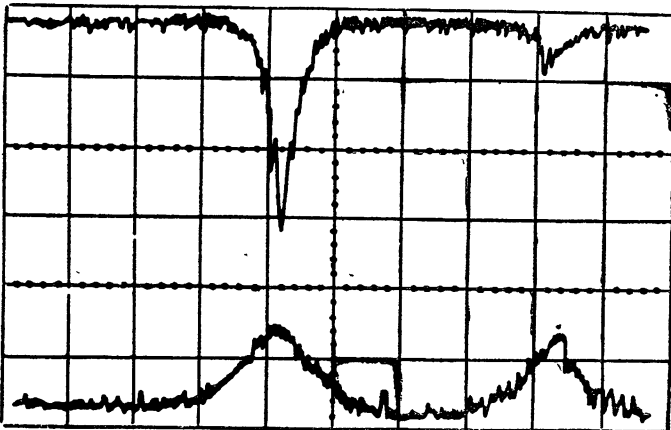


Рис. 10. Осциллограммы пиков лазерного излучения (нижняя кривая) и второй гармоники (верхняя кривая) [11]. Пики гармоники уже пиков лазерного излучения. Видно, что лазерные импульсы почти одинаковой интенсивности возбуждают импульсы гармоники разной интенсивности.

если число мод $N \geq 3$. Для $N = 3$ значение U_2 зависит от фазы $\Phi = 2\varphi_{12} - \varphi_{11} - \varphi_{13}$ [11], и в случае равных амплитуд мод лазера относительные флуктуации U_2 составляют 19%.

Для лазерного излучения с несинхронизованными модами средняя интегральная интенсивность гармоники равна [11, 13]

$$\bar{U}_2 = (2 - 1/N) (\beta z U_1)^2 / T. \quad (2.38)$$

Таким образом, многомодовое лазерное излучение интенсивности, одинаковой с одномодовым, оказывается при генерации второй гармоники в $2 - 1/N$ раз эффективнее (ср. с (2.14)). При оценке относительных флуктуаций интенсивности U_2 , d_2 для числа мод $N \gtrsim 5$ можно пользоваться формулой* $d_2 \approx (1,5N)^{-1/2}$ ([11, 13, 111]). С ростом КПД преобразования значение d_2 монотонно уменьшается [11].

На рис. 11 для модели частичной синхронизации мод (2.9) и $N = 3$ приведена зависимость значения d_2 от интервала флуктуаций фаз $2\varphi_0$.

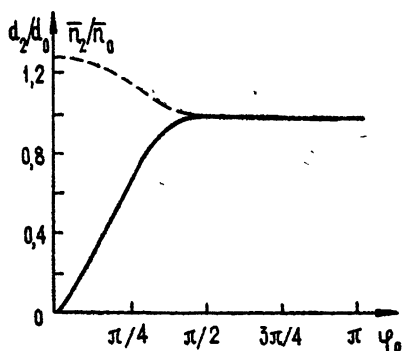


Рис. 11. Относительные флуктуации интенсивности d_2 (сплошная кривая) и среднее число фотоотчетов n_2 (пунктирная кривая) второй гармоники, возбуждаемой трехмодовым лазерным излучением, в зависимости от интервала флуктуаций фаз φ_0 :

$$d_0 = d_2(\pi), \quad n_0 = n_2(\pi).$$

При малых коэффициентах преобразования интенсивность гармоники, возбуждаемой излучением лазера с синхронизованными модами, равна [92, 114]

$$U_2 = (2N + 1/N) (\beta z U_1)^2 (3T)^{-1}. \quad (2.39)$$

Сравнение (2.39) с (2.38) показывает, что при генерации второй гармоники излучение лазера с синхронизованными модами эффективнее в $\eta = N/3$ раз, нежели с несинхронизованными. Экспериментальное сравнение генерации гармоники с синхронизованными и несинхронизованными модами выполнено в работах [113, 114]: авторами [114] было получено значение выигрыша $\eta \approx 13$. Для трехмодового лазерного излучения с несинхронизованными фазами $\omega(U_2)$ имеет вид [19]

$$\omega(U_2) = \pi^{-1} [B^2 + (U_2 - C)^2]^{-1/2}, \quad C = (5/3) (\beta z U_1)^2 T^{-1}, \quad (2.40a)$$

$$B = (4/9) (\beta z U_1)^2 T^{-1}.$$

В гармонике, возбуждаемой многомодовым лазерным излучением, распределение интенсивности U_2 , учитывая малость относительных флуктуаций d_2 , можно записать в гауссовой форме [19, 111]

$$\omega(U_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(U_2 - \bar{U}_2)^2}{2\sigma^2} \right], \quad \sigma^2 = \bar{U}_2^2 - (\bar{U}_2)^2 = (d_2 \bar{U}_2)^2. \quad (2.40б)$$

Статистика фотоотчетов. В опытах с твердотельными лазерами избыточные флуктуации интенсивности гармоники могут быть связаны с флуктуационным разбросом фаз, флуктуациями числа мод, флуктуациями угловой расходимости и т. п. [13, 14, 115]. Корректно вклад в флуктуации интенсивности гармоники флуктуаций фаз лазерного излучения

* Подробно избыточные флуктуации гармоники на основе спектрального подхода рассмотрены в [111].

можно исследовать в экспериментах, проводимых с газовыми лазерами, используя для регистрации гармоник метод счета фотонов [20].

Распределение фотоотсчетов гармоник можно найти, подставив (2.40) в (2.28), либо воспользовавшись производящей функцией (см. [19]). Факториальные моменты фотоотсчетов гармоник, возбуждаемой многомодовым излучением, подчиняются рекуррентному соотношению

$$\overline{n^{[l]}} = \sigma^2 (l-1) \overline{n^{[l-2]}} + \overline{U_2} \overline{n^{[l-1]}}, \quad \overline{n^{[l]}} = \overline{n^2} (n-1) \dots (n-l+1). \quad (2.40в)$$

В табл. 1 приведены экспериментальные значения факториальных моментов фотоотсчетов гармоник, возбуждаемой в кристалле LiNbO_3 многомодовым излучением He-Ne лазера; принципиальная схема экспериментальной установки приведена на рис. 12. В табл. 1 представлены также расчетные значения третьего и четвертого факториальных моментов,

Рис. 12. Блок-схема экспериментальной установки [20] для измерения статистики фотоотсчетов гармоник, возбуждаемой лазерным излучением. Импульсы с ФЭУ (4) длительностью 10 нсек поступают на формирователь (4) с мертвым временем 20 нсек; мертвое время счетчика (7) 10 нсек.

1—He-Ne лазер ($\lambda=1,15 \text{ мкм}$); 2а—фильтр ИКС-2, 2б—фильтр СЗС-17; 3—кристалл LiNbO_3 ; 4—ФЭУ-36; 5—формирователь; 6—ключ; 7—счетчик; 8—индикатор; 9—схема управления; 10—таймер; 11—анализатор спектра.

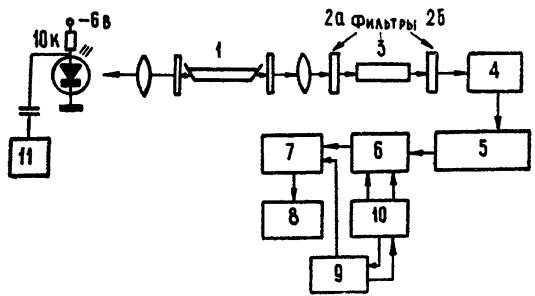


Таблица 1

Значения факториальных моментов фотоотсчетов второй гармоники

Экспериментальные					Теоретические			
$\overline{n^{[1]}}$	$\overline{n^{[2]}}$	$\overline{n^{[3]}}$	$\overline{n^{[4]}}$	d_2	$N = 3$		$N \gg 1$	
					$\overline{n^{[3]}}$	$\overline{n^{[4]}}$	$\overline{n^{[3]}}$	$\overline{n^{[4]}}$
8,77	78,3	708	6472	0,13	707	6404	699	6520

полученные с помощью экспериментальных значений $\overline{n^{[1]}}$ и $\overline{n^{[2]}}$. Видно, что данные эксперимента хорошо объясняются как трехмодовой, так и многомодовой моделью лазерного излучения. Это обусловлено, вероятно, тем, что в эксперименте число мод в лазерном излучении было $N = 5$, а относительные флуктуации интегральной интенсивности гармоник U_2 невелики, $d_2 = 0,13$.

3. ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК В СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Задачи о генерации гармоник в статистически неоднородных средах можно разделить на два типа. Если изменение свойств среды происходит достаточно медленно на расстояниях порядка длины волны, то взаимодействие электромагнитных волн можно описывать с помощью укороченных уравнений. В противоположном случае, когда флуктуации параметров среды в указанном смысле являются «быстрыми», необходимо привлечение, вообще говоря, стохастических методов.

1. Макроскопически неоднородные среды

В таких средах коэффициент нелинейной связи волн β , волновые числа k_n и двулучепреломление среды ρ представляют собой медленные функции координат. Чтобы при анализе нелинейного взаимодействия

волн выявить эффекты, связанные только со статистической неоднородностью сред, мы рассмотрим взаимодействия монохроматических пучков, пренебрегая их дифракционным расплыванием. Тогда процесс генерации второй гармоники для взаимодействия $oo \rightarrow e$ определяется уравнением (см. [62, 64])

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \rho(\mathbf{r}) \frac{\partial A_2}{\partial x} - i\Lambda(\mathbf{r})A_2 = -i\beta(\mathbf{r})A_{10}(x, y) \exp(-i\bar{\Delta}z). \quad (3.1)$$

Здесь $A_{10}(x, y)$ — заданная функция, описывающая напряженность лазерного поля в поперечном сечении пучка, $\Lambda(\mathbf{r})$ связана с флуктуациями линейной восприимчивости среды, а расстройка $\bar{\Delta}$ имеет смысл средней расстройки ($\Lambda = \Delta - \bar{\Delta}$).

Полидоменные кристаллы. Нелинейная дифракция. В кристаллах небольшие отклонения оптической оси приводят, в основном, к флуктуациям $\Lambda(\mathbf{r})$ и, следовательно, к изменению волновой расстройки между взаимодействующими волнами [62]. Флуктуации коэффициента $\beta(\mathbf{r})$ в кристаллах связаны с полидоменной структурой [64, 73, 118–121].

Рассмотрим сначала для простоты оптически однородные среды (кристаллы с антипараллельными доменами, $\Lambda(\mathbf{r}) = 0$) и пренебрежем двулучепреломлением ($\rho = 0$). При этих условиях напряженность поля гармоники определяется выражением

$$A_2(x, y, z) = -iA_{10}^2(x, y) \int_0^z \beta(x, y, \xi) \exp(-i\bar{\Delta}\xi) d\xi. \quad (3.2)$$

Из (3.2) можно найти фурье-спектр гармоники. Для двумерного случая

$$S_2(\mathbf{k}_{2x}, z) = -i \iiint_{-\infty}^{\infty} \beta(x_x, x_z) S_{10}(k'_x) S_{10}(k''_x) \exp[i(x_z - \Delta)z] \times \\ \times \frac{\sin[(x_z - \Delta)z/2]}{(x_z - \Delta)/2} \delta(\mathbf{k}_{2x} - \mathbf{k}'_x - \mathbf{k}''_x) dk'_x dk''_x dx_x dx_z, \quad (3.3)$$

где

$$\beta(x_x, x_z) = \beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \beta(x, z) \exp[i(x_x x + x_z z)] dx dz.$$

Вид спектра $\beta(\mathbf{x})$ определяется типом полидоменной структуры [73]; а «волновое» число x зависит от размера доменов. Для доменов равной толщины s , $x_n = \pi(2n - 1)/s$, где n — номер гармоники; причем с ростом n $\beta(x_n) \sim (2n - 1)^{-1}$ [64, 73].

Основной вклад в спектр S_2 (3.3) дают волны, волновые векторы которых удовлетворяют условиям

$$\mathbf{k}_{2x} = \mathbf{k}'_x + \mathbf{k}''_x + \mathbf{x}, \quad \Delta = x_z, \quad (3.4a)$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}''_1 + \mathbf{x}. \quad (3.4b)$$

Выражение (3.4b) является нелинейным аналогом закона Вульфа — Брегга.

Из (3.3) следует, что в полидоменных кристаллах могут быть направления «псевдосинхронизма» ($\Delta = x_z$), для которых $S_2(\mathbf{k}_{2x}, z) \sim z$. Поэтому такие кристаллы можно использовать для согласования фазовых скоростей [119]. Пространственная модуляция коэффициента нели-

нейной связи β может приводить к дополнительной пространственной модуляции пучка гармоники по сравнению с основным пучком, а также к смещению углового распределения гармоники ($\alpha_x \neq 0$). Именно это явление рассеяния на неоднородностях нелинейности (или нелинейной дифракция) наблюдалось в [73]. Заметим, что флуктуации размеров доменов приводят к увеличению угловой расходимости гармоники [120] и изменению темпа нарастания интенсивности гармоники по сравнению с монодоменными кристаллами [64].

Вышеизложенное в значительной мере остается в силе и для жидких кристаллов [125, 126].

Кристаллические порошки и их применение для определения нелинейных свойств кристаллов.

Генерация гармоник в кристаллических порошках является еще одним примером взаимодействия волн в статистически неоднородных средах. На рис. 13 приведена блок-схема экспериментальной установки, используемой для исследования генерации гармоник в кристаллических порошках, порошок готовят из частиц определенного размера и обычно помещают в кювету с иммерсионной жидкостью.

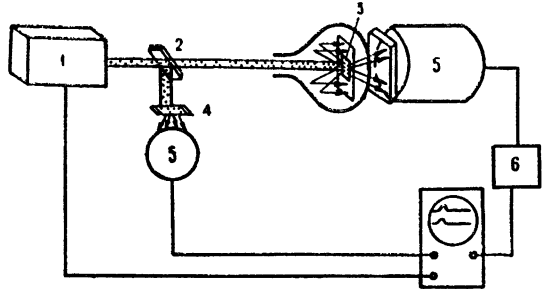


Рис. 13. Принципиальная схема установки [124] для исследования генерации второй гармоники в порошках:

1—лазер, 2—расщепитель пучка, 3—образец порошка, 4—нелинейный кристалл, в котором возбуждается опорная гармоника, 5—ФЭУ, 6—усилитель.

Особенности генерации гармоник в кристаллических порошках можно теоретически рассмотреть, воспользовавшись уравнением (3.1) и считая случайную расстройку $\Delta(\mathbf{r})$ гауссовым процессом $|\bar{\Delta} = 0|$. Для интенсивности гармоники, усредненной по ансамблю реализаций, получим

$$\bar{I}_2(z) = 2\bar{\beta}^2 I_1^2 \int_0^z (z-z_1) R_\beta(z_1) \cos(\Delta z_1) \exp[-\bar{\Lambda}^2 \int_0^{z_1} (z_1-\xi) R_\Lambda(\xi) d\xi] dz_1, \quad (3.5)$$

где

$$R_\beta(\xi_2 - \xi_1) = \overline{\beta(x, y, \xi_2) \beta(x, y, \xi_1)} (\bar{\beta}^2)^{-1},$$

$$R_\Lambda(\xi_2 - \xi_1) = \overline{\Delta(x, y, \xi_2) \Delta(x, y, \xi_1)} (\bar{\Lambda}^2)^{-1}$$

— коэффициенты корреляций, $\bar{\Lambda}^2 = \bar{\Delta}^2 - (\bar{\Delta})^2$. Методику расчета величин $\bar{\beta}^2$, $\bar{\Lambda}^2$ и значение их для различных кристаллографических групп можно найти в [67, 124]. Поскольку значения $R_\beta(z_1)$ и $R_\Lambda(z_1)$ отличны от нуля лишь на длинах $z_1 \leq s < z$, то $\bar{I}_2 \sim z$, т. е. средняя интенсивность гармоники пропорциональна числу частиц.

Рассмотрим сначала генерацию гармоник в порошках, состоящих из частиц, обладающих независимо от их ориентации постоянной фазовой расстройкой $\bar{\Delta}$. В случае частиц одинакового размера

$$\bar{I}_2 \simeq 2\bar{\beta}^2 z \frac{\sin(\bar{\Delta}s)}{\bar{\Delta}} I_1^2 \quad (3.6)$$

и имеют место биения в зависимости \bar{I}_2 от s . В реальных условиях раз-

меры частиц неодинаковы, что приводит к сглаживанию биений. Предполагая, что распределение размеров частиц релеевское, находим

$$\bar{I}_2 \simeq 2\bar{\beta}^2 z s \bar{I}_{10}^2 \exp[-(1/\pi)(\bar{\Delta}\bar{s})^2]. \quad (3.7)$$

Максимальное значение интенсивности \bar{I}_2 (3.7) достигается при среднем размере частиц $\bar{s} \simeq 1,3/\bar{\Delta}$.

График функции (3.7) приведен на рис. 14, здесь же указана зависимость \bar{I}_2 от s для частиц, имеющих направление синхронизма

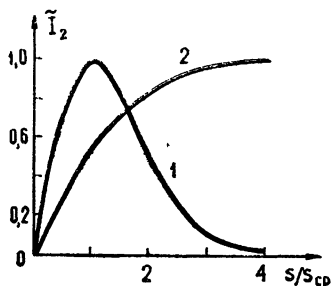


Рис. 14. Зависимость приведенной интенсивности второй гармоники, возбуждаемой в кристаллических порошках, от среднего размера частиц \bar{s} :

- 1) для частиц с постоянной фазовой расстройкой;
- 2) для частиц, имеющих в определенном направлении фазовый синхронизм.

($\bar{\Delta} = 0$). В этом случае существенны флуктуации фазовой расстройки. Интенсивность гармоники определяется выражением

$$\bar{I}_2 = \sqrt{2\pi} \bar{\beta}^2 z I_{10}^2 \Phi[(2\bar{\Delta}^2 \bar{s}^2)^{1/2}]/(\bar{\Delta}^2)^{1/2} \quad (3.8)$$

и для частиц относительно большого размера зависимость \bar{I}_2 от \bar{s} насыщается.

Кривые, аналогичные приведенным на рис. 14, экспериментально были получены в работе [124]. Таким образом, исследование интенсивности гармоники, возбуждаемой в кристаллическом порошке, в зависимости от размера частиц позволяет выявить наличие фазового синхронизма в кристалле.

2. Нелинейное молекулярное рассеяние

Предельным случаем нелинейного рассеяния, в котором проявляются микроскопические неоднородности нелинейной восприимчивости, является нелинейное молекулярное рассеяние.

Наиболее удобные условия регистрации эффекта возникают в том случае, когда соответствующий когерентный процесс запрещен. Если дипольный момент молекулы жидкости можно представить в виде

$$\hat{d} = \hat{\alpha} E + \hat{\beta} EE, \quad (3.9)$$

где β_{ijk} — тензор квадратичной нелинейной восприимчивости отдельной молекулы, удвоение частоты света в ней в дипольном приближении носит характер некогерентного рассеяния. При наличии центра инверсии среднее значение тензора квадратной поляризуемости $\chi_{ijk} = 0$, и генерация гармоники определяется флуктуациями макроскопической восприимчивости $\bar{\chi}^2 \sim \beta^2$.

Интенсивность рассеянного излучения \bar{I}_2 в этом случае, очевидно, пропорциональна числу частиц N в рассеивающем объеме (как для спонтанного линейного рассеяния; ср. также результаты п. 1 этого раздела):

$$\bar{I}_2 \sim \frac{\beta^2 N}{c\lambda^4} I_{10}^2. \quad (3.10)$$

Если для β использовать значения $\beta \simeq 10^{-30}$ СГСЕ, что по порядку величины равно «молекулярной» нелинейной восприимчивости для кристаллов в видимом диапазоне, при $I_{10} = 10^8 - 10^9$ *вт · см⁻²* интенсивность рассеяния объемом в 1 *см³* в жидкости имеет порядок $I_2 \sim 10^{-5}$ *вт*. Таким образом, можно ожидать, что около $10^{-12} - 10^{-13}$ энергии основного излучения должно рассеиваться во вторую гармонику.

Терхьюном с сотрудниками [68] молекулярное рассеяние на второй гармонике наблюдалось в воде, плавном кварце и четыреххлористом углероде (CCl₄). В предположении, что рассеяние происходит в ориентированных случайным образом молекулах, авторы [68] определили из своих опытов величину β для CCl₄; она хорошо согласуется с вышеприведенной оценкой. Из экспериментальных исследований, помимо [68], следует указать еще на работу [37], в которой изучалось молекулярное рассеяние на второй гармонике в газах, и [135], посвященную нелинейному молекулярному рассеянию в жидкостях.

В теоретических работах [67-69] обсуждались возможности регистрации молекулярных корреляций, квазикристаллических состояний и динамики молекул в жидкостях методом нелинейного молекулярного рассеяния.

4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УСИЛЕНИИ И ВЫНУЖДЕННОМ РАССЕЯНИИ СВЕТА

Обратимся прежде всего к анализу влияния «статистики излучения» на протекание процесса параметрического усиления света. Так как рассматриваемый процесс характеризуется взаимодействием трех независимых волн, задачи, связанные со статистикой излучения, здесь более разнообразны, нежели в случае генераций оптических гармоник. Поэтому мы отдельно рассмотрим вопросы, относящиеся к «статистике накачки» и «статистике сигнала».

1. Параметрическое усиление в поле случайной накачки

Процесс невырожденного параметрического взаимодействия случайно модулированных во времени волн в приближении заданного поля накачки ($A_n(t, z) = A_{n0}(t - z/u)$) описывается укороченными уравнениями [23, 24]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_c} \frac{\partial}{\partial t} + \delta_c \right\} A_c = -i\beta_c A_{n0} \left(t - \frac{z}{u_n} \right) A_p^*(t, z) e^{i\Delta z},$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{u_p} \frac{\partial}{\partial t} + \delta_p \right\} A_p = -i\beta_p A_{n0} \left(t - \frac{z}{u_n} \right) A_c^*(t, z) e^{i\Delta z}.$$
(4.1)

В (4.1) $A_{c, p}$, $u_{c, p}$ и $\delta_{c, p}$ — амплитуды, групповые скорости и потери волн сигнальной ω_c и разностной $\omega_p = \omega_n - \omega_c$ частот (ω_n — частота накачки), $\Delta = k_c + k_p - k_n$ — волновая расстройка, $\beta_{c, p}$ — коэффициент нелинейной связи волн. Граничные условия для системы (4.1):

$$A_c(t, z = 0) = A_{c0}(t), \quad A_p(t, z) = A_{p0}(t).$$
(4.2)

Решение (4.1) в общем случае, когда все взаимодействующие волны случайно модулированы и групповые скорости различны, представляет значительные трудности.

Квазистатический режим усиления. Этот режим ($u_n = u_p = u_c = u$) при наличии на входе нелинейной среды лишь монохроматической сигнальной волны ($A_{p0} = 0$) описывается выражением

$$A_c(t, z) = A_{c0} e^{-\delta z} \operatorname{ch} [\beta a_{n0} (t - z/u) z], \quad (4.3)$$

где $\beta = \sqrt{\beta_c \beta_p}$, и для простоты считаем $\delta_c = \delta_p = \delta$.

Выражение (4.3) позволяет, в принципе, рассмотреть процесс параметрического усиления в поле накачки с любыми статистическими свойствами. Характерными чертами рассматриваемого процесса является расширение спектра усиленного сигнала, уменьшение пороговой интенсивности накачки по сравнению с монохроматической накачкой [23, 24, 28–31, 92]; другими словами, более эффективна модулированная накачка по сравнению с гармонической.

В случае двухмодовой накачки ($N = 2$, $a_{n1} = a_{n2} = a$) в спектре усиленного сигнала возникают дополнительные моды с частотами $\omega_c \pm m\Delta\omega$, интенсивность которых изменяется по закону [23, 24]

$$I_c(\omega_c \pm m\Delta\omega, z) = I_{c0} e^{-2\delta z} I_{2m}^2 (2\beta a z). \quad (4.4a)$$

Пороговая интенсивность накачки, усредненная за время $T \gg 2\pi/\Delta\omega$, для не слишком малых δz равна

$$\langle I_{n0}^{\text{пор}} \rangle = \delta^2 / 2N\beta^2 \quad (4.4b)$$

($\langle I_{n0} \rangle = U_{n0}/T$, см. (2.29)).

Формула (4.4b) справедлива для $N \leq 3$; причем для $N = 3$ —при соотношении фаз $2\varphi_{n2} = \varphi_{n1} + \varphi_{n3}$. При $N \geq 3$ флуктуации фаз в модах накачки приводят, как и в случае генерации второй гармоники, к избыточным флуктуациям в интенсивности сигнала.

Сильнее всего указанные эффекты выражены в поле накачки с синхронизованными модами; в этом случае при больших коэффициентах усиления ширина спектра сигнала равна [92]:

$$\Delta\omega_c \simeq 0,24 \Delta\omega_n \sqrt{\beta a z} = 0,24 \sqrt{\beta z} (\langle I_{n0} \rangle / N)^{1/4} \quad (4.5a)$$

и пороговая интенсивность накачки

$$\langle I_{n0}^{\text{пор}} \rangle \simeq 4\delta/\beta^2 z. \quad (4.5b)$$

Если в качестве накачки используется гауссов случайный процесс, то, согласно [24],

$$\bar{I}_{n0}^{\text{пор}} \simeq 4\delta/\beta^2 z. \quad (4.6)$$

В экспериментальных условиях, очевидно, $z \ll 2N/\delta$ и поэтому порог при шумовой накачке выше, чем для накачки с синхронизованными модами.

Нестационарный режим. Анализ усиления в общем случае ($u_n \neq u_c \neq u_p$) представляет значительные трудности. Некоторые результаты удается получить, используя условия, определяющие быстроту изменения амплитуд и фаз взаимодействующих волн. Поэтому здесь удобно перейти к действительной записи уравнений взаимодействия ($A_j = a_j \exp(i\varphi_j)$).

Процесс вырожденного параметрического усиления в приближении заданного поля в системе координат $\eta = t - z/u_c$, $\zeta = z$ описывается уравнениями

$$\frac{da_c}{d\zeta} + \beta a_c a_{n0} (\eta - v\zeta) \sin \Phi = 0; \quad (4.7a)$$

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} + \frac{d\varphi_{n0}(\eta - v\zeta)}{d\zeta} + \Delta + \beta a_{n0} \cos \Phi = 0, \quad (4.7b)$$

где $\Phi = 2\varphi_c - \varphi_{н0}(\eta - \nu\zeta) - \Delta\zeta$, $\nu = 1/u_n - 1/u_c$. При $\nu < \beta\bar{a}_{н0}\tau_{к,н}$ фаза Φ при изменении $a_{н0}$ и $\varphi_{н0}$ успевает достичь установившегося значения Φ_y ($\frac{d\Phi_y}{d\zeta} = 0$). Заменяя в уравнении (4.7 а) Φ на Φ_y , для средней интенсивности сигнала получаем

$$\bar{I}_c(z) = I_{c0} \exp \left\{ \int_0^z \left[[\beta a_{н0}(\eta - \nu\zeta)]^2 - \left[\Delta - \nu \frac{d\varphi_{н0}(\eta - \nu\zeta)}{d\eta} \right]^2 \right]^{1/2} d\zeta \right\}. \quad (4.8)$$

Видно, что наличие расстройки групповых скоростей ($\nu \neq 0$) и флуктуаций фазы накачки ухудшает условия параметрического усиления. На длинах $z < L_\nu = r_{к,н}/|\nu|$ расстройкой групповых скоростей можно пренебречь, т. е. считать $\nu = 0$ (ср. с результатами п. 2, разд. 2).

2. Параметрическое усиление случайных сигналов в поле гармонической накачки

Перейдем к обсуждению параметрического взаимодействия «шумовых» волн в поле гармонической накачки. Задачи такого рода представляют интерес не только с точки зрения выяснения влияния некогерентности сигналов на процессы усиления [34], но и в связи с экспериментами по параметрической сверхлюминесценции. Хотя в оптическом диапазоне источниками собственных флуктуаций сред являются квантовые флуктуации [74, 78–80], анализ волновой картины эффекта удобно проводить в рамках классического подхода.

Ограничимся рассмотрением волны разностной частоты, полагая на входе нелинейной среды $A_{p0} = 0$; в этом случае корреляционная функция рассматриваемой волны определяется выражением [92]

$$B_p(\tau, z) = \beta_p^2 I_{н0} \iint_0^z \exp[-i\Delta(\xi_2 - \xi_1)] B_{c0}[\tau + \nu(\xi_2 - \xi_1)] \times \\ \times I_0(\Gamma\sqrt{\xi_2(z - \xi_2)}) I_0(\Gamma\sqrt{\xi_1(z - \xi_1)}) d\xi_1 d\xi_2, \quad (4.9)$$

где

$$\Gamma^2 = 4\beta_c \beta_p I_{н0}, \quad \nu = 1/u_c - 1/u_p,$$

а спектральная плотность разностной частоты дается формулой

$$S_p(\Omega, z) = 4\beta_c^2 I_{н0} S_{c0}(\omega_n - \Omega) \frac{\text{sh}^2\{(z/2)[\Gamma^2 - [\nu(\Omega - \omega_p) - \Delta]^2]^{1/2}\}}{\Gamma^2 - [\nu(\Omega - \omega_p) - \Delta]^2}, \quad (4.10)$$

$S_{c0}(\omega)$ — спектральное распределение сигнала на входе нелинейной среды.

Если процесс взаимодействия волн когерентный, т. е. $z < L_\nu = \tau_{к,с}/|\nu|$ или ширина спектра входного сигнала $\Delta\omega_{c0} < 1/\nu z$, для любого значения Γz ширина спектра разностной частоты равна $\Delta\omega_p = \Delta\omega_{c0}$, а средняя интенсивность $\bar{I}_p(z)$ зависит от расстояния z , как для монохроматических волн.

В случае некогерентного взаимодействия волн ($z > L_\nu$, или $\Delta\omega_p > 1/\nu z$)

$$\Delta\omega_p = 6/\nu z \quad (\Gamma z \ll 1); \quad (4.11a)$$

$$\Delta\omega_p \simeq 2\sqrt{\Gamma z}/\nu z \quad (\Gamma z \gg 1). \quad (4.11б)$$

Поскольку с ростом Γz значение $\Delta\omega_p$ должно монотонно нарастать, формулой (4.11 б) можно пользоваться лишь при $\Gamma z > 10$. Таким образом, в некогерентном режиме усиления вплоть до $\Gamma z \simeq 10$ значение $\Delta\omega_p$

практически постоянно. Дальнейшее увеличение значения Γ приводит к медленному росту $\Delta\omega_p$, а именно $\Delta\omega_p \sim I_{\text{но}}^{1/4}$.

Темп нарастания средней интенсивности $\bar{I}_p(z)$ в рассматриваемом режиме гораздо медленнее, нежели в когерентном:

$$\bar{I}_p(z) = \beta_p^2 I_{\text{но}}^2 \int_0^z I_0^2(\Gamma \sqrt{y(z-y)}) dy \int_0^\infty B_{\text{co}}(\nu x) \cos(\Delta x) dx. \quad (4.12)$$

Интересно отметить, что интенсивность в некогерентном режиме генерации суммарной частоты от «шумого» сигнала определяется формулой, аналогичной (4.12), лишь с заменой $I_0(x)$ на $J_0(x)$ [92]. Поэтому в отличие от когерентного режима, где интенсивность суммарной частоты испытывает пространственные биежия в зависимости от z [96, 97], в некогерентном режиме на достаточно больших длинах она достигает установившегося значения.

Представленный в этом разделе анализ параметрического усиления случайных сигналов, обобщенный на волны случайно модулированные в пространстве и во времени, позволяет рассмотреть волновую картину параметрической люминесценции и сверхлюминесценции.

3. Статистические явления в вынужденном рассеянии

Задачи, рассмотренные выше применительно к параметрическому усилению («статистика накачки», «статистика сигнала»), представляют большой интерес и для вынужденных рассеяний, при этом очень часто случайную модуляцию накачки и сигнала необходимо рассматривать одновременно. Ниже на основе, главным образом, наших работ [38, 39] приведен анализ вынужденного комбинационного рассеяния (ВКР) с учетом указанных явлений. Полученные результаты во многом применимы и к другим видам вынужденного рассеяния.

В заданном поле накачки стоксово рассеяние на переходе, подчиняющемся альтернативному запрету, описывается уравнениями вида

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{T_2} \sigma = -i\beta_c A_n A_c^* + N(t, z); \quad (4.13a)$$

$$\frac{1}{u_c} \frac{\partial A_c}{\partial t} \pm \frac{\partial A_c}{\partial z} = -i\beta_c \sigma A_n. \quad (4.13b)$$

Здесь σ — амплитуда недиагонального элемента матрицы плотности, T_2 — время поперечной релаксации, индекс «с» относится к стоксовой волне. Неизбежным источником статистики являются спонтанные переходы; в уравнении (4.13) они учтены путем введения сторонней случайной силы $N(t, z)$.

Решение системы уравнений (4.13) при нулевых граничных и начальных условиях можно записать для случая малых групповых запаздываний ($u_n \simeq u_c \simeq u$) в виде

$$A_c(\eta, z) = -i\beta_c A_{\text{но}}(\eta) \int_0^\eta dt \int_0^z d\xi \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) N(\eta-t, z-\xi) \times \\ \times I_0\left[\frac{2\xi}{T_2} \int_{\eta-t}^\eta \Gamma(y) dy\right]^{1/2}, \quad (4.14)$$

$$\Gamma(\eta) = 2\beta_c \beta_c T_2 I_{\text{но}}(\eta), \quad \eta = t - z/u.$$

Вводя естественное предположение, что

$$\overline{N^*(t, z) N(t', z')} = g \delta(t - t') \delta(z - z'), \quad (4.15)$$

получаем среднюю интенсивность стоковского излучения

$$\bar{I}_c(\eta, z) = g\beta_c I_{н0}(\eta) \int_0^\eta \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \int_0^z I_0^2 \left[\frac{2\xi}{T_2} \int_{\eta-t}^\eta \Gamma(y) dy \right]^{1/2} d\xi dt. \quad (4.16)$$

Формулы (4.14)—(4.16) позволяют исследовать интенсивность и спектр спонтанного и вынужденного комбинационного рассеяния при произвольной модуляции накачки.

В поле квазинепрерывной накачки (период модуляции накачки τ_n удовлетворяет условию $\tau_n \gg T_2$)

$$\bar{I}_c(z) = \frac{g\beta_c}{4\beta_c \sqrt{\pi\Gamma_0 z}} \exp(\Gamma_0 z), \quad (4.17)$$

где $\Gamma_0 = 2\beta_c \beta_c T_2 I_{н0}$ — статический коэффициент усиления. В соответствии с (4.17) нарастание интенсивности спонтанного шума с расстоянием z происходит медленнее, нежели нарастание интенсивности гармонического сигнала ($I_c \sim \exp(\Gamma_0 z)$), поскольку одновременно с усилением происходит сужение линии вынужденного рассеяния по закону $\Delta\omega_c \sim (T_2 \sqrt{\Gamma_0 z})^{-1}$.

В поле модулированной накачки поведение спектральной линии комбинационного рассеяния обнаруживает интересные особенности. Отметим прежде всего, что уширение спектра накачки ведет к уширению спектра спонтанного рассеяния. При корреляционной функции накачки

$$B_{н0}(\tau) = \overline{A_{н0}(t + \tau) A_{н0}(t)} = \bar{I}_{н0} \exp(-\tau/\tau_n)$$

корреляционная функция спонтанного стоковского рассеяния имеет вид

$$B_c(\tau, z) = \frac{1}{2} g\beta_c z T_2 \bar{I}_{н0} \exp\left[-\left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{\tau_n}\right)\tau\right], \quad (4.18)$$

и, следовательно, $\Delta\omega_c = (T_2 + \tau_n)/T_2 \tau_n$.

Модуляция накачки приводит к уширению и спектра вынужденного рассеяния. Однако теперь, в отличие от спонтанного рассеяния, ширина и форма спектра стоковой компоненты вынужденного рассеяния определяются не только спектром накачки, но и формой ее амплитудной модуляции.

Особенно сильны отличия от режима квазинепрерывной накачки в существенно нестационарном режиме, когда $\tau_n/T_2 \ll \Gamma_0 z$; для прямоугольного импульса накачки

$$\Delta\omega_c \simeq (\Gamma_0 z/2T_2 \tau_n)^{1/2}, \quad (4.19a)$$

а для гауссова импульса

$$\Delta\omega_c \simeq \sqrt{\ln \Gamma_0 z} / \tau_n. \quad (4.19b)$$

В соответствии с (4.19) спектр рассеянных компонент расширяется с расстоянием; в реальных случаях спектр рассеянного излучения может в несколько раз превосходить по ширине спектр накачки*.

* Аномальное уширение этого типа (на временном языке ему соответствует уменьшение характерного времени амплитудной модуляции накачки) было зарегистрировано в ряде жидкостей [134].

Как следует из (4.16), в том случае, когда стоковая компонента ВКР возникает за счет спонтанных переходов в среде, ее интенсивность нечувствительна к фазовой модуляции (ФМ) накачки. Таким образом, уширение спектра накачки за счет ее фазовой модуляции приведет в этом случае лишь к соответствующему уширению спектра стоковой волны (переложение модуляции). Иная ситуация возникает, если в поле модулированной накачки усиливается первоначально гармоническая стоковая волна. Здесь уже интенсивность стокового сигнала становится чувствительной к ФМ накачки; наличие ФМ уменьшает усиление.

Рассмотренные вопросы представляют значительный интерес и для режимов больших преобразований, когда приближение заданного поля накачки уже не работает. Здесь можно указать лишь на работу Дьякова [86], оценившего «нелинейную» ширину линии ВРМБ в поле квазинепрерывной накачки. Любопытным результатом оказывается вывод о сравнительно небольшом (не превышающем нескольких раз) предельном сужении спектральной линии стоковой компоненты.

В общем случае на статистику рассеянного излучения оказывают влияние эффекты группового запаздывания; учет их для случая $\tau_n/T_2 \gg \Gamma_0 z$ не представляет труда. Одновременный учет группового запаздывания и молекулярной релаксации удается провести лишь для специальной формы импульсов накачки [39]. Как и в случае удвоения частоты, групповое запаздывание приводит к монохроматизации спектра рассеянных компонент.

4. О параметрическом усилении в статистически неоднородных средах

Очевидно, что для параметрического усиления представляют интерес задачи типа рассмотренных в разд. 3 настоящей статьи — параметрическое усиление в стационарной статистически неоднородной среде. Однако здесь мы хотели бы обратить внимание на другой класс задач, особенно интересных для параметрических процессов — это вопросы об усилении волн в статистически неоднородной нестационарной среде.

Воздействие слабо статистически неоднородной нестационарной среды на распространяющуюся в ней волну может проявляться двояко. Флуктуации параметров среды вызывают флуктуации амплитуды $\alpha(t, z)$ и фазы $\psi(t, z)$ волны такие, что $\bar{\alpha} = \bar{\psi} = 0$. Помимо этого, в флуктуирующей среде возможны медленные, накапливающиеся изменения амплитуды и фазы распространяющейся волны, связанные с воздействием на волну синхронных волн изменения параметра*. Интересуясь только накапливающимися эффектами сигнала, волну в координатах $\eta = t - z/u$, $\zeta = t + z/u$ (u — групповая скорость) можно искать в виде (рассматриваем одномерную задачу, рассеянием пренебрегаем)

$$E = a(\mu\eta, \mu\zeta) \sin(\omega\eta + \varphi(\mu\eta, \mu\zeta)), \quad (4.20)$$

где μ — малый параметр ($\mu \ll 1$).

Будем считать, что флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости среды ϵ , $\xi(t, z)$ является случайным полем, стационарным и однородным, причем

$$\bar{\xi}(t, z) = 0, \quad \sqrt{\overline{\xi^2}}/\epsilon \ll 1. \quad (4.21)$$

Если время корреляции случайного поля $\tau_k \ll T = 2\pi/\omega$, а радиус кор-

* Процесс в известном смысле аналогичный процессу стохастического ускорения заряженных частиц

реляции $r_k \ll 1/\delta$, где δ — потери среды, то для анализа рассматриваемой задачи можно воспользоваться аппаратом марковских процессов. Расчет показывает, что появление в амплитуде a отличного от нуля среднего вклада случайного поля $\xi(t, z)$ обуславливается корреляцией фазы волны сигнала $\varphi_k \xi(t, z)$; амплитуда a нарастает при $\delta < \delta_{кр}$, где

$$\delta_{кр} = \frac{2\pi\omega^3}{u^2 \epsilon} \iint_{-\infty}^{\infty} B_{\xi}(\tau, r) \cos(2\omega\tau) \cos 2\omega \frac{r}{u} d\tau dr, \quad (4.22)$$

$B_{\xi}(\tau, r)$ — корреляционная функция процесса $\xi(t, z)$.

Таким образом, усиление происходит за счет спектральной компоненты, имеющей частоту $\sim 2\omega$ и подходящую пространственную периодичность.

Разумеется, рассматриваемый механизм усиления реализуется для достаточно низкочастотных волн.

5. НЕЛИНЕЙНАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ ОПТИЧЕСКИХ ИЗЛУЧЕНИЙ

Проведенное в предыдущих разделах рассмотрение показывает, что эффективность нелинейных процессов существенно зависит от дисперсии среды и когерентных свойств взаимодействующих волн. В последние два-три года оба эти явления используются для исследования частотной и временной структуры лазерного излучения и лежат в основе методов нелинейной спектроскопии лазерного излучения.

1. Нелинейная спектроскопия с пространственным разложением спектра

В основе так называемой нелинейной спектроскопии с пространственным разложением спектра [140, 142] лежит зависимость от частоты направления синхронного взаимодействия волн. Это свойство нелинейных взаимодействий применяется также для спектрального анализа в инфракрасном диапазоне [144] и для изучения временной эволюции спектров [143].

В нелинейной спектроскопии можно выделить следующие основные задачи: 1) определение частоты спектральной линии и 2) разрешение структуры спектральной линии.

Схема дискриминатора частоты для решения первой задачи изображена на рис. 15. Рассмотрим возбуждение второй гармоники слабо расходящимся монохроматическим излучением. В этом случае изменение частоты основного излучения на величину $\Delta\omega_1$ (или второй гармоники на $\Delta\omega_2 = 2\Delta\omega_1$) вызывает смещение максимума пространственного распределения гармоники вдоль оси x на волновое число k_{2x} , удовлетворяющее соотношению

$$v\Delta\omega_2 = \rho k_{2x}. \quad (5.1)$$

Отсюда получаем выражение для изменения угла синхронизма с изменением длины волны гармоники: $\Delta\theta = D\Delta\lambda_2$. Величина $D = |v|c/\rho\lambda_2$ является угловой дисперсией нелинейного спектрографа; для кристалла KDP при $\lambda_2 = 0,52 \text{ мк}$, $D = 3,5 \text{ мин} \cdot \text{Å}^{-1}$. На экране, находящемся на

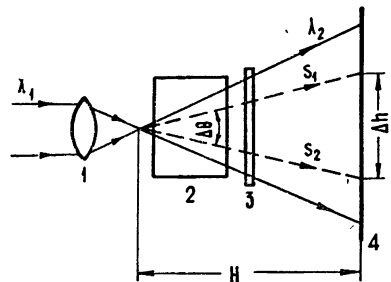


Рис. 15. Схема дискриминатора частоты на основе оптического удвоителя: 1 — линза, 2 — нелинейный кристалл, 3 — фильтр, пропускающий излучение гармоники, 4 — экран.

расстоянии H от фокуса линзы, максимум излучения второй гармоники смещается на величину h , так что

$$\Delta\lambda_2 = h/n_2 D(\lambda_2) H, \quad (5.2)$$

n_2 — показатель преломления кристалла на длине волны λ_2 .

В соответствии с критерием Рэлея спектральные линии λ_1 и $\lambda_1 + 2\Delta\lambda_2$, учитывая их возможное сложение в удвоителе частоты, следует считать разрешенными, если [140]

$$\Delta\lambda_2 \geq 2\Delta\lambda_2^{(p)} = 2\lambda_2^2/c |\nu| z, \quad (5.3)$$

$\Delta\lambda_2^{(p)}$ — шириной синхронизма (см. (2.21)).

Разрешающая способность дискриминатора частоты равна

$$A = \frac{\lambda_2}{2\Delta\lambda_2^{(p)}} = \frac{c |\nu| z}{2\lambda_2} \leq \frac{z}{2\lambda_2} \quad (5.4)$$

и увеличивается с ростом z . Хотя в принципе таким образом можно осуществить и анализ линий более сложной формы, обработка результатов оказывается трудоемкой; комбинация процессов удвоения и смещения приводит к появлению сложной структуры в плоскости наблюдения.

В этом случае более предпочтительными оказываются процессы сложения или вычитания частоты, в которых исследуемый спектр смешивается с монохроматической линией. При смешении монохроматического излучения частоты ω_1 и анализируемого сигнала со средней частотой ω_2 угловое распределение интенсивности $S_3(k_{3x}, z)$ суммарной частоты определяется соотношением (ср. с (4.10)) ($\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$)

$$S_3(k_{3x}, z) = 8\pi\beta_3^2 I_{10} \int_{-\infty}^{\infty} S_{20}(\Omega, k_{3x}) \frac{\sin^2[(\nu\Omega - \rho k_{3x})z/2]}{(\nu\Omega - \rho k_{3x})^2} d\Omega. \quad (5.5)$$

Выражение (5.5) записано в приближении заданных полей частот ω_1 и ω_2 и справедливо при $z < L_1$ (см. разд. 2). При ширине спектра сигнала $\Delta\omega_2 \gg 2\pi|\nu|z$ распределение

$$S_3(k_{3x}, z) \simeq 4\pi^2\beta_3^2 z I_{10} S_2\left(\frac{\rho}{\nu} k_{3x}, k_{3x}\right). \quad (5.6)$$

содержит сведения о спектральном распределении вблизи частоты ω_2 . И, наконец, если угловая расходимость анализируемого излучения такова, что характерная длина $L_1 > z$, получение сведений о $S_2(\Omega)$ затруднено.

2. Нелинейная корреляционная спектроскопия

В основе этой области нелинейной спектроскопии лежит то обстоятельство, что нелинейные оптические явления могут быть использованы для измерения корреляционных функций интенсивности

$$G^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \overline{I(t) I(t + \tau_1) \dots I(t + \tau_{n-1})}. \quad (5.7)$$

В современной нелинейной корреляционной спектроскопии особенно важную роль играет корреляционная функция $G^{(2)}(\tau)$. Для гауссова процесса в связи с тем, что $G^{(2)}(\tau)$ выражается через функцию $\Gamma(\tau)$ [105, 116], появляется возможность измерения корреляционной функции

поля $\Gamma(\tau)$ и ширины спектральной линии путем измерения $G^{(2)}(\tau)$, иначе говоря, методами интерферометрии интенсивности.

До последнего времени схемы интерферометров интенсивности базировались на системах, в которых измерялись корреляции фотоотсчетов [7, 9, 10, 145]. Ограничения этой методики связаны с конечным временем разрешения схем совпадения фотоотсчетов; поэтому измерения такого рода удается проводить лишь для относительно узких линий шириной не более $10^8 - 10^9$ гц. Использование нелинейных оптических явлений в кристаллах и жидкостях позволяет провести измерение функции $G^{(2)}(\tau)$ для излучения с гораздо меньшим временем корреляции, нежели 10^{-9} сек; речь идет уже о временах разрешения $10^{-13} - 10^{-14}$ сек.

Для измерения корреляционной функции используется либо квазистатическая генерация второй гармоники, непосредственно дающая функцию $G^{(2)}(\tau)$ [50], либо двухфотонная флуоресценция, наблюдение которой в специальных условиях позволяет измерить непосредственно связанную с $G^{(2)}(\tau)$ функцию $F(\tau)$ вида [56]:

$$F(\tau) = G^{(2)}(0) + 2G^{(2)}(\tau). \quad (5.8)$$

Нормированные функции $G^{(2)}(\tau)$ и $F(\tau)$ определяются выражениями

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{G^{(2)}(\tau)}{G^{(2)}(0)}, \quad f(\tau) = \frac{F(\tau)}{G^{(2)}(0)} = 1 + 2g^{(2)}(\tau). \quad (5.9)$$

Измерения функций $g^{(2)}(\tau)$ и $f(\tau)$ рядом авторов выполнены для случая многомодового лазерного излучения. Для лазеров, работающих в режиме несвязанных мод, измеренные функции $g^{(2)}(\tau)$ и $f(\tau)$ с высокой степенью точности совпали с рассчитанными для теплового (гауссова) излучения (см. [85, 146]).

Однако особый интерес, проявляемый к этим функциям в последнее время, связан с возможностью получения с их помощью информации о форме огибающей негауссова процесса. Оказывается, что по измерениям контраста корреляционной функции интенсивности R , $R_f = f(0)/f(\infty)$ и $R_g = g^{(2)}(0)/g^{(2)}(\infty)$ можно судить об огибающей процесса.

Для иллюстрации сказанного характерные значения функций f и $g^{(2)}$ и коэффициенты контраста в табл. 2 приведены для двух предельных случаев: излучения с полностью синхронизованными модами и лазерного излучения, фазы мод которого совершенно случайны.

Таблица 2

Значения измеряемых величин $f(\tau)$ и $g^{(2)}(\tau)$ при помощи двухфотонной флуоресценции и генерации второй гармоники при взаимодействии типа $oe \rightarrow e$ для различных времен задержки τ взаимодействующих пучков

Вид излучения	Двухфотонная флуоресценция			Вторая гармоника		
	$f(0)$	$f(\infty)$	R_f	$g^{(2)}(0)$	$g^{(2)}(\infty)$	R_g
Лазер с синхронизованными модами	3	1	3	1	0	∞
Тепловое излучение	3	2	1,5	1	0,5	2

По ширине функций $g^{(2)}(\tau)$ можно найти длительность импульса или ширину спектра излучения, связанного с флуктуациями интенсивности (с флуктуациями огибающей); модуляция частоты излучения лазера не дает вклада в $g^{(2)}(\tau)$. О степени синхронизации фаз мод лазера можно судить по контрасту.

Для сверхкоротких лазерных импульсов (излучение с синхронизованными модами) значение $g^{(2)}(0) = 1$ и уменьшается до $g^{(2)}(\tau) = 0$ при временах задержки τ , гораздо больших длительности импульса τ_n . При этом коэффициент контраста $R_g \rightarrow \infty$; в случае двухфотонной флуоресценции $R_f = 3$.

Для лазерного излучения с несинхронизованными модами $g^{(2)}(\tau > \tau_k) = 0,5$; поэтому здесь $R_g = 2$ и $R_f = 1,5$. При частичной синхронизации мод лазера, очевидно, $1,5 < R_f < 3$ и $2 < R_g < \infty$. Эксперименты с лазерами, работающими в режиме синхронизации мод (большинство экспериментов здесь проведено методом двухфотонной флуоресценции) дают значение $3 > R_f > 2$. Весьма типичны значения $R_f \simeq 2,2 - 2,4$, что связывают обычно с частичной синхронизацией мод. Следует подчеркнуть, однако, что однозначная интерпретация данных, полученных в условиях, когда значения контраста заключены в интервале 2—3, затруднительна. Дело в том, что для суждения о степени синхронизации мод и, следовательно, о формегибающей по измерениям контраста надо заранее задаться определенной моделью частичной синхронизации. Полностью обоснованный выбор такой модели в настоящее время провести трудно; по мнению Пикара [137], наиболее удовлетворительно объясняет экспериментальные данные (в особенности, недавней работы Шапиро и Дюге [147]) «доменная» модель частичной синхронизации (см. разд. 2). В работе [61] вычислялись соответствующие промежуточные значения контраста для другой модели частичной синхронизации. В настоящее время вопрос в значительной мере остается открытым и для его окончательного решения необходимы дополнительные экспериментальные данные.

Знание корреляционной функции $G^{(2)}(\tau)$ позволяет ответить на вопрос: существуют ли сверхкороткие импульсы в исследуемом излучении. Для определения вида зависимости интенсивности $I(t)$ от времени (формы импульса) одной функции $G^{(2)}(\tau)$ недостаточно. Нужно знать, по крайней мере, корреляционные функции $G^{(2)}(\tau)$ и $G^{(3)}(\tau_1, \tau_2)$ [50].

Однако для расчета эффективности таких нелинейных процессов, как многоквантовое поглощение и генерация гармоник, иметь полную информацию о виде функции $I(t)$ необязательно. Достаточно знать лишь функцию $G^{(2)}(\tau)$ (форму трека двухфотонной флуоресценции). Можно показать, что выигрыш η в КПД оптического удвоителя частоты, работающего в условиях квазистатистического удвоения, при переходе от монохроматического излучения к многомодовому излучению с той же интенсивностью выражается только через величину R_f . При неполной синхронизации мод ($R_f < 3$) формула для η имеет вид

$$\eta = 2R_f / (3 - R_f). \quad (5.10)$$

Нетрудно видеть, что при типовых значениях $R_f \simeq 2,2 \div 2,4$ величина выигрыша невелика.

Как уже отмечалось, большинство экспериментов по измерению $G^{(2)}(\tau)$ выполнено на основе двухфотонной методики (ДФМ). Решающими аргументами в пользу такого выбора являются относительная простота установки и возможность измерения всей функции $G^{(2)}(\tau)$ за время одной вспышки лазера, что позволяет устранить трудности, связанные со стабильностью, повторяемостью и т. п. Разрешающая способность ДФМ зависит от времени релаксации соответствующего перехода; оно имеет порядок 10^{-13} сек для типичных случаев. Вопрос о предельных возможностях ДФМ недавно рассматривался Гленном [148].

Метод удвоения частоты, вообще говоря, более громоздок; в обычных условиях за одну вспышку лазера получается лишь одна точка для корреляционной функции $G^{(2)}(\tau)$. Вместе с тем, в этом методе при синхронизации мод получают значительно большие значения контраста. Поэтому представляет интерес изыскание возможностей получения всей функции $G^{(2)}(\tau)$ в одной вспышке и в этом случае. Одним из возможных вариантов могла бы быть система, где перед нелинейным кристаллом устанавливается клин из анизотропного материала, а функция $G^{(2)}(\tau)$ определяется по пространственной структуре второй гармоники [136].

Разрешающая способность интерферометров интенсивности, использующих удвоение частоты, определяется эффектами группового запаздывания; вполне реальным представляется получение времени разрешения 10^{-13} сек (см. [85, 136]).

Заметим, наконец, что интерферометры интенсивности на основе эффекта генерации гармоник или сложения частот могут представить интерес и для техники мощных газовых и полупроводниковых лазеров [149].

Материал, приведенный в данном обзоре, показывает, что в настоящее время имеется достаточно удовлетворительное понимание особенностей нелинейных волновых взаимодействий, связанных со случайной модуляцией взаимодействующих волн и параметров нелинейной среды. Последовательное теоретическое рассмотрение возникающих задач удобно проводить с помощью укороченных уравнений в частных производных для полных комплексных амплитуд взаимодействующих волн.

Разумеется, многие результаты, относящиеся к режиму заданного поля, можно получить и при спектральном подходе (в теории генерации оптических гармоник этот подход применялся в [111, 1.2, 139], а в теории вынужденного рассеяния — в [35]). Следует отметить, однако, что и здесь использование огибающих позволяет представить результаты в более компактной и удобной для анализа форме.

В существенно некогерентном режиме (для процессов типа генерации гармоник такой режим реализуется для $z > L_v, L_{\perp}$) нелинейный эффект описывается скоростными уравнениями. Однако для генерации гармоник и параметрического усиления даже в этих условиях использование скоростных уравнений для заранее заданного числа волн оправдано лишь в режиме заданного поля.

Разумеется, с принципиальной точки зрения большой интерес представляет задача о распределении энергии по частотам при некогерентных нелинейных взаимодействиях. Речь идет, очевидно, о конкуренции некогерентного параметрического рассеяния и некогерентной генерации гармоник. Заметим, наконец, что все вышеприведенные результаты базировались на классическом описании поля. В подавляющем большинстве реализуемых в опыте ситуаций для волновых нелинейных эффектов такой подход вполне оправдан. Квантование поля использовалось в работах [150–152, 117] для анализа многофотонного фотоэффекта и квазистатического режима генерации оптических гармоник.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Born, E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, 1965.
2. М. В. Волькенштейн, Молекулярная оптика, Гостехиздат, М., 1951.
3. Г. С. Ландсберг, Избранные труды, изд. АН СССР, М., 1958, стр. 355.
4. И. Л. Фабелинский, Молекулярное рассеяние света, изд. Наука, М., 1965.
5. М. М. Сушинский, Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов, изд. Наука, М., 1968.
6. И. И. Собельман, Введение в теорию атомных спектров, Физматгиз, М., 1963.
7. R. Hanbury Brown, R. Q. Twiss, Nature, 177, 271 (1956); Proc. Roy. Soc., A 242, 300 (1957); A 243, 291 (1957).
8. F. T. Arecchi, M. Giglio, V. Tartari, Phys. Rev., 163, 186 (1967).
9. S. H. Chen, N. Polonsky-Ostrovsky, Suppl. to J. Phys. Soc. Japan, 26, 179 (1969).
10. E. R. Pike, Photon statistics, Inaugural of Conference of the European Physical Society, Florence, Italy, 1969.
11. J. Ducuing, N. Bloembergen, Phys. Rev., 133A, 1493 (1964).
12. С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, Р. В. Хохлов, О. Н. Чунаев, ЖЭТФ, 45, 1336 (1963).
13. С. А. Ахманов, А. И. Ковригин, А. С. Чиркин, О. Н. Чунаев, ЖЭТФ, 49, 829 (1966).
14. D. N. Mc Mahon, J. Appl. Phys., 37, 3832 (1966).
15. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Радиотехника и электроника, 11, 1915 (1966).
16. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 12, 1639 (1967).
17. Б. А. Сотский, ДАН ВССР, 12, 888 (1968).
18. E. Mathieu, H. P. Weber, Z. Angew. Math. Phys., 19, 980 (1968).
19. В. Г. Тункин, А. С. Чиркин, ЖЭТФ, 58, 195 (1970).
20. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, V. G. Tunkin, Opto-Electronics, 1, 196 (1969).
21. A. A. Grütter, H. P. Weber, R. Dändliker, Phys. Rev., 185, 629 (1969).
22. J. L. Zuckerman, J. B. De Velis, J. Opt. Soc. Amer., 58, 175 (1968).
23. С. А. Ахманов, В. В. Бакланова, А. С. Чиркин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 1, 146 (1967).
24. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
25. N. Bloembergen, Y. R. Shen, Phys. Rev. Lett., 13, 720 (1964).
26. N. Bloembergen, Y. R. Shen, Phys. Rev., 137, A1786 (1968).
27. W. C. Wagner, Sh. Yatsiv, R. Hellwarth, Phys. Quantum Electron. Conf., Proceedings, N. Y., 1965.
28. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 9, 1345 (1968).
29. S. E. Harris, IEEE J. Quant. Electr., 2, 701 (1966).
30. S. E. Harris, IEEE J. Quant. Electr., 3, 205 (1967).
31. H. Hsu, J. Appl. Phys., 38, 1787 (1967).
32. K. Shimoda, Japan J. Appl. Phys., 5, 615 (1966).
33. Т. И. Кузнецова, Письма в ЖЭТФ, 10, 153 (1969).
34. Г. В. Венкин, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин, Тезисы доклада на 3-м Всесоюзном симпозиуме по нелинейной оптике, изд. МГУ, М., 1967.
35. C. L. Tang, J. Appl. Phys., 37, 2945 (1966).
36. Ю. Е. Дьяков, Письма в ЖЭТФ, 9, 487 (1969).
37. P. D. Maker, Phys. Quant. Electr., N. Y., 1966, p. 60.
38. S. A. Akhmanov, Materials Res. Bulletin, 4, 455 (1969).
39. С. А. Ахманов, К. Н. Драбович, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин, ЖЭТФ, 59, № 2 (1970).
40. W. Brunner, H. Paul, G. Richter, Ann. Phys. (DDR), 16, 373 (1965).
41. P. Lambropoulos, C. Kikuchi, R. K. Osborn, Phys. Rev., 144, 1081 (1966).
42. J. G. Meadors, IEEE J. Quant. Electr., 2, 638 (1966).
43. L. Menegozzi, Nuovo cimento, Suppl., 4, 15 (1966).
44. P. Lambropoulos, Phys. Rev., 167, 1418 (1968).
45. B. R. Mollow, Phys. Rev., 175, 1555 (1968).
46. N. Chandra, Vachaspati, Indian J. Pure and Appl. Phys., 6, 111 (1968).
47. S. Carusotto, G. Fornaca, E. Polacco, Phys. Rev., 165, 1391 (1968).
48. J. W. Gardner, Internat. J. Electr., 21, 479 (1966).
49. А. Д. Гладун, П. П. Барашев, УФН, 98, 493 (1969).
50. J. A. Armstrong, Appl. Phys. Lett., 10, 16 (1967).
51. J. A. Giordmaine, P. N. Rentzepis, S. L. Shapiro, K. W. Wecht, Appl. Phys. Lett., 11, 216 (1967).
52. P. M. Rentzepis, M. A. Duguay, Appl. Phys. Lett., 11, 218 (1967).
53. M. A. Duguay, S. L. Shapiro, P. M. Rentzepis, Phys. Rev. Lett., 19, 1014 (1967).

54. S. L. Shapiro, M. A. Duguay, L. B. Kreuzer, Appl. Phys. Lett., 12, 36 (1968).
55. H. P. Weber, Phys. Lett., 27A, 321 (1968).
56. J. R. Klauder, M. A. Duguay, J. A. Giordmaine, S. L. Shapiro, Appl. Phys. Lett., 13, 174 (1968).
57. Т. И. Кузнецова, ЖЭТФ, 55, 2453 (1968).
58. H. P. Weber, R. Dändliker, Phys. Lett., 28A, 77 (1968).
59. H. P. Weber, R. Dändliker, IEEE J. Quant. Electr., QE-4, 1009 (1968).
60. J. R. Klauder, Appl. Phys. Lett., 14, 147 (1969).
61. R. J. Nagrach, Appl. Phys. Lett., 14, 148 (1969).
62. В. И. Беспалов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 6, 1117 (1966).
63. В. И. Беспалов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 74 (1967).
64. А. С. Чиркин, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
65. S. K. Kurtz, T. T. Pegg, Appl. Phys., 39, 3798 (1968).
66. А. А. Филимонов, В. С. Суворов, И. С. Рез, ЖЭТФ, 56, 1519 (1969).
67. R. Versohn, Yoh-Han Pao, H. Frisch, J. Chem. Phys., 45, 3184 (1966).
68. R. Terhune, P. Maker, C. Savage, Phys. Rev. Lett., 14, 681 (1965).
69. S. Kielich, IEEE J. Quant. Electr., QE-4, 744 (1968).
70. С. А. Ахманов, Д. Н. Клышко, Письма в ЖЭТФ, 2, 15 (1965).
71. В. Л. Стрижевский, В. М. Клименко, ЖЭТФ, 53, 244 (1967).
72. I. Freund, Phys. Rev. Lett., 19, 1288 (1967).
73. I. Freund, Phys. Rev. Lett., 21, 1404 (1968).
74. Д. Н. Клышко, ЖЭТФ, 55, 1006 (1968).
75. С. А. Ахманов, В. В. Фадеев, Р. В. Хохлов, О. Н. Чунаев, Письма в ЖЭТФ, 6, 575 (1967).
76. R. L. Byer, S. E. Harris, Phys. Rev., 168, 1064 (1968).
77. D. Weinberg, Appl. Phys. Lett., 14, 31 (1969).
78. T. G. Giallorenzi, C. L. Tang, Phys. Rev., 166, 225 (1968).
79. D. A. Kleiman, Phys. Rev., 174, 1027 (1968).
80. Б. Я. Зельдович, Д. Н. Клышко, Письма в ЖЭТФ, 9, 69 (1969).
81. В. Луиселл, Радиотехника СВЧ и квантовая радиотехника, № 8, 1 (1968).
82. R. Graham, H. Naken, Z. Phys., 210, 176 (1968).
83. R. Graham, Z. Phys., 210, 319 (1968).
84. R. Graham, Z. Phys., 211, 469 (1968).
85. E. Mathieu, P. Keller, J. Appl. Phys. (in print).
86. Ю. Е. Дьяков, Письма в ЖЭТФ, 10, 145 (1970).
87. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
88. K. Shimoda, J. Phys. Japan, 90, 1009 (1968).
89. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, А. С. Чиркин, ЖЭТФ, 55, 1430 (1968).
90. J. Ducuing, A. Armstrong, Electron. Quant. C.-r. Conf. Intern., Paris—N. Y., 1964.
91. В. Л. Стрижевский, Оптика и спектроскопия, 20, 516 (1966).
92. А. С. Чиркин, Диссертация, Госуниверситет, М., 1967.
93. И. А. Марушко, В. С. Машкевич, Оптика и спектроскопия, 20, 117 (1966); сб. Квантовая электроника, изд. Наукова думка, Киев, 1966, стр. 34.
94. S. A. Akhmanov, A. S. Chirkin, K. N. Drabovich, A. I. Kovrigin, R. V. Khokhlov, A. P. Sukhorikov, IEEE J. Quant. Electron., 4, 598 (1968).
95. Р. Дёч, Нелинейные преобразования случайных процессов, изд. Сов. радио, М., 1965.
96. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, изд. АН СССР, М., 1964.
97. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, изд. Мир, М., 1966.
98. Б. П. Кирсанов, А. С. Селиваненко, В. Н. Цытович, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
99. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
100. R. L. Sargent, J. Hans, D. L. Weinberg, Appl. Phys. Lett., 11, 250 (1967).
101. J. P. Budin, J. Raffy, J. Ernest, IEEE J. Quant. Electr., 4, 558 (1968).
102. Г. И. Фрейдман, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 550 (1966).
103. С. М. Рыгов, Введение в статистическую радиофизику, изд. Наука, М., 1966.
104. Р. Ю. Орлов, Т. Усманов, А. С. Чиркин, ЖЭТФ, 57, 1069 (1969).
105. Э. Вольф, Л. Мандель, УФН, 88, 347 (1966).
106. В. В. Бакланова, А. С. Чиркин, Ж. прикл. спектроскопии, 7, 202 (1967).
107. J. Comly, E. Gamige, Appl. Phys. Lett., 12, 7 (1968).
108. R. C. Miller, Phys. Lett., 26A, 177 (1968).
109. W. H. Glenn, IEEE J. Quant. Electr., 5, 284 (1969).
110. S. L. Shapiro, Appl. Phys. Lett., 13, 19 (1968).

111. С. А. Ахманов, А. С. Чиркин, Вестник МГУ, сер. физ.-астр., № 5, 79 (1965).
112. Б. Р. Левин, Теоретические основы статистической радиотехники, изд. Сов. радио, М., 1966.
113. M. Bass, K. Andringa, IEEE J. Quant. Electr., 3, 627 (1967).
114. R. L. Kohn, R. H. Pantell, Appl. Phys. Lett., 8, 231 (1966).
115. В. П. Лопасов, М. М. Макагон, Оптика и спектроскопия, 27, 165 (1969).
116. J. Klauder, E. Sudarshan, Fundamentals of quantum optics, N. Y., 1968.
117. G. S. Agarwal, Opt. Commun., 1, 132 (1969).
118. J. P. Van der Ziel, N. Bloembergen, Phys. Rev., 135, A 1662 (1964).
119. R. C. Miller, Phys. Rev., 134, A 1313 (1964).
120. А. С. Бебчук, А. Г. Ершов, Ю. Н. Соловьева, В. В. Фадеев, О. Н. Чунаев, сб. Нелинейная оптика, изд. Наука, Новосибирск, 1968.
121. А. Г. Акманов, Диссертация, Госуниверситет, М., 1969.
122. Р. Ю. Орлов, Дипломная работа, Госуниверситет, М., 1964.
123. A. G. Aja, Phys. Stat. Solid., 27, K 93 (1968).
124. S. K. Kurtz, IEEE J. Quant. Electr., 4, 578 (1968).
125. G. Durand, L. H. Chi, C. r. Acad. Sci, 264, B 1397 (1967).
126. I. Freund, P. M. Rentzepis, Phys. Rev. Lett., 18, 393 (1967).
127. H. Prakash, N. Chandra, Vachaspati, Nuovo cimento, B57, 161 (1968).
128. M. C. Teich, G. L. Wolga, Phys. Rev. Lett., 16, 625 (1966).
129. P. Lambropoulos, Phys. Rev., 156, 286 (1967).
130. M. J. Beran, J. B. DeVelis, J. Opt. Soc. Amer., 57, 186 (1967).
131. M. Beran, J. DeVelis, G. Jr. Parrent, Phys. Rev., 154, 1224 (1967).
132. N. Chandra, Vachaspati, Indian J. Pure and Appl. Phys., 6, 163 (1968).
133. A. Smith, N. Braslau, J. Appl. Phys., 34, 2105 (1963).
134. С. А. Ахманов, К. Н. Драбович, В. С. Днепровский, И. И. Нурминский, Р. В. Хохлов, Доклад на английской конференции по нелинейной оптике, Белфаст, 1969.
135. D. Weinberg, J. Chem. Phys., 47, 1307 (1967).
136. В. Г. Тункин, А. С. Чиркин, Оптика и спектроскопия (в печати).
137. Дж. Рикард, Доклад на английской конференции по нелинейной оптике, Белфаст, 1969.
138. В. С. Летохов, ЖЭТФ, 55, 1943 (1968).
139. В. Л. Стрижевский, С. Г. Карпенко, А. В. Бугаев (в печати).
140. А. Г. Акманов, А. И. Ковригин, Н. К. Подсотская, Радиотехника и электроника, 14, 1516 (1969).
141. А. Г. Акманов, С. А. Ахманов, Б. В. Жданов, А. И. Ковригин, Н. К. Подсотская, Р. В. Хохлов, Письма в ЖЭТФ, 10, 244 (1969).
142. А. Г. Акманов, С. А. Ахманов, Р. В. Кхокхлюв, А. И. Ковригин, A. S. Piskarskas, A. P. Sukhorikov, IEEE J. Quant. Electr., 4, 828 (1968).
143. В. Д. Волосов, ЖТФ, 38, 1769 (1968).
144. J. E. Midwinter, Appl. Phys. Lett, 14, 29 (1969).
145. В. В. Артемьев, Оптика и спектроскопия, 25, 635 (1968).
146. S. K. Kurtz, S. L. Shapiro, Phys. Lett., 28A, 17 (1968).
147. S. Shapiro, M. Dugua, Phys. Lett., 28A, 698 (1969).
148. W. Glenn, Theory of the two-photon absorption fluorescence method of pulse width measurements, Preprint, 1969.
149. D. Gloag, R. Roldan, Appl. Phys. Lett., 14, 3 (1969).
150. E. S. Blount, J. R. Klauder, J. Appl. Phys., 40, 2874 (1969).
151. Y. R. Shen, Phys. Rev., 155, 921 (1967).
152. A. K. Jaiswal, G. S. Agarwal, J. Opt. Soc. Amer., 59, 1446 (1969).

УДК 523.164.3

АБСОЛЮТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ КАССИОПЕИ-А, ЛЕБЕДЯ-А И ТЕЛЬЦА-А В ДИАПАЗОНЕ ВОЛН 3 — 15 см

Д. А. Дмитренко, Н. М. Цейтлин, Л. В. Виноградова, Х. Ф. Гитерман

Приведены результаты абсолютных измерений интенсивности радиоизлучения Кассиопеи-А, Лебедя-А и Тельца-А на волнах 3,2 см, 5,28 см; 7,6 см; 8,8 см; 9,7 см; 10 см; 11 см; 12 см; 13 см; 14 см и 15 см. Отмечены некоторые особенности в спектрах, в частности, тенденция к изменению с длиной волны коэффициента γ годового уменьшения интенсивности Кассиопеи-А (на $\lambda = 3,2-6$ см $\gamma = -0,8\%$, на $\lambda = 7,3-14$ см $\gamma = -1,8\%$). Спектральный индекс излучения Кассиопеи-А в диапазоне 3—15 см постоянен и равен $\alpha = -0,83 \pm 0,03$, а в спектре Тельца-А, по-видимому, существует «ступенька» с $\alpha \approx 0$ в районе 9,5 — 10 см.

Данная работа является продолжением ведущихся в НИРФИ точных абсолютных измерений интенсивности мощных дискретных источников. К настоящему времени в НИРФИ получены довольно точные и надежные результаты в диапазоне волн 30—60 см (см., например, работы [1⁻³, 29]), а также проведены измерения на ряде волн в диапазоне 3—15 см. Ниже приводятся результаты абсолютных измерений интенсивности излучения Кассиопеи-А, Лебедя-А и Тельца-А в диапазоне 3—15 см, представляющие интерес как с точки зрения эталонирования интенсивности этих источников, так и для выявления векового изменения интенсивности и возможных особенностей в спектре источников (аналогичных обнаруженным в спектре одного из наиболее интересных источников—Крабовидной туманности—в районе 30—40 см [2, 3]), имея в виду, что измерения интенсивности Кассиопеи-А в этом диапазоне относятся к 1961—64 гг. (что достаточно для выявления векового хода), а в спектре Крабовидной туманности намечается очередная «ступенька» в районе $\lambda = 10$ см (см. рис. 3).

Как и в предыдущих измерениях, в качестве эталона излучения использовался «черный» диск (см., например, [4]), однако в отличие от ранее проводимых измерений, когда диск располагался в дальней зоне антенны, сейчас диск помещался существенно ближе, в области френелевой дифракции, а антенна фокусировалась на диск, т. е. использовался метод абсолютных измерений интенсивности, предложенный в [5] и апробированный на волне 5,28 см в [6].

Измерения проводились в мае—сентябре 1968 г. ($\lambda = 3,2$ см и 5,28 см) и в январе—июне 1969 г. ($\lambda = 7,5-15$ см) на радиоастрономическом полигоне НИРФИ «Старая Пустынь» с помощью 7-метрового параболического радиотелескопа кассегреновского типа ($F/D = 0,4$, где F —фокусное расстояние) и «черных»* дисков с диаметрами $d = 0,3; 0,5$ м ($\lambda = 3,2$ см); 1 м ($\lambda = 5,28$ см) и 2 м** ($\lambda = 7,5-15$ см), установ-

* Использовался поглощающий материал БР-1 на $\lambda = 3,2$ см и $\lambda = 5,28$ см и ВРПМ-330 на $\lambda = 7,5-15$ см.

** Угловые диаметры диска равны соответственно 10',5; 17',5; 35' и 66',5.

ленных на 25-метровой вышке на расстоянии 98,2 м от центра плоскости раскрыва зеркала и наблюдаемых под углом $h \approx 12^\circ$. В качестве приемников использовались модуляционные радиометры с флуктуационным порогом чувствительности (при $\tau = 1$ сек) 0,7°K ($\lambda = 3,2$ см), 0,3°K ($\lambda = 5,28$ см) и $\sim 1^\circ$ K ($\lambda = 7,5-15$ см). Высокочастотная часть радиометра располагалась непосредственно у облучателя (в вершине параболического зеркала) и управлялась дистанционно. Измерения, как обычно, состояли из чередующихся циклов наблюдений источника и «черного» диска, однако при наблюдении источника антенна фокусировалась «на бесконечность» (настроенная антенна), а при наблюдении диска — на диск (сфокусированная антенна).

Фокусировка проводилась путем смещения контррефлектора* вдоль фокальной оси и установки его в фиксированные положения, соответствующие максимумам фокальных пятен (зависимости температуры антенны от положения контррефлектора), измеренных предварительно по радиоизлучению Солнца и «черного» диска соответственно. Наведение и сопровождение источников проводилось по координатам (эпоха 1968 г.), при этом ошибка не превышала 1'. Для определения нулевого уровня, от которого отсчитывалось приращение температуры антенны от радиоизлучения источника $\Delta T_{\text{ант}}$ антенна отводилась на угловое расстояние (не более 2°), соответствующее первому нулю диаграммы, в обе стороны от источника; эти «опорные» области сопровождалась, как и источник, по траектории источника. Источники наблюдались под углами к горизонту от 30 до 70° до, во время и после кульминации.

Разность температур излучения «опорных» областей и области источника в исследуемом диапазоне ничтожна и во внимание не принималась. Приращения температуры антенны от излучения источников составляли 1,5—5°K, от диска — 40—70°K; измерения проводились при постоянной времени выходного прибора радиометра $\tau = 16$ сек. Температура фона за диском на исследуемых волнах пренебрежимо мала по сравнению с яркостной температурой диска (во время измерений через направление на диск проходили высокие галактические широты) и при определении потоков S_ν не учитывалась.

Потоки S_ν неполяризованных источников определялись на основании результатов измерений по обычной формуле [6]:

$$S_\nu = \frac{2k}{\lambda^2} e^\gamma K_1^{-1} (T_d - T_{\text{фл}}) (1 + \xi) \int_{\Omega_d} F d\Omega \frac{\Delta n_{\text{ист}}}{\Delta n_d}, \quad (1)$$

где $\Delta n_{\text{ист}}$, Δn_d — показания выходного прибора радиометра при приеме радиоизлучения источника и диска, γ — поглощение в атмосфере, $T_d = T_0(1 - r^2/2)$ — яркостная температура диска, r^2 — коэффициент отражения диска по мощности**, $K_1 = \int_{\Omega_{\text{ист}}} T F d\Omega / \int_{\Omega_d} T d\Omega$, T — яркост-

ная температура источника, F — диаграмма направленности антенны по мощности, Ω_d , $\Omega_{\text{ист}}$ — телесные углы диска и источника, ξ — дифракционная поправка [8]. Поляризация определялась по формуле [9]

$$S_\nu^* = S_\nu \{ 1 + p - 2p \sin^2(\varphi_p - \varphi_E) \}^{-1}. \quad (2)$$

При наших измерениях учитывалась поляризация излучения лишь Кра-

* Как уже отмечалось в [6, 7], вынос только контррефлектора может привести к некоторому расплыванию фокального пятна, однако ошибка из-за этого составляет доли процента.

** Используется не r^2 , а $r^2/2$ с возможной ошибкой $r^2/4$, так как происходит «дочернение» диска излучением Земли.

бовидной туманности, величина которой ρ и позиционный угол φ_ρ преимущественных колебаний указаны в табл. 1 (см. [9, 10]). (Так как измерения проводились на горизонтальной поляризации, то $\varphi_E = \pi/2$.)

Результаты измерений представлены в табл. 1. Здесь же приведены погрешности определения S_γ : $\delta_{\text{фл}}$ — погрешность измерений, определяемая флуктуационным порогом чувствительности; $\delta_\xi = \xi/2$ — ошибка внесения дифракционной поправки; $\delta_{r^2} = r^2/4$ — ошибка за счет неточного учета влияния на T_d коэффициента отражения поглощающего материала; $\delta_{F_d} = 2\%$ — погрешность определения величины $F_d = \int_{\Omega_d} F d\Omega$; $\delta_{\text{фок}}$ —

погрешность установки облучателя в максимум фокального пятна*. В табл. 2 содержатся наиболее точные результаты абсолютных измерений других авторов в этом же диапазоне. Все эти данные, наряду с полученными в настоящей работе, представлены также на рис. 1—3. Значения потоков Кассиопеи-А, измеренные другими авторами, приведены на рис. 1 к маю 1969 г. с учетом годового уменьшения на 0,8% в диапазоне 3,2—6 см и 1,8% в диапазоне 7,3—14 см, ибо только при этом условии они ложатся на полученную нами прямую.

Из рис. 1 видна тенденция к изменению с длиной волны коэффициента γ годового уменьшения интенсивности Кассиопеи-А, а именно на волнах 3,2—6 см $\gamma \simeq 0,8\%$, а в диапазоне 7,3—14 см $\gamma \simeq 1,8\%$!

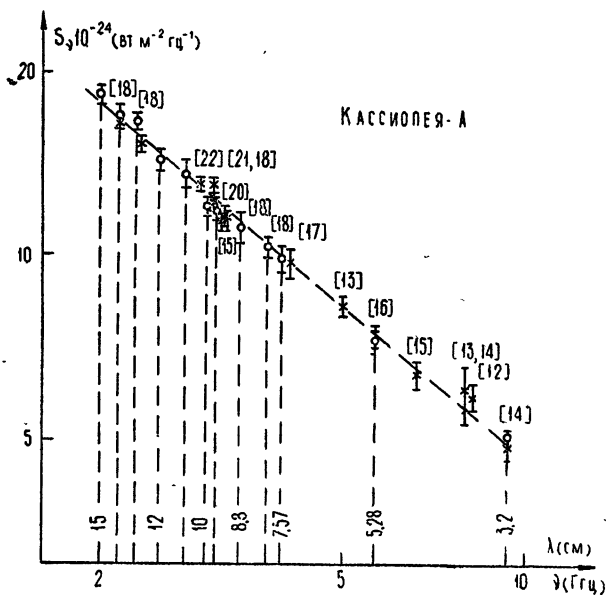


Рис. 1.

Если использовать только наши результаты или эти данные совместно с результатами других работ, приведенными к 1969 году с γ , указанными выше, то в диапазоне 3,2—15 см спектральный индекс излучения Кассиопеи-А оказывается постоянным и равным $\alpha = -0,83 \pm 0,03$. Заметим, что результаты точных абсолютных измерений интенсивности в диапазоне от 30 до 60 см, проведенных в 1967 г. [29], также ложатся

* Погрешность возникает за счет изрезанности фокального пятна из-за стоячей волны между облучателем и контррефлектором. Огибающая совпадает с расчетными фокальными пятнами (подробнее см. [6, 7]).

Таблица 1

λ [см]	$2\Delta\theta_{0,5}^*$ [']	P [%]	φ_p [°]	ξ [%]	r^2 [%]	δ_ξ [%]	δ_r [%]	$\delta_{\text{фок}}$ [%]	$\delta_{\text{фл}}$ [%]		δ_{Σ} [%]**		S_v (10^{-24} вт·м $^{-2}$ ·гц $^{-1}$)			
									Касс.	Тел.	Касс.	Лоб.	Тел.	Касс.-А	Лебедь-А	Телец-А
3,2	—	—	—	1,5	4,85	0,7	1,5	0	2	—	—	5,1 ± 0,2	—	—		
5,28	30,3	5,9	141	2	8,0	1,5	2	0	1	1,3	—	7,4 ± 0,3	3,17 ± 0,1	—		
7,57	47	4,3	138	1	2,8	1,0	1	3	2,5	3,5	2,4	10,25 ± 0,45	5,15 ± 0,3	6,46 ± 0,3		
8,01	53	4,15	137	1	2,5	1,0	1	1	2	3,4	—	10,7 ± 0,4	5,7 ± 0,25	7,0 ± 0,3		
8,88	60,8	3,8	136	1	2,4	1,1	1	3,5	3	3,4	2,7	11,45 ± 0,65	6,15 ± 0,35	7,18 ± 0,4		
9,7	67,5	3,5	134	1	2,5	1,2	1	2	2	2,6	2,5	11,7 ± 0,50	6,15 ± 0,25	6,9 ± 0,3		
9,9	66	3,4	134	1	2,5	1,2	1	0	1,7	—	2,7	11,8 ± 0,5	—	6,6 ± 0,3		
10,0	62	3,4	133	1	2,9	1,3	1	0	1,3	1,7	2,5	11,8 ± 0,5	6,10 ± 0,3	6,6 ± 0,35		
10,5	71	3,2	131	1,5	6	1,4	1,5	0	2,6	—	4	13,8 ± 0,7	—	7,0 ± 0,35		
10,95	68,3	3,0	129	2,86	12,2	1,4	3	0	2,2	2,2	2,6	13,8 ± 0,75	7,1 ± 0,4	7,95 ± 0,5		
12,0	76,2	2,7	125	3,14	18,4	1,5	4	0	1	2,1	1	14,55 ± 0,6	8,05 ± 0,35	8,14 ± 0,35		
13,11	79,5	2,4	120	3,4	11,3	1,7	3	0	1	1	1	16,6 ± 0,8	9,35 ± 0,5	8,10 ± 0,4		
14,0	84,5	2,2	116	3,66	3,8	1,8	1	3	2	3	1,7	17,2 ± 0,8	9,85 ± 0,5	8,05 ± 0,35		
15,01	91,2	2,0	111	3,93	0,6	2,0	0,2	1	1	1,5	1,5	18,6 ± 0,6	10,0 ± 0,35	8,4 ± 0,3		

* $2\Delta\theta_{0,5}$ — ширина диаграммы на уровне половинной мощности.** В общей ошибке учтена погрешность определения $\int_{\Sigma} F d\Omega$, равная 2%.

Таблица 2

λ [с.м]	S_v Касс.-А (10^{-24} вт.м ⁻² .гц ⁻¹)	Год	Лит-ра	S_v Лебедь-А (10^{-24} вт.м ⁻² .гц ⁻¹)	Год	Лит-ра	S_v Тельня-А (10^{-24} вт.м ⁻² .гц ⁻¹)	Год	Лит-ра
3,2	5,14 ± 5 %	1963	[11]	1,65 ± 7 %	1963	[23]	5,6 ± 5 %	1961	[25]
3,64	6,12 ± 5 %	1965,9	[12]				5,63 ± 5 %	1966	[12]
3,75	6,4 ± 8 %	1964	[13]	2 ± 5 %	1964	[14]	5,81 ± 3 %	1964	[13]
3,75	5,86 ± 5 %	1964	[14]				5,7 ± 5 %	1964	[14]
4,5	6,75	1964	[15]	2,65 ± 4 %	1964	[15]	5,65 ± 5 %	1964	[15]
5,28	7,7 ± 6 %	1965	[16]				6,4 ± 5 %	1965	[16]
6	8,7 ± 4 %	1964	[13]				6,53 ± 3 %	1964	[13]
7,35	10,86 ± 6 %	1964	[17]				7,11 ± 3 %	1964	[17]
7,95	11,7 ± 2,5 %	1964	[18]						
9,36	13,3 ± 5 %	1962	[19]	6,3 ± 5 %	1962	[24]	7,1 ± 5 %	1962	[19]
9,37	13,4 ± 5 %	1959	[20]				7,1 ± 5 %	1959	[20]
9,5	12,6 ± 4 %	1964	[15]	6,4 ± 4 %	1964	[15]	6,95 ± 4 %	1964	[15]
9,8	14,6 ± 3,5 %	1961	[21]						
10,26	15,26 ± 2 %	1962	[22]	7,5 ± 6 %	1962	[22]			
9,8	14,6 ± 3,5 %	1964	[18]						
13	17 ± 8 %	1964	[18]						
14	18,5 ± 2,5 %	1964	[18]						

на прямую со спектральным индексом $-0,83 \pm 0,03^*$. Полученные нами значения γ согласуются с результатами [26] ($\gamma = 1,75 \pm 0,52\%$, $\lambda = 21$ см) и [27] ($\gamma = 1,14 \pm 0,26\%$, $\lambda = 9,4$ см), что также говорит в пользу предположения об изменении γ с изменением длины волны (в этом отношении интересны также данные [28]: $\gamma = 1,06 \pm 0,14$, $\lambda = 3,7$ м). Для выяснения зависимости γ от λ необходимы дальнейшие точные абсолютные измерения интенсивности Кассиопеи-А во всем диапазоне сантиметровых — метровых волн.

Спектральный индекс Лебеда-А (см. рис. 2) в диапазоне длин волн 3,2—9 см равен $\alpha = -1,28 \pm 0,06$, а в диапазоне 10—14 см $\alpha = -1 \pm 0,1$ (тот же индекс $\alpha = -1$ получается, если учесть данные [1] в диапазоне $\lambda = 30$ —50 см); что согласуется с [23] ($\alpha = -1,3 \pm 0,05$ на $\lambda = 3,2$ —10,26 см и $\alpha = -1,12 \pm 0,05$ на $\lambda = 10,26$ —21 см).

Рис. 3 действительно подтверждает существование в спектре Тельца-А «ступеньки» с $\alpha \approx 0$ в районе 9—10 см, однако обращает на себя внимание наличие такого же спада интенсивности в этом же районе в спектре Лебеда-А, поэтому к указанному результату пока приходится относиться с осторожностью.

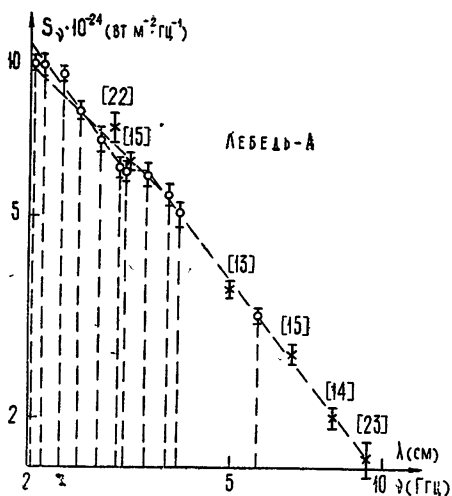


Рис. 2.

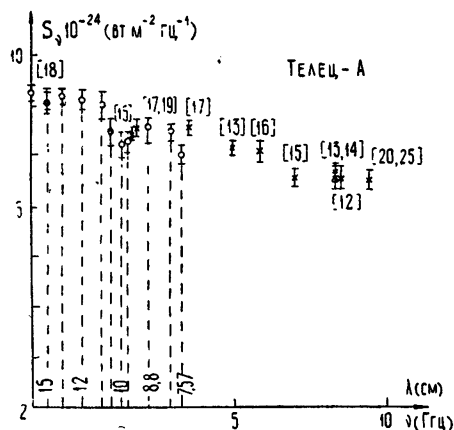


Рис. 3.

Авторы благодарны В. А. Разину за полезное обсуждение результатов настоящей работы, а также Х. Маммедову и В. Г. Догадиной за помощь в измерениях и обработке результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Ласточкин, В. А. Порфирьев, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, Н. Н. Холодилов, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 629 (1963).
2. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, В. А. Порфирьев, Астрон. ж., 41, № 3, 446 (1964).
3. В. А. Алексеев, Э. Д. Гатэлюк, Д. А. Дмитренко, А. А. Романьчев, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 2, 168 (1969).
4. В. С. Троицкий, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 4, № 3, 393 (1961); 5, № 4, 623 (1962).
5. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 3, 571 (1964).

* На эту же прямую ложатся и результаты работ [1, 19, 26—28], приведенные к 1969 году с $\gamma = 0$ (это значение $\gamma = 0$ получено в [29]).

6. Д. А. Дмитренко, Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 5, 639 (1969).
7. Д. А. Дмитренко, А. А. Романьчев, Н. М. Цейтлин, Радиотехника и электроника (в печати).
8. Н. М. Цейтлин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 6, 1265 (1963).
9. J. W. M. Baare, P. G. Mezger, H. Wendker, *Astrophys. J.*, 142, 1 (1965).
10. B. J. Burg, *M. N. R. A. Soc.*, 133, № 1, 67 (1965).
11. В. П. Ласточкин, Э. С. Планкин, К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 3, 631 (1963):
12. R. J. Allen, A. H. Barret, *Astron. J.*, 71, № 9, 843 (1966).
13. J. W. M. Baare, P. G. Mezger, H. Wendker, *Astron. J.*, 69, № 8, 531 (1964).
14. W. A. Dent, F. T. Haddock, *Astrophys. J.*, 141, № 2, 568 (1966).
15. W. J. Medd, K. W. V. Ramana, *Astron. J.*, 70, 327 (1965); *Astrophys. J.*, 142, № 1, 383 (1965).
16. Д. А. Дмитренко, К. М. Стрежнева, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 2, 165 (1967).
17. R. W. Wilson, A. A. Penzias, *Astrophys. J.*, 146, № 1, 286 (1966).
19. R. G. Conway, K. I. Kellerman, R. J. Long, *M. N. R. Astron. Soc.*, 125, № 34, 261 (1963).
20. M. W. Broten, W. J. Medd, *Astron. J.*, 64, № 8, 324 (1959).
21. К. С. Станкевич, *Астрон. ж.*, 39, № 4, 610 (1962).
22. В. В. Хрулев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 6, № 2, 398 (1963).
23. В. П. Ласточкин, Ю. М. Сорин, К. С. Станкевич, *Астрон. ж.*, 41, № 4, 770 (1964).
24. К. С. Станкевич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 2, 202 (1964).
25. В. С. Лазаревский, К. С. Станкевич, В. С. Троицкий, *Астрон. ж.*, 40, № 1, 12 (1963).
26. J. W. Findlay, H. Hvatum, W. G. Waltman, *Astrophys. J.*, 141, № 3, 873 (1965).
27. C. H. Mayer, T. P. McCullough, R. M. Sloanaker, F. T. Haddock, *Astron. J.*, 69, № 8, 552 (1964).
28. J. A. Hogbom, J. R. Shakeshaft, *Nature*, 189, № 4764, 561 (1961).
29. Л. Н. Бондарь, М. Р. Зелинская, С. А. Каменская, В. А. Порфирьев, В. Л. Рахлин, В. М. Родина, К. С. Станкевич, К. М. Стрежнева, В. С. Троицкий, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 6, 807 (1969).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
14 августа 1969 г.

ABSOLUTE MEASUREMENTS OF INTENSITY OF RADIO
EMISSION FROM CASSIOPEIA-A, CYGNUS-A, TAURUS-A IN THE
RANGE 3—15 cm

D. A. Dmitrenko, N. M. Tseyflin, L. V. Vinogradova, Kh. F. Giterman

Results are given of absolute measurements of the intensity of radio emission from Cassiopeia-A, Cygnus-A and Taurus-A at the wavelengths of 3.2 cm, 5.28 cm, 7.6 cm, 8.8 cm, 9.7 cm, 10 cm, 11 cm, 12 cm, 13 cm, 14 and 15 cm. Some peculiarities in the spectra are pointed out, in particular, a tendency to increasing the coefficient γ of the annual decrease of the radio emission intensity of Cassiopeia-A (at $\lambda=3.2-6$ cm $\gamma = -0.8\%$, at $\lambda=7.3-14$ cm $\gamma = -1.8\%$). The spectral index of radio emission from Cassiopeia-A at 3—15 cm wavelength is constant and equal to $\alpha = -0.83 \pm 0.03$ but in the spectrum of Taurus-A there is apparently a step with $\alpha \approx 0$ in the range of 9.5—10 cm.

УДК 550.388.2

ВКЛАД КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В ИОНИЗАЦИЮ D-ОБЛАСТИ ИОНОСФЕРЫ

А. В. Толмачева

Рассчитана ионизация в нижней части D-области, обусловленная воздействием галактических космических лучей, и величина поглощения радиоволн, проходящих через эту область. Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными об электронной концентрации в D-слое и результатами измерений поглощения радиоволн. Сделан вывод о том, что в области высот 50—70 км основным источником ионизации являются галактические космические лучи как в умеренных широтах, так и в зоне полярных сияний. Максимальное значение электронной концентрации составляет в годы минимума солнечной активности около 10^2 см^{-3} . Интегральная величина поглощения радиоволн, обусловленная ионизацией космическими лучами, находится в пределах 0,15—0,3 дБ на частоте 9 МГц.

Как известно, космические лучи формируют нижнюю часть D-слоя ионосферы. Величина электронной концентрации в этой области невелика и составляет около $10^2 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$. Определение таких небольших концентраций электронов N в D-слое сопряжено со значительными трудностями. Этим обстоятельством объясняется в той или иной степени количественное расхождение в результатах измерений профилей $N(z)$ [1]. Имеются также неясности в отношении величины поглощения радиоволн, проходящих через нижнюю часть ионосферы, как в расчетной, так и в экспериментальной части.

В настоящей работе рассчитывается профиль $N_{\text{кл}}(z)$, обусловленный ионизацией космическими лучами, и величина поглощения радиоволн, проходящих через нижнюю часть D-слоя. Результаты расчетов сравниваются с литературными данными о профиле $N(z)$ и с результатами измерений поглощения радиоволн.

1. КРАТКИЙ ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

На рис. 1 приведено несколько профилей $N(z)$ в нижней части D-области, измеренных при больших зенитных углах (на восходе Солнца) в годы минимума солнечной активности [2—4]. На восходе Солнца ионизация атмосферы рентгеновским и УФ излучением Солнца еще очень мала, и можно полагать, что ионизация космическими лучами более существенна. Хотя уровень космических лучей фактически не меняется в течение суток, ночью, вследствие прилипания электронов к атомам и молекулам, уровень электронной концентрации в нижней ионосфере невелик. На восходе Солнца происходит отлипание электронов от отрицательных ионов и тем самым «проявляется» ионизация, обусловленная космическими лучами.

Из рис. 1 видно, что максимум слоя, созданного, по-видимому, ионизацией космическими лучами, лежит между 60 и 70 км. Наибольшая величина электронной концентрации составляет приблизительно $10^2 \text{ эл} \cdot \text{см}^{-3}$. Отметим здесь также, что толщина слоя $N(z)$ на уровне

половины максимальной концентрации составляет не более 11—13 км. Выше 75 км возрастание $N(z)$ считается обусловленным волновым излучением Солнца. Небольшие расхождения профилей электронной концентрации между собой могут быть связаны с различием в условиях проведенных экспериментов. (Например, небольшие различия зенитных углов Солнца.) Тем не менее, величины измеренной электронной концентрации, как видно из рисунка, удовлетворительно согласуются друг с другом, если учесть ошибки измерений (точность измерений показана для примера лишь на кривой 2).

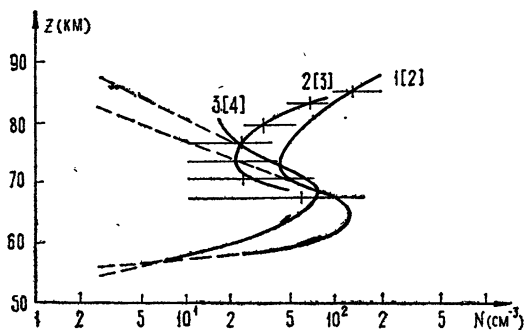


Рис. 1.

Величину $N_{к.л.}(z)$ рассчитывали Молер и Вебер [5, 6]. Вообще говоря, основные трудности теоретического расчета связаны с большой неопределенностью процессов образования и разрушения ионов в нижней ионосфере. Результаты Молера и Вебера должны рассматриваться с некоторой осторожностью, поскольку выбранные ими микропроцессы в D -области и константы некоторых реакций нуждаются в уточнении [7, 8]. Расчеты Молера, например, показывают, что максимальное значение $N_{к.л.}(z)$ должно быть между 75 и 80 км, тогда как по данным измерений $N(z)$, приведенным на рис. 1, максимум слоя $N_{к.л.}(z)$ лежит между 60 и 70 км. Максимум слоя электронной концентрации по расчетам Вебера лежит между 75 и 80 км и равен по величине $5 \cdot 10^2 \text{ см}^{-3}$, что также не соответствует эксперименту.

Вебер рассчитал, кроме того, величину поглощения $\Gamma_{к.л.}$ радиоволн в D -слое на частоте $f = 4 \text{ МГц}$ (для обыкновенной компоненты), вызванного ионизацией космическими лучами. Эта величина оказалась равной $\sim 3,4 \text{ дБ}$. Близкое значение поглощения было получено (если учесть разницу в частотах) Лерфалдом и Партасарати [9], проводившими измерения в Колледже. Измерялась величина поглощения Γ обыкновенной компоненты на частоте $f = 10 \text{ МГц}$, радиоастрономическим методом. При невозмущенном состоянии ионосферы величина Γ оказалась равной 2,6 дБ при зенитном угле χ , равном 40° , и около 1,4 дБ при $\chi = 90^\circ$. Считалось, что поглощение $\Gamma = 1,4 \text{ дБ}$ при 90° обусловлено ионизацией космическими лучами.

Другое значение $\Gamma_{к.л.}$ дается в работе [10], в которой приводятся результаты измерений «регулярного» поглощения космического радиолучения на частоте 9 МГц в Лопарской и Зименках. Величина Γ определялась относительно ночного уровня. Возрастание величины поглощения на восходе Солнца ($\chi = 90^\circ$) по сравнению с ночным уровнем не превышало 0,3 дБ для обоих пунктов наблюдений. Это значение существенно отличается от результатов измерений в Колледже при $\chi = 90^\circ$. Тем не менее, данные о поглощении в полуденные часы (летом) в Колледже и Лопарской удовлетворительно согласуются друг с другом. Можно искать объяснение этого факта в наличии постоянно большого ($\sim 1 \text{ дБ}$) поглощения в ночные часы, доступного измерениям поляризационным методом (в Колледже). Но в этом случае суточные вариации поглощения в Колледже ($\sim 1,2 \text{ дБ}$) должны быть почти в 3 раза меньше вариаций в Лопарской ($\sim 3 \text{ дБ}$). Поэтому предположение о большом остаточном поглощении вряд ли оправдано.

К сожалению, имеющихся в нашем распоряжении данных недо-

статочно для удовлетворительного объяснения возникшего разногласия, если не относить его непосредственно к ошибкам измерений. Сопоставляя в дальнейшем расчетные и экспериментальные значения поглощения, мы опирались на результаты измерений Γ в Лопарской и Зименках. Учитывая тот факт, что при $\chi = 90^\circ$ в верхних слоях атмосферы уже происходит заметная ионизация электромагнитным излучением Солнца, мы можем указать верхнюю границу поглощения, обусловленного воздействием космических лучей, а именно, $\Gamma_{к.л} < 0,3$ дб на частоте 9 Мгц. Это значение $\Gamma_{к.л}$ примерно в 3—4 раза меньше поглощения, рассчитанного Вебером [6]: величина $\Gamma_{к.л}$, равная 3,4 дб на частоте 4 Мгц, в пересчете на $f = 9$ Мгц близка к 0,7—1. Поскольку впоследствии оказалось, что измеренные значения концентрации электронов $N_{к.л}$ примерно в 4—5 раз ниже значения $N_{к.л}$, рассчитанного Вебером, очевидно, что и расчетная величина поглощения также должна быть меньше, т. е. $\sim 0,2$ дб на частоте 9 Мгц. Это значение близко к измерениям в Лопарской и Зименках [10].

2. МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Концентрация электронов $N(z)$ и величина поглощения Γ рассчитывались следующим образом. Величина $N(z)$ находилась по известной формуле

$$N(z) = \sqrt{\frac{q(z)}{(1 + \lambda)(\alpha^* + \lambda\alpha_i)}}, \quad (1)$$

полученной при условии, что $\frac{dN}{dt} = 0$. Здесь $q(z)$ — функция ионообразования, α^* — коэффициент диссоциативной рекомбинации, α_i — коэффициент взаимной нейтрализации, $\lambda = N^-/N^+$ — отношение числа отрицательных ионов N^- к числу электронов.

Величину функции ионообразования под действием космических лучей можно определить по формуле, полученной Велиновым [11],

$$q(z) = 5,4 \cdot 10^4 \left[\sum_i Z_i^2 I_i(>E_i) \ln \sqrt{E_i^2 - 1} + \frac{1}{\gamma_i - 1} + 4 \right] n(z). \quad (2)$$

Здесь γ_i — показатель степени в дифференциальном спектре космических лучей, Z_i — заряд частиц, входящих в состав космических лучей, $I_i(>E_i)$ — интегральный спектр соответствующего сорта частиц, E_i — максимальная энергия частиц, проникающих на данную широту в единицах $0,94 \text{ Бэв} \cdot \text{нуклон}^{-1}$ (энергия геомагнитного обрезания), $n(z)$ — плотность атмосферы на высоте z . Последняя не остается неизменной; имеются суточные и сезонные вариации плотности, отмечается тенденция к уменьшению плотности в годы минимума солнечной активности. Вариации плотности приводят соответственно к сезонным и годовым изменениям $q(z)$. Функция ионообразования зависит также от геомагнитной широты, поскольку энергия геомагнитного обрезания E_i определяется геомагнитной широтой пункта наблюдения.

Величину поглощения в высотном интервале Δz можно определить по формуле

$$\Gamma(z) = A \int_z^{z+\Delta z} N(z) K(z) dz, \quad (3)$$

учитывая, что показатель преломления $n \simeq 1$. При $A = 0,46$ Г получается в децибелах.

При расчетах полагаем $K(z)$ равным [14]

$$K(z) = \frac{5}{2} \frac{1}{v_m(z)} \frac{1}{[3,75 + 2\omega/v_m + \omega^2/v_m^2]} \quad (4)$$

Выражение (4) является приближенным. Однако, как показано в [14], ошибка при вычислении $K(z)$ по формуле (4) в интересующем нас интервале высот очень мала ($\leq 3\%$).

Вообще говоря, при вычислении величины поглощения необходимо учитывать влияние магнитного поля, но в применении к нашим измерениям Γ можно пользоваться выражением (3). Дело в том, что в Лопарской и Зименках принималось космическое радиоизлучение одновременно обыкновенной и необыкновенной компонент. В тех случаях, когда величина поглощения невелика ($\Gamma \leq 6$ дб), выражение (3) справедливо с большой точностью.

Значения частот соударений $v_m(z)$ были взяты те же самые, что в работе [15], где было произведено усреднение по экспериментальным данным*. Так как значения $\Gamma_{к.л}$ были определены в Колледже и Лопарской в 1964—1965 гг., величина $q(z)$ вычислялась для геомагнитной широты 64° , зимнего периода и минимума солнечной активности (в соответствии с расчетами Велинова [12]). Для расчета $N(z)$ использовались следующие значения коэффициентов:

$$\alpha^* = 3 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1} \quad ([7])$$

и

$$\alpha_l = 2 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3 \cdot \text{сек}^{-1}. \quad ([13])$$

Основная трудность расчета концентрации электронов заключалась в выборе величины $\lambda = N^-/N$, поскольку имеют место большие расхождения в вопросе о количестве отрицательных ионов как в георетических оценках концентрации N^- , так и в экспериментальных измерениях. Дело в том, что химия нижней ионосферы еще недостаточно изучена, и в настоящее время нет единого мнения о системе фотохимических реакций на высотах 50—80 км. Рассмотрим несколько распределений $\lambda(z)$, использованных для расчетов $N(z)$ (рис. 2). Кривая 1 про-

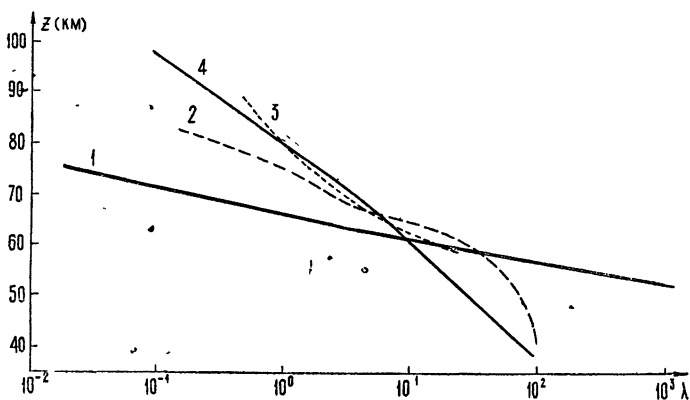


Рис. 2.

ведена на основании теоретических расчетов λ , сделанных Лелевье и Бранскомом [8]. Величина λ по модели [8] должна быть больше единицы на высотах $z < 65 - 67$ км. Пунктиром на рис. 2 показаны два распре-

* Частота соударений, вообще говоря, не остается постоянной; она может меняться от сезона к сезону, в течение цикла солнечной активности и т. д. [16].

деления параметра $\lambda(z)$, полученные по измерениям на ракетах Сагалином и Смидди [17, 18] (кривые 2 и 3). Следует отметить недостаточную точность зондовых измерений концентрации $N(z)$ и $N^-(z)$. Подробный анализ измерений $N(z)$ в D -области был произведен Ивановым-Холодным в работе [1], где значительное расхождение полученных экспериментальных данных $N(z)$ объясняется неудовлетворительной интерпретацией показаний измерительных приборов.

Заметим также, что $\lambda(z)$ можно определить из измерений, сделанных во время ППШ. По измерениям величин поглощения на нескольких частотах во время ППШ и соответствующим спутниковым наблюдениям солнечных космических лучей можно найти значение коэффициента рекомбинации и, следовательно, величину $\lambda(z)$. Кривая (4) (рис. 2) представляет зависимость $\lambda(z)$ по данным [15]. Поскольку трудно отдать предпочтение какому-либо распределению $\lambda(z)$ из описанных выше на ЭВМ были рассчитаны профили $N(z)$ и Γ для всех моделей $\lambda(z)$. Следует отметить, что при $\chi = 90^\circ$ значения параметра λ могут быть несколько выше, чем в дневные часы. Поэтому, пользуясь при расчетах величин N и Γ при соответствующих χ дневными профилями λ , мы будем получать заниженные значения.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

На рис. 3 показаны расчетные профили электронной концентрации $N_{к,л}(z)$. (Обозначения кривых на рис. 3 соответствуют обозначениям распределений $\lambda(z)$ на рис. 2.) Величина $N_{к,л}$ в максимуме слоя по нашим расчетам составляет в среднем 10^2 и отличается для разных моделей λ примерно в 1,5—2 раза. Сравнивая рис. 1 и 3, можно видеть, что расчетные значения $N_{к,л}$ в максимуме слоя соответствуют наблюдаемым величинам электронной концентрации. Но если для экспериментальных профилей максимум слоя находится на высотах $z_{\max} \sim 65 - 68$ км, то для расчетных слоев $N(z)$ он расположен несколько выше, за исключением слоя $N(z)$, полученного при вычислениях на основе модели Лелевье и Бранскома (кривая 1 на рис. 3).

Из сравнения рис. 1 и 3 видно также, что толщина расчетных слоев значительно больше, чем толщина реальных слоев. В первую очередь это относится к профилям $N_{к,л}(z)$, обозначенным на рис. 3 цифрами 2, 3 и 4. Толщина этих профилей на уровне половины максимальной концентрации составляет 30—40 км. Наиболее близким к экспериментальным данным является профиль $N(z)$, рассчитанный с привлечением модели $\lambda(z)$ Лелевье и Бранскома. Однако толщина этого профиля также велика (~ 18 км).

На рис. 4 сплошной линией показан расчетный профиль (кривая 1) $N_{к,л}(z)$, а пунктиром—наблюдаемые слои $N_{к,л}(z)$. Высоты отсчитывались от z_{\max} , а значения N взяты в относительных единицах $\frac{N}{N_{\max}}$. Из рис. 4 видно, что если ниже максимума слоя рассчитанная величина $N_{к,л}(z)$ спадает достаточно быстро, то выше максимума электронная концентрация уменьшается медленнее, чем в реальных профилях $N(z)$. Быстрое уменьшение $N(z)$ выше z_{\max} теоретически можно объяснить наличием большого количества отрицательных ионов, образующих некоторый дополнительный слой $N^-(z)$ на высотах, близких к 80 км. Возможно, что более достоверным является другое предположение. Измеренные в период восхода Солнца профили $N(z)$ могут быть неравновесными, поэтому при вычислениях нельзя полагать $\frac{dN}{dt}$

близким к нулю. В этом случае можно ожидать различие расчетных и экспериментальных слоев.

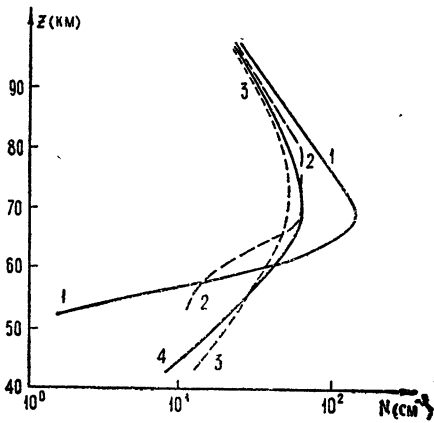


Рис. 3.

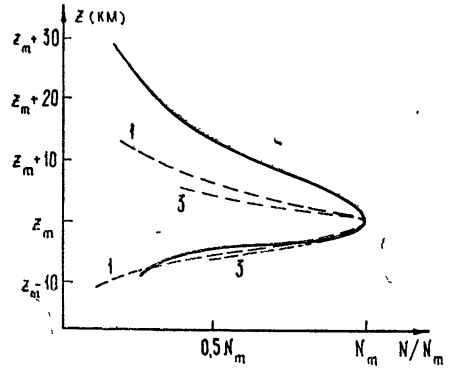


Рис. 4.

Для профилей $N(z)$, приведенных на рис. 1 и 3, было вычислено поглощение радиоволн на частоте 9 Мгц. Расчет производился в интервале высот 40—100 км. Измеренные профили $N_{кл}(z)$ лежат в интервале высот 55—75 км. Поэтому считалось, что выше 75 км и ниже 55 км $N(z)$ уменьшается экспоненциально, как показано пунктиром на рис. 1. Расчетная интегральная величина поглощения радиоволн для экспериментальных профилей $N_{кл}(z)$ составила 0,15—0,25 дб. Учитывая тот факт, что по данным измерений, полученным в Лопарской и Зименках, поглощение на восходе Солнца равно $\Gamma = 0,3$ дб, мы можем указать пределы, в которых лежит $\Gamma_{кл}$:

$$0,15 \text{ дб} \leq \Gamma_{кл} < 0,3 \text{ дб}$$

на частоте 9 Мгц.

В табл. 1 приведены интегральные величины поглощения, соответствующие расчетным профилям $N(z)$ рис. 3.

Таблица 1

	$\Gamma_{кл}$ (дб)	Литература
1	0,25	[8]
2	0,17	[18]
3	0,23	[19]
4	0,23	[15]

Как видно из табл. 1, значения $\Gamma_{кл}$ составляют 0,17—0,25 дб на частоте 9 Мгц, т. е. близки к полученным на основе экспериментальных данных о распределении $N(z)$. Особо следует остановиться на том, что изменения величины поглощения при значениях χ вблизи 90—100° в пределах ошибок измерений оказались одинаковыми как для Лопарской, так и для Зименок. Это обстоятельство свидетельствует об отсутствии в зоне полярных сияний дополнительных источников ионизации нижней части D-области (не считая аномальной ионизации).

На основании вышеприведенного можно сделать вывод о том, что в области высот 50—70 км основным источником ионизации являются галактические космические лучи как в умеренных широтах, так и в зоне полярных сияний. Соответствующий профиль электронной плот-

ности наблюдается на восходе Солнца, и максимальное значение N составляет примерно 10^2 см^{-3} в годы минимума солнечной активности. Наблюдаемая электронная концентрация в максимуме слоя согласуется с расчетными данными. Интегральная величина поглощения радиоволн, проходящих через слой ионизации, созданной космическими лучами, согласно [10] и проделанным вычислениям, находится в пределах 0,15—0,3 дБ на частоте 9 МГц. Таким образом, не имеется существенных противоречий между экспериментальными данными и теоретическими расчетами распределения электронной концентрации и величины поглощения радиоволн, обусловленных космическими лучами.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Е. А. Бенедиктову за руководство и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Иванов-Холодный, Геомагнетизм и аэрономия, 5, № 4, 706 (1965).
2. D. G. Deeks, Proc. Roy. Soc., A 291, 413 (1965).
3. J. A. Kane, J. Troim, J. Geophys. Res., 72, № 3, 1118 (1967).
4. E. A. Mechtly, L. G. Smith, J. Atmosph. Terr. Phys., 30, № 3, 363 (1968).
5. W. F. Moler, J. Geophys. Res., 65, 1459 (1960).
6. W. Webber, J. Geophys. Res., 67, № 13, 5091 (1962).
7. R. C. Whitten, I. G. Poppoff, J. Atmosph. Sci., 21, № 2, 117 (1964).
8. R. E. Lelevier, L. M. Branscomb, J. Geophys. Res., 73, № 1, 27 (1968).
9. G. M. Lorfald, R. Parthasarathy, Electron density profiles in ionosphere and exosphere, North-Holland Publ. Company, Amsterdam—New York, 1966, p. 90.
10. Е. А. Бенедиктов, В. А. Дубкова, А. В. Толмачева, Геомагнетизм и аэрономия (в печати).
11. P. Velinov, J. Atmosph. Terr. Phys., 30, № 11, 1891 (1968).
12. П. Велинов, Докл. Болг. АН, 20, № 11, 1141 (1966).
13. V. H. Mahan, J. C. Person, J. Chem. Phys., 40, 392 (1964).
14. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Геомагнетизм и аэрономия (в печати).
15. R. Parthasarathy, D. B. Rai, Radio Sci., 1, № 12, 1397 (1966).
16. G. S. Belrose, L. R. Bode, L. W. Hewitt, Electron density profiles in ionosphere and exosphere, North-Holland Publ. Company, Amsterdam—New York, 1966.
17. R. C. Sagalin, M. C. Smiddy, Space Res., 4, Warsava, 1963.
18. R. C. Sagalin, M. C. Smiddy, Space Res., 4, Amsterdam, 1966.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 мая 1969 г.

CONTRIBUTION OF COSMIC RAYS TO IONOSPHERIC *D*-REGION IONIZATION

A. V. Tolmacheva

The ionization in the lower *D*-region, caused by the effect of galactic cosmic rays, is calculated, as well as the value of the absorption of radio waves propagating through this region. Results of calculations are compared with experimental data on the electron density in *D*-region and with radio wave absorption measurements. A conclusion is made that at the heights of 50—70 km the galactic cosmic rays constitute the main source of ionization, both at temperate latitudes and auroral zones. The maximum of the electron density in the years of the minimum solar activity is about 10^2 cm^{-3} . The integral value of radio wave absorption due to ionization of cosmic rays ranges 0.15—0.3 db at a frequency of 9 Mc/s.

УДК 533.9.01

К ВОПРОСУ О СТАБИЛИЗАЦИИ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

В. В. Зайцев

Получены условия отсутствия стабилизации неустойчивости при взаимодействии пучка с плазмой. Спектр плазменных колебаний предполагается одномерным, а функция распределения пучка — линейно зависящей от скорости. Рассмотрены случаи «медленного» и «быстрого» пучков, причем для «быстрого» пучка учтено движение границы области неустойчивости. Проведен анализ пульсирующего режима неустойчивости, который может возникать в условиях стабилизации, если существенны эффекты поглощения плазменных волн.

При анализе солнечных радиовсплесков III типа [1, 2], исследовании радиоизлучения пульсаров [3] и в целом ряде других случаев возникает необходимость оценки эффективности и характера взаимодействия пучков заряженных частиц с плазмой. В связи с этим полезно иметь простые критерии, характеризующие реализацию того или иного режима неустойчивости.

В работе [4] был рассмотрен режим стабилизации пучковой неустойчивости, обусловленный эффективным индуцированным рассеянием возбуждаемых плазменных волн в нерезонансную область спектра, в которой волны не взаимодействуют с пучком и, следовательно, не меняют его функцию распределения.

Ниже получены условия, при которых реализуется другой предельный случай — отсутствие стабилизации, когда время нелинейной перекачки в нерезонансную область достаточно велико и генерируемые плазменные волны успевают существенно деформировать функцию распределения пучка. Качественно указанный случай обсуждался в [4, 5], однако строгого критерия отсутствия стабилизации в этих работах не содержится.

В настоящей работе также рассмотрен пульсирующий режим пучковой неустойчивости, который может возникнуть при стабилизации, если учесть поглощение плазменных волн (например, из-за столкновений частиц или конверсии в поперечные волны). Действительно, в этом случае возбужденные потоком плазменные волны вначале перекачиваются в нерезонансную область спектра и стабилизируют неустойчивость. Однако в результате поглощения колебания в резонансной области постепенно затухают и стабилизация исчезает. Пучок снова возбуждает порцию плазменных волн; они вновь перекачиваются в нерезонансную область, затухают и т. д. Такой процесс повторяется многократно до тех пор, пока на функцию распределения пучка не возникнет «плато» и генерация плазменных волн не прекратится. На возможность реализации пульсирующего режима при учете диссипации впервые указано, по-видимому, в работах [6, 7].

В дальнейшем мы ограничимся исследованием лишь одномерного спектра плазменных волн. Предположение об одномерности выполняется, если пучок распространяется в плазме вдоль достаточно сильного

магнитного поля, для которого $\omega_{He} \gg \omega_L$ [8]. Кроме того, будем считать зависимость функции распределения пучка от скорости линейной, что в первом приближении допустимо, если дисперсия скоростей в потоке достаточно мала ($\Delta v_s \ll v_s$; см., например, [9]).

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ «МЕДЛЕННОГО» ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Пучок со скоростью $v_s \gg v_{Te}$ — тепловой скорости электронов — будем называть «медленным», если концентрация частиц в пучке N_s мала по сравнению с концентрацией резонансных электронов в основной плазме, т. е. $N_s \ll f_0(v_s) \Delta v_s$, где $f_0(v)$ — функция распределения плазмы без пучка; Δv_s — дисперсия скоростей в пучке. В этом случае энергия возбуждаемых плазменных волн не достаточна, чтобы существенно изменить границы области неустойчивости, и их в первом приближении можно считать неподвижными. Предполагая дисперсию в потоке достаточно малой ($\Delta v_s = 2u \ll v_s$, см. рис. 1), запишем функцию распределения пучка в виде [9]

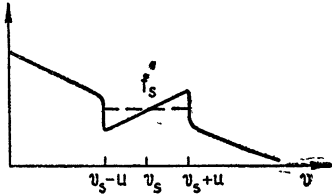


Рис. 1.

$$f_s(v, t) = C + A(t)(v - v_s)(v_s - u \leq v \leq v_s + u). \quad (1)$$

Проинтегрируем известные уравнения для функции распределения пучка и спектральной плотности энергии плазменных волн (см., например, [4]) по фазовым скоростям, считая спектры плазменных волн в резонансной и нерезонансной областях фазовых скоростей достаточно узкими ($\Delta k_s/k_s \ll 1$, $\Delta k^*/k^* \ll 1$), а индуцированное рассеяние плазменных волн на ионах основной плазмы — интегральным*. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\frac{da}{dt} = -DaW, \quad \frac{dW}{dt} = \gamma aW - \zeta WW^*, \quad \frac{dW^*}{dt} = \zeta WW^*. \quad (2)$$

Здесь $a(t) = A(t)/A_0$, $A_0 = A(t=0) \simeq N_s/(\Delta v_s)^2$; W и W^* — плотности энергии плазменных волн соответственно в резонансной и нерезонансной областях спектра;

$$D = \frac{12\pi\omega_L v_s}{m_e n (\Delta v_s)^3}, \quad \gamma = \frac{\pi\omega_L v_s^2 A_0}{n}, \quad \zeta = \frac{3\sqrt{2\pi} (T_e/T_i) [(\omega_L/v_s) - k^*]}{8 (1 + T_e/T_i)^2 n m_e/v_{Ti}} e^{-\delta}, \quad (3)$$

$$\delta = \frac{(\omega_{k_s} - \omega_{k^*})^2}{2v_{Ti}^2 (k_s + k^*)^2}, \quad k_s \simeq \frac{\omega_L}{v_s}, \quad \omega_L^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m_e}, \quad v_{Ti}^2 = \frac{xT_i}{m_i}, \quad \Delta v_s = 2u;$$

k_s и k^* — средние волновые векторы плазменных волн в резонансной и нерезонансной областях; остальные обозначения общепринятые. Пучок для определенности предполагается электронным. В случае ионного пучка в уравнениях (2) необходимо заменить D и γ на $D_i = (m_e/m_i)^2 D$ и $\gamma_i = (m_e/m_i) \gamma$.

* Узость спектра в резонансной области фазовых скоростей непосредственно следует из принятого неравенства $\Delta v_s \ll v_s$. В нерезонансной области условие $\Delta k^*/k^* \ll 1$ будет выполнено лишь в том случае, если начальное распределение шумов в этой области является достаточно узким [4]. Наконец, индуцированное рассеяние на ионах преобладает над рассеянием на электронах плазмы при условии

$$(k_s - k^*)/k_s^2 \leq m_e v_s^2 T_i / m_i v_{Te}^2 T_e.$$

Решение уравнений (2) в переменной $\tau = \int_0^t W(t') dt'$ элементарно:

$$W(\tau) = W(0) + \frac{\gamma}{D}(1 - e^{-D\tau}) - W^*(0)(e^{\zeta\tau} - 1), \quad W^*(\tau) = W^*(0)e^{\zeta\tau},$$

$$a(\tau) = e^{-D\tau}. \quad (4)$$

За достаточно большое время (формально при $t \rightarrow \infty$) вся энергия плазменных волн перераспределяется в нерезонансную область спектра ($W \rightarrow 0$) и для определения $\tau_\infty = \int_0^\infty W(t') dt'$ имеем уравнение

$$W(0) + \frac{\gamma}{D}[1 - \exp(-D\tau_\infty)] - W^*(0)[\exp(\zeta\tau_\infty) - 1] = 0. \quad (5)$$

Если $D\tau_\infty \ll 1$, то, как следует из (4), в процессе нелинейной перекачки энергии возбуждаемых плазменных волн в нерезонансную область спектра производная от функции распределения пучка мало меняется по сравнению со своим первоначальным значением $a(0) = 1$. В этом случае имеет место стабилизация пучковой неустойчивости, рассмотренная в [4]. Пренебрегая в (5) вкладом начальных шумов, легко определить τ_∞ и записать критерий стабилизации $D\tau_\infty \ll 1$ в виде

$$\varepsilon \ln \frac{\varepsilon\gamma}{DW^*(0)} \ll 1, \quad (6)$$

что, разумеется, совпадает с [4]. Здесь $\varepsilon = D/\zeta$ — параметр стабилизации, равный отношению линейного инкремента неустойчивости к инкременту индуцированного рассеяния ζW^* при энергии W^* порядка энергии на квазилинейной стадии.

В противоположном предельном случае $D\tau_\infty \gg 1$ влияние квазилинейной релаксации становится определяющим, и в конечном состоянии ($W = 0$, $\tau = \tau_\infty$) производная от функции распределения пучка существенно уменьшается по сравнению с $a(0) = 1$. Определяя из (5) значение τ_∞ при условии $D\tau_\infty \gg 1$, получим следующий критерий отсутствия стабилизации:

$$\varepsilon \ln \frac{\gamma}{DW^*(0)} \gg 1. \quad (7)$$

Это условие, по существу, противоположно неравенству (6). Оно отличается от приведенного в [4] условия отсутствия стабилизации ($\varepsilon \gg 1$) логарифмическим фактором, который может достигать значений порядка 10 и более. Поэтому фактически стабилизация не имеет места уже при $\varepsilon \gtrsim 1$. Заметим также, что в неравенстве (7), в отличие от (6), под знаком логарифма исчезает множитель ε .

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ «БЫСТРОГО» ПУЧКА С ПЛАЗМОЙ

Если при $v_s \gg v_{Te}$ выполнено также условие $N_s \gg f_0(v_s)\Delta v_s$ (такой пучок мы будем называть «быстрым»), то в процессе развития неустойчивости границы неустойчивой области могут меняться и их уже нельзя считать неподвижными. При этом наиболее сильно меняется граница, соответствующая меньшим фазовым скоростям, в то время как движением другой границы можно пренебречь [10]. В соответствии со сказан-

ным, в рамках линейной аппроксимации функции распределения можно записать (см. рис. 2).

$$f_s = A(t) [v - v_{\min}(t)], \quad v_{\min}(t) \leq v \leq v_s, \quad (8)$$

где верхняя граница скоростей в пучке v_s считается неизменной, а нижняя $v_{\min}(t)$ — зависящей от времени.

Из закона сохранения числа резонансных частиц следует тогда соотношение между $a(t)$ и $v_{\min}(t)$:

$$a(t) = \frac{[v_s - v_{\min}(0)]^2}{[v_s - v_{\min}(t)]^2}. \quad (9)$$

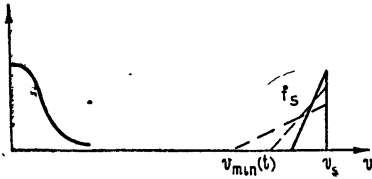


Рис. 2.

Учитывая (9) и считая опять дисперсию скоростей в пучке достаточно малой, т. е. $v_s - v_{\min}(0) \leq v_s - v_{\min}(t) \ll v_s$, получим вместо (2) следующую систему уравнений:

$$\frac{da}{dt} = -Da^{5/2}W, \quad \frac{dW}{dt} = \gamma aW - \zeta W^*W, \quad \frac{dW^*}{dt} = \zeta W W^*. \quad (10)$$

Здесь коэффициенты D, γ, ζ по-прежнему определяются формулами (3), причем под Δv_s необходимо теперь подразумевать величину $\Delta v_s = v_s - v_{\min}(0)$.

Решение системы (10) также легко найти:

$$W(\tau) = W(0) + 2 \frac{\gamma}{D} \left[\left(1 + \frac{3}{2} D \tau \right)^{1/3} - 1 \right] - W^*(0) (e^{\zeta \tau} - 1), \quad (11)$$

$$W^*(\tau) = W^*(0) e^{\zeta \tau};$$

$$a(\tau) = \left(1 + \frac{3}{2} D \tau \right)^{-2/3}, \quad v_{\min}(\tau) = v_s - \Delta v_s \left(1 + \frac{3}{2} D \tau \right)^{1/3}. \quad (12)$$

Как следует из (12), по окончании процесса развития неустойчивости, когда $\tau = \tau_\infty$ и $W(\tau_\infty) = 0$, дисперсия скоростей в пучке возрастает от первоначального значения Δv_s до $\Delta v_{\max} = \Delta v_s \left(1 + \frac{3}{2} D \tau_\infty \right)^{1/3}$. Если $D \tau_\infty \ll 1$, то $\Delta v_{\max} \simeq \Delta v_s$ и $a(\tau_\infty) \simeq 1$. В этом случае функция распределения пучка меняется мало и имеет место стабилизация пучковой неустойчивости. Определяя из уравнения

$$W(0) + 2 \frac{\gamma}{D} \left[\left(1 + \frac{3}{2} D \tau_\infty \right)^{1/3} - 1 \right] - W^*(0) [\exp(\zeta \tau_\infty) - 1] = 0 \quad (13)$$

значение τ_∞ в приближении $D \tau_\infty \ll 1$, получим условие стабилизации, в точности совпадающее с (6). Таким образом, условие стабилизации для «быстрого» и «медленного» пучков одинаковы. Это легко понять, так как в режиме стабилизации границы области неустойчивости «быстрого» пучка остаются неподвижными, как и в случае «медленного» пучка.

Если $D \tau_\infty \gg 1$, стабилизация не реализуется, поскольку, как следует из (12), $a(\tau_\infty) \ll a(0) = 1$. Учитывая, что при $D \tau_\infty \gg 1$

$$\tau_\infty \simeq \frac{1}{\zeta} \ln \left[2 \frac{\gamma}{D W^*(0)} \left(\frac{3}{2} \frac{D}{\zeta} \right)^{1/3} \right], \quad (14)$$

запишем условие отсутствия стабилизации для «быстрого» пучка в виде

$$\varepsilon \ln \left[(12\varepsilon)^{1/3} \frac{\gamma}{D W^*(0)} \right] \gg 1. \quad (15)$$

Сравнение неравенств (7) и (15) показывает, что критерии отсутствия стабилизации для «медленного» и «быстрого» пучков практически совпадают. Несущественное отличие заключается в появлении множителя $(12\varepsilon)^{1/3}$ под знаком логарифма в неравенстве (15).

3. ПУЛЬСИРУЮЩИЙ РЕЖИМ ПУЧКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим случай, когда имеет место стабилизация пучковой неустойчивости, т. е. выполнено неравенство (6), и учтем поглощение плазменных волн, например, за счет столкновений частиц. Тогда во второе и третье уравнения системы (10) необходимо добавить члены $-\nu_{эфф} W$ и $(-\nu_{эфф} W^*)$. Здесь $\nu_{эфф}$ — эффективная частота электронно-ионных столкновений; формально в $\nu_{эфф}$ может быть включено также затухание, обусловленное спонтанной конверсией плазменных волн в электромагнитные.

Как указывалось выше, поглощение в условиях стабилизации приводит к периодическому многократному возбуждению плазменных волн в резонансной области спектра, в результате чего функция распределения пучка стремится к состоянию с плато, хотя и существенно медленнее, чем при обычной квазилинейной релаксации. Действительно, из первого и третьего уравнений системы (10) при учете диссипации можно получить следующий закон изменения $a(t)$:

$$a(t) = \left[1 + \frac{3\varepsilon\nu_{эфф}}{2} t + \frac{3\varepsilon}{2} \ln \frac{W^*(t)}{W^*(0)} \right]^{-2/3}. \quad (16)$$

Если выполнено условие стабилизации (6), то последним слагаемым в (16) можно пренебречь по сравнению с единицей. В результате получим характерное время релаксации пучка

$$t_p \simeq \frac{1}{\varepsilon\nu_{эфф}}, \quad (17)$$

которое при $\varepsilon \ll 1$ и $\nu_{эфф} \ll \gamma$ значительно превышает время квазилинейной релаксации при отсутствии стабилизации.

Для моментов времени $t \ll t_p$ (формально при $\varepsilon \rightarrow 0$) можно пренебречь изменением функции распределения пучка. Тогда вместо (10) получим систему уравнений

$$\frac{dW}{dt} = (\gamma a - \nu_{эфф}) W - \zeta W W^*, \quad \frac{dW^*}{dt} = \zeta W W^* - \nu_{эфф} W^*, \quad a = \text{const} \quad (18)$$

Фазовые траектории уравнений (18) в плоскости (W^*, W) представляют собой замкнутые кривые с особой точкой типа центр при $W = W_0 = \nu_{эфф}/\zeta$, $W^* = W_0^* = (\gamma a - \nu_{эфф})/\zeta$:

$$W - \frac{\nu_{эфф}}{\zeta} \ln \frac{\zeta W}{\gamma} = \frac{\gamma a - \nu_{эфф}}{\zeta} \ln \frac{\zeta W^*}{\gamma} - W^* + C_1. \quad (19)$$

Здесь C_1 — константа интегрирования, зависящая от начальных условий.

Определим период T нелинейных пульсаций. Из первого уравнения системы (18) находим

$$W(t) = W(0) \exp \left[(\gamma a - \nu_{\text{эфф}}) t - \zeta \int_0^t W^*(t') dt' \right]. \quad (20)$$

Далее из условия периодичности функции $W(t)$ следует соотношение $W(t) = W(t + T)$, которое дает уравнение для периода:

$$T = \frac{\zeta}{\gamma a - \nu_{\text{эфф}}} \int_t^{t+T} W^*(t') dt'. \quad (21)$$

Переходя в (21) к интегрированию по dW^* с помощью второго уравнения системы (18), получим выражение для периода через интеграл по замкнутой фазовой траектории (19):

$$T = \frac{\zeta}{\gamma a - \nu_{\text{эфф}}} \oint \frac{dW^*}{\zeta W(W^*) - \nu_{\text{эфф}}}. \quad (22)$$

Направление движения по фазовой траектории при интегрировании в плоскости (W^*, W) определяется системой (18) и, как нетрудно убедиться, должно происходить по часовой стрелке. Для фазовых траекторий, проходящих вблизи особой точки W_0, W_0^* , которые соответствуют малой модуляции амплитуды плазменных волн и отвечают неравенствам $|W - W_0| \ll W_0, |W^* - W_0^*| \ll W_0^*$, с помощью (19) и (22) получим

$$T = 2\pi / \sqrt{(a\gamma - \nu_{\text{эфф}}) \nu_{\text{эфф}}}.$$

Приведем, наконец, средние за период значения плотности энергии плазменных волн в резонансной и нерезонансной областях спектра:

$$\bar{W} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} W(t') dt' = \frac{\nu_{\text{эфф}}}{\zeta}, \quad \bar{W}^* = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} W^*(t') dt' = \frac{\gamma a - \nu_{\text{эфф}}}{\zeta}. \quad (23)$$

Эти формулы, наряду с (18)–(22), справедливы, очевидно, при условии $T \varepsilon \nu_{\text{эфф}} \ll 1$, означающем, что период нелинейных пульсаций много меньше характерного времени релаксации (17) функции распределения пучка в условиях стабилизации.

В заключение укажем на некоторые примеры, иллюстрирующие возможную реализацию различных режимов пучковой неустойчивости в космических условиях. Типичные солнечные радиовсплески III типа генерируются электронными потоками с концентрацией $N_s \simeq 1 \div 10 \text{ эл. см}^{-3}$, средней скоростью $v \simeq 10^{10} \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}$, дисперсией скоростей $\Delta v_s \leq \frac{1}{3} v_s$, которые распространяются вдоль силовых линий

магнитного поля в плазме солнечной короны с концентрацией $n \simeq 10^7 \div 10^8 \text{ эл. см}^{-3}$ и температурой $T_e = T_i \simeq 10^6 \text{ К}$. Приведенные параметры дают $\varepsilon \ln [(12 \varepsilon)^{1/3} \gamma / DW^*(0)] \simeq 10 \gg 1$, т. е. для типичных всплесков III типа условие стабилизации не выполняется. Слабая неустойчивость в процессе всплеска может поддерживаться в этом случае за счет неоднородности переднего фронта потока [1].

Если радиовсплески III типа генерируются ионными потоками с теми же параметрами, то для них условие стабилизации выполнено: $\varepsilon \ln [\varepsilon \gamma / DW^*(0)] \simeq 10^{-5} \ll 1$. В этом случае не исключено появление модуляции динамических спектров, связанной с развитием пульсирующего режима неустойчивости. Некоторое указание на такую модуляцию в одном событии III типа содержится в работе [1].

Автор благодарит А. А. Андронову, В. В. Железнякову и В. Ю. Трахтенгерца за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Железняков, В. В. Зайцев, Астрон. ж., 47, 60 (1970).
2. С. А. Каплан, В. Н. Цытович, Астрон. ж., 44, 1194 (1967).
3. В. Л. Гинзбург, В. В. Железняков, В. В. Зайцев, УФН, 98, 201 (1969).
4. В. Н. Цытович, В. Д. Шапиро, Ядерный синтез, 5, 228 (1965).
5. Л. М. Коврижных, ЖЭТФ, 48, 1114 (1965).
6. А. А. Андронов, Диссертация, ГГУ, 1968.
7. В. Ю. Трахтенгерц, Геомагнетизм и астрономия, 8, 966 (1968).
8. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, ДАН СССР, 146, 65 (1962).
9. А. А. Веденов, сб. Вопросы теории плазмы, 3, Атомиздат, М, 1963, стр. 203.
10. А. А. Иванов, Л. И. Рудakov, ЖЭТФ, 51, 1522 (1966).
11. M. P. Hughes, R. L. Harkness, Appl. J., 138, 239 (1963).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 сентября 1969 г.

TO THE QUESTION OF STABILIZATION OF THE STREAM INSTABILITY

V. V. Zaitsev

The conditions of the absence of stabilization of instability when the stream interacts with plasma are obtained. The spectrum of plasma oscillations is assumed to be onedimensional and the distribution function of the stream linearly dependent on the velocity. The cases of „slow“ and „fast“ streams are considered, the motion of the boundary of the instability region being taken into account for a „fast“ stream. An analysis is made of the pulsating regime of instability which may occur under the conditions of stabilization if the effects of plasma wave absorption are essential.

УДК 533.951

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В СИСТЕМЕ ПОТОК — ПЛАЗМА

М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн

Рассматривается взаимодействие ионно-звуковых волн на комбинационных частотах в неизотермической плазме, пронизываемой моноскоростным потоком электронов. Показано, что в исследуемой системе возможна генерация гармоник ионно-звуковых волн и ограничение амплитуды нарастающей волны за счет перекачки энергии нарастающих волн в затухающие, т. е. динамическая стабилизация низкочастотной неустойчивости. Исследование проводится на основе квазигидродинамических уравнений при помощи метода усреднения по двум переменным.

В работе [1] рассмотрено взаимодействие плазменных волн на комбинационных частотах в системе поток—плазма при наличии пучковой неустойчивости. Показано, что в результате взаимодействия нарастающих волн с волнами, затухающими в линейном приближении, возможны генерация гармоник и ограничение амплитуды нарастающей волны, т. е. динамическая стабилизация пучковой неустойчивости. Исследование проведено для одного из предельных случаев — моноскоростного пучка и «холодной» плазмы, т. е. когда равновесная скорость потока V_0 много больше тепловой скорости электронов плазмы $v_T = (x_0 T/m)^{1/2}$ (x_0 — постоянная Больцмана, T — температура электронов, m — масса электрона). В другом предельном случае $V_0 \ll v_T$ в квазигидродинамическом приближении система поток — плазма устойчива относительно раскачки плазменных волн (см. [2]), но возникает низкочастотная неустойчивость на так называемых ионно-звуковых волнах в неизотермической плазме ($T_i \ll T$, T_i — температура ионов), поэтому представляет интерес исследование взаимодействия нарастающих ионно-звуковых волн с волнами других типов, затухающих за счет соударений с нейтралами, и исследование этого механизма стабилизации низкочастотной неустойчивости в системе поток—плазма.

Ниже рассмотрено комбинационное взаимодействие ионно-звуковых волн в системе из неизотермической плазмы (T^- для простоты считаем равной нулю), пронизываемой моноскоростным потоком электронов. Показано, что в такой системе возможны генерация гармоник ионно-звуковых волн и низкочастотная стабилизация пучковой неустойчивости — ограничение нарастания ионно-звуковых волн за счет перекачки их энергии в волны, затухающие из-за соударений.

Система поток—неизотермическая плазма описываются одномерными квазигидродинамическими уравнениями* [3]:

$$E + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (a)$$

* Предполагается, что в системе присутствует достаточно сильное магнитное поле, $\omega_{H_i} \gg \omega_{oi}$ (ω_{H_i} , ω_{oi} — гирочастота и ленгмюровская частота ионов), поэтому все переменные можно считать зависящими от одной пространственной координаты x и времени t .

$$\frac{\partial E}{\partial x} - 4\pi e \left[\rho_s - n_0 \left(\frac{e\varphi}{x_0 T} \right) - \rho_i \right] = 4\pi e n_0 \left(\frac{e\varphi}{x_0 T} \right)^2, \quad (б)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{e}{M} E = -v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - \nu_{эфф} v_i, \quad (в)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + N \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho_i v_i), \quad (г) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + V_0 \frac{\partial v_s}{\partial x} - \frac{e}{m} E = -v_s \frac{\partial v_s}{\partial x}, \quad (д)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + N_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + V_0 \frac{\partial \rho_s}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho_s v_s). \quad (е)$$

Здесь E, φ — напряженность и потенциал электрического поля; v_i, v_s, ρ_i, ρ_s — отклонения скорости ионов, электронов потока, концентрации ионов и электронов потока от их равновесных значений $0, V_0, N, N_s$; M — масса иона, e — заряд электрона (иона); $\nu_{эфф}$ — эффективная частота соударений ионов с нейтралами; в уравнении Пуассона (б) проведено разложение функции, описывающей распределение электронов в потенциальном поле $n_0 \exp(-e\varphi/x_0 T)$ в ряд с точностью до квадратичных членов; равновесная концентрация электронов $n_0 = N$.

В линейном приближении исследуемая система описывается дисперсионным уравнением [2] (см. рис. 1)

$$1 - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{0i}^2}{k^2 v_{зв}^2} - \frac{\omega_{0s}^2}{(\omega - kV_0)^2} = 0, \quad (2)$$

где $\omega_{0s}^2 = \frac{4\pi e^2 N_s}{m}$, $\omega_{0i}^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{M}$

— ленгмюровские частоты электронов потока и ионов плазмы, $v_{зв}^2 = x_0 T/M$ — скорость ионного звука; ω, k — частота и волновое число волны. Уравнение (2) имеет при действительных k комплексные решения

для $\tilde{\omega}$ при условии $\text{Re } \tilde{\omega} \leq kV_0 = kv_{зв} [\alpha^2/(\alpha^2 + k^2)]^{1/2}$ ($\alpha^2 = \omega_{0i}^2/v_{зв}^2$):

$$\text{Im } \tilde{\omega} = \gamma = \sqrt{3} kv_{зв} \left(\frac{\omega_{0s}}{4\omega_{0i}} \right)^{2/3} \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + k^2} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

При вычислении (3) предполагалось, что $\omega_{0s}^2/\omega_{0i}^2 = \beta^2 \ll 1$. Как следует из (2), нарастающая волна с параметрами ω_1 и k_1 (на рис. 1 ей соответствует точка, лежащая вблизи прямой ω_{0i} правее kV_0) находится в синхронизме с волной удвоенной частоты (которая в линейном приближении затухает), принадлежащей средней ветви дисперсионного уравнения, т. е.

$$k_1 + k_1 = k_3, \quad (4)$$

$$\omega_1 + \omega_1 = \omega_3 + \Delta\omega \quad \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1 \right).$$

Предлагая нелинейность малой, для описания процесса взаимодействия этих волн воспользуемся методом усреднения по двум переменным x и t [4, 5].

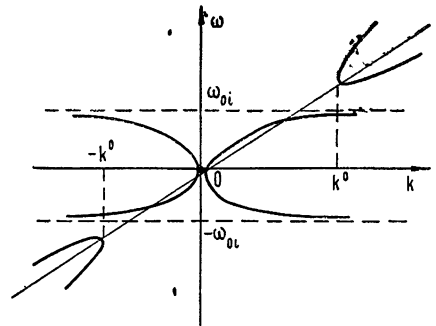


Рис. 1.

Исходные усредненные уравнения для медленных переменных амплитуд A_j^m и фаз φ_j^m волн имеют вид [5, 6]

$$\frac{\partial A_j^m}{\partial t} + v_{гp j}^m \frac{\partial A_j^m}{\partial x} = \operatorname{Re} \frac{a_m \sum_{l=1}^n \zeta_{ml} f_l^{m, i}}{D_p} + \gamma_l \delta_{ij} A_j, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + v_{гp j}^m \frac{\partial \varphi_j^m}{\partial x} = \operatorname{Im} \frac{a_m \sum_{l=1}^n \zeta_{ml} f_l^{m, i}}{D_p A_j^m},$$

$$p = i\omega, \quad x = -ik,$$

$D(p, x) = 0$ дисперсионное уравнение системы; γ_l — инкремент нарастающей волны; $v_{гp}$ — групповая скорость волны; ζ_{ml} — собственные функции сопряженной с (1) $\left(\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow p; \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow x, \text{ правые части уравнений}\right.$

(1) равны нулю) алгебраической системы; $a_m = \text{const}$, а

$$f_l^{m, i} = \frac{1}{T\lambda_0} \int_0^T \int_0^{\lambda_0} f_l(x, t) \exp\{-i[\omega_j t - k_j^m x + \varphi_j(x, t)]\} dx dt, \quad (6)$$

где $f_l(x, t)$ — правые части уравнений (1).

Представим наше решение для переменных $E, \varphi, v_1, v_3, \rho_1, \rho_3$ в виде суммы трех волн вида $\sim \sum_{j=1}^3 \Psi_j^m A_j^m \exp[i(\omega_j t - k_j^m x + \varphi_j)] + \text{к. с.}$,

Ψ_j^m — коэффициенты распределения линейной задачи, m характеризует тип волны (номер ветви дисперсионного уравнения), A_j^m и φ_j^m — амплитуда и фаза волны, медленно меняющиеся по сравнению с $\exp[i(\omega t - kx)]$; ω и k связаны дисперсионным уравнением (2). После подстановки выражений для функций $E, \varphi, v_1, v_3, \rho_1, \rho_3$ в (5) и (6) получим следующие усредненные уравнения ($\omega_1 = \omega_2, k_1 = k_2, A_1 = A_2, \varphi_1 = \varphi_2$):

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 + v_{гp, 1} A_1' &= \sigma_1 A_1 A_3 \cos \Phi + \gamma_0 A_1, \\ \dot{A}_3 + v_{гp, 3} A_3' &= \sigma_3 A_1^2 \cos \Phi - \nu A_3, \\ \dot{\varphi}_1 + v_{гp, 1} \varphi_1' &= -\sigma_1 A_3 \sin \Phi, \\ \dot{\varphi}_3 + v_{гp, 3} \varphi_3' &= \sigma_3 \frac{A_1^2}{A_3} \sin \Phi, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_3 + \Delta\omega, \quad (\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial t}, \quad (') \equiv \frac{\partial}{\partial x}.$$

Здесь

$$\sigma_1 = \frac{1}{2D_1} \left[\frac{e\omega_{0l}^2 k_1^3 (\omega_1 - k_1 V_0)^2}{M \omega_2 \omega_3} + \frac{e\omega_{0l}^2 k_1^2 (\omega_1 - k_1 V_0)^2 \omega_1}{M \omega_2 \omega_3} \left(\frac{k_2}{\omega_2} + \frac{k_3}{\omega_3} \right) - \right.$$

$$\begin{aligned} & - \frac{e\omega_{0s}^2 k_1^3 \omega_1^2}{m(\omega_2 - k_2 V_0)(\omega_3 - k_3 V_0)} - \frac{e\omega_{0s}^2 k_1^2 \omega_1^2 (\omega_1 - k_1 V_0)}{m(\omega_2 - k_2 V_0)(\omega_3 - k_3 V_0)} \left(\frac{k_3}{\omega_2 - k_2 V_0} + \right. \\ & \left. + \frac{k_3}{\omega_3 - k_3 V_0} \right) + \frac{2e\omega_{0i}^2 \omega_1^2 (\omega_1 - k_1 V_0)^2}{M v_{3B}^4 k_2 k_3} \Big], \\ \sigma_3 = & - \frac{1}{2D_3} \left[\frac{e\omega_{0i}^2 k_2^3 (\omega_2 - k_3 V_0)^2}{M\omega_1 \omega_3} + \frac{e\omega_{0i}^2 k_2^2 (\omega_2 - k_2 V_0)^2}{M\omega_1 \omega_3} \left(\frac{k_1}{\omega_1} + \frac{k_3}{\omega_3} \right) - \right. \\ & - \frac{e\omega_{0s}^2 k_2^3 \omega_2^2}{m(\omega_1 - k_1 V_0)(\omega_3 - k_3 V_0)} - \frac{e\omega_{0s}^2 k_2^2 \omega_2^2 (\omega_2 - k_2 V_0)}{m(\omega_1 - k_1 V_0)(\omega_3 - k_3 V_0)} \left(\frac{k_1}{\omega_1 - k_1 V_0} + \right. \\ & \left. + \frac{k_3}{\omega_3 - k_3 V_0} \right) + \frac{2e k_2 \omega_2^2 (\omega_2 - k_2 V_0)^2}{M v_{3B}^4 k_1 k_2} \Big], \quad (8) \\ D_j = & \left[- \frac{\omega_{0i}^2}{v_{3B}^2} (\omega_j - k_j V_0)^2 \omega_j - \frac{\omega_{0i}^2}{v_{3B}^2} \omega_j^2 (\omega_j - k_j V_0) - k_j^2 \omega_j (\omega_j - k_j V_0)^2 + \right. \\ & \left. + k_j^2 (\omega_{0i}^2 - \omega_j^2) (\omega_j - k_j V_0) + k_j^2 \omega_{0s}^2 \omega_j \right]. \end{aligned}$$

При условии $\beta^2 = \omega_{0s}^2 / \omega_{0i}^2 \ll 1$ выражения для $\sigma_{1,3}$ можно значительно упростить, воспользовавшись дисперсионным уравнением (2) и условиями (4):

$$\begin{aligned} \sigma_1 \approx & - \frac{e \sqrt[3]{464}}{m V_0 \beta^{1/3} 35}, \quad \sigma_3 \approx \frac{e 2\sqrt{2}}{m V_0 \beta^{2/3}} \\ \left(\nu \approx \nu_{эфф} \frac{\omega_{0s}}{35\omega_{0i}}, \quad \gamma_0 = \gamma - \nu_1, \quad \nu_1 \approx \nu_{эфф} \frac{\beta^{2/3}}{4\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Равновесный режим генерации второй гармоники ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$, $\omega_3 \approx 2\omega_{0i}$) характеризуется параметрами*

$$A_{03} = \frac{\gamma_0}{|\sigma_1| \cos \Phi_0}, \quad A_{0i}^2 = \frac{\gamma_0 \nu}{\sigma_3 \sigma_1 \cos^2 \Phi_0}, \quad \text{tg } \Phi_0 = \frac{-\Delta\omega}{2\gamma_0 - \nu}. \quad (9)$$

Такой стационарный режим устойчив по отношению к однородным в пространстве амплитудно-фазовым возмущениям, если $\nu > 2\gamma_0$. В этом легко убедиться, линеаризуя систему (7) вблизи состояний равновесия (9).

Авторы признательны А. В. Гапонову и М. С. Ковнеру за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖЭТФ, 57, № 4 (10), 1308 (1969).
 2. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1964.

* Заметим, что в случае, когда $\sigma_{гр1} \approx 0$ (см. рис. 1), легко исследовать также и пространственно-неоднородные стационарные процессы в полубезграничной среде при произвольных граничных условиях. Подобная задача аналогична задаче о комбинационном рассеянии в активной среде (см. [4]).

3. Р. З. Сагдеев, Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме, сб. Вопросы теории плазмы, вып 4, Атомиздат, М., 1964.
4. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 13, № 2, 163 (1970).
5. М. И. Рабинович, ДАН СССР, 171, № 6, 1253 (1970)
6. М. И. Рабинович, С. М. Файнштейн, ЖТФ (в печати)

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
5 июня 1969 г.

INTERACTION OF ION-SOUND WAVES IN A STREAM-PLASMA SYSTEM

M. I. Rabinovich, S. M. Fainstein

The interaction of ion-sound waves at the combinational frequencies in a nonisothermal plasma penetrated by a mono-velocity electron stream is considered. It is shown that in the system investigated there may occur harmonic generation of ion-sound waves and the amplitude restriction of the increasing wave due to the energy pumping of increasing waves into damping waves, that is the dynamic stabilization of low-frequency instability. The analysis is made on the basis of quasi-hydrodynamic equations by the averaging method over two variables.

УДК 533.9.01

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ СОУДАРЕНИЙ НА ПОГЛОЩЕНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

А. Е. Крупина

Методом кинетического уравнения исследуется влияние соударений на поглощение плазменных волн при распространении под произвольным углом к магнитному полю. Интеграл соударений использован в форме, предложенной Батнагаром, Гроссом и Круком (БГК) [1]. Проведено сравнение релаксационной модели интеграла соударений и модели БГК. Рассмотрены случаи сильной и слабой пространственной дисперсии.

В последнее время появилось значительное число работ по кинетической теории распространения волн в плазме, в которых учет соударений проводится в форме, предложенной Батнагаром, Гроссом и Круком (БГК) [1]. Так, например, в [2, 3] исследовалось влияние соударений на циклотронную и дрейфовую неустойчивости. В статье [4] рассматривался вопрос о неустойчивости малых возмущений в плазме с током. Перечисленные выше работы и ряд других исследований связаны с низкочастотными волнами.

Что касается высокочастотных волн, то здесь рассмотрение проводилось для случаев изотропной [1] и магнитоактивной плазмы [5]. Однако анализ в [5] нельзя считать исчерпывающим, так как учет влияния соударений в приближении БГК проведен только для случаев продольного или поперечного (по отношению к внешнему магнитному полю H_0) распространения. В то же время представляет интерес и более детальное исследование без ограничений на ориентацию волнового вектора. В наибольшей степени это относится к плазменным волнам. Дело в том, что именно для них корректный учет столкновений может быть необходим в связи с некоторыми астрофизическими [6] и геофизическими приложениями. К последним следует отнести проблемы, связанные с обнаружением резонансов на ионограммах при верхнем зондировании ионосферы [7]. Для интерпретации экспериментальных данных [7] необходим детальный анализ дисперсионных и поглощающих свойств плазмы [8, 9]. При этом принципиально важным, особенно при зондировании с высот менее 1000 км, является учет влияния соударений.

Возможность использования простейшей аппроксимации интеграла столкновений S в виде $S = \nu f$ (ν — эффективная частота соударений, f — возмущенная часть функции распределения) при наличии пространственной дисперсии вызывает определенное сомнение, так как при этом нарушается закон сохранения числа частиц. Использование модельного интеграла соударений в форме БГК снимает эту трудность.

В разд. 1 данной работы при аппроксимации интеграла столкновений S моделью БГК [1] получены выражения для компонент тензора комплексной диэлектрической проницаемости, что дает возможность рассмотреть поведение любых типов волн. Далее, в разд. 2 рассмотрено распространение и поглощение плазменных волн, а в разд. 3 анализируется влияние столкновений на модифицированные плазменные волны в областях с большой пространственной дисперсией.

1. ТЕНЗОР ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАЗМЫ

Для расчета тензора диэлектрической проницаемости плазмы исходной является система уравнений, состоящая из кинетического уравнения для электронов и уравнений электродинамики, которая после линеаризации записывается следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = S,$$

$$\Delta \mathbf{E} - \text{grad div } \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} e \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}, \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi e \int f d\mathbf{v},$$

где f_0 — равновесная функция распределения электронов, f — малое отклонение от f_0 ; e , m , \mathbf{v} — заряд, масса и скорость электрона; \mathbf{E} — самосогласованное электрическое поле. Так как нас будут интересовать высокочастотные колебания, то движением ионов пренебрегаем. Будем учитывать только соударения электронов с тяжелыми частицами*. В соответствии с этим выбираем интеграл соударений S в виде

$$S = -\nu (f - f_0) \int f d\mathbf{v}. \quad (1.2)$$

Аппроксимация (1.2) позволяет удовлетворить закону сохранения числа частиц. Согласно [1] возможна и более сложная форма записи интеграла соударений S , когда удовлетворяется закон сохранения энергии частицы при столкновениях. Такое усложнение связано с учетом разницы температур частиц разных сортов. Мы будем считать тяжелые частицы неподвижными в поле волны и потому ограничимся рассмотрением интеграла соударений S в виде (1.2)**.

Для решения системы (1.1) будем использовать прямоугольные координаты xyz с осью z , совпадающей с направлением магнитного поля \mathbf{H}_0 . Вектор \mathbf{k} лежит в плоскости xz и образует угол θ с магнитным полем \mathbf{H}_0 . Вектор скорости \mathbf{v} будем характеризовать компонентами v_ρ , v_z и азимутальным углом φ в пространстве скоростей. Считаем, что переменные величины меняются по закону $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Тогда решение кинетического уравнения формально можно записать в виде

$$f = -\frac{\nu}{\omega_H} e^{i\psi(\varphi)} \int_0^\varphi e^{-i\psi(\varphi')} \times$$

$$\times f_0 \left[\int f d\mathbf{v} \right] d\varphi' + \frac{e}{m\omega_H} e^{i\psi(\varphi)} \int_0^\varphi e^{-i\psi(\varphi')} \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} d\varphi' + C e^{i\psi(\varphi)}, \quad (1.3)$$

где $i\psi(\varphi) = i(\omega - i\nu - \mathbf{k}_z v_z) \omega_H^{-1} \varphi - \mathbf{k}_x (v_\rho / \omega_H) \sin \varphi$ и ω_H — гирочастота электронов. Постоянная интегрирования C вычисляется из условия $f(0) = f(\pi)$.

После интегрирования по φ' получим следующее выражение для f :

$$f = -\frac{ie}{2T} f_0 e^{i\psi(\varphi)} E_x v_\rho \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \exp\left(-i \frac{\beta_n}{\omega_H} \varphi\right) \times$$

* Прежде всего, здесь имеются в виду столкновения электронов с нейтралами. Для кулоновских соударений модель БГК можно использовать с известной осторожностью [14].

** Об общих требованиях к виду интеграла соударений см. в [10].

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\frac{e^{i\varphi}}{\beta_n - \omega_H} + \frac{e^{-i\varphi}}{\beta_n + \omega_H} \right) - \frac{e}{2T} f_0 e^{i\psi(\varphi)} E_y v_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \times \\
 & \times \exp \left(-i \frac{\beta_n}{\omega_H} \varphi \right) \left(\frac{e^{i\varphi}}{\beta_n - \omega_H} - \frac{e^{-i\varphi}}{\beta_n + \omega_H} \right) - \frac{ie}{T} f_0 e^{i\psi(\varphi)} \times \quad (1.4) \\
 & \times E_z' v_z \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \exp \left(-i \frac{\beta_n}{\omega_H} \varphi \right) \frac{1}{\beta_n} + i v f_0 \left[\int f d\mathbf{v} \right] e^{i\psi(\varphi)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \times \\
 & \times \frac{\exp \left(-i \frac{\beta_n}{\omega_H} \varphi \right)}{\beta_n},
 \end{aligned}$$

где $\beta_n = \omega - k_z v_z - i\nu - n\omega_H$, $J_n = J_n(k_x v_p / \omega_H)$ — функция Бесселя. Выражение (1.4) получено в предположении, что равновесная функция распределения электронов по скоростям f_0 является максвелловской:

$$f_0 = N_e \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2T} v^2 \right), \quad (1.5)$$

где N_e — концентрация электронов, T — температура в энергетических единицах. Далее из соотношения (1.4) находим интеграл $\int f d\mathbf{v}$ и, подставляя (1.4) и $\int f d\mathbf{v}$ во второе уравнение системы (1.1), получаем дисперсионное уравнение

$$\sum_j \left\{ \tilde{N}^2 \left(\frac{k_q k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) - \varepsilon_{qi} \right\} E_j = 0, \quad (1.6)$$

где \tilde{N} — комплексный показатель преломления среды.

Компоненты тензора ε_{qi} определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= 1 - K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{\alpha^2} \int_0^{\infty} t \exp(-t^2) J_n^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{z_n - y} + i\nu M \frac{s_1}{\sqrt{\pi} k_z} \frac{s_1}{\sqrt{\pi} k_z}, \\
 \varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx} = -iK \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\alpha} \int_0^{\infty} t^2 \exp(-t^2) J_n J_n' dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{z_n - y} - \\
 & - \nu M \frac{s_1}{\sqrt{\pi} k_z} \frac{s_2}{\sqrt{\pi} k_z}, \quad (1.7) \\
 \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = -K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\alpha} \int_0^{\infty} t \exp(-t^2) J_n^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \exp(-y^2) dy}{z_n - y} + \\
 & + i\nu M \frac{s_1}{\sqrt{\pi} k_z} \frac{s_3}{\sqrt{\pi} k_z}, \\
 \varepsilon_{yy} &= 1 - K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t^3 \exp(-t^2) J_n'^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{z_n - y} + i\nu M \frac{s_2}{\sqrt{\pi} k_z} \frac{s_2}{\sqrt{\pi} k_z},
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{yz} = -\varepsilon_{zy} = iK \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t^2 \exp(-t^2) J_n J'_n dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \exp(-y^2) dy}{z_n - y} + \\ + \nu M \frac{s_2}{\sqrt{\pi} k_z} \frac{s_3}{\sqrt{\pi} k_z},$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t \exp(-t^2) J_n^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 \exp(-y^2) dy}{z_n - y} + i\nu M \frac{s_3}{\sqrt{\pi} k_z} \frac{s_3}{\sqrt{\pi} k_z}.$$

В (1.7) использованы обозначения

$$K = \nu 4\omega \sqrt{\frac{m}{2T}} \frac{1}{k_z \sqrt{\pi}}, \quad \nu = \frac{4\pi e^2 N_e}{m\omega^2} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

$$M = \nu 4\omega \frac{m}{T} \left\{ 1 + i\nu \sqrt{\frac{2T}{m}} \frac{1}{\sqrt{\pi} k_z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t \exp(-t^2) J_n^2 dt \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{z_n - y} \right\}^{-1},$$

$$s_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{\alpha} \int_0^{\infty} t \exp(-t^2) J_n^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{z_n - y},$$

$$s_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t^2 \exp(-t^2) J_n J'_n dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{z_n - y},$$

$$J_n = J_n(\alpha t) = J_n \left(\frac{k_x}{\omega_H} \sqrt{\frac{2T}{m}} t \right),$$

$$s_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} t \exp(-t^2) J_n^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \exp(-y^2) dy}{z_n - y}, \quad z_n = \frac{\omega - i\nu - n\omega_H}{k_z \sqrt{\frac{2T}{m}}}.$$

Заметим, что в выражениях для тензора диэлектрической проницаемости (1.7) члены вида $i\nu M s_i s_j (\sqrt{\pi} k_z)^{-2}$ связаны со слагаемым $-f_0 \int f d\mathbf{v}$ соотношения (1.2). При $s_1, s_2, s_3 \rightarrow 0$ (1.7) сводится к тензору, приведенному, например, в [11].

2. ВЛИЯНИЕ СОУДАРЕНИЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ПЛАЗМЕННЫХ ВОЛН

Рассмотрим распространение наиболее медленной из высокочастотных волн—плазменной волны. Уравнение для плазменной волны имеет вид

$$\varepsilon_{xx} \sin^2 \theta + \varepsilon_{zz} \cos^2 \theta + 2\varepsilon_{xz} \cos \theta \sin \theta = 0. \quad (2.1)$$

Будем предполагать вначале, что $\alpha = k_x \sqrt{2T/m} \omega_H^{-1} \sim r_e/\lambda \ll 1$ (r_e — гирорадиус электрона, λ — длина волны). Тогда $J_n(\alpha t)$, $J'_n(\alpha t)$ можно разложить в ряд по степеням α и ограничиться членами с точностью до α^2 . Предположим далее выполненным неравенство $|z_n| \gg 1$ $\left((\omega - i\nu - n\omega_H) \left(k_x \sqrt{\frac{2T}{m}} \right)^{-1} \gg 1 \right)$, что соответствует значениям частот, удаленным от гирорезонансов ($\omega \neq n\omega_H$). Поскольку нас будет интересовать столкновительное поглощение, то затуханием Ландау пренебрегаем. При сделанных выше предположениях подстановка соответствующих компонент тензора ε_{qi} в (2.1) приводит к следующему уравнению для плазменной волны:

$$1 - \nu \left\{ \frac{\sin^2 \theta (1 - is)}{(1 - is)^2 - u} \left[1 + 3\tilde{N}^2 \beta^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - is)^2 - 4u} + \tilde{N}^2 \beta^2 \cos^2 \theta \frac{(1 - is)^2 + 3u}{(1 - is)^2 - u} \right] + \frac{\cos^2 \theta}{1 - is} \left[1 + \tilde{N}^2 \beta^2 \sin^2 \theta \frac{5(1 - is)^2 - u}{((1 - is)^2 - u)^2} + 3\tilde{N}^2 \beta^2 \frac{\cos^2 \theta}{(1 - is)^2} \right] \right\} + \frac{is\nu}{L} \tilde{N}^2 \beta^2 \left[\frac{\sin^2 \theta}{(1 - is)^2 - u} + \frac{\cos^2 \theta}{(1 - is)^2} \right]^2 = 0, \quad (2.2)$$

где

$$u = \omega_H^2/\omega^2, \quad s = \nu/\omega, \quad \beta = \sqrt{T/mc^2},$$

$$L = 1 + \frac{is}{1 - is} \left[1 + \tilde{N}^2 \beta^2 \frac{\cos^2 \theta}{(1 - is)^2} + \tilde{N}^2 \beta^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - is)^2 - u} \right].$$

При $u = 0$ ($H_0 = 0$) (2.2) совпадает с уравнением (14) работы [1]. Из выражения (2.2) можно найти зависимость показателя преломления \tilde{N}^2 от угла θ и параметров u , ν , s .

При $s = \nu/\omega \ll 1$ имеем

$$\tilde{N}^2 =$$

$$= \frac{1 - u - \nu + uv \cos^2 \theta - is\nu \left[\sin^2 \theta \frac{1 + u}{1 - u} - \cos^2 \theta (1 - u) \right] + is(1 - u - \nu + uv \cos^2 \theta)}{\nu \beta^2 \left\{ R - is \left[R + \left(\frac{\sin^2 \theta}{1 - u} + \cos^2 \theta \right)^2 + (1 - u - \nu + uv \cos^2 \theta) \frac{1 - u \cos^2 \theta}{(1 - u) \nu} \right] \right\}}, \quad (2.3)$$

где

$$R = R(u, \theta) = 3 \frac{\sin^4 \theta}{1 - 4u} + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{6 - 3u - u^2}{(1 - u)^2} + 3 \cos^4 \theta (1 - u).$$

Если в уравнении (2.2) не учитывать последнее слагаемое, что соответствует переходу к аппроксимации $S = \nu f$, то (2.3) сводится к результату, полученному в [12]:

$$\tilde{N}^2 = \frac{1 - u - \nu + uv \cos^2 \theta}{\nu \beta^2 R} - is \frac{1}{\beta^2 R} \left[\sin^2 \theta \frac{1 + u}{1 - u} - \cos^2 \theta (1 - u) \right]. \quad (2.4)$$

Из (2.3) следует

$$\tilde{N}^2 = \frac{1-u-v+uv \cos^2 \theta}{v\beta^2 R} - is \left\{ \frac{1}{\beta^2 R} \left[\sin^2 \theta \frac{1+u}{1-u} - \cos^2 \theta (1+u) \right] - \right. \\ \left. - \left[2 \frac{1-u-v+uv \cos^2 \theta}{v\beta^2 R} + \frac{1-u-v+uv \cos^2 \theta}{v\beta^2 R} \left(\frac{\sin^2 \theta}{1-u} + \cos^2 \theta \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.5)$$

Сравнивая (2.4) и (2.5), видим, что учет соударений в виде (1.2) приводит к изменению только в поглощении плазменной волны, причем дополнительное слагаемое в (2.5) не превышает члена $is [\sin^2 \theta (1+u) \times (1-u)^{-1} - \cos^2 \theta (1-u)] (\beta^2 R)^{-1}$. При $R > 0$ и $1-u-v+uv \cos^2 \theta > 0$ поглощение, как видно из сравнения (2.5) с (2.4), уменьшается в случае (1.2), т. е. роль соударений при аппроксимации их членом $S = v\tilde{f}$ оказывается завышенной.

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ОБЛАСТЯХ $\omega \simeq n\omega_H$

В разд. 2 было рассмотрено распространение и поглощение плазменных волн вдали от гирорезонансов, где выполнялось условие $k\mathbf{v} \ll \omega_H$ слабой пространственной дисперсии. Около частот, кратных циклотронным, при поперечном распространении показатель преломления стремится к бесконечности. Здесь может оказаться $(k\mathbf{v}) \gg \omega_H$, что соответствует сильной пространственной дисперсии. Неравенство $(k\mathbf{v}) \gg \omega_H$ означает, что циклотронный радиус может быть порядка или больше длины волны ($r_e/\lambda \gtrsim 1$). В соответствии с этим вблизи гирорезонансов несправедливо приближение для функций J_n, J'_n , использованное в разд. 2.

При распространении перпендикулярно магнитному полю дисперсионное уравнение имеет вид

$$-\epsilon_{xx}(\tilde{N}^2 - \epsilon_{yy})(\tilde{N}^2 - \epsilon_{zz}) + \epsilon_{xy}^2(\tilde{N}^2 - \epsilon_{zz}) = 0.$$

Оно разделяется на дисперсионное уравнение для обыкновенной волны

$$\tilde{N}^2 - \epsilon_{zz} = 0 \quad (3.1)$$

и уравнение

$$-\epsilon_{xx}(\tilde{N}^2 - \epsilon_{yy}) + \epsilon_{xy}^2 = 0 \quad (3.2)$$

для необыкновенной и плазменной волн. При выполнении условия

$\tilde{N}^2 \gg \epsilon_{qi}$ из (3.2) можно получить уравнение для плазменной волны

$$\epsilon_{xx} = 0. \quad (3.3)$$

Заметим, что в выражении для ϵ_{zz} при $\theta = \pi/2$ член, соответствующий второму слагаемому в аппроксимации интеграла соударений (1.2), зануляется. Поэтому в уравнении (3.1) для обыкновенной волны учет соударений фактически сводится к приближению $S = v\tilde{f}$.

Компонента ϵ_{xx} тензора (1.7) при $\theta = \pi/2$ принимает вид

$$\epsilon_{xx} = 1 - v\omega \exp(-\alpha^2/2) \left(1 - i \frac{v}{\omega} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\alpha^2} \frac{I_n(\alpha^2/2)}{(\omega - iv)^2 \omega_H^{-2} - n^2} + ivM(s_1)^2, \quad (3.4)$$

где

$$s_1 = \exp(-\alpha^2/2) \sqrt{\frac{2T}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\alpha} I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \omega_H [(\omega - iv)^2 - (n\omega_H)^2]^{-1},$$

$$M = v4\omega \frac{m}{T} \left\{ 1 + i\nu \exp(-\alpha^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) (\omega - i\nu - n\omega_H)^{-1} \right\}^{-1},$$

$I_n \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) = I_n \left(k^2 \frac{T}{m} \omega_H^{-2} \right)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Согласно (3.3) получим следующее дисперсионное уравнение для плазменной волны:

$$1 - 2v\omega (\omega - i\nu) \frac{\exp(-\alpha^2/2)}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 I_n \left(\frac{\alpha^2}{2} \right)}{(\omega - i\nu)^2 - (n\omega_H)^2} + \quad (3.5)$$

$$+ \frac{8 i\nu v \omega \omega_H^2 \frac{\exp(-\alpha^2)}{\alpha^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 I_n \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) [(\omega - i\nu)^2 - (n\omega_H)^2]^{-1} \right\}^2}{1 + 2i\nu (\omega - i\nu) \exp(-\alpha^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) [(\omega - i\nu)^2 - (n\omega_H)^2]^{-1}} = 0.$$

Если в соотношении (3.5) последнее слагаемое считать равным нулю, то приходим к уравнению, соответствующему учету соударений в виде $S = \nu f$. Поэтому в данном случае для сопоставления релаксационной модели интеграла столкновений и модели БГК (1.2) нужно сравнивать последнее слагаемое со вторым.

При $\alpha \sim r_e/\lambda \ll 1$ уравнение (3.5) дает результат (2.5), если в последнем положить $\theta = \frac{\pi}{2}$. При $\alpha \gg 1$ воспользуемся аппроксимацией

$I_n = \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) (\sqrt{\pi} \alpha)^{-1}$. Тогда вместо уравнения (3.5) имеем

$$1 - 2v\omega (\omega - i\nu) \frac{1}{\sqrt{\pi} \alpha^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\omega - i\nu)^2 - (n\omega_H)^2} + 8v i\nu \omega \omega_H^2 \frac{1}{\pi \alpha^4} \times$$

$$\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\omega - i\nu)^2 - (n\omega_H)^2} \right]^2 \left\{ 1 + 2i\nu \frac{\omega - i\nu}{\sqrt{\pi} \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\omega - i\nu)^2 - (n\omega_H)^2} \right\}^{-1} = 0.$$

Вблизи гармоник $n\omega_H$ основной вклад в бесконечные суммы дает резонансный член. Оставляя в каждом из рядов только члены с малыми знаменателями, получим

$$1 - v\omega \frac{1}{\sqrt{\pi} \alpha^3} \frac{n^2}{\omega - i\nu - n\omega_H} + 2v \frac{i\nu \frac{n^2}{\pi \alpha^4} (\omega - i\nu - n\omega_H)^{-2}}{1 + i\nu \frac{1}{\sqrt{\pi} \alpha} (\omega - i\nu - n\omega_H)^{-1}} = 0. \quad (3.6)$$

При $\omega \simeq n\omega_H$

$$1 + v\omega \frac{n^2}{\sqrt{\pi} \alpha^3 i\nu} + \frac{2v\omega (1/\pi \alpha^4) (n^2/i\nu)}{1 + (1/\sqrt{\pi} \alpha)} = 0. \quad (3.7)$$

Так как $\alpha = k \sqrt{\frac{2T}{m}} \omega_H^{-1} \gg 1$, то знаменатель последнего слагаемого в уравнении (3.7) можно считать равным единице. Сравнивая затем члены $\nu \omega n^2 (\sqrt{\pi} \alpha^3 i \nu)^{-1}$ и $2\nu \omega n^2 (\pi \alpha^4 i \nu)^{-1}$, видим, что при условии $\alpha \gg 1$ последний оказывается менее существенным. Это означает, что вблизи резонансов $\omega \simeq n \omega_H$ аппроксимация интеграла соударений (1.2) не приводит, например, к появлению новых больших корней дисперсионного уравнения (3.7) (см. [13]) и вносит только небольшие поправки по сравнению с моделью $S = \nu f$. Качественный анализ показывает, что наибольший вклад в уравнение эти поправки дадут при $\alpha \simeq 1$, когда второе и третье слагаемые выражения (3.7) оказываются одного порядка. Следовательно, несмотря на то, что вблизи гирорезонансов даже слабые столкновения могут привести к сильному поглощению волны, характер поведения мнимой части показателя преломления достаточно хорошо описывается с использованием релаксационной модели интеграла соударений.

В заключение автор выражает благодарность Б. Н. Гершману и Г. Х. Каменецкой за постоянную помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Bhatnagar, E. Gross, M. Krook, Phys. Rev., **94**, 511 (1954).
2. А. Б. Михайловский, О. П. Погуде, ЖТФ, **36**, 205 (1966).
3. О. П. Погуде, ЖЭТФ, **47**, 941 (1964).
4. Г. Х. Каменецкая, Геомагнетизм и аэронавигация, **9**, № 2, 351 (1969).
5. A. Rytte, R. Blanken, Phys. Rev., **133**, № 3A, 668 (1964).
6. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, изд. Наука, М., 1964.
7. G. Lockwood, Canad. J. Phys., **41**, 190 (1963).
8. I. P. Shkarofsky, Phys. Fluids, **9**, 570 (1966).
9. E. Scobbio, R. Croci, Phys. Fluids, **9**, 549 (1966).
10. С. И. Брагинский, сб. Вопросы теории плазмы, вып. 1, Госатомиздат, М., 1963.
11. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмодобных сред, Госатомиздат, М., 1961.
12. Б. Н. Гершман, ЖЭТФ, **37**, 695 (1959).
13. В. П. Демидов, Д. А. Франк-Каменецкий, ЖТФ, **33**, 703 (1963).
14. А. А. Рухадзе, В. П. Силин, УФН, **96**, 87 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
20 мая 1969 г.

INFLUENCE OF COLLISIONS UPON PLASMA WAVE ABSORPTION

A. E. Krupina

The kinetic equation method is used to investigate the influence of collisions on absorption of plasma waves propagating at an arbitrary angle to the magnetic field. The collision integral is utilized in the form proposed by Bhatnagar, Gross and Krook (BGK) [1]. A comparison is made between the relaxation model of the collision integral and BGK model. The cases of strong and weak spatial dispersion are considered.

УДК 533.951.2

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ЦИКЛОТРОННЫМИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМИ КОЛЕБАНИЯМИ ПЛАЗМЫ

Н. В. Шолохов

Исследованы распады высокочастотных электромагнитных волн на высокочастотную и циклотронную $\omega'' \simeq n\Omega_e$. Показано, что отношение дифференциальных сечений рассеяния при распаде через n -ю и $n+1$ -ю циклотронные гармоники может быть порядка единицы в случае, когда длина волны циклотронного колебания меньше или порядка ларморовского радиуса частиц плазмы. Обсуждается возможность применения полученных результатов для диагностики слаботурбулентной плазмы.

С точки зрения диагностики плазмы представляет интерес исследование нелинейного взаимодействия высокочастотных электромагнитных волн с частотой $\omega \simeq kc > \omega_{Le}$ с продольными колебаниями плазмы (комбинационное рассеяние). Для высокочастотных волн, у которых $\omega \gg \Omega_e$, где Ω_e — гирочастота электронов, замагниченная плазма прозрачна, а спектры продольных колебаний плазмы зависят от таких параметров плазмы как плотность числа частиц N , ионная T_i и электронная T_e температуры. Поэтому анализ комбинационных спектров, возникающих при распадах высокочастотных электромагнитных волн на продольных колебаниях плазмы, позволяет, в принципе, определять основные параметры плазмы.

В дальнейшем мы ограничимся исследованием распадного взаимодействия высокочастотных электромагнитных волн со случайными фазами в однородной безграничной плазме с надтепловыми электростатическими шумами, спектры которых близки к циклотронным частотам $n\Omega_e$. Этот выбор определяется тем, что спектры таких колебаний зависят от ионной (ионно-циклотронные волны) температуры T_i и электронной (электронно-циклотронные волны) температуры T_e . С другой стороны, мы покажем, что в условиях, когда длина волны циклотронных колебаний λ'' меньше или порядка ларморовского радиуса частиц, отношение сечений рассеяния на $n+1$ -й циклотронной гармонике к сечению рассеяния на n -й гармонике может быть порядка единицы. Поэтому в комбинационном спектре излучения, рассеянного на слаботурбулентной плазме, может наблюдаться целая серия линий, соответствующих циклотронным гармоникам. Экспериментально такая серия линий легко идентифицируется. Знание теоретических законов дисперсии для циклотронных гармоник и экспериментальный анализ комбинационного спектра позволяют надеяться на возможность определения ионной и электронной температуры плазмы.

1. Спектры продольных колебаний замагниченной плазмы определяются уравнением [1, 2]*

* Здесь и далее в тексте функция распределения частиц предполагается максвелловской.

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \equiv \varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) + i\varepsilon''(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{k^2 R_{Di}^2} \left\{ 1 - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\omega A_l(z_i^2)}{\omega - l\Omega_i} J_+ \left(\frac{\omega - l\Omega_i}{|k_z| v_{Ti}} \right) \right\} + \quad (1)$$

$$+ \frac{1}{k^2 R_{De}^2} \left\{ 1 - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\omega A_l(z_e^2)}{\omega - l\Omega_e} J_+ \left(\frac{\omega - l\Omega_e}{|k_z| v_{Te}} \right) \right\} = 0,$$

где R_{Di} , R_{De} , v_{Ti} , v_{Te} , Ω_i , Ω_e — дебаевский радиус, тепловая скорость и гирочастота ионов и электронов соответственно, $A_n(z_\alpha^2) \equiv \exp(-z_\alpha^2) I_n(z_\alpha^2)$, I_n — функция Бесселя мнимого аргумента, $z_\alpha^2 \equiv \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2}$,

$$J_+(\beta) \equiv \beta \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) \int_0^\beta \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) dx - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right). \text{ Остальные}$$

обозначения общепринятые. Плазма состоит из частиц двух сортов — ионов и электронов. Магнитное поле направлено по оси z .

В области частот $\omega \simeq n\Omega_i$ и при выполнении условий

$$|k_z| v_{Te} \ll \omega \simeq n\Omega_i \ll \Omega_e \quad (2)$$

для электронов и

$$|k_z| v_{Ti} \ll |\Delta\omega| \equiv |\omega - n\Omega_i| \ll \Omega_i \quad (3)$$

для ионов мнимая часть продольной диэлектрической проницаемости ε'' экспоненциально мала и уравнение (1) приводится к виду

$$\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 R_{De}^2} \left\{ 1 - A_0(z_e^2) \left[1 + \frac{k_z^2 v_{Te}^2}{n^2 \Omega_i^2} \right] \right\} + 1 + \quad (4)$$

$$+ \frac{1}{k^2 R_{Di}^2} \left\{ S_n(z_i^2) - \frac{n\Omega_i}{\omega - n\Omega_i} A_n \right\} = 0,$$

где $S_n = 1 - n \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{A_l}{n-l}$. Ряд S_n может быть просуммирован с использованием рекуррентных формул для цилиндрических функций.

Поэтому

$$S_1 = 1 - [1 - A_0] z_i^{-2},$$

$$S_2 = 1 - 2 \left[(1 - A_0) \left(\frac{2}{z_i^2} - \frac{2}{z_i^4} \right) - \frac{2A'_0}{z_i^2} \right], \quad (5)$$

$$S_3 = 1 - 3 \left[(1 - A_0) \left(\frac{3}{z_i^2} - \frac{12}{z_i^4} + \frac{8}{z_i^6} \right) + \frac{12A'_0}{z_i^2} + \frac{4}{z_i^4} \right].$$

Приведем асимптотические выражения для S_n . При $z_i \rightarrow 0$ $S_1 \sim \frac{3}{4} z_i^2 - \frac{5}{12} z_i^4$, $S_n \sim -\frac{z_i^2}{n^2 - 1}$ ($n = 2, 3, \dots$), если $z_i \rightarrow \infty$, то $S_n \sim 1 - \frac{n^2}{z_i^2}$.

Выпишем решения уравнения (4) в различных предельных случаях. В длинноволновом диапазоне $z_i^2 \ll 1$, $z_e^2 \ll 1$ и в конусе углов

$k_z \gg k_\perp \sqrt{\frac{m}{M}}$ получаем [3]

$$\omega = \Omega_i \left[1 - \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{k_\perp^2}{k_z^2} \right]. \quad (6)$$

Для волн, распространяющихся почти поперек магнитного поля, имеют место высшие ионно-циклотронные гармоники:

$$\omega = n \Omega_i \left[1 - \frac{(n^2 - 1)}{2^n n!} z_i^{2n-2} \right], \quad (7)$$

$$k_z \ll k_\perp \sqrt{\frac{m}{M}}, \quad n > 1.$$

Спектры (6) и (7) могут существовать только в достаточно плотной плазме, когда $\Omega_i^2 \ll \omega_{Li}^2$.

В коротковолновом диапазоне $z_i^2 \gg 1 \gg z_e^2$ при $T_i \sim T_e$ получим

$$\omega = n \Omega_i \{ 1 + (2\pi)^{-1/2} z_i^{-1} [1 + k^2 R_{Di}^2]^{-1} \}. \quad (8)$$

В области еще более коротких длин волн, $z_i^2 \gg 1$, $z_e^2 \gg 1$, спектр (8) принимает вид

$$\omega = n \Omega_i \left\{ 1 + (2\pi)^{-1/2} z_i^{-1} \left[1 + \frac{T_i}{T_e} + k^2 R_{Di}^2 \right]^{-1} \right\}. \quad (9)$$

В неизотермической плазме $\frac{T_i}{T_e} \ll 1$ и коротковолновом диапазоне спектр (8) сохраняется и для более коротких длин волн по оси z , т. е. при $n \Omega_i \ll |k_z| v_{Te} \ll \Omega_e$, а спектр (6) в длинноволновом диапазоне принимает вид [4]

$$\omega = \Omega_i \left[1 + \frac{1}{2} z_i^2 \frac{T_e}{T_i} \right]. \quad (10)$$

В области частот $\omega \simeq n \Omega_e$ мы будем предполагать выполненными условия

$$k v_{Ti} \ll \omega \simeq n \Omega_e \quad (11)$$

для ионов и

$$|k_z| v_{Te} \ll |\omega - n \Omega_e| \ll \Omega_e \quad (12)$$

для электронов. Для практически интересных случаев всегда $\omega_{Li}^2 \ll \Omega_e^2$, поэтому вкладом ионов в диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ можно пренебречь.

В разреженной плазме, $\frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \ll 1$, для больших по сравнению с ларморовским радиусом электронов длин волн, когда $z_e^2 \ll 1$, имеем спектр

$$\omega = n \Omega_e \left[1 + \frac{z_e^{2n}}{k^2 R_{De}^2 2^n n!} \right]. \quad (13)$$

При $n = 1$ волны могут распространяться в широком диапазоне углов $k_{\perp} \gtrsim k_z$, в то время как высшие гармоники ($n > 1$) распространяются только почти поперек магнитного поля, $k_z \ll k_{\perp}$.

В плотной плазме, $\frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \gg 1$, первая гармоника $n = 1$ может распространяться только почти вдоль магнитного поля, $k_{\perp} \ll k_z$,

$$\omega = \Omega_e \left[1 - \frac{1}{2} \frac{k_{\perp}^2}{k_z^2} \right]. \quad (14)$$

Высшие гармоники $n > 1$ распространяются почти поперек магнитного поля, $k_z \ll k_{\perp}$, и их спектр имеет вид

$$\omega = n \Omega_e \left[1 - \frac{(n^2 - 1) z_e^{2n-2}}{2^n n!} \right]. \quad (15)$$

В области коротких длин волн, $z_e^2 \gg 1$, аналогично (8) имеем

$$\omega = n \Omega_e [1 + (2\pi)^{-1/2} z_e^{-1} (1 + k^2 R_{De}^2)^{-1}], \quad k_{\perp} \gg k_z. \quad (16)$$

2. Собственные колебания плазмы, для которых выполняются законы сохранения

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega'(\mathbf{k}') + \omega''(\mathbf{k}''), \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}' + \mathbf{k}'', \quad (17)$$

могут участвовать в процессах распада и слияния (комбинационное рассеяние). Под ω , ω' мы будем понимать спектры высокочастотных электромагнитных волн, ω'' — частота потенциального колебания.

Уравнение для коррелятора высокочастотной волны $(E_i E_p)_{\mathbf{k}}$, учитывающее процессы распада и слияния таких волн с потенциальными колебаниями плазмы в пределе $\omega'' \ll \omega$, ω' , может быть представлено в виде [5, 6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (E_i E_p)_{\mathbf{k}} + v_{gp} \frac{\partial}{\partial r} (E_i E_p)_{\mathbf{k}} = & \left\{ \int d\mathbf{k}' P(\mathbf{k}, \mathbf{k}') W(\mathbf{k}'') \left[2(E_p E_m)_{\mathbf{k}} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\delta_{im} - \frac{k'_i k'_m}{k'^2} \right) - (E_m E_i)_{\mathbf{k}'} \left(\delta_{pm} - \frac{k_m k_p}{k^2} \right) \right] \right\} + (\text{к. с.})_{p \leftrightarrow i}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} P(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = & \frac{k''^2}{32\pi\omega^2(\mathbf{k})} \left| \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} [\varepsilon^{\alpha}(\omega'', \mathbf{k}'') - 1] \right|^2 \left(\frac{\partial \omega \varepsilon'(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega''(\mathbf{k}'')} \times \\ & \times \{ \delta[\omega(\mathbf{k}) - \omega'(\mathbf{k}') - \omega''(\mathbf{k}'')] + \delta[\omega(\mathbf{k}) - \omega'(\mathbf{k}') + \omega''(\mathbf{k}'')] \} \equiv Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \times \\ & \times \{ \delta[\omega(\mathbf{k}) - \omega'(\mathbf{k}') - \omega''(\mathbf{k}'')] + \delta[\omega(\mathbf{k}) - \omega'(\mathbf{k}') + \omega''(\mathbf{k}'')] \} \end{aligned} \quad (19)$$

и $W(\mathbf{k}'')$ — спектральная плотность энергии потенциальных колебаний, определяемая равенством

$$(E_i E_j)_{\mathbf{k}''} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\partial \omega \varepsilon'}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega''(\mathbf{k}'')}^{-1} W(\mathbf{k}'') \frac{k''_i k''_j}{k''^2}. \quad (20)$$

В дальнейшем мы ограничимся анализом ядра $Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ уравнения (18) для того случая, когда ω'' — частота циклотронного колебания.

Рассмотрим прежде всего длинноволновые ионно-циклотронные волны. Для спектров (6) и (7) из (19) получим

$$Q_1(k, k') = \frac{1}{64\pi} \frac{k_{\perp}''^2}{k^2} \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2}; \quad (21)$$

$$Q_n(k, k') = \frac{1}{32\pi} \frac{k_{\perp}''^2}{k^2} \frac{e^2}{m^2 c^2} \left\{ \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} - \frac{\omega_{Le}^2}{n^2 \Omega_i^2} \frac{k_z''^2}{k_{\perp}''^2} \right\} \frac{\Omega_i^2}{\omega_{Li}^2} \frac{(n^2 - 1)^2 z_i''^{2(n-1)}}{2^n n!}. \quad (22)$$

Индекс «1» обозначает, что данное ядро относится к первой циклотронной гармонике, индекс «n» — к циклотронной гармонике с номером n. Из (21) и (22) легко видеть (с учетом ограничений, при которых получены спектры (6) и (7)), что отношение ядра второй гармоники (22) к первой (21) всегда много меньше единицы. С увеличением номера гармоники ядра (22) убывают по закону

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \sim \frac{n^2(n+2)^2}{(n^2-1)^2(n+1)} \frac{z_i''^2}{2}. \quad (23)$$

В неизотермической плазме $\frac{T_i}{T_e} \ll 1$ для спектра (10) ядро совпадает с (21). Таким образом, в длинноволновом диапазоне $(k_{\perp}'' \rho_{\alpha})^2 \ll 1$ ядро для первой гармоники максимально и с увеличением номера гармоники быстро убывает.

В коротковолновой области $(k_{\perp}'' \rho_{\alpha})^2 \gg 1$ положение меняется. Для спектра (8) в области $z_e'' \ll 1 \ll z_i''^2$ и при $T_i \sim T_e$ получим

$$Q_n(k, k') = \frac{1}{32\sqrt{2}\pi^{3/2}} \frac{e^2}{Mmc^2} z_i'' \frac{k_{\perp}''^2}{k^2} \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_e^2} \left[1 - \frac{M^2}{n^2 m^2} \frac{k_z''^2}{k_{\perp}''^2} \right]^2 [1 + k''^2 R_{Di}^2]^{-2}. \quad (24)$$

В области еще более коротких длин волн $1 \ll z_i''^2$, $1 \ll z_e''^2$ для спектра (9)

$$Q_n(k, k') = \frac{1}{32\sqrt{2}\pi^{3/2}} \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{T_i}{T_e} \frac{1}{k^3 R_{Di}^2 z_e''} \left[1 + \frac{T_i}{T_e} + k''^2 R_{Di}^2 \right]^{-2}. \quad (25)$$

В неизотермической плазме $\frac{T_i}{T_e} \ll 1$ для спектра (8) ядро совпадает с (25).

Характерной особенностью ядер коротковолнового диапазона (24), (25) является их слабая зависимость от номера гармоники:

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \sim 1. \quad (26)$$

При рассмотрении электронно-циклотронных колебаний ограничимся тем случаем, когда ленгмюровская частота ионов много меньше gyro-частоты электронов, $\omega_{Li}^2 \ll \Omega_e^2$. Для электронно-циклотронных гармоник обнаруживаются закономерности, подобные тем, что и для ионных. В самом деле, в длинноволновом диапазоне $(k_{\perp}'' \rho_e)^2 \ll 1$ для спектров (13) — (15) ядра имеют вид

$$Q_n(k, k') = \frac{1}{32\pi} \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{k_{\perp}''^2}{k^2} \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \frac{z_e''^{2(n-1)}}{2^n n!}; \quad (27)$$

$$Q_1(k, k') = \frac{1}{64\pi} \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{k_{\perp}''^2}{k^2} \frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2}; \quad (28)$$

$$Q_n(k, k') = \frac{1}{32\pi} \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{k_{\perp}''^2}{k^2} \frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2} \frac{z_e''^{2(n-1)} (n^2 - 1)^2}{2^n n!}. \quad (29)$$

В коротковолновом диапазоне $(k_{\perp}' \rho_e)^2 \ll 1$ для спектра (16)

$$Q_n(k, k') = \frac{1}{32\sqrt{2}\pi^{3/2}} \frac{e^2}{m^2 c^2} \frac{k_{\perp}''^2}{k^2} \frac{k_{\perp}'^2 R_{De}^2}{z_e''} [1 + k_{\perp}'^2 R_{De}^2]^{-2}. \quad (30)$$

Если ядра (27), (29) быстро убывают с увеличением номера гармоники, то для ядра (30) отношение Q_{n+1} к Q_n порядка единицы.

3. Как известно [7], коротковолновые циклотронные потенциальные колебания $\lambda'' \ll \rho_a$ могут быть легко переведены в режим неустойчивости за счет анизотропии функции распределения. При этом энергия колебаний на циклотронных гармониках может намного превысить уровень тепловых флуктуаций. Знание ядер (21)–(30) позволяет написать дифференциальные сечения для процессов распада и слияния высокочастотных электромагнитных волн с циклотронными колебаниями.

Из уравнения (18), пользуясь обычной процедурой расчета, находим эффективный коэффициент рассеяния на одну частицу волны k' в интервал dk волновых векторов k рассеянной волны:

$$d\sigma(k, k') = \Pi N^{-1} c^{-1} W(k'') Q(k, k') \{ \delta[\omega(k) - \omega'(k') - \omega''(k'')] + \delta[\omega(k) - \omega'(k') + \omega''(k'')] \} dk, \quad (31)$$

где Π — поляризационный множитель порядка единицы [6].

Представляет интерес оценить полное сечение, например, для ядра (30). Полагая $k \sim k' \sim k''$, $k_z'' v_{Te}^2 \ll \Omega_e^2 \ll k_{\perp}'^2 v_{Te}^2 < \omega_{Le}^2$, $\left| \frac{k_z''}{k_{\perp}'} \right| \ll 1$, для полного сечения получим оценку

$$\sigma(k') = \int d\sigma(k, k') \sim \left| \frac{k_z''}{k_{\perp}'} \right| \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{W}{NT} \right) \left(\frac{\Omega_e}{\omega_{Le}} \right)^4 N. \quad (32)$$

В плазме с концентрациями частиц $N \sim 10^{10} \div 10^{11} \text{ см}^{-3}$ полное сечение рассеяния на одну частицу может на много порядков превосходить томпсоновское сечение для электрона $\frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2$. Если энергия шумов

$W(k'')$ для различных циклотронных гармоник $n \Omega_a$ одна и та же, то для спектров (8), (9), (16) дифференциальное сечение рассеяния высокочастотных волн (31) не зависит от номера гармоники. Если же $W(k'')$ изменяется с номером гармоники, то зависимость $d\sigma(k, k')$ от n будет характеризовать интенсивность шума, возбужденного на различных циклотронных частотах.

Таким образом, сказанное позволяет надеяться, что экспериментальный анализ комбинационных спектров, возникающих при рассеянии высокочастотных электромагнитных волн на циклотронных колебаниях, даст возможность определять температуры ионов и электронов (по смещению частоты $\omega - \omega' - n\Omega_a$ для спектров (8), (9), (16)), а так-

же исследовать спектральное распределение энергии шумов по циклотронным частотам (по интенсивности соответствующих линий).

Выражаю благодарность В. П. Силину за руководство и поддержку в работе и Л. М. Горбунову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмодобных сред, Атомиздат, М., 1961.
2. А. П. Кропоткин, Н. В. Шолохов, ЖТФ, 39, 628 (1969).
3. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Полювин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, М., 1965.
4. Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, М., 1965.
5. A. P. Kroptkin, V. V. Pustovalov, Plasma Physics and Controlled Thermonuclear Research, v. I, Vienna, 1966, p. 695.
6. Н. В. Шолохов, Теоретическая и математическая физика, 2, 117 (1970).
7. А. В. Тимофеев, В. И. Пистунович, сб. Вопросы теории плазмы, вып. 5, Атомиздат, М., 1967.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
15 сентября 1969 г.

NONLINEAR INTERACTION OF HF ELECTROMAGNETIC WAVES WITH
GYCLOTRON ELECTROSTATIC OSCILLATIONS IN PLASMA

N. V. Sholokhov

HF electromagnetic wave decays into high-frequency and cyclotron waves $\omega'' \simeq n\Omega_\alpha$ are investigated. It is shown that the ratio of the differential scattering sections at the decay through n and $n+1$ cyclotron harmonics may be of the order of unity when the wavelength of cyclotron oscillations is less or of the order of the Larmor radius of the plasma particles. A possibility of utilizing the results obtained for weakly-turbulent plasma diagnostics is discussed.

УДК 538.56 : 621.371.23

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВКБ К НЕЛИНЕЙНОМУ ВОЛНОВОМУ УРАВНЕНИЮ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

Ф. Г. Басс

Исследовано нелинейное распространение электромагнитных волн в неоднородной среде. В качестве примера такой среды рассматривается ионосферная плазма.

Учет зависимости диэлектрической проницаемости плазмы от координат необходим при исследовании распространения электромагнитных волн в ионосфере. Ввиду того, что характерные размеры, на которых существенно меняются параметры ионосферной плазмы много больше длины распространяющейся волны, для решения волнового уравнения применим метод ВКБ, который весьма подробно разработан для линейных уравнений.

В ряде работ последнего времени [1-5] было показано, что нелинейные эффекты в ионосфере существенны при сравнительно слабых электромагнитных полях. Поэтому при исследовании распространения электромагнитных волн в ионосфере наряду с неоднородностью приходится учитывать также ее нелинейные свойства. При достаточно высоких частотах диэлектрическая проницаемость является обычно функцией среднего по времени квадрата электрического поля [1, 2, 6] независимо от механизма нелинейности. В этом случае волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \varepsilon \left(\bar{E}^2, \frac{\partial}{\partial t}, z \right) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь E — электромагнитное поле, z — координата, c — скорость света в вакууме, ε — диэлектрическая проницаемость, t — время, черта над \bar{E}^2 означает усреднение по периоду, зависимость ε от $\frac{\partial}{\partial t}$ обусловлена наличием временной дисперсии среды. Мы ограничимся одномерным случаем и будем предполагать, что ε зависит лишь от координаты z и волна распространяется вдоль оси z .

Ввиду того, что диэлектрическая проницаемость плазмы не зависит явно от времени, решение можно искать в виде монохроматической волны

$$E = u(z) \cos [\omega t - S(z)] = \frac{1}{2} u(z) \{ \exp[i(S(z) - \omega t)] + \exp[-i(S(z) - \omega t)] \}. \quad (2)$$

При этом

$$\bar{E}^2 = \frac{u^2(z)}{2}.$$

Подставив (2) в (1), получим следующее уравнение для определения u и S :

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \varepsilon(u, \omega, z) \right] u(z) e^{iS(z)} = 0, \quad (3)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, $\varepsilon(u, \omega, z)$ получается из $\varepsilon(\bar{E}^2, \frac{\partial}{\partial t}, z)$ заменой \bar{E}^2 на $\frac{1}{2}u^2$, $\frac{\partial}{\partial t}$ на $-i\omega$; ε является комплексной функцией:

$$\varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i, \quad (4)$$

причём ε_i описывает диссипацию электромагнитного поля в плазме, которую будем полагать, как обычно, малой ($\varepsilon_r \gg \varepsilon_i$).

Производя в уравнении (3) дифференцирование и приравнявая нулю действительные и мнимые слагаемые порознь, получим систему уравнений для нахождения u и S :

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - u \left[\left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 - k^2 \varepsilon_r(u, \omega, z) \right] = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dz} u^2 \frac{dS}{dz} = -k^2 \varepsilon_i(u, \omega, z) u^2.$$

В приближении ВКБ в первом из уравнений можно пренебречь первым слагаемым $\frac{d^2 u}{dz^2}$ по сравнению со вторым. Тогда

$$\frac{dS}{dz} = k \varepsilon_r^{1/2}(u, \omega, z). \quad (6)$$

Введем обозначение

$$v = u^2 \frac{dS}{dz} = k u^2 \varepsilon_r^{1/2}(u, \omega, z), \quad (7)$$

после чего второе уравнение системы (5) запишется в виде

$$\frac{dv}{dz} = -\gamma(v, z/l) v, \quad (8)$$

где

$$\gamma(v, z/l) = k \frac{\varepsilon_i(u(v), z/l)}{\varepsilon_r^{1/2}(u(v), z/l)},$$

u как функция v определяется из уравнения (7), l — характерный размер, на котором существенно меняется диэлектрическая проницаемость (зависимость γ от ω как несущественную опускаем). Такое представление зависимости γ от z облегчает оценки.

Очевидно, что γ можно трактовать как коэффициент поглощения в нелинейной теории, а уравнение (7) — как закон сохранения энергии. Зная решение дифференциального уравнения (8), можно с помощью (7) определить амплитуду (уравнение (7) не является дифференциальным), а затем из соотношения (6) сразу S .

В нелинейной теории фаза распространяющегося сигнала существенно зависит от амплитуды. Так как фаза меняется на 2π на малых расстояниях порядка k^{-1} , то даже небольшие изменения амплитуды могут заметным образом сказаться на фазе.

Уравнение (8) точно решается в частном случае, когда $\gamma(v, z/l) = \gamma_1(z/l) \gamma_2(v)$. При этом $\gamma(v, z/l)$ переменные в уравнении (8) разделяются и ответ записывается так:

$$-\int_0^z \gamma_1(z/l) dz = \int_{v_0}^v \frac{dv}{\gamma_2(v) v}. \quad (9)$$

В качестве граничного условия здесь и ниже мы будем требовать, чтобы при $z = 0$ $v = v_0$, где v_0 задано. При $z \rightarrow \infty$ волна должна бегать вправо. Этому условию мы удовлетворили выбором знака при $\frac{dS}{dz}$.

Перейдем теперь к построению приближенных решений уравнения (8). В задачу входят три величины размерности длины: длина волны $\bar{\lambda} = k^{-1}$ ($\bar{\lambda} = \lambda/2\pi$), длина затухания $L \sim \gamma^{-1}$ и расстояние, на котором существенно меняются параметры слоя l . Из предположения о малости затухания волн следует, что $\bar{\lambda}/V\epsilon_r \ll L$, а оценка отброшенной второй производной от u в первом уравнении системы (5) приводит к неравенству $\bar{\lambda}/\epsilon_r^{1/2} \ll \min(L, l)$, где $\bar{\lambda} = k^{-1}$. Рассмотрим два предельных случая $L \ll l$ и $L \gg l$.

1. $L \ll l$. На расстояниях $z \ll l$ в правой части уравнения (8) можно положить $z = 0$. Решение (8) в этой области будет совпадать с решением уравнения

$$\frac{dv_L}{dz} = -\gamma(v_L, 0) v_L. \quad (10)$$

Последнее элементарно интегрируется, и v_L как неявная функция z может быть записана в виде

$$z = - \int_{v_0}^{v_L} \frac{dv_L}{\gamma(v_L, 0) v_L}. \quad (11)$$

Асимптотика решения (11) при $l \gg z \gg L$ имеет вид (см. [3, 5])

$$v_L(z) = v_0 S_{v_L} e^{-\gamma(0, 0) z}, \quad (12)$$

где S_{v_L} — так называемый множитель самовоздействия, определяемый формулой

$$S_{v_L} = \exp \left\{ \gamma(0, 0) \int_0^{v_0} \frac{dv'}{v'} [\gamma^{-1}(v', 0) - \gamma^{-1}(0, 0)] \right\}. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь решение уравнения (8) при $z \gg L$, не накладывая никаких ограничений на соотношение между z и l . Так как v существенно затухает на расстояниях $\sim L$, то при достаточно больших z в выражении для $\gamma(v, z/l)$ в (8) можно положить v равным нулю. В этой области уравнение для v (обозначим его v_l) следующее:

$$\frac{dv_l}{dz} = -\gamma(0, z/l) v_l. \quad (14)$$

Отсюда

$$v_l = A \exp \left\{ - \int_0^z \gamma(0, z/l) dz \right\}. \quad (15)$$

При $L \ll z \ll l$ формулы (12) и (15) должны совпадать. Это действительно имеет место, если положить $A = v_0 S_{v_L}$ (при $z \ll l$, $\int_0^z \gamma(0, z/l) dz = \gamma(0, 0) z$). Таким образом, мы получили решение уравнения (8) при всех z .

Легко сконструировать приближенное выражение для v , записывающееся единым образом при всех z . Это выражение имеет вид

$$v(z) = v_L(z) \exp \left\{ \gamma(0, 0) z - \int_0^z \gamma(0, z/l) dz \right\}, \quad (16)$$

где $v_L(z)$ определяется формулой (11). Действительно, при $z \ll l$, $v \simeq v_L(z)$, а при больших z в области $z \gg L$ асимптотика (16) совпадает с v_l , а так как v_L и v_l совпадают в области $L \ll z \ll l$, то формула (16) верна при всех z . Таким образом, (16) представляет решение задачи при $L \ll l$ для любых z .

2. $L \gg l$. Сделаем относительно $\gamma(v, z/l)$ следующее физически оправданное предположение. Будем считать, что при $z \rightarrow \infty$ $\gamma(v, z/l)$ стремится к конечному пределу при всех v , который обозначим $\gamma(v, \infty)$. Запишем $\gamma(v, z/l)$ в виде

$$\gamma(v, z/l) = \gamma(v, \infty) + \tilde{\gamma}(v, z/l). \quad (17)$$

Из такого определения $\gamma(v, z/l)$ следует, что $\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}(v, z/l) = 0$ при всех v .

Предположим, кроме того, сходимость интеграла от $\tilde{\gamma}(v, z/l)$ по z в пределах $[0, \infty]$ для всех v . Эти допущения можно существенно ослабить, однако мы не будем здесь этим заниматься.

Рассмотрим область z , удовлетворяющую условию $z \ll L$. Для таких z уравнение (8) можно решать методом итераций, выбрав в качестве нулевого приближения v_0 . В первом приближении v будет описываться формулой

$$v_l = v_0 \left[1 - \gamma(v_0, \infty) z - \int_0^z \tilde{\gamma}(v_0, z/l) dz \right], \quad (18)$$

где через v_l обозначено v в области $z \ll L$.

Исследуем теперь решение уравнения (8) в области $z \gg l$. В этой области в уравнении (8) $\gamma(v, z/l)$ можно приближенно заменить на $\gamma(v, \infty)$. Уравнение для v при этом решается элементарно, и его решение в неявном виде запишется как

$$-z + a = \int_{v_0}^{v_L} \frac{dv}{\gamma(v, \infty)v}. \quad (19)$$

Через v_L обозначено v при $z \gg l$. Константа интегрирования a определяется из условия совпадения v_l и v_L в области $l \ll z \ll L$:

$$a = - \frac{1}{\gamma(v_0, \infty)} \int_0^{\infty} \tilde{\gamma}(v_0, z/l) dz. \quad (19a)$$

Нетрудно построить решение, приближенно верное при всех z . Оно имеет вид

$$-z - \frac{1}{\gamma(v_0, \infty)} \int_0^z \tilde{\gamma}(v_0, z/l) dz = \int_{v_0}^v \frac{dv}{\gamma(v, \infty)v}. \quad (20)$$

Рассмотрим теперь применение общей теории непосредственно

к ионосферному распространению. Если $\gamma(v, z/l)$ не зависит от z , из (6)—(8) сразу следуют формулы линейной теории

$$S = k \int_0^z \varepsilon_r^{1/2}(z/l) dz, \quad (21)$$

$$u = u_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r(z/l)} \right)^{1/4} \exp \left\{ -k \int_0^z \frac{\varepsilon_i(z/l)}{2 \sqrt{\varepsilon_r(z/l)}} dz \right\},$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon_r(z=0)$.

При $\gamma(v, z/l)$, не зависящем от z , уравнение (8) также решается точно, и

$$S = k \int_0^z \varepsilon_r^{1/2}(u) dz; \quad (22)$$

$$-kz = \int_{u_0}^u \frac{4\varepsilon_r(u) + u \frac{d\varepsilon_r(u)}{du}}{2\varepsilon_i \sqrt{\varepsilon_r(u)} u} du. \quad (23)$$

Асимптотика $u(z)$ при $z \gg L$ имеет вид

$$u = u_0 Q \exp \left\{ -\frac{k\varepsilon_i(0)}{2\varepsilon_r(0)} z \right\}, \quad (24)$$

где

$$Q = \exp \left\{ \frac{\varepsilon_i(0)}{2 \sqrt{\varepsilon_r(0)}} \int_0^{u_0} \frac{du}{u} \left[\frac{4\varepsilon_r(u) + u \frac{d\varepsilon_r(u)}{du}}{2\varepsilon_i(u) \sqrt{\varepsilon_r(u)}} - \frac{2 \sqrt{\varepsilon_r(0)}}{\varepsilon_i(0)} \right] \right\}.$$

Формулы (22) и (23) совпадают с формулами (1.22)—(1.24) работы [5]. (В [5] эти формулы приведены с печатками.)

Для получения конкретных результатов необходимо знать явную зависимость диэлектрической проницаемости ε от u . Наиболее простой вид ее—при малой нелинейности, когда u меньше некоторого характерного поля u_0 . В этом случае можно разложить ε_r и ε_i в ряд по степеням u^2/u_0^2 и ограничиться для ε_r первыми двумя членами разложения, а для ε_i , в силу его малости,—одним:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r(0, z/l) + \varepsilon_r'(0, z/l) \frac{v}{v_a}, \quad (25)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(0, z/l).$$

Штрих означает дифференцирование по v/v_a ; $v_a = k u_a^2 \varepsilon_r^{1/2}(0, z/l)$.

Уравнение (8) в этом приближении интегрируется сразу:

$$v = v_0 \exp \left[-\int_0^z \gamma(0, z/l) dz \right], \quad (26)$$

где

$$\gamma(0, z/l) = \frac{k\varepsilon_i(0, z/l)}{\sqrt{\varepsilon_r(0, z/l)}}.$$

Подставляя (26) в первую из формул (25), а полученный результат в (5), и выражая v через u , находим фазу

$$S = k \int_0^z \left[\varepsilon_r^{1/2}(0, z/l) + \frac{1}{2} \frac{u_0^2}{u_a^2} \frac{\varepsilon_r'(0, z/l) \varepsilon_r^{1/2}(0, 0)}{\varepsilon_r(0, z/l)} \exp \left[- \int_0^z \gamma(0, z/l) dz \right] \right] dz. \quad (27)$$

Если $L \ll l$, вклад второго члена в фазу будет существен при выполнении приближенного равенства

$$\frac{u_0^2}{u_a^2} \frac{\varepsilon_r'(0, 0)}{\varepsilon_r(0, 0)} \simeq \frac{\pi}{4}. \quad (28)$$

Последнее может выполняться при достаточно малом затухании, ибо, хотя $u_0^2/u_a^2 \ll 1$ в силу предположения о малости затухания, второй сомножитель в соотношении (28) велик из-за малого ε_r .

При $L \gg l$ такого рода оценка имеет вид

$$\frac{u_0^2}{u_a^2} \left(\frac{\varepsilon_r'(0, z/l)}{\varepsilon_r^{1/2}(0, z/l)} \right)_{\min} \frac{kz}{2} \simeq \frac{\pi}{4}, \quad (29)$$

где z — длина трассы распространения. Малость первого множителя u_0^2/u_a^2 компенсируется большим значением второго ($\sim kz$) при достаточно длинных трассах распространения.

Рассмотрим теперь различные варианты задачи о распространении электромагнитных волн большой амплитуды в неоднородной плазме. Действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости плазмы определяются формулами [1]

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\theta^{5/2}} \beta \left(u, \frac{z}{l} \right) \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} e^{-\varepsilon/\theta}}{\omega^2 + \nu^2(\varepsilon, z/l)} d\varepsilon, \quad (30)$$

$$\varepsilon_i = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega \theta^{5/2}} \beta \left(u, \frac{z}{l} \right) \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} \nu(\varepsilon, z/l)}{\omega^2 + \nu^2(\varepsilon, z/l)} d\varepsilon.$$

Здесь $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{m}$, e — заряд электрона, m — его масса, N_0 — концентрация электронов в плазме в отсутствие электрического поля в точке $z = 0$, $\theta = \theta(u, z/l)$ — электронная температура, $\beta(u, z/l) = \frac{N(u, z/l)}{N_0}$ — относительная концентрация электронов в плазме в точке z , $\nu(\varepsilon, z/l)$ — частота соударений электронов с рассеивающими центрами (молекулы, ионы). Нелинейность диэлектрической проницаемости ионосферы может быть связана как с зависимостью электронной температуры от амплитуды электрического поля, обусловленной нагревом электронного газа, так и с зависимостью концентрации от поля. Последняя в свою очередь может определяться также эффектами нагрева [1–5] или стрикционными эффектами [4, 6].

Допустим сначала, что нагрев электронного газа роли не играет, θ зависит только от z , а зависимость $\beta(u, z/l)$ от электрического поля связана со стрикционными эффектами. При таких предположениях $\beta(u, z/l)$ определяется формулой [6]

$$\beta(u, z/l) = \beta_0(z/l) \exp(-u^2/u_a^2(z/l)) \quad \left(\beta_0(z/l) = \frac{N(0, z/l)}{N_0} \right). \quad (31)$$

Выражения для ε_r и ε_i с учетом (31) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= 1 - a(z/l) \exp(-u^2/u_a^2(z/l)), \\ \varepsilon_i &= b(z/l) \exp(-u^2/u_a^2(z/l)),\end{aligned}\quad (32)$$

где

$$\begin{aligned}a(z/l) &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega\theta^{5/2}(z/l)} \beta_0(z/l) \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} \exp(-\varepsilon/\theta(z/l)) d\varepsilon}{\omega^2 + \nu^2(\varepsilon, z/l)}, \\ b(z/l) &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{\omega_0^2}{\omega\theta^{5/2}(z/l)} \beta_0(z/l) \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} \nu(\varepsilon, z/l) \exp(-\varepsilon/\theta(z/l))}{\omega^2 + \nu^2(\varepsilon, z/l)} d\varepsilon.\end{aligned}$$

Будем предполагать, что частота распространяющейся волны ω больше ω_0 , тогда второе слагаемое в формуле (32) для ε_r будет много меньше единицы и при решении уравнения (8) можно считать $\varepsilon_r \simeq 1$ и $\nu = ku^2$. С учетом этих допущений уравнение (8) запишется так:

$$\frac{dv}{dz} = -kb(z/l) e^{-v/v_a(z/l)} v. \quad (33)$$

Здесь

$$v_a = ku_a^2(z/l).$$

Приведем результаты в различных предельных случаях.

1) $L \ll l$. Из (16) и (6) сразу получаем

$$u(z) = k^{-1/2} F_{u_0/u_a(0)}^{1/2}(kb(0)z) \exp\left\{\frac{k}{2}\left[b(0)z - \int_0^z b(z/l) dz\right]\right\}, \quad (34)$$

$$S(z) = kz - \frac{k}{2} \int_0^z dza \left(\frac{z}{l}\right) \exp\left\{-\frac{u^2(z)}{u_a^2\left(\frac{z}{l}\right)}\right\}.$$

Функция $F_{y_0}(x)$ определяется следующим образом:

$$-x = \int_{y_0}^{F_{y_0}(x)} \frac{e^y}{y} dy. \quad (35)$$

При $x \ll 1$

$$F_{y_0}(x) = y_0(1 - \exp(-y_0)x),$$

а при $x \gg 1$

$$F_{y_0}(x) = y_0 \exp\left\{\int_0^{y_0} \frac{e^y - 1}{y} dy - x\right\}. \quad (36)$$

Если $y_0 \gg 1$, то

$$\int_0^{y_0} \frac{e^y - 1}{y} dy \simeq \frac{\exp(y_0)}{y_0}.$$

2) $L \gg l$. Записав $b(z/l)$ в виде

$$b(z/l) = b(\infty) + \tilde{b}(z/l), \quad (36)$$

получим

$$u(z) = k^{-1/2} F_{u_0/u_a(0)}^{1/2}\left[k\left(-b(\infty)z - \int_0^z \tilde{b}(z/l) dz\right)\right], \quad (37)$$

$$S(z) = kz - \frac{k}{2} \int_0^z a(z/l) \exp \left\{ -\frac{u^2(z/l)}{u_a^2(z/l)} \right\} dz.$$

Рассмотрим теперь другой источник нелинейности. Пусть стрикционные эффекты несущественны, концентрация электронов не зависит от поля, а нелинейность связана с разогревом электронов электромагнитной волной. В этом случае зависимость диэлектрической проницаемости от поля обусловлена зависимостью электронной температуры от поля. Такого рода нелинейность впервые была исследована в [7]. При этом связь температуры с полем может быть найдена из уравнения баланса энергии [1-3]. Мы ограничимся случаем высоких частот, когда $\omega \gg \nu$.

В этом приближении зависимость диэлектрической проницаемости от температуры электронов $\theta(u, z/l)$ запишется так:

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \beta_0(z/l), \\ \epsilon_i &= \alpha(z/l) \tau^{-q}, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\alpha(z/l) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \Gamma(5/2 - q) \frac{\omega_0^2 \nu_0(z/l)}{\omega^3} \beta_0(z/l).$$

Здесь $\tau = \frac{\theta(u, z/l)}{T(z/l)}$, $T(z/l)$ — температура ионов или молекул в плазме ($T(z/l) = \theta(0, z/l)$). При выводе предполагалось, что $\nu(\epsilon, z/l) = \nu_0(z/l) \left(\frac{T(z/l)}{\epsilon} \right)^q$. Величина q определяется типом частиц, на которых рассеиваются электроны. При рассеянии на нейтральных частицах $q = -1/2$, на заряженных $q = 3/2$.

С учетом (38) уравнение (8) для v примет вид

$$\frac{dv}{dz} = -\gamma_0(z/l) \tau^{-q} v, \tag{39}$$

где $\gamma_0(z/l) = \frac{k\alpha(z/l)}{\sqrt{\epsilon_r(z/l)}}$ — коэффициент затухания в линейной теории.

Уравнение баланса энергии [1-3] при тех же предположениях можно записать

$$A(z/l) \tau^{r+q-1} (\tau-1) = v, \tag{40}$$

r — также определяется механизмом рассеяния.

При рассеянии на нейтральных частицах $r = 3/2$, на заряженных — $r = 5/2$ и

$$A(z/l) = \frac{T(z/l) \epsilon_r^{1/2}(z/l) \delta \omega^2 m}{e^2},$$

где δ — параметр неупругости, $\sim \frac{m}{M}$, M — масса тяжелой частицы.

Для определения u как функции z необходимо решить систему (39), (40). Подставляя v из (40) в (39), получим следующее уравнение для τ :

$$\frac{d}{dz} A(z/l) \tau^{r+q-1} (\tau-1) = -\gamma_0(z/l) A(z/l) \tau^{r-1} (\tau-1). \tag{41}$$

Введем новую переменную $w = \tau - 1$. С помощью этой переменной (41) легко записать в виде

$$\frac{dw}{dz} = -\Gamma(w, z/l)w, \quad (42)$$

где

$$\Gamma(w, z/l) = \frac{\left[\gamma_0(z/l) A(z/l) + \frac{\partial A(z/l)}{\partial z} (1+w)^q \right] (1+w)^{1-q}}{[(r+q)w+1] A(z/l)}.$$

Уравнение (42) совпадает по внешнему виду с уравнением (8), и его решение в двух предельных случаях определяется формулами, аналогичными (16) и (20), v находится через τ с помощью (40).

Если разогрев плазмы силен ($\tau \gg 1$), то переменные в уравнении (41) разделяются, и оно решается точно. При этом получаются следующие формулы для τ и для u :

$$\tau = \tau(0) \left(\frac{A(0)}{A(z/l)} \right)^{\frac{1}{r+q}} \left(1 - \frac{q \tau_0^{-q}}{r+q} \int_0^z \gamma_0(z/l) \left(\frac{A(z/l)}{A(0)} \right)^{q(r+q)} dz \right)^{1/q},$$

$$u(z) = u(0) \left(\frac{\epsilon_r(0)}{\epsilon_r(z/l)} \right)^{1/4} \left(1 - \frac{q \tau_0^{-q}}{r+q} \int_0^z \gamma_0(z/l) \times \right. \quad (43)$$

$$\left. \times \left(\frac{A(z/l)}{A(0)} \right)^{\frac{q}{r+q}} dz \right)^{\frac{r+q}{2q}}.$$

При A , γ_0 и ϵ_r , не зависящих от z , выражения (43) переходят в соответствующие формулы работы [5].

Автор благодарит Ю. Г. Гуревича, прочитавшего рукопись и сделавшего ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, М., 1960.
2. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН, 70, 201 (1960).
3. Ф. Г. Басс, Ю. Г. Гуревич, ЖЭТФ, 51, 536 (1966).
4. В. П. Силин, ЖЭТФ, 53, 1662 (1967).
5. Ф. Г. Басс, И. Л. Вербицкий, Ю. Г. Гуревич, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 10, 1480 (1968).
6. Я. Л. Альперт, А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, Искусственные спутники Земли в разреженной плазме, изд. Наука, М., 1964.
7. А. В. Гуревич, Радиотехника и электроника, 1, 704 (1956).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
12 мая 1969 г.

APPLICATION OF WKB METHOD TO THE NONLINEAR WAVE EQUATION AND PROPAGATION OF STRONG ELECTROMAGNETIC WAVES IN THE IONOSPHERE

F. G. Bass

The nonlinear propagation of electromagnetic waves in an inhomogeneous medium has been investigated, the ionospheric plasma being used as an example of such a medium.

550.388.2

НАХОЖДЕНИЕ ПРОФИЛЯ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ В D-СЛОЕ ИОНОСФЕРЫ ПО ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ

В. В. Беликович, М. А. Иткина

В работе получено общее решение интегрального уравнения, связывающего частотную зависимость поглощения $\Gamma(\omega)$ и профиль $N(h)$ в приближении кинетической теории. Проанализировано влияние случайных ошибок измерения поглощения на расчетный $N(h)$ -профиль. Установлено, что $N(h)$ -профили, найденные по формулам элементарной и кинетической теории, различаются незначительно при условии, что $\nu_{эфф} = (5/2) \nu_m$. Показано, что рассмотренным методом можно находить только сглаженный $N(h)$ -профиль. Использование радиоастрономических измерений поглощения позволяет находить $N(h)$ -профиль только в периоды ионосферных возмущений.

Методика определения $N(h)$ -профиля электронной концентрации в D-слое ионосферы по частотной зависимости поглощения рассматривалась в ряде работ [1-7]. С формальной точки зрения эта задача сводится к решению относительно $N(h)$ интегрального уравнения, связывающего частотную зависимость поглощения $\Gamma(\omega)$ с профилем $N(h)$:

$$\Gamma(\omega) = \int_0^{\infty} N(h) K(h, \omega) dh. \quad (1)$$

Здесь функция $K(h, \omega)$, являющаяся ядром интегрального уравнения (1), имеет смысл коэффициента дифференциального поглощения.

В [1, 2] изложен численный метод решения уравнения (1) для случая, когда функция $N(h)$ представлена в виде полинома степени n , однако в [6] показано, что такой метод решения не всегда приводит к желаемым результатам. В [3, 4] найдено общее решение уравнения (1), в предположении, что коэффициент дифференциального поглощения $K(h, \omega)$ определяется выражением

$$K_1(h, \omega) = \frac{2A \nu_{эфф}}{\nu_{эфф}^2(h) + \omega^2} \quad (2)$$

($2A = 4\pi e^2/mc$, $\nu_{эфф}(h)$ — эффективное число электронных соударений на высоте h), полученным в рамках элементарной теории.

Более точное выражение для коэффициента дифференциального поглощения дает кинетическая теория [8]*:

$$K_2(h, \omega) = \frac{2A}{\nu_m(h)} C_{5/2} \left[\frac{\omega}{\nu_m(h)} \right], \quad (3)$$

* Выражения (2), (3) справедливы в пренебрежении магнитным полем и при условии, что показатель преломления близок к 1. Последнее условие всегда выполняется в D-слое для рассматриваемого диапазона частот. Магнитное поле можно учесть в квазипродольном приближении, заменив ω на $\omega \pm \omega_L$, где ω_L — продольная компонента гирочастоты.

где $C_{5/2}(x) = \frac{1}{(5/2)!} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{5/2} e^{-\varepsilon}}{x^2 + \varepsilon^2} d\varepsilon$, ν_m — частота соударений электронов,

имеющих наиболее вероятную скорость. В работе [7] получено решение интегрального уравнения (1) с учетом (3), но оно основано на представлении функции $N(h)$ в виде полинома и весьма сложно для практических расчетов.

В настоящей работе проведено сопоставление формул элементарной и кинетической теории для расчета поглощения радиоволн в ионосфере; найдено решение задачи в приближении кинетической теории; проанализирована погрешность найденного $N(h)$ -профиля, обусловленная случайными ошибками измерений, и сделаны некоторые общие выводы.

1. В первом приближении зависимость частоты электронных столкновений от высоты в D -слое ионосферы можно описывать экспонентой

$$\nu_m(h) = \nu_0 \exp\left(-\frac{h}{H}\right), \quad (4)$$

где H — приведенная высота атмосферы. В этом случае, как было показано в [4, 5], путем введения новых переменных $z = h/H$ и $z_m = \ln(\nu_0/\omega)$ уравнение (1) приводится к уравнению с разностным ядром

$$G(z_m) = \int_{-\infty}^{\infty} N(z) K(z - z_m) dz, \quad (5)$$

где $G(z_m) = G(\omega) = \Gamma(\omega) \omega$.

Прежде чем перейти к решению интегрального уравнения (5) с ядром (3), сравним коэффициенты дифференциального поглощения (2) и (3). Как известно, в предельных случаях $\omega \gg \nu$ и $\omega \ll \nu$ выражения (2) и (3) совпадают, если $\nu_{эфф} = (5/2)\nu_m$ и $\nu_{эфф} = (3/2)\nu_m$ соответственно. Для сопоставления коэффициентов (2) и (3) в промежуточной области частот $\omega \sim \nu$ удобно рассмотреть следующие функции:

$$F_1 = \frac{5}{2} x \frac{1}{x^2 + (5/2)^2} = \frac{1}{2 \operatorname{ch}(z - z_m)}; \quad (6)$$

$$F_2 = \frac{5}{2} x C_{5/2}(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \exp(z - z_m) C_{5/2}\left(\frac{5}{2} \exp(z - z_m)\right), \quad (7)$$

где $x = \omega/\nu_m$, а $z - z_m = \ln 2\omega/5\nu_m = \ln 2x/5$. Нетрудно видеть, что функции F_1 и F_2 получаются соответственно из (2) и (3) умножением последних на ω при условии $\nu_{эфф} = 5\nu_m/2$. В переменных z и z_m они с точностью до постоянного коэффициента совпадают с ядром уравнения (5).

Графики функций F_1 и F_2 в зависимости от $x = \omega/\nu_m$ приведены на рис. 1. (Пунктирной кривой F_3 представлена используемая ниже аппроксимация функции F_2 .) Из рис. 1 видно, что расхождение между максимальными значениями функций F_1 и F_2 (при $x = 5/2$) составляет около 20%. В предельном случае $x \gg 1$ ($\omega \gg \nu_m$) имеет место, как уже упоминалось, совпадение F_1 и F_2 . В другом предельном случае $x \ll 1$ ($\omega \ll \nu_m$) значения функций F_1 и F_2 отличаются в 5/3 раза. Сопоставление формул (2) и (3) проводилось здесь при условии $\nu_{эфф} = 5\nu_m/2$. При другом соотношении между $\nu_{эфф}$ и ν_m расхождение между формулами (6) и (7) получается больше.

Из сказанного ясно, что в зависимости от выбранных при расчетах формул для дифференциального коэффициента поглощения можно по-

лучить различные $N(h)$ -профили. Чтобы получить удобное для практических вычислений решение интегрального уравнения (5), мы воспользовались следующей простой аппроксимацией функции $C_{5/2}(x)$:

$$C_{5/2}(x) \simeq \frac{1}{x^2 + ax + a^2}, \quad (8)$$

где, как и выше, $x = \omega/\nu_m$. Параметр a подбирался из условия наилучшего приближения к функции $C_{5/2}(x)$. Коэффициент дифференциального поглощения, соответствующий (8), характеризуется функцией

$$F_3(x) = \frac{5}{2} x \frac{1}{x^2 + ax + a^2} = \frac{5}{4a \{ \text{ch}[z - z_m + \ln(5a/2)] + (1/2) \}}. \quad (9)$$

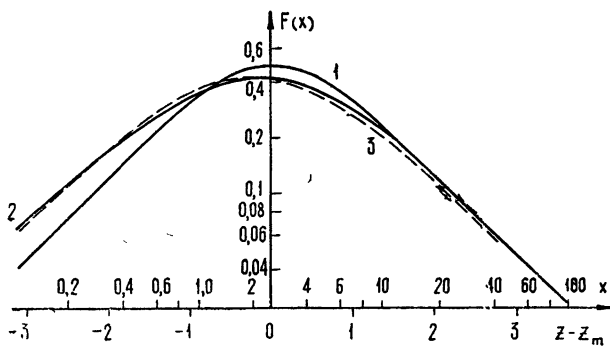


Рис. 1. 1— $F_1(x)$, 2— $F_2(x)$, 3— $F_3(x) = \frac{5}{2} \frac{1}{a^2 + ax + x^2}$.

На рис. 1 функция $F_3(x)$ при $a = \sqrt{15/4} \approx 1,94$ показана пунктирной линией. Как видно из рис. 1, приближение $F_3(x)$ к $F_2(x)$ вполне удовлетворительное. В интересующей нас области максимума дифференциального поглощения $1 \leq x \leq 6$ приближение $F_3(x)$ можно считать очень хорошим (в точке $x \approx 2$ достигается даже точное совпадение $F_3(x)$ с $F_2(x)$). При вычислении $N(h)$ -профиля это обстоятельство особенно существенно. Максимальная ошибка, даваемая формулой (9), наблюдается далеко от интересующей нас области (при $x \approx 10$) и достигает всего 11%*. Таким образом, замена точной функции $C_{5/2}(x)$ приближенным соотношением (9) не внесет существенных искажений в определяемый $N(h)$ -профиль.

Ниже рассмотрено решение интегрального уравнения (5) с учетом (8).

2. Уравнение (5) с ядром (3) при аппроксимации (8) имеет следующий вид в переменных z и z_m :

$$G(z_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(z) \sqrt{\frac{5}{3}} AH \frac{dz}{\text{ch}(z - z_m + \xi) + \frac{1}{2}}. \quad (10)$$

* Функция $C_{5/2}(x)$ протабулирована в [9], в [10] дана ее аппроксимация с точностью 0,1%, но для наших целей достаточно предлагаемого здесь более простого приближения.

Здесь $\xi = \ln \sqrt{\frac{5}{3}}$. Применение к уравнению (10) фурье-преобразования и теоремы о свертке [11] позволяет получить соотношение

$$g(\Omega) = n(\Omega) k_3(\Omega), \quad (11)$$

где $g(\Omega)$, $n(\Omega)$, $k_3(\Omega)$ — соответственно спектры функций $G(z_m)$, $N(z)$ и $K_3(z-z_m)^*$.

Из (11) легко получить

$$n(\Omega) = g(\Omega) k_3^{-1}(\Omega). \quad (12)$$

Обратный переход к оригиналам в уравнении (12) мог бы привести к точному решению для $N(z)$. Однако ввиду расходимости обратного ядра при $\Omega \rightarrow \infty$ решение получается в неудобной для практических расчетов форме.

Для определения решения в явном виде применим метод «фильтрации». Этот метод дает возможность найти решение, практически пригодное для численных расчетов, и в то же время он позволяет уменьшить влияние случайных ошибок, содержащихся в функции $G(z_m)$. С формальной точки зрения прием сводится к тому, что обе части

$$\text{уравнения (12) умножают на функцию фильтрации } \Phi(\Omega) = \exp \left[-\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2 \right],$$

а затем находят обратное преобразование Фурье от обеих частей полученного соотношения:

$$n_3(\Omega) = n(\Omega) \Phi(\Omega) = g(\Omega) k_3^{-1}(\Omega) \Phi(\Omega). \quad (13)$$

После преобразования левой части (13) получаем

$$\begin{aligned} N_3(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} n(\Omega) \Phi(\Omega) e^{i\Omega z} d\Omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} N(y) e^{-i\Omega y} dy \right] \exp \left[-\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^2 \right] e^{i\Omega z} d\Omega = \frac{\Omega_0}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} N(y) \times \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{(y-z)^2 \Omega_0^2}{4} \right) dy. \end{aligned} \quad (14)$$

Соотношение (14) показывает, что профиль $N_3(z)$ получается усреднением профиля $N(y)$ по координате y с гауссовой весовой функцией. Эффективный интервал усреднения обратно пропорционален полосе пропускания фильтра и составляет $2\Delta = 4\sqrt{\ln 2}/\Omega_0$ единиц приведенной высоты. При достаточно большом значении Ω_0 интервал усреднения может быть сделан сколь угодно малым. Правую часть уравнения (13) после применения обратного фурье-преобразования можно привести к виду

$$N_3(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_3^{-1}(z_m - z) G(z_m) dz_m, \quad (15)$$

где

$$K_3^{-1}(z - z_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k_3^{-1}(\Omega) \Phi(\Omega) \exp [i\Omega(z_m - z)] d\Omega. \quad (16)$$

* Индекс «3» соответствует приближенным формулам кинетической теории.

Для вычисления $K_3^{-1}(z_m - z)$ в явном виде найдем спектр ядра, обозначив $z_m - z = u$:

$$k_3(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_3(u) e^{-i\Omega u} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{5}{3}} AH \frac{e^{-i\Omega u}}{\operatorname{ch}(u - \xi) + \frac{1}{2}} du = \\ = \frac{\sqrt{5}}{3} 4\pi AH e^{i\Omega \xi} \frac{\operatorname{sh}(\pi\Omega/3)}{\operatorname{sh}(\pi\Omega)}$$

(см. [12], стр. 519). Спектр обратного ядра соответственно будет иметь вид

$$k_3^{-1}(\Omega) = \frac{3}{4\sqrt{5}} \frac{1}{\pi AH} e^{-i\Omega \xi} \frac{\operatorname{sh}(\pi\Omega)}{\operatorname{sh}(\pi\Omega/3)} = \frac{3}{4\sqrt{5}} \frac{1}{\pi AH} e^{-i\Omega \xi} \left[1 + 2\operatorname{ch}\left(\frac{2}{3}\pi\Omega\right) \right]. \quad (17)$$

Подставляя в (16) выражения $k_3^{-1}(\Omega)$ и $\Phi(\Omega)$, можно на основании [12] (стр. 494, 534) получить в явном виде

$$K_3^{-1}(z_m - z) = \frac{3\sqrt{5}}{40\pi^{3/2}} \frac{1}{AH} \Omega_0 \exp \left\{ \frac{\Omega_0^2}{4} \left[\left(\frac{2}{3}\pi\right)^2 - (z_m - z - \xi)^2 \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \exp \left[-\left(\frac{\pi\Omega_0}{3}\right)^2 \right] + 2 \cos \left[(z_m - z - \xi) \frac{\pi\Omega_0^2}{3} \right] \right\}. \quad (18)$$

После подстановки (18) в (15) находим

$$N_3(z) = \frac{3\sqrt{5}}{40\pi^{3/2}} \frac{1}{AH} \Omega_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{\Omega_0^2}{4} (z_m - z - \xi)^2 \right] \times \\ \times \left\{ 1 + 2 \exp \left(\frac{\pi\Omega_0}{3} \right)^2 \cos \left[\frac{\pi\Omega_0^2}{3} (z_m - z - \xi) \right] \right\} G(z_m) dz_m. \quad (19)$$

Интересно сравнить (19) с решением, полученным в работе [5] на основании элементарной теории в виде*

$$N_1(z) = \frac{1}{2AH\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_0 \exp \left\{ \frac{\Omega_0^2}{4} \left[\frac{\pi^2}{4} - (z_m - z)^2 \right] \right\} \cos \left[\frac{\pi\Omega_0^2}{4} (z_m - z) \right] G(z_m) dz_m. \quad (20)$$

Оба решения имеют интегральную форму. Ядро каждого из них содержит два множителя, один из которых представляет гауссову функцию, а другой является периодическим. Одно из отличий состоит в том, что аргументы ядер отличаются между собой фактором «сдвига» $\xi = \ln \sqrt{5/3} \simeq 0,255$. Величина сдвига ξ составляет приблизительно четверть приведенной высоты или около 2 км. Сдвиг обусловлен относительным смещением максимумов дифференциального поглощения в исходных уравнениях (2) и (3) (см. функции F_1 и F_3 на рис. 1).

Для иллюстрации степени точности, которую дает формула (19), и характера различия между формулами (19) и (20) рассмотрим следующий пример. Зададим распределение электронной концентрации в виде

$$N_0(z) = \frac{1}{\operatorname{ch}(z - z_0)}. \quad (21)$$

* Индекс «1» соответствует профилю, полученному по формулам элементарной теории.

Для этой модели слоя из уравнения (10) была найдена соответствующая функция $G(z_m)$ (см. Приложение, формула (30)). Далее, используя полученную зависимость $G(z_m)$, были восстановлены профили $N_3(z)$ и $N_1(z)$ по соотношениям (19) и (20). На рис. 2 показан исходный профиль (21) и вычисленные при $\Omega_0 = 2$ профили $N_3(z)$ и $N_1(z)$.

Из рис. 2 видно, что последние, как и следовало ожидать, сглажены в сравнении с исходным. Вследствие этого наибольшее отклонение от исходного профиля наблюдается в максимуме $N(z)$. Оно составляет

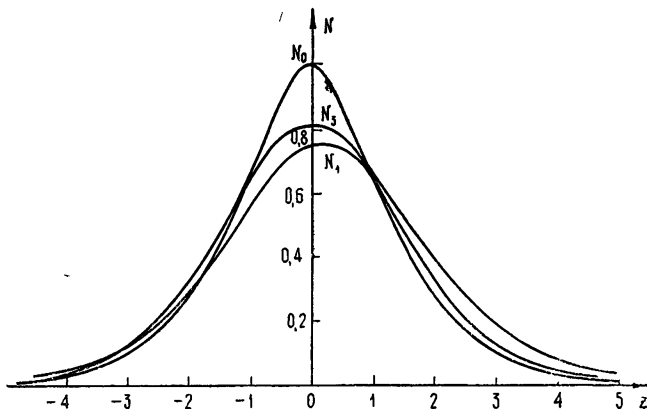


Рис. 2.

$\sim 25\%$ для $N_1(z)$ и $\sim 20\%$ для $N_3(z)$, расхождение между профилями $N_1(z)$ и $N_3(z)$ меньше и не превышает 9%. Относительный сдвиг максимумов профилей $N_3(z)$ и $N_1(z)$ составляет $\xi = 0,255$ и практически не существен. Таким образом, расчеты по формулам кинетической и элементарной теории приводят к практически сходным результатам, если в формулу элементарной теории подставлять значение $\nu_{\text{ф}} = 5\nu_m/2$.

3. Оценим точность нахождения $N(h)$ -профиля по описанной выше методике. Казалось бы, при достаточно больших значениях параметра Ω_0 точность ничем не ограничивается. Заметим, однако, что измерения величины поглощения производятся с определенной ошибкой, которая сказывается и на точности определения профиля $N(h)$. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Поскольку функция $\Gamma(\omega)$ определена с ошибкой, то ошибки должна содержать и функция $G(z_m) = \Gamma(\omega)\omega$. Представим функцию $G(z_m)$ в виде суммы точной функции $G_0(z_m)$ и случайной — $\delta G(z_m)$. Ввиду линейности фурье-преобразования аналогичное соотношение выполняется и для спектра функции $G(z_m)$, т. е. $g(\Omega) = g_0(\Omega) + \delta g(\Omega)$. В общем случае спектр ошибок $\delta g(\Omega)$ неизвестен. Но мы будем для простоты предполагать его равномерным. Это предположение, в частности, справедливо тогда, когда величина поглощения $\Gamma(\omega)$ измеряется на ряде фиксированных частот, для которых выполняется соотношение $\omega_{i+1}/\omega_i = \text{const}$, а ошибки измерения поглощения на соседних частотах не коррелированы между собой. В этом случае, согласно теореме Котельникова [11], спектр ошибок $\delta g(\Omega)$ оказывается постоянным вплоть до граничной частоты Ω_{max} . Для частот выше Ω_{max} спектральную плотность ошибок $\delta g(\Omega)$, а также точной функции $g_0(\Omega)$ можно считать равной нулю.

Возьмем в качестве критерия точности полученного профиля $N_3(z)$

величину относительного среднеквадратичного отклонения, определяемого формулой

$$D_N^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [\delta N_3(z)]^2 dz}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} N_3(z) dz \right]^2}, \quad (22)$$

где $\delta N_3(z)$ — отклонение профиля, содержащего ошибки, от точного профиля, т. е. найденного по функции $G_0(z_m)$, не содержащей ошибок. Интеграл в знаменателе (22) может быть определен через спектральную плотность, а именно

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} N_3(z) dz \right]^2 = [n_3(0)]^2. \quad (23)$$

Интеграл в числителе (22) можно выразить через спектральную плотность по теореме Рейли [1]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\delta N_3(z)]^2 dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\delta n_3(\Omega)|^2 d\Omega. \quad (24)$$

Здесь $|\delta n_3(\Omega)|$ — модуль спектральной плотности ошибок, который может быть определен на основании формулы (13):

$$|\delta n_3(\Omega)| = |\delta g(\Omega) k_3^{-1}(\Omega) \Phi(\Omega)|. \quad (25)$$

Разделив обе части уравнения (25) на соотношение (13), взятое при $\Omega=0$, получим

$$\frac{|\delta n_3(\Omega)|}{n_3(0)} = \frac{|\delta g(\Omega) k_3^{-1}(\Omega) \Phi(\Omega)|}{g(0) k_3^{-1}(0) \Phi(0)}. \quad (26)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (26) и, подставив явные выражения для $k_3^{-1}(\Omega)$ и $\Phi(\Omega)$, проинтегрируем полученное соотношение от 0 до $+\infty$. Учтем при этом, что спектр ошибок функции $G(z_m)$ не зависит от Ω , т. е. $\delta g(\Omega) = \delta g$. В результате находим

$$\frac{1}{[n_3(0)]^2} \int_0^{\infty} |\delta n_3(\Omega)|^2 d\Omega = \frac{\delta g}{[g(0)]^2} \frac{1}{9} \int_0^{\infty} \left[1 + \operatorname{ch} \left(\frac{2}{3} \pi \Omega \right) \right]^2 \times \\ \times \exp \left[-2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^2 \right] d\Omega. \quad (27)$$

Если считать, что $G(z_m)$ задана в равноотстоящих точках, то интегрирование следовало бы проводить только до частоты $\Omega_{\max} = \pi/\Delta z_m$, а не до ∞ . Однако подынтегральное выражение содержит фильтрующую функцию, и если ширина полосы пропускания фильтра определена величиной $\Omega_0 < \Omega_{\max}$, то естественно распространить пределы интегрирования до ∞ . Учитывая (22) — (24) и [12], можно привести (27) к виду*

* При переходе от (27) к (28) предполагалось, что для функций $G(z_m)$ и $g(0)$, $\delta G(z_m)$ и $\delta g(\Omega)$ справедливы соотношения, аналогичные (23) и (24).

$$D_N^2 = D_G^2 \frac{\Omega_0}{9} \sqrt{\frac{\pi}{2} \left[\frac{3}{2} + 2 \exp\left(\frac{\pi^2 \Omega_0^2}{18}\right) + \exp\left(\frac{2\pi^2 \Omega_0^2}{9}\right) \right]}, \quad (28)$$

где D_G — величина относительного среднеквадратичного отклонения функции $G(z_m)$:

$$D_G^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [\delta G(z_m)]^2 dz_m}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} G_0(z_m) dz_m \right]^2}. \quad (29)$$

Обозначив множитель при D_G^2 в (28) через $P^2(\Omega_0)$, будем иметь

$$D_N = D_G P(\Omega_0). \quad (30)$$

Ниже в табл. 1 приведены значения величин $P(\Omega_0)$ и эффективного интервала усреднения $2\Delta z = \frac{4\sqrt{\ln 2}}{\Omega_0}$, вычисленные для различных значений Ω_0 .

Таблица 1

Ω_0	1	1,5	1,7	2	2,5	3
$P(\Omega_0)$	1,39	5,5	11,9	43	560	$2 \cdot 10^4$
$2\Delta z$	3,34	2,27	1,95	1,67	1,33	1,11

Из табл. 1 видно, что с ростом Ω_0 эффективный интервал усреднения уменьшается, а ошибка получаемого решения растет по сравнению с ошибками исходных данных.

Очевидно, что приведенный выше анализ погрешностей профиля $N(z)$, найденного по частотной зависимости поглощения $\Gamma(\omega)$, носит ориентировочный характер. В этом анализе реальный спектр ошибок функции $G(z_m)$ заменялся равномерным спектром и не учитывались реальные физические условия, требующие, чтобы профиль $N(z)$ был неотрицательным. Поэтому полученная погрешность может оказаться завышенной. Тем не менее порядок величин $P(\Omega_0)$, приведенных в таблице, по-видимому, должен сохраниться. Если считать, что ошибка измерения $\Gamma(\omega_i)$ составляет 2% (по всей вероятности, такая точность является предельной для современных измерений, т. е. для ее достижения необходимо, чтобы при $\Gamma(\omega) \simeq 5$ дб абсолютная ошибка $\Delta\Gamma(\omega) \simeq \simeq 10$ дб), то при $\Omega_0 > 2$ ошибка в определении профиля $N(z)$ составляет более 100%, т. е. полученный профиль нельзя будет считать достоверным. Для нахождения профиля с ошибкой 10—20% необходимо выбирать параметр $\Omega_0 \simeq 1,5 \div 1,7$ и получать при этом профиль, усредненный по высоте с интервалом $\sim 2H$, т. е. около 14 км. С физической точки зрения этот результат можно понять, если учесть, что функция, характеризующая дифференциальное поглощение, имеет эффективную ширину несколько больше $2H$ км (см. рис. 1).

4. В заключение остановимся на практических возможностях метода.

а) Как уже отмечалось, для нахождения профиля $N(h)$ в определенном интервале высот необходимо знать частотную зависимость

поглощения $\Gamma(\omega)$ в соответствующем определенном диапазоне частот. В частности, радиоастрономическому диапазону частот 5—50 Мгц соответствует узкий интервал высот 40—60 км. На таких высотах значительная электронная концентрация наблюдается только в периоды аномальных возмущений D -слоя. Измерения аномального поглощения в этих случаях позволяют получить информацию о профиле дополнительной электронной концентрации.

В спокойной ионосфере основной вклад в поглощение дают слои F , E и верхняя часть D -области, где выполняется условие $\nu \ll \omega$, поэтому данные о регулярном поглощении радиоволн в ионосфере не могут быть использованы для рассматриваемого метода. Результаты измерений поглощения на частотах, отражающихся от ионосферы, также не могут быть использованы непосредственно из-за большого вклада в измеренные значения, «отклоняющего» поглощения. Однако в случае возмущений, не затрагивающих уровень отражения, эти измерения могут дополнить радиоастрономические данные.

б) Анализ ошибок получаемого профиля, проведенный в разд. 3, показывает, что по частотной зависимости поглощения можно находить только весьма сглаженный $N(h)$ -профиль в D -области. При этом эффективный интервал сглаживания составляет ~ 14 км. Если даже реальный профиль в D -слое будет иметь несколько максимумов в небольшом интервале высот, то рассматриваемым методом трудно восстановить достоверный профиль с несколькими максимумами.

в) Если учесть, что получаемый профиль сглажен в интервале высот ~ 14 км, то для эффективного использования метода соседние частоты рабочего диапазона должны различаться оптимально в 2,5—3 раза. Более частое размещение рабочих частот полезно для уменьшения случайных ошибок измерений. Необходимо лишь помнить, что результаты измерений при малом разноразности частот должны сглаживаться в процессе нахождения $N(h)$ -профиля. Попытки учитывать результаты каждого измерения на близких частотах как точные приводят к недостоверным профилям. Примером могут служить результаты работы [6], где по измерениям на пяти частотах—20, 25, 30, 40 и 50 Мгц—получились $N(h)$ -профили с отрицательными значениями N .

г) Сопоставление $N(h)$ -профилей, вычисленных с учетом формул элементарной и кинетической теории, показывает, что они практически мало различаются, если выбрать значение коэффициента связи между $\nu_{эф}(h)$ и $\nu_m(h)$ равным 5/2. Таким образом, учитывая вышеприведенные замечания о точности метода, можно с равным успехом пользоваться кинетическим и элементарным рассмотрением.

Авторы глубоко признательны Е. А. Бенедиктову за помощь в подготовке рукописи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

РАСЧЕТ ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ $\Gamma(\omega)$ ДЛЯ СЛОЯ

$$N(h) = \left[\operatorname{ch} \left(\frac{h-h_0}{H} \right) \right]^{-1} \text{ В ПРИБЛИЖЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ}$$

Интегральное уравнение (1) с ядром (3) при учете аппроксимации (8) можно записать в виде

$$\Gamma(\omega) = \int_0^{\infty} N(h) 2A \frac{5}{2} \frac{1}{\nu_m(h) \left[\frac{\omega^2}{\nu^2(h)} + a \frac{\omega}{\nu_m(h)} + a^2 \right]} dh. \quad (31)$$

Считая, что $\nu_m(h) = \nu_0 e^{-h/H}$, перейдем к новой переменной ν . При этом

$d\nu = -\frac{\nu}{H} dh$, $N(\nu) = \frac{2b\nu}{\nu^2 + b^2}$, где $b = \nu_0 \exp(-h_0/H)$. После такой подстановки вместо (31) получим

$$\Gamma(\omega) = \frac{10AHb}{a^2} \int_0^{\infty} \frac{\nu d\nu}{(\nu^2 + b^2)(\nu^2 + \nu f + f^2)}, \quad (32)$$

где $f = \frac{\omega}{a}$.

Подынтегральная функция в (32) может быть преобразована методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{\nu}{(\nu^2 + b^2)(\nu^2 + \nu f + f^2)} = \frac{1}{f^4 - f^2 b^2 + b^4} \left[\frac{f b^2 + (f^2 - b^2)\nu}{\nu^2 + b^2} - \frac{f^3 + (f^2 - b^2)\nu}{f^2 + \nu f + \nu^2} \right]. \quad (33)$$

После вычисления определенного интеграла от функции (33) имеем

$$\Gamma(\omega) = \frac{10AHb}{a^2} \frac{\pi f b/2 - \pi f^3/3 \sqrt{3} + (f^2 - b^2) \ln |f/b| - \pi b^2/3 \sqrt{3}}{f^4 - f^2 b^2 + b^4}. \quad (34)$$

Из (34) легко получить выражение для $G(\omega)$:

$$G(\omega) = \omega \Gamma(\omega) = \frac{10AH}{a} x \frac{\pi x/2 - \pi x^2/3 \sqrt{3} + (x^2 - 1) \ln x - \pi/3 \sqrt{3}}{x^4 - x^2 + 1}, \quad (35)$$

где $x = f/b = \exp(z_0 - z_m - \ln a)$. Замена переменной x на $t = \ln x = z_0 - z_m - \ln a$ приводит к более простому выражению:

$$G(\omega) = G(z_m) = \frac{10AH}{a} \frac{\pi/4 - \pi/3 \sqrt{3} \operatorname{ch} t + t \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} 2t - 1/2}. \quad (36)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Parthasarathy, G. M. Lerfeld, C. G. Little, J. Geophys. Res., **68**, № 12, 3581 (1963).
2. К. Серафимов, Г. Несторов, Геомагнетизм и аэронавтика, **3**, № 6, 1059 (1963).
3. A. Wheelon, J. Res. Nat. Bur. Stand., **D-67**, 699 (1963).
4. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Л. В. Родыгин, Геомагнетизм и аэронавтика, **4**, 786 (1964).
5. В. В. Беликович, М. А. Иткина, Геомагнетизм и аэронавтика, **8**, 476 (1968).
6. T. Ono, H. Kishida, Rep. Ionosp. and Space Res., Japan, **20**, № 3, 542 (1966).
7. B. Hultqvist, Planet. and Space Sci., **16**, № 5, 529 (1968).
8. S. K. Sen, A. A. Wyller, J. Geophys. Res., **65**, 3931 (1960).
9. M. J. Burke, E. H. Hara, Defence Res. Board DRTE Rept. 1113, Ottawa, 1963.
10. E. H. Hara, J. Geophys. Res., **68**, 4388 (1963).
11. А. А. Харкевич, Спектры и анализ, Гостехтеоретиздат, М., 1952.
12. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
8 мая 1969 г.

DETERMINATION OF THE ELECTRON DENSITY PROFILE IN THE D-REGION USING THE FREQUENCY DEPENDENCE OF ABSORPTION

V. V. Belikovitch, M. A. Itkina

A general solution is found for the integral equation relating the frequency dependence of absorption $\Gamma(\omega)$ and the profile $N(h)$ in the kinetic theory approximation.

The influence of random absorption measurement errors on the estimated $N(h)$ -profile is analyzed. It is stated that under the condition $\nu_{\text{eff}} = (5/2) \nu_m$, $N(h)$ -profiles, which was found using the formulas of elementary and kinetic theory, differ slightly. The considered method is shown to permit an estimation of only smooth $N(h)$ -profile. The use of the radio astronomical methods in absorption measurements gives the possibility to find $N(h)$ profile only during ionospheric disturbances.

УДК 621.371.25 : 533.9.01

К ВОПРОСУ О КОНВЕРСИИ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

В. Ю. Трахтенгерц

Рассмотрены некоторые случаи распадного взаимодействия волн в однородной магнитоактивной плазме, имеющие прямое отношение к ионосферным и магнитосферным исследованиям. В частности, детально исследуются рассеяние и конверсия ультранизкочастотных радиоволн. Обнаружено резкое возрастание коэффициента конверсии продольных волн в электромагнитные вблизи гирочастоты ионов. Рассмотрено взаимодействие обыкновенной и необыкновенной волн при рассеянии на флуктуациях плотности плазмы.

1. В настоящее время распадному взаимодействию волн в плазме посвящено значительное количество работ [1-7]. Хорошо изучены распады волн в изотропной плазме [1, 2, 5]. Рассмотрено распадное взаимодействие в магнитоактивной плазме [2-4, 6, 7].

В данной работе анализируются процессы распадного взаимодействия волн, которые имеют прямое отношение к исследованию ионосферы и магнитосферы. В частности, рассмотрена конверсия плазменных ионно-звуковых и ионно-циклотронных волн в низкочастотные электромагнитные волны с частотой $\omega_H \gg 2\pi f \gtrsim \Omega_H$ (ω_H и Ω_H — гирочастоты электронов и ионов). Детально исследуется распадное взаимодействие волн типа свистов (геликонов). Эти вопросы имеют отношение к объяснению ряда явлений в ультранизкочастотном радиодиапазоне излучения магнитосферы ($f \sim 1 \div 30$ кГц).

Рассмотрено также рассеяние ультранизкочастотных радиоволн на флуктуациях плотности магнитосферной плазмы и на возмущениях магнитного поля, создаваемых гидромагнитными волнами. В дальнейшем эти результаты будут использованы для оценок возможности исследования магнитосферы методом зондирования УНЧ радиоимпульсами.

Анализируется конверсия обыкновенной и необыкновенной волн на низкочастотной плазменной турбулентности, представляющая интерес для исследования ионосферных слоев методом частичных отражений.

Перечисленные выше случаи распадного взаимодействия уже исследовались частично в цитированных работах [1-7]. В настоящей работе в гидродинамическом приближении получены довольно простые формулы, которые позволяют легко оценить любое распадное взаимодействие в случае произвольной ориентации волнового вектора \mathbf{k} относительно магнитного поля \mathbf{H}_0 . Рассматриваются также некоторые не изученные ранее эффекты, такие как резкое увеличение коэффициента конверсии продольных волн в электромагнитные вблизи гирочастоты ионов, рассеяние волн типа свистов на плазменной и магнитогидродинамической турбулентности и др.

2. В процессах типа распадов и слияний волн участвуют слабозатухающие колебания, поэтому для описания распадного взаимодействия можно воспользоваться квазигидродинамическими уравнениями.

Изменение интенсивности волн в рассматриваемых процессах описывается нелинейным уравнением переноса энергии для волн со случайными фазами [5] и укороченными уравнениями для комплексных амплитуд в случае волн с фиксированной фазой. В том и другом случаях коэффициент нелинейного взаимодействия определяется тензором нелинейной проводимости $S_{inm}(k, k_1, k_2)$:

$$j_i^{(2)}(k, k_1, k_2) = \int S_{inm}(k, k_1, k_2) E_n(k_1) E_m(k_2) d\Lambda, \quad (1)$$

$$dk = d^3k d\omega, \quad d\Lambda = dk_1 dk_2 \delta(k - k_1 - k_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2).$$

Для нахождения тензора $S_{inm}(k, k_1, k_2)$ воспользуемся системой квазигидродинамических уравнений

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + (v_\alpha \nabla) v = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left(E + \frac{1}{c} [v_\alpha H] \right) - \frac{\nabla p_\alpha}{m_\alpha n_0}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \text{div } n_\alpha v_\alpha = 0, \quad \nabla p_\alpha = \gamma T_\alpha \nabla n_\alpha,$$

где v_α — скорость, n_α — плотность, T_α — температура, γ — показатель адиабаты, индекс „ α “ означает сорт частиц*.

Ток в плазме j при известных n_α и v_α можно найти из следующего выражения:

$$j = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha v_\alpha. \quad (3)$$

В интересующем нас случае слабой турбулентности v_α и n_α можно представить в виде ряда по возрастающим степеням электрического поля E . Используя далее разложение в интеграл Фурье $a(r, t) = \int a_k \exp[-i(\omega t - kr)] dk$, из (2) нетрудно получить итерационный ряд

$$\hat{G}_\alpha v_{\alpha k}^{(i)} = F_\alpha^{(i)}, \quad (4)$$

где

$$F_\alpha^{(1)} = E_k; \quad (5)$$

$$F_\alpha^{(2)} = \int \left[\frac{k_2}{\omega_2} (v_{k_1 \alpha}^{(1)} E_k) - E_{k_2} \frac{(k_2 v_{k_1 \alpha}^{(1)})}{\omega_2} \right] d\Lambda - i \left[\frac{m_\alpha}{e_\alpha} \int v_{k_2 \alpha}^{(1)} \times \right. \\ \left. \times (v_{k_1 \alpha}^{(1)} k_2) d\Lambda + \frac{\gamma T_\alpha}{e_\alpha} \frac{k}{\omega} \int \frac{(k_1 v_{k_1 \alpha}^{(1)})}{\omega_1} (k_2 v_{k_2 \alpha}^{(1)}) d\Lambda \right], \quad (6)$$

$$F_\alpha^{(3)} = \dots$$

В (4)–(6) учтено, что магнитное поле в волне $h = \frac{c}{\omega} [kE]$. Матричные элементы оператора G_α связаны с компонентами линейного тензора проводимости $\sigma_{ij}^{(\alpha)}(k, \omega)$ соотношением

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)}(k, \omega) = e_\alpha n_0 G_{\alpha ij}^{-1}. \quad (7)$$

* Мы ограничимся случаем, когда трение между компонентами плазмы, вязкость и теплопроводность не существенны, хотя учет этих величин не вызывает принципиальных затруднений.

Квадратичный по полю E ток равен

$$j_a^{(2)} = \sum_a e_a \left\{ n_0 v_{ka}^{(2)} + \int n_{ka}^{(1)} v_{ka}^{(1)} d\Delta \right\}, \quad n_{ka}^{(1)} = n_0 \frac{k v_{ka}^{(1)}}{\omega}. \quad (8)$$

Подставляя (4)–(7) в (8) и производя переобозначение немых индексов, получим следующее выражение для тензора нелинейной проводимости:

$$S_{inm}(k, k_1, k_2) = \sum_a \frac{1}{e_a n_0} \left\langle \frac{k_{2e}}{\omega_2} \sigma_{in}^{(a)}(k_1) \sigma_{em}^a(k_2) + \frac{k_{2j}}{\omega_2} \times \right. \\ \times \left[\sigma_{ij}^a(k) \sigma_{mn}^a(k_1) - \sigma_{im}^a(k) \sigma_{jn}^a(k_1) \right] - \frac{2\pi i}{\omega_{0a}^2} \sigma_{if}^a(k) \sigma_{en}^a(k_1) \times \\ \left. \times \left[\sigma_{im}^a(k_2) k_{2e} + \frac{\gamma T_a}{m_a} \frac{k_j k_{1e}}{\omega \omega_1} k_{2e} \sigma_{im}^a(k_2) \right] \right\rangle. \quad (9)$$

Дальнейшие преобразования (9) связаны с тем обстоятельством, что в уравнения, описывающие распадное взаимодействие, входит скалярная величина

$$S = S_1 + S_2 = \tilde{S}_{inm}(k, k_1, k_2) a_i^*(k) a_n(k_1) a_m(k_2), \quad (10)$$

где $\tilde{S}_{inm}(k, k_1, k_2) = S_{inm}(k, k_1, k_2) + S_{imn}(k, k_1, k_2)$ — симметризованный тензор, $a_i^*(k)$, $a_n(k_1)$ и $a_m(k_2)$ — векторы поляризации нормальных волн, удовлетворяющие уравнению

$$\left(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij} \right) a_j(k) = 0, \quad (11)$$

$$a^*(k) a(k) = 1,$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{\sigma} \sigma_{ij}^{\sigma} = \frac{\omega}{4\pi i} (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}).$$

Если дисперсионные свойства плазмы определяются каким-либо одним сортом частиц, то входящие в (10) величины $\sigma_{ij} a_j$ с помощью (11) можно записать в виде

$$\sigma_{ij} a_j = \frac{c^2}{i4\pi\omega} \left[\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) a_i - (ka) k_i \right] \equiv K_i. \quad (12)$$

Выражение (9) с учетом (10)–(12) удобно для анализа различных частных случаев распадного взаимодействия.

Рассмотрим, опираясь на полученные выше формулы, генерацию УНЧ электромагнитного излучения ($\omega \ll \omega_{He}$) плазменными волнами. УНЧ волны могут возбуждаться при слиянии двух ионно-звуковых или низкочастотных электронных плазменных волн, а также при распаде высокочастотных плазменных и электромагнитных волн. Остановимся на случае конверсии в электромагнитные волны электронно-ионных плазменных волн. В магнитоактивной плазме электронно-ионные волны образуют две дисперсионные ветви, определяемые уравнением [8] ($v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$, $T_e \gg T_i$)

$$\omega_j^2(k; \theta) = \frac{1}{2} (\omega_s^2 + \omega_{Hi}^2) \pm \frac{1}{2} [(\omega_s^2 + \omega_{Hi}^2)^2 - 4\omega_s^2 \omega_{Hi}^2 \cos^2 \theta]^{1/2}, \quad (13)$$

где $\omega_s = kv_s(1 + k^2 a^2)^{-1/2}$, $v_s = \sqrt{T_e/M}$, $a = (T_e/4\pi e^2 n_0)^{1/2}$, $\omega_{Hi} = eH/Mc$, $v_{T\alpha} = (T_\alpha/2m_\alpha)^{1/2}$, $k_1 = k \cos \theta$, θ — угол между волновым вектором k и направлением магнитного поля, T_α — температура частиц сорта α , n_0 — концентрация электронов в плазме. Поскольку фазовая скорость электромагнитных волн $v_\phi \gg v_{Te}$, а $\omega \sim \omega_{1,2}$, то $k \ll k_1, k_2$ (см. (14)).

Как показывает анализ кинематических условий распадов

$$k = k_1 \pm k_2, \quad \omega = \omega_1 \pm \omega_2, \quad (14)$$

рассматриваемая конверсия возможна как в случае взаимодействия электронно-ионных волн одного типа (на одной дисперсионной ветви), так и для волн разных типов. У продольных волн вектора поляризации $a_i \simeq k_i/k$. С учетом этого S приобретает вид

$$S_1 = \sum_\alpha \frac{a_i^*(k)}{2e_\alpha n_0 k_1 k_2} \left\langle \frac{k_{2e}}{\omega_2} \sigma_{in}^\alpha(k_1) \sigma_{em}^\alpha(k_2) k_{1n} k_{2m} - \frac{4\pi i}{\omega_{0z}^2} \sigma_{ij}^\alpha(k) \sigma_{en}^\alpha(k_1) \sigma_{jm}^\alpha(k_2) k_{1n} k_{2e} k_{2m} \right\rangle. \quad (15)$$

При слиянии волн на одной дисперсионной ветви ($k_1 \simeq -k_2$, $\omega_1 \simeq \omega_2$) происходит существенная компенсация вкладов S_1 и S_2 . Например, в случае генерации геликона двумя ионно-звуковыми волнами для S получается следующее выражение*:

$$S = \sum_\alpha \frac{a_i^*(k)}{2en_0 k_1 k_2} \left\langle \frac{k_2^2 \sigma^\alpha(k_2) \sigma_{in}^\alpha(k_1) k_{1n}}{\omega_2} + \frac{k_1^2}{\omega_1} \sigma^\alpha(k_1) \sigma_{in}^\alpha(k_2) k_{2n} \right\rangle, \quad (16)$$

где учтено равенство $k_{1,2i} \sigma_{ij} k_{1,2j} = 0$.

Для волн, описываемых (13),

$$\sigma^\alpha(k_{1,2}) = \frac{\omega_{1,2}}{4\pi i} \frac{\omega_{0e}^2}{k_{1,2}^2 v_{Te}^2}. \quad (17)$$

В случае $\omega_{1,2} \gg \omega_{Hi}$ наибольший вклад дают компоненты тензора [9]

$$|\sigma_{xy}| \sim |\sigma_{yz}| \sim \frac{\omega_{1,2}}{4\pi i} \frac{\omega_{0i}^2}{\omega \omega_{Hi}}. \quad (18)$$

Подставляя (17), (18) в (16), получим оценочную формулу

$$S \simeq \frac{k}{(4\pi)^2 en} \frac{\omega_{0i}^4}{\omega_1 \omega_2 \omega_{Hi}}. \quad (16a)$$

При взаимодействии волн со случайными фазами генерация в процессе слияний описывается следующим уравнением [4, 5]:

$$\frac{dW_k}{dt} = \int W_{k_1} \Pi(k, k_1) W_{k-k_1} dk_1; \quad (19)$$

$$\Pi(k, k_1) = 16\pi \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \omega \omega_1 \omega_2 \frac{|S|^2 (2\pi)^3}{\left| \frac{\partial \omega^2 \epsilon}{\partial \omega} \right| \left| \frac{\partial \omega_1^2 \epsilon_1}{\partial \omega_1} \right| \left| \frac{\partial \omega_2^2 \epsilon_2}{\partial \omega_2} \right|}, \quad (19a)$$

* Формула (15) описывает генерацию электромагнитного излучения при конверсии любых типов продольных волн.

где $\varepsilon = a_i^* \varepsilon_{ij} a_j$, W_k — плотность энергии волн в пространстве волновых чисел. Для оценки относительной эффективности нелинейной генерации в различных случаях введем характерное время процесса* $\tau^{-1} = W_{\omega_s}^{-1} dW_{\omega}/dt \simeq \tilde{\Pi} W_s$, W_s — плотность энергии плазменных волн в единице объема. В частности, в случае (16 а) имеем:

$$\tau^{-1} = \frac{\pi}{4} \omega \frac{W_s}{M n_0 v_A^2}, \quad \omega \simeq 2\omega_1, \quad (20)$$

где $v_A = c(\omega_{Hi}/\omega_{0i})$ — альфвеновская скорость, M — масса ионов.

Указанная выше компенсация вкладов от S_1 и S_2 отсутствует для процесса генерации на разностной частоте. Однако, как нетрудно убедиться, в случае $\omega_{1,2} \gg \omega_{Hi}$ на разностной частоте нельзя удовлетворить условиям синхронизма (14).

Интенсивность конверсии резко возрастает, когда происходит слияние (распад) продольных волн с разных дисперсионных ветвей ($\omega \sim \omega_{Hi}$). При этом $k_1 \simeq k_2$, но $\omega_1 - \omega_2 \sim \omega_1$ и компенсация в нелинейном токе не имеет места**. В данном случае выражение для S можно записать в следующем виде:

$$S = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{0e}^2}{8\pi i e n_0 k_1 k_2 v_{Te}^2} \left\langle [\sigma_{jn}^{\alpha}(k_1) - \sigma_{jn}^{\alpha}(k_2)] \times \right. \\ \left. \times a_j^*(k) k_{n1} + \frac{4\pi i}{\omega_{0z}^2} \sigma_{if}^{\alpha}(k) a_i^* k_{1n} [\omega_2 \sigma_{jn}^{\alpha}(k_1) - \omega_1 \sigma_{jn}^{\alpha}(k_2)] \right\rangle. \quad (21)$$

Полагая $\omega_1 \simeq \omega_s \cos \theta$, $\omega_2 \simeq \omega_{Hi}$, для конверсии в магнитозвуковую волну получим (по порядку величины)

$$S \simeq \delta \frac{\omega_{0e}^4 \omega}{(4\pi)^2 e n k_1^3 v_{Te}^4}, \quad (22)$$

где зависящий от ориентации k , k_1 , k_2 множитель $\delta \sim 1$. С учетом того, что $|\partial \omega^2 \varepsilon / \partial \omega| \simeq 3 \omega_{0i}^2 / \omega_{Hi}$, $|\partial \omega^2 \varepsilon_1 / \partial \omega_1| \simeq 2 \omega_{0e}^2 \omega / k^2 v_{Te}^2$ и $|\partial \omega^2 \varepsilon_2 / \partial \omega_2| \simeq 2 \omega_{Hi}^2 \omega_2 \omega_{0e}^4 / \omega_{0i}^2 \sin^2 \theta_2 k^2 v_{Te}^4$, находим характерное время

$$\tau^{-1} \sim \delta^2 \omega \frac{W}{n_0 T_e}. \quad (23)$$

Как видно из сравнения (20) и (23), эффективность конверсии при $\omega \sim \omega_{Hi}$ значительно возрастает (в v_A^2/v_{Ti}^2 раз).

3. В магнитном поле спектр электронно-ионных волн становится распадным. Скорость распадных процессов в этом случае описывается формулой

$$S = \frac{4\pi i}{2e n_0 k_1 k_2 k \omega_{0i}^2} k_i \sigma_{ij}^i(k) \sigma_{jm}^i(k_2) k_{2m} k_{2e} \sigma_{en}^i(k_1) k_{1n}. \quad (24)$$

Например, в случае взаимодействия трех волн $\omega_{1,2} = k_{1,2} v_s$ и $\omega = k v_s \cos \theta$

* С помощью (19), (20) нетрудно получить и более строгую формулу для мощности нелинейной генерации электромагнитного излучения

** В данном случае ситуация аналогична той, которая имеет место при взаимодействии плазменных и ионно-звучковых волн в изотропной плазме [5].

$$S = \frac{\cos^2 \theta}{2\sqrt{2}} \frac{\omega_{0i}^4 k}{(4\pi)^2 \omega_1 \omega_2 \omega e n_0} \quad (24a)$$

и характерное время нелинейного взаимодействия

$$\tau^{-1} \simeq \frac{\pi}{16} \omega \frac{W_s}{nT_e}$$

4. Распадное взаимодействие двух электромагнитных волн произвольного типа и ионно-звуковой волны определяется первым членом выражения (9). Согласно формулам (10), (12), в этом случае

$$S = \frac{ic^2 k_s \sigma^e(k_s)}{4\pi e n \omega_1 \omega_s} \left\{ (a^* [k_1 [a_1 k_1]]) - \frac{\omega_1^2}{c^2} (a^* a_1) \right\}, \quad (25)$$

где k_s — волновой вектор ионно-звуковой волны, $\sigma^e(k_s)$ определяется выражением (17). Например, в случае рассеяния геликона ($k^2 = \omega_{0e}^2 \omega / (\omega_H \cos \theta - \omega) c^2$, $\omega_{0e}^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$) на ионно-звуковой турбулентности из (25) получим следующее выражение для коэффициента $\Pi(k, k_1)$ (см. (19a))*:

$$\Pi(k, k_1) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega_H \cos \theta - \omega}{\omega_H \cos \theta} \right)^2 \frac{\omega \omega_1}{n_0 T} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2). \quad (26)$$

Оценим с помощью (25) конверсию электромагнитных обыкновенной и необыкновенной высокочастотных волн. Полагая для простоты векторы k , k_1 и H_0 лежащими в одной плоскости, в случае $v = \omega_{0e}^2 / \omega^2 \ll 1$ и $u = \omega_{He}^2 / \omega^2 \ll 1$ имеем

$$S \sim \begin{cases} a(k^o) a^*(k^n) \simeq \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) a_x^o a_x^{n*} \\ a(k^o) a^*(k^o) \simeq \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha) a_x^o a_x^{o*} \end{cases}, \quad (27)$$

где индексы «о» и «н» означают соответственно обыкновенную и необыкновенную волны, $\alpha = (\hat{k}_1, k)$. Таким образом, при рассеянии электромагнитных волн точно назад ($\alpha = \pi$) направление вращения вектора поляризации по отношению к H_0 сохраняется.

Оценим с помощью (19) и (26) спектральный поперечник обратного рассеяния УНЧ волн. В случае $\omega_H \cos \theta \gg \omega$

$$\sigma_{\omega_{УНЧ}} \simeq \frac{dW_\omega}{dt} S_{\omega}^{-1} \sigma_{\text{гр}}^{-1} = \frac{(2\pi)^3 k^4 W_{k-k'}}{16\pi n_0 T} = \frac{\omega_{0e}^4 e^4}{16\pi n_0} \frac{\omega^2}{\omega_H} \frac{W_{k-k_1}}{T} (2\pi)^3. \quad (28)$$

Это при рассеянии на тепловых флуктуациях в $(\omega/\omega_H)^2$ раз меньше поперечника рассеяния высокочастотных волн с частотой $\omega \gg \omega_{0e}$.

5. Взаимодействие трех электромагнитных волн, в частности, геликонов и гидромагнитных волн**, определяется вторым членом выражения (9). После некоторых несложных преобразований с использованием

* Формула (26) соответствует максимальной оценке, когда $(a^* [k_1 [a_1 k_1]]) \simeq k_1^2$. В работе [3] этот случай распада был рассмотрен для продольного распространения $(k_{1,s} \uparrow \uparrow H_0)$.

** В любом сочетании, разрешенном кинематическими условиями распадов (14).

(10) — (12) нетрудно получить общее выражение для S , описывающее распадное взаимодействие указанного типа ($k^2 c^2 / \omega^2 \gg 1$):

$$S = \frac{1}{en_0} \frac{c^4 k^2}{\omega_1 \omega_2 \omega} \{k_1^2 (a^* [a_1 [a_2 k_2]]) + k_2^2 (a^* [a_2 [a_1 k_1]])\}. \quad (29)$$

Формула (29) описывает взаимодействие геликонов между собой либо гидромагнитных волн между собой. В случае рассеяния геликона (k) в геликон (k_1) на гидромагнитных колебаниях (k_2) в формуле (29) нужно брать лишь первый член. При этом минимальное характерное время нелинейного взаимодействия геликонов $\tau^{-1} \simeq W_1^{-1} dW/dt \simeq 8\pi\omega^2 \omega_H^{-1} W_2 / mn v_\phi^2$ (W_i — плотность энергии волн (k_i) в единице объема, $v_{\phi i} = \omega_i / k_i$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Горбунов, В. В. Пустовалов, В. П. Силин, ЖЭТФ, 47, 1437 (1964).
2. Н. П. Гиоргадзе, Н. Л. Цинцадзе, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 2, 262 (1964).
3. Н. Л. Цинцадзе, ЖТФ, 34, 1807 (1964); Н. П. Гиоргадзе, Е. М. Хирсели, Н. Л. Цинцадзе, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 3, 489 (1966).
4. В. Н. Цытович, А. Б. Шварцбург, ЖЭТФ, 49, 797 (1965).
5. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, изд. Наука, М., 1967.
6. С. А. Каплян, В. Н. Цытович, УФН, 97, вып. 1, 77 (1969).
7. А. П. Кропоткин, В. В. Пустовалов, ЖЭТФ, 49, 1345 (1965); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 8, № 5, 886 (1965); ЖЭТФ, 50, 312 (1966).
8. Д. Г. Ломинадзе, К. Н. Степанов, ЖТФ, 34, 1823 (1964).
9. В. Д. Шафранов, Электромагнитные волны в плазме, сб. Вопросы теории плазмы, Атомиздат, М., 1963.

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
7 мая 1969 г.

TO THE CONVERSION OF WAVES IN A MAGNETOACTIVE PLASMA

V. Yu. Trakhtengerts

Some cases of decay interaction of waves in a homogeneous magnetoactive plasma, being of interest for ionospheric and magnetospheric investigations have been considered. In particular, the scattering and conversion of ULF radio waves are investigated in detail. A sharp rise of the conversion coefficient of longitudinal waves into electromagnetic waves near the ion gyro-frequency is discovered. The interaction between ordinary and extra-ordinary waves scattered on plasma density fluctuations has been considered.

УДК 621.378.32

ВЫХОД И ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОЗАРЯДНЫХ ИОНОВ, ОБРАЗУЮЩИХСЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СФОКУСИРОВАННОГО ЛУЧА ОКГ НА ВОЛЬФРАМ

Ю. А. Быковский, Н. Н. Дегтяренко, В. Ф. Елесин,
Ю. П. Козырев, С. М. Сильнов

Исследовались продукты взаимодействия луча ОКГ с вольфрамом. Экспериментальная установка представляла собой сочетание оптического квантового генератора с анализатором времени пролета и масс-спектрометром. Измерено распределение ионов различной зарядности по энергиям. Зарегистрированы ионы с 14-кратной ионизацией. Отмечается роль процессов ускорения ионов в плазменном факеле. Приводится теоретическая оценка кратности ионизации.

1. Воздействие сфокусированного лазерного луча ОКГ на твердую мишень приводит к образованию плазмы, которая может содержать большое количество многозарядных ионов. Так, в работах Басова с сотрудниками [1, 2] сделан вывод о наличии ионов Cd XVI на основании анализа оптических спектров плазмы.

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению степени ионизации плазмы при помощи анализатора, разделяющего частицы по времени пролета анализатора и масс-спектрометра, позволяющего получить информацию о количестве ионов с тем или иным зарядом, об их энергетическом распределении, о механизме разлета и ускорения. В частности, было показано наличие ионов вольфрама с зарядом 14, в количестве $\sim 10^5$ при помощи ОКГ мощностью 400 Мвт.

2. Экспериментальная установка представляла собой сочетание мощного ОКГ (генератора плазмы) с «время-пролетным» анализатором и масс-спектрометром (анализаторами плазмы) и позволяла исследовать ионную компоненту плазмы не только по массовому составу, но и по количественным и энергетическим характеристикам. Отличительной особенностью установки являлось значительное пролетное расстояние (450 см) и, соответственно, высокая разрешающая способность, благодаря которой можно было изучать практически любые элементы периодической системы Менделеева.

Мощность используемого в установке ОКГ составляла ~ 50 Мвт при энергии 0,8 Дж. Для повышения мощности ОКГ был применен специально разработанный усилитель бегущей волны на кристалле рубина длиной $l = 270$ мм и диаметром $D = 16$ мм. Торцы рубинового стержня были снабжены лейко-сапфировыми наконечниками, срезанными под углом Брюстера, что, как известно, уменьшает потери на отражение и поглощение на торцах стержня. При энергии накачки усилителя 104 Дж была получена мощность импульса излучения 400 Мвт.

3. На рис. 1 изображено распределение ионов различной кратности по энергиям. Всего представлено 14 кривых для ионов с зарядом от 1

до 14. С увеличением заряда ионов спектральные кривые сдвигаются в сторону больших энергий, вплоть до 20 кэВ, как видно из рис. 1.

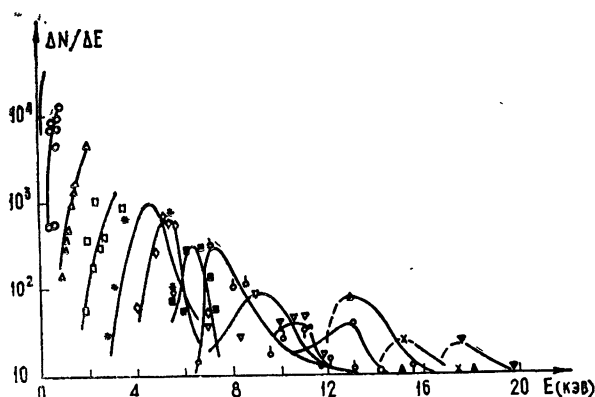


Рис. 1.

Энергия ионов, измеренная на опыте, весьма велика и не соответствует температуре плазменного факела, что связано с процессами ускорения ионов [3]. На основании кривых энергетических распределений

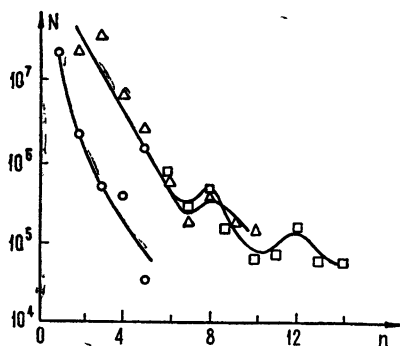


Рис. 2. ○○○— 10^9 $вт \cdot см^{-2}$;
 △△△— $5 \cdot 10^{11}$ $вт \cdot см^{-2}$;
 □□□— 10^{12} $вт \cdot см^{-2}$;

можно построить зависимость относительного количества ионов каждой кратности при различных интенсивностях (рис. 2). По числу ионов, достигающих детектор (10^7 — 10^8 частиц), можно оценить абсолютное количество ионов разного заряда. Количество ионов вольфрама с зарядом 14 оказалось 10^5 при плотности потока $2 \cdot 10^{12}$ $вт \cdot см^{-2}$.

4. Проведем теоретическую оценку кратности ионизации плазмы. Поскольку плотность возникающей плазмы велика, то времена релаксации плазмы малы по сравнению с длительностью импульса и, следовательно, плазму можно характеризовать эффективной температурой. Как показано в [4], для такой лазерной плазмы возможно применение формулы Саха при оценке степени ионизации. При этом для данной пары значений температуры и плотности распределение ионов по зарядам имеет вид узкого максимума [5]. Экспериментальная зависимость представляет достаточно плавную кривую (рис. 1). Это связано, по-видимому, с наличием областей различных значений температур и плотностей, а также с рекомбинацией ионов за время пролета от мишени до анализатора.

Вместе с тем, максимальную кратность ионизации вольфрама, полученную в эксперименте, можно оценить по формуле Саха, исходя из значений температуры и плотности, вычисляемых при заданной интенсивности излучения лазера согласно теории [6]. При этом для удельной энергии [5] использовалось выражение

$$\varepsilon = \frac{3}{2} N(1 + Z) kT + N \sum_{i=1}^z I_i,$$

где I_i — потенциал ионизации i -иона, Z — кратность ионизации, соответствующая данной температуре и плотности плазмы. Расчет производился по методике, предложенной Райзером [5]. Потенциалы ионизации вольфрама оценивались с помощью аппроксимационной формулы [7]. Полученные значения для максимальной кратности ионизации вольфрама в зависимости от параметров падающего излучения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Мощность (Мвт)	75	160	400
Диаметр фокального пятна (см)	0,16	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$
$Z_{\text{макс}}$ (теор)	6	14	17
$Z_{\text{макс}}$ (эксп)	5	10	14

Расчет был проведен и для ряда других элементов (Co, Ni, Mo, Sn). В частности, для Co при мощности 1 Гвт оказалось $Z_{\text{макс}} \sim 20$, что согласуется в результате [8].

Некоторое различие в экспериментальном и теоретическом значениях кратности ионизации вольфрама вызвано неопределенностью в величине потенциалов ионизации вольфрама, отличием уравнения состояния плазмы с многократно ионизованными ионами от уравнения состояния, использованного в [6], и трудностями в экспериментальном определении фактической величины плотности потока падающего излучения.

Авторы благодарят Н. Г. Басова, П. Г. Крюкова и С. Д. Захарова за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Н. Г. Басов, В. А. Бойко, Ю. П. Войнов, Э. Я. Кононов, С. Л. Мандельштам, Г. В. Склизков, Письма в ЖЭТФ, 5, вып. 6, 177 (1967)
- 2 Н. Г. Басов, В. А. Бойко, Ю. П. Войнов, Э. Я. Кононов, С. Л. Мандельштам, Г. В. Склизков, Письма в ЖЭТФ, 5, вып. 9, 884 (1967).
- 3 Ю. А. Быковский, Н. Н. Дегтяренко, В. И. Дымович, В. Ф. Елесин, Ю. П. Козырев, Б. И. Николаев, С. В. Рыжих, С. М. Сильнов, ЖТФ, 39, вып. 9, 1694 (1969)
- 4 Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, ЖЭТФ, 46, вып. 1, 171 (1964).
- 5 Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, изд. Наука, М., 1966, стр. 174
- 6 Н. Г. Басов, В. А. Грибков, О. Н. Крохин, Г. В. Склизков, ЖЭТФ, 54, вып. 4, 1073 (1968).
- 7 И. В. Немцов, ЖФХ, 29, вып. 6, 1031 (1955)
- 8 В. С. Fawcett, A. N. Gabriel, B. A. Saunders. Bull. Amer. Phys. Society, 12, 714 (1967).

PRODUCTION AND ENERGY DISTRIBUTION OF MULTI-CHARGED IONS
AT THE ACTION OF A LASER FOCUSED BEAM ON VOLFRAM

*Yu. A. Bykovskii, N. N. Degtyarenko, V. F. Elesin,
Yu. P. Kozyrev, S. M. Sil'nov*

The products of interaction between the laser beam and volfram are investigated. The experimental equipment represented itself a combination of the laser (plasma generator) with the transit time analyzer and the mass-spectrometer (plasma analyzers). The energy distribution of different-charge ions is measured. The ions with 14-fold ionization are registered. The role of ion acceleration processes in a plasma torch is pointed out. A theoretical estimation of multiple ionization is presented.

УДК 621.378

О СОЗДАНИИ СВЕРХИЗЛУЧАЮЩИХ СОСТОЯНИЙ ПОСРЕДСТВОМ ДВУХФОТОННОГО РЕЗОНАНСА

Э. А. Манькин

Рассмотрены некоторые особенности сверхизлучающих состояний, создаваемых воздействием двух световых полей, частоты которых удовлетворяют условию двухфотонного резонанса. Приведены результаты численных расчетов для паров цезия с использованием ОКГ на рубине. Оценена интенсивность излучения, сопровождающего распад сверхизлучающего состояния. Отмечены особенности двухфотонного резонанса в эффектах типа фотонного эха.

Действие импульса резонансного излучения на среду, состоящую из двухуровневых систем, приводит к возникновению так называемого сверхизлучающего состояния [1], спонтанный распад которого происходит с очень большой скоростью, пропорциональной квадрату числа атомов. Динамика сверхизлучающего состояния по существу определяет также эффект фотонного эха [2]. В работе [3] было показано, что динамика квантовой системы при многоквантовом резонансе во многом аналогична динамике соответствующего одноквантового резонанса. В данной статье рассмотрены некоторые особенности сверхизлучающих состояний, создаваемых посредством двухфотонного резонанса.

Пусть система атомов подвергается либо воздействию светового поля с частотой ω , удовлетворяющей условию однофотонного резонанса ($\omega \simeq \omega_0$, где $\hbar\omega_0 = (\epsilon_\mu - \epsilon_\nu)$ — резонансная частота перехода в атоме), либо воздействию двух световых полей, частоты которых удовлетворяют условию двухфотонного резонанса $\omega_1 \pm \omega_2 \simeq \omega_0$. Тогда, как это следует из [3], в обоих случаях квантовая система оказывается в одном и том же конечном состоянии, если выполняются следующие соотношения между частотами, волновыми векторами и амплитудами соответствующих световых волн:

$$\omega = \omega_1 \pm \omega_2; \quad (1)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2; \quad (2)$$

$$d_{\mu\nu} E = -\frac{1}{2\hbar} \sum_n \left\{ \frac{(d_{\mu n} E_1)(d_{n\nu} E_2)}{\omega_1 - \omega_n} + \frac{(d_{\mu n} E_2)(d_{n\nu} E_1)}{\omega_1 - \omega_n} \right\}, \quad (3)$$

причем начальные фазы связаны соотношением $\varphi = \varphi_1 \pm \varphi_2$. Здесь $d_{\mu\nu}$ — матричный элемент дипольного перехода, а $\hbar\omega_n = \epsilon_n - \epsilon_\nu$, где ϵ_n — энергетический спектр атома. Суммирование в (3) идет по всем промежуточным уровням, кроме резонансных ϵ_μ и ϵ_ν .

После действия световых полей в условиях двухфотонного резонанса система атомов окажется в сверхизлучающем состоянии, которое будет распадаться, излучая когерентный импульс света с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. Таким образом, появляется возможность наблюдать сверхизлучающий распад непосредственно после воз-

буждающего импульса, так как распад происходит на другой частоте, чем частоты внешних волн. К тому же, изменение угла между k_1 и k_2 позволяет производить регулировку направления излучения. Заметим, что при однофотонном резонансе невозможно отделить от падающего импульса сверхизлучающий распад, поскольку последний практически мгновенно следует за первым на той же частоте и в том же направлении.

Приведем численные оценки для газа цезия, в котором наблюдается двухфотонное поглощение [4]. Удвоенная частота ОКГ на рубине оказывается резонансной переходу между состояниями $6S_{1/2}$ и $9D_{3/2}$, так что в этом случае $\omega_1 = \omega_2$, $E_1 = E_2$ и $k_1 = k_2$. Расчет суммы, входящей в выражение (3), нетрудно выполнить, используя силы осцилляторов атома цезия [5]. Оказалось, что наиболее важными промежуточными состояниями для цезия являются $6P_{1/2}$ и $6P_{3/2}$, которые только и учитывались (все другие состояния дают на 2-3 порядка меньший вклад в сумму (3)). В результате для линейно-поляризованной волны получим

$$\Omega_2 = \frac{1}{\hbar} \left| \sum_n \frac{d_{\mu n} d_{n\nu}}{\omega_1 - \omega_n} \right| E_1^2 = 22,85 \frac{e^2}{\hbar a} \left(\frac{E_1}{E_a} \right)^2, \quad (4)$$

где $E_a = e/a^2$, $a = \hbar^2/me^2$. Если поле E_1 достаточно велико, так что $\Omega_2 \ll \Delta$ — доплеровской ширины, то разбросом уровней можно пренебречь. Тогда для точного резонанса вероятность обнаружения атома в возбужденном состоянии меняется со временем по закону $\sin^2(\Omega_2 T)$, где T — длительность импульса [3]. В последнее время были получены сверхкороткие импульсы света большой мощности при комбинационном рассеянии [6], а также в ОКГ на неодиме [7] и в ОКГ на рубине [7, 8]. Полагая $E_1 \sim 5 \cdot 10^5$ в. см⁻¹, получим $\Omega_2 \sim 10^{10}$ сек⁻¹.

Оценку энергии когерентного излучения можно найти из следующих рассуждений. За время существования когерентного состояния в атомах $\tau \sim \Delta^{-1}$ энергия некогерентного излучения

$$\mathcal{E}_0 \simeq N \hbar \omega W \tau \sin^2(\Omega_2 T), \quad (5)$$

где N — число атомов, участвующих в процессе, W — вероятность спонтанного излучения при переходе между резонансными уровнями. Энергия когерентного излучения при этом определяется формулой

$$\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_0 N \frac{\lambda^2}{S}. \quad (6)$$

Действительно, указанное излучение должно быть квадратично по числу атомов и сосредоточено вдоль направления волнового вектора k в интервале углов λ^2/S , где S — сечение пучка, а λ — длина волны. Для сверхкоротких импульсов положим $\Omega_2 T \ll 1$, тогда из (5) и (6) получим

$$\mathcal{E} \simeq N^2 W \tau \frac{\lambda^2}{S} (\Omega_2 T)^2 = \hbar \omega (nl \lambda)^2 W \tau S (\Omega_2 T)^2, \quad (7)$$

где $N = nlS$, n — концентрация атомов, l — длина объема, занятого газом вдоль распространения света. Полагая $n \sim 10^{13}$, $l \sim 1$ см, $S \sim 1$ см², $W = 10^2$ (запрещенный в дипольном приближении переход), $\Delta = 10^{-6}$ ω, $T = 10^{-11}$ сек, $\lambda = 0,7 \cdot 10^{-4}$ см, получим $\mathcal{E}/\hbar \omega \simeq 10^{11+12}$, что представляет полное число квантов излучения за импульс.

Укажем на некоторые особенности фотонного эха, возбуждаемого при двухфотонном резонансе. Волновой вектор фотонного эха k связан с волновыми векторами двух последовательных импульсов k_a и k_b ,

соотношением $k = 2k_b - k_a$. Если один из импульсов есть комбинация двух волн, осуществляющих двухфотонный резонанс, то необходимо заменить k_a или k_b на $k_1 \pm k_2$. Подчеркнем, что это обстоятельство облегчает угловую регулировку фотонного эха, поскольку углы между k_1 и k_2 в принципе могут быть произвольными. Заметим, что для резонанса $\omega_1 + \omega_2 \simeq \omega_0$ выгодно второй импульс сделать на двухфотонном резонансе, тогда как для случая $\omega_1 - \omega_2 \simeq \omega_0$ — наоборот, первый. Последний случай может быть осуществлен с применением второй и третьей гармоник рубинового ОКГ.

Использование двухфотонного резонанса в нестационарных процессах типа «фотон-эхо» и сверхизлучающего распада позволит, по-видимому, изучать релаксационные процессы в таких системах, как газ, когда ширина доплеровской линии значительно превосходит естественную ширину или ширину, обусловленную столкновениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Dicke, Phys. Rev., 93, 99 (1954).
2. N. A. Kurnit, I. D. Abella, S. R. Hartmann, Phys. Rev. Lett., 19, 567 (1964).
3. Э. А. Маныкин, А. М. Афанасьев, ЖЭТФ, 52, 1246 (1967).
4. I. D. Abella, Phys. Rev. Lett., 9, 453 (1962).
5. P. M. Stone, Phys. Rev., 127, 1151 (1962).
6. M. Maier, W. Kaiser, J. A. Giordmaine, Phys. Rev. Lett., 17, 1275 (1966).
7. M. A. Duguay, S. L. Shapiro, P. M. Rentzepis, Phys. Rev. Lett., 19, 1014 (1967).
8. И. К. Красюк, П. П. Пашинин, А. М. Прохоров, Письма в ЖЭТФ, 7, 117 (1968).

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
29 апреля 1968 г.

ON „SUPER-RADIATING“ STATES CAUSED BY TWO-PHOTON RESONANCE

E. A. Manukin

Some peculiarities of super-radiating states produced by the action of two light fields the frequencies of which satisfy the condition of two-photon resonance are considered. The calculation data are given for cesium vapour using a ruby laser. The radiation intensity accompanying the decay of super-radiating state is estimated. The peculiarities of two-photon resonance in the photon echo effects are noted.

УДК 621.378 325

О ЕСТЕСТВЕННЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ ИНТЕНСИВНОСТИ И ЧАСТОТЫ ДВУХМОДОВОГО ЛАЗЕРА

Ю. И. Зайцев

Рассматриваются естественные флуктуации двухмодового лазера при феноменологическом описании его работы. Показано, что взаимодействие мод приводит к корреляции флуктуаций отдельных мод и особенностям в их спектрах. Результаты расчета иллюстрируются экспериментальными данными измерений флуктуаций интенсивности лазера на волне 0,63 мк.

Флуктуации излучения лазера в многомодовом режиме генерации имеют особенности по сравнению с одночастотным случаем, связанные с взаимодействием мод. Первое обсуждение этих вопросов и некоторые результаты исследований флуктуаций двух- и трехмодовых лазеров можно найти в работах [1-7]. Настоящее сообщение посвящено исследованию спектров флуктуаций интенсивности и частоты аксиальных типов колебаний лазера в непрерывном двухмодовом режиме. Анализ показывает, что в общем случае спектры и корреляция флуктуаций колебаний определяются как нелинейными, так и дисперсионными свойствами активной среды. В случае пренебрежения дисперсией полученные результаты близки к результатам работы [8], где рассматривались естественные флуктуации двухчастотного радиогенератора с сосредоточенными параметрами.

Результаты данного сообщения получены на основе феноменологического описания работы одномерной модели лазера; использовался метод, с помощью которого в работе [6] рассматривались флуктуации одномодового лазера.

Итак, полагаем, что в резонаторе устанавливаются колебания электрического поля, описываемого выражением

$$E(x, t) = \sum_{n=1}^2 R_n \cos \vartheta_n \sin K_n x,$$

где R_n — амплитуда пространственной гармоники поля $\sin K_n x$, ϑ_n — быстроменяющаяся временная фаза. Для решения задачи необходимо получить уравнения для малых относительных отклонений амплитуды m_n и частоты δ_n от стационарных значений R_{n0} и $\omega_{n0} = \dot{\vartheta}_{n0}$.

Естественные флуктуации происходят под действием случайных возмущений, обусловленных флуктуационным тепловым излучением в резонаторе и флуктуациями поляризации активной среды (спонтанным излучением рассматриваемого оптического перехода). Необходимые уравнения получаются путем линеаризации укороченных уравнений для R_n и ϑ_n . Применяв процедуру, описанную в [6], к нашему случаю, приходим к уравнениям первого приближения для $m_n = \sqrt{2} (R_n - R_{n0})/R_{n0}$ и $\delta_n = \omega_n - \omega_{n0}$ в виде

$$dm_n/dt = -p_{nn}^i m_n - p_{nk}^i m_k - q_{nn}^i \delta_n - q_{nk}^i \delta_k - f_n^i; \quad (1)$$

$$\delta_n = -p_{nn}^r m_n - p_{nk}^r m_k - q_{nn}^r \delta_n - q_{nk}^r \delta_k + f_n^s, \quad (2)$$

где

$$p_{nk}^i \simeq \frac{4\pi l}{L} \frac{R_k^2 \omega_n}{\tilde{\epsilon}_n^r} \left(\frac{\partial \tilde{x}_n^i}{\partial R_k^2} \right)_0, \quad p_{nk}^r = \frac{\sqrt{8}\pi l}{L} \frac{R_k^2 \omega_n}{\tilde{\epsilon}_n^r} \left(\frac{\partial \tilde{x}_n^r}{\partial R_k^2} \right)_0,$$

$$q_{nk}^i \simeq \frac{\sqrt{8}\pi l}{L} \frac{\omega_n}{\tilde{\epsilon}_n^r} \left(\frac{\partial \tilde{x}_n^i}{\partial \omega_k} \right)_0, \quad q_{nk}^r = \frac{2\pi l}{L} \frac{\omega_n}{(\tilde{\epsilon}_n^r)^{1/2}} \left(\frac{\partial \tilde{x}_n^r}{\partial \omega_k} \right)_0,$$

$$\tilde{\epsilon}_n^r - 1 = 4\pi l \tilde{x}_n^r / L$$

$$(n, k = 1, 2; n \neq k).$$

Параметры p_{nk} и q_{nk} определяются нелинейными и дисперсионными свойствами активной среды лазера; последние характеризуются электрической восприимчивостью $\tilde{x}_n = x_n^r - i x_n^i$ для n -го типа колебания. Значок \sim здесь и далее означает, что значения x_n усреднены по координате x с некоторым весом на длине среды l при размере резонатора L ; усреднение проводится при наличии колебаний в резонаторе, т. е. при учете насыщения активной среды. Естественно, величины \tilde{x}_n^r и \tilde{x}_n^i являются функциями амплитуд R_n и частот ω_n обоих мод одновременно. Введение \tilde{x}_n предполагает наличие алгебраической связи между поляризацией и полем мод. Такая связь позволяет рассматривать достаточно медленные флуктуации с частотами, не превышающими обратных времен релаксации среды. В то же время зависимость $\tilde{x}_n = \tilde{x}_n(R_n, R_k, \omega_n, \omega_k)$ отражает взаимосвязь типов колебаний за счет насыщения x_n мощностью обоих типов колебаний и учитывает дисперсию активной и реактивной составляющих \tilde{x}_n .

Слагаемые f_n^c и f_n^s в уравнениях (1) и (2) связаны со случайными силами, которые вводятся как сторонние силы для описания воздействия на генерирующие моды лазера теплового излучения в резонаторе и спонтанного излучения активной среды.

Для дальнейшего необходимо знать спектральную интенсивность этих величин, которая получена по методу, описанному в [6], и равна

$$\overline{(f_n^c)^2} = 2 \overline{(f_n^s)^2} \simeq \frac{(\Delta\omega_n)^2 \hbar \omega_n \alpha \tilde{\beta}_n x_n^i}{\pi P_n \tilde{x}_n^i}, \quad (3)$$

где P_n — мощность излучения, отдаваемая средой в n -ю моду; $\Delta\omega_n$ — ширина полосы резонатора на n -й моде (в нашем случае добротности обоих смежных мод положены одинаковыми); $\alpha = (n_2^0/g_2)/(n_2^0/g_2 - (n_1^0/g_1))$ — параметр, характеризующий «начальную» инверсию (т. е. при отсутствии колебаний); $\tilde{\beta}_n = \frac{2}{l} \int_0^l \beta_n \sin^2(K_n x) dx$

и $\beta_n = \varphi(\omega_n) n_2 / \varphi^0(\omega_n) n_2^0$, где n_2^0 — населенность верхнего уровня перехода

при отсутствии генерации и $\varphi(\omega)$ — форм-фактор линии. При малых мощностях P_n (меньших или порядка величины мощности насыщения) значения β близки к 1*. Можно предположить, что величины $f_1^c, f_2^c, f_1^s, f_2^s$ статистически независимы между собой.

Путем несложных вычислений, например, методом комплексных амплитуд, можно получить выражения для спектральных плотностей величин m_n и δ_n , $(\overline{m_n^2})_\Omega$ и $(\overline{\delta_n^2})_\Omega$. Ввиду громоздкости этих выражений поступим следующим образом**. Как показывают соответствующие расчеты для лазеров на гелиево-неоновой смеси (а также и эксперимент для одночастотного режима генерации), влияние дисперсии на флуктуации мало. Полагая поэтому $q_{nk}^i = q_{nk}^r = 0$, для $(\overline{m_n^2})_\Omega$ и $(\overline{\delta_n^2})_\Omega$ имеем следующие выражения:

$$(\overline{m_n^2})_\Omega = \frac{(p_{kk}^{i2} + \Omega^2) (\overline{f_n^c})_\Omega^2 + p_{nk}^{i2} (\overline{f_k^c})_\Omega^2}{[(p_{nn}^i p_{kk}^i - p_{nk}^i p_{kn}^i) - \Omega^2]^2 + (p_{nn}^i + p_{kk}^i)^2 \Omega^2}; \quad (4)$$

$$(\overline{\delta_n^2})_\Omega = (\overline{f_n^s})_\Omega^2 + p_{nn}^{r2} (\overline{m_n^2})_\Omega + p_{nk}^{r2} (\overline{m_k^2})_\Omega + 2p_{nr}^i p_{nk}^r \operatorname{Re} (\overline{m_{n\Omega} m_{k\Omega}^*}). \quad (5)$$

Заметим, что приведенные формулы (4) и (5), не учитывающие дисперсию активной среды, совпадают с точностью до обозначений с соответствующими выражениями, полученными в работе [8].

Как следует из (1) и (2), имеет место корреляция между амплитудными флуктуациями обеих мод, а также между амплитудными и частотными флуктуациями каждой из мод. В первую очередь, интересна корреляция флуктуаций интенсивности колебаний разных типов.

Введем нормированную взаимную спектральную плотность амплитудных флуктуаций $(\rho_{nk})_\Omega = m_{n\Omega} m_{k\Omega}^* / [(m_n^2)_\Omega (m_k^2)_\Omega]^{1/2}$, которую для краткости будем называть коэффициентом корреляции на частоте Ω . Выражение для $(\rho_{nk})_\Omega$, равно

$$(\rho_{nk})_\Omega = (-1) \frac{p_{kk}^i p_{kn}^i (\overline{f_n^c})_\Omega^2 + p_{nn}^i p_{nk}^i (\overline{f_k^c})_\Omega^2 + i\Omega [p_{kn}^i (\overline{f_n^c})_\Omega^2 - p_{nk}^i (\overline{f_k^c})_\Omega^2]}{\{[(p_{kk}^{i2} + \Omega^2) (\overline{f_n^c})_\Omega^2 + p_{nk}^{i2} (\overline{f_k^c})_\Omega^2] [(p_{nn}^{i2} + \Omega^2) (\overline{f_k^c})_\Omega^2 + p_{kn}^{i2} (\overline{f_n^c})_\Omega^2]\}^{1/2}}, \quad (6)$$

в общем случае комплексно. Это означает, что флуктуации в узком спектральном интервале происходят в среднем со сдвигом фаз; в частности, при $p_{kn}^i = p_{nk}^i$ и $(\overline{f_n^c})_\Omega^2 = (\overline{f_k^c})_\Omega^2$ этот сдвиг равен π .

Наиболее наглядно особенности флуктуаций проявляются в случае режима генерации, близкого к симметричной настройке мод по отношению к центру оптического перехода (режим при строго симметричной настройке может быть неустойчивым). В этом случае (реализуемом на опыте в He-Ne лазере с естественной смесью изотопов Ne) $P_n = P_k$, $p_{nn}^i = p_{kk}^i$, $p_{nk}^i = p_{kn}^i$, но $p_{nn}^i \neq p_{nk}^i$; в результате, согласно (4),

$$(\overline{m_n^2})_\Omega = (\overline{m_k^2})_\Omega \approx \frac{(\Delta\omega_n)^2 \hbar \omega_n \alpha \tilde{\beta} x_n^i \left\{ \frac{(p_{nn}^{i2} + p_{nk}^{i2}) + \Omega^2}{[(p_{nn}^i - p_{nk}^i)^2 + \Omega^2] [(p_{nn}^i + p_{nk}^i)^2 + \Omega^2]} \right\}}{\pi P_n \tilde{x}_n^i}. \quad (7)$$

* Заметим, однако, что при существенно больших значениях мощности, как показано в [9] для одночастотного случая, форм-фактор линии спонтанного излучения может значительно измениться. В двухмодовом режиме при аналогичном явлении также можно ожидать значений β , больших 1.

** При переходе от двухмодового режима генерации к одномодовому полученные выражения для $(\overline{m_n^2})_\Omega$ и $(\overline{\delta_n^2})_\Omega$ переходят в выражения (38) и (39) работы [7]. Отметим, что в выражении (39) имеется неточность: последний член $\sqrt{2}\Omega$ в квадратных скобках этой формулы должен отсутствовать.

Коэффициент корреляции становится действительным и имеет вид

$$(\rho_{nk})_{\Omega} = (-1) \frac{2p_{nn}^i p_{nk}^i}{(p_{nn}^{i2} + p_{nk}^{i2}) + \Omega^2} \quad (8)$$

Приведенные соотношения позволяют видеть специфику флуктуаций лазера в двухчастотном режиме генерации. Так, уровень и ширина спектра (последняя определяется значением Ω , где $(\overline{m_n^2})_{\Omega}$ уменьшается вдвое) флуктуаций интенсивности каждой из мод* являются функцией величины $p_{nn}^i - p_{nk}^i$, а значения $(\rho_{nk})_{\Omega}$ и скорость их спада в зависимости от частоты наблюдения — функцией суммы их квадратов. Задавая выражение для \tilde{x}_n^i в виде функции определяющих ее параметров $\tilde{x}_n^i = x_n^i (1 + \gamma_{nn} P_n + \gamma_{nk} P_k)^{-1/2}$ (см. [10, 11]), можно рассчитать величины p_{nn}^i и p_{nk}^i . Последние в значительной мере определяются параметрами нелинейности γ_{nn} и γ_{nk} . В общем случае неоднородно уширенной линии их значения зависят от настройки резонатора, что учитывает степень перекрытия «дырок» в кривой усиления. При почти симметричной настройке естественно положить $\gamma_{nn} = \gamma_{kk}$, $\gamma_{nk} = \gamma_{kn}$ и $\gamma_{nn} \approx \gamma_{nk}$; при этом $p_{nn}^i \approx p_{nk}^i$ и, как следует из (7) и (8), спектр флуктуаций каждой из двух мод должен резко увеличиваться (на несколько порядков величины) по сравнению со случаем одномодового режима; коэффициент же корреляции на низких частотах приближается к -1 .

В ряде случаев приходится иметь дело с флуктуациями интенсивности полного излучения лазера, характеризуемого величиной $\overline{M_{\Omega}^2}$ [5]; в рассматриваемом случае

$$\overline{M_{\Omega}^2} = 2(\overline{m_n^2})_{\Omega} [1 - |(\rho_{nk})_{\Omega}|] \quad (9)$$

Вследствие отрицательной корреляции флуктуаций и близости $|(\rho_{nk})_{\Omega}|$ к 1 величина флуктуаций интенсивности полного излучения, как следует из (9), значительно меньше уровня флуктуаций для отдельного типа колебаний.

Отмеченные закономерности хорошо согласуются с результатами наших измерений. На рис. 1 приведены полученные экспериментально спектры флуктуаций интенсивности одной аксиальной моды He-Ne лазера на $\lambda = 0,63$ мк в случаях генерации одной моды, двух мод с равными мощностями, а также спектр флуктуаций суммарной интенсивности; при этом полные мощности излучения в обоих режимах генерации были приблизительно одинаковыми. На рис. 2 представлена зависимость $(\rho_{nk})_{\Omega}$ от $\Omega/2\pi$ (параметры лазера были близки к описанному в [11]).

Из системы уравнений (1) и (2), нетрудно также получить выражение для $(\overline{\delta_n^2})_{\Omega}$. В частности, значение $(\overline{\delta_n^2})_{\Omega=0}$ при $\Omega = 0$, определяющее ширину спектральной линии отдельного типа колебаний, при симметричной настройке равно

$$\begin{aligned} (\overline{\delta_n^2})_{\Omega=0} &= (\overline{f_n^2})_{\Omega}^2 + (\overline{m_n^2})_{\Omega} [(p_{nn}^r - p_{nk}^r)^2 + 2p_{nn}^r p_{nk}^r (1 - |(\rho_{nk})_{\Omega}|)] = \\ &= \frac{(\Delta\omega_n)^2 \hbar \omega_n \alpha \tilde{x}_n^i}{2\pi P_n \tilde{x}_n^i} \left\{ 1 + \frac{2}{(p_{nn}^{i2} - p_{nk}^{i2})^2} [(p_{nn}^{i2} + p_{nk}^{i2})(p_{nn}^{r2} + p_{nk}^{r2}) - 4p_{nn}^i p_{nk}^i p_{nn}^r p_{nk}^r] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

* Коэффициент хаотической модуляции интенсивности $\overline{M_{\Omega}^2}$ (а не напряженности поля) излучения моды имеет спектральную плотность, равную $4(\overline{m_n^2})_{\Omega}$ [5].

Таким образом, при генерации мод с частотами, не совпадающими со средней частотой перехода, неизохронность лазера обуславливает

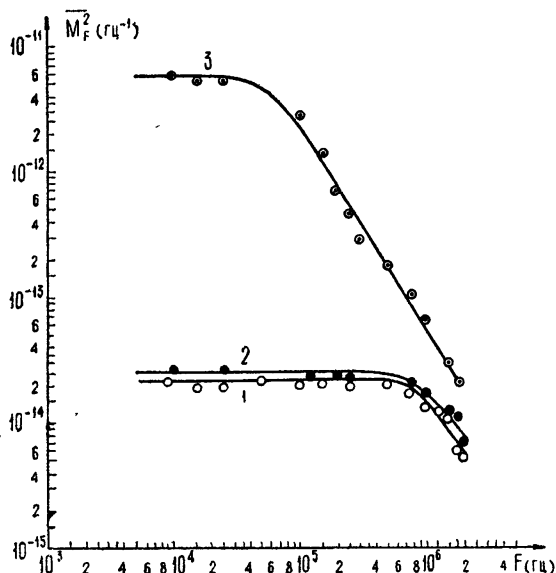
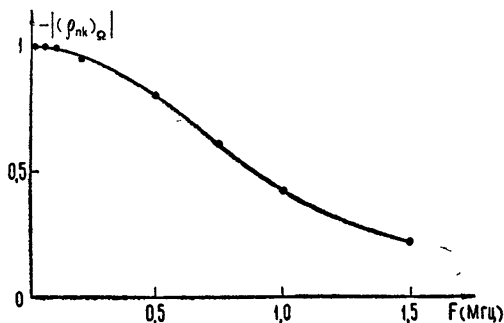


Рис. 1. Экспериментальные зависимости спектра флуктуаций интенсивности He-Ne лазера (с естественной смесью изотопов Ne):

- 1—при генерации одной моды в центре линии перехода;
- 2—при генерации двух мод; флуктуации суммарной интенсивности;
- 3—при генерации двух мод; флуктуации одной из мод при равных мощностях в обеих модах.

зависимость $(\overline{\delta_n^2})_\Omega$ от частоты наблюдения Ω и влияет на значение спектральной плотности при $\Omega = 0$, т. е. влияет и на ширину спектральной линии моды. Однако указанное влияние амплитудных флуктуаций мало, так как последние в обеих модах происходят в противофазе, неизохронность наименее всего проявляется при «симметричном» режиме работы лазера, когда сомножитель в фигурных скобках в выражении (10) близок к единице.

Рис. 2. Зависимость коэффициента корреляции $(\rho_{nk})_\Omega$ флуктуаций мод лазера от частоты наблюдения при равных мощностях обеих мод.



В заключение заметим, что учет дисперсии (необходимый в случае достаточно узких спектральных линий) не меняет качественных закономерностей во флуктуациях отдельных мод. Выражения для $(\overline{m_n^2})_\Omega$ и $(\rho_{nk})_\Omega$ имеют ту же структуру, но сами параметры в (7) и (8) должны быть заменены на комбинацию параметров ρ_{nn} , ρ_{nk} , q_{nn} и q_{nk} . С учетом дисперсии появляется и воздействие частотных флуктуаций на амплитудные. Анализ показывает также, что между частотными флуктуациями отдельных мод имеет место корреляция, обусловленная как неизохронностью, так и дисперсией линии перехода.

Качественно аналогичные явления можно ожидать и в случае генерации большего числа мод, однако теперь возможен режим генера-

ции с самосинхронизацией мод. Последнее может привести к новым особенностям флуктуаций излучения лазера [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Armstrong, A. W. Smith, *Phys. Rev.*, **140**, A155 (1965).
2. D. E. Mc Cumber, *Phys. Rev.*, **141**, 306 (1966).
3. A. W. Smith, J. A. Armstrong, *IBM J. Res. and Developm.*, **10**, 225 (1966).
4. H. Haken, *Zeit. für Physik*, **182**, 346 (1965); *Dynamical processes in Solid State Optics*, part I, p. 168, N. Y. Benjamin, 1967.
5. Ю. И. Зайцев, *ЖЭТФ*, **50**, 3, 525 (1966).
6. И. Л. Берштейн, И. А. Андропова, Ю. И. Зайцев, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **10**, № 1, 59 (1967).
7. И. Л. Берштейн, Ю. И. Зайцев, Доклад на конференции УРСИ по лазерным измерениям, Варшава, 1968; I. L. Bershtein, Yu. I. Zaitsev, *Electron Technology*, P. A. Sci., Warsaw, **2**, № 2 (1969).
8. А. Н. Малахов, А. А. Мальцев, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **12**, № 5, 732 (1969).
9. С. Г. Раутиан, *Тр. ФИАН*, **43**, 3 (1968).
10. W. E. Lamb, Jr., *Phys. Rev.*, **134**, A 1429 (1964).
11. Ю. И. Зайцев, *Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика*, **12**, № 1, 60 (1969).
12. H. Haken, H. Sauegman, Ch. Schmid, H. D. Vollmer, *Zeit. für Physik*, **206**, 369 (1967).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 июля 1969 г.

NATURAL TWO-MODE LASER INTENSITY AND FREQUENCY FLUCTUATIONS

Yu. I. Zaitsev

The natural two-mode laser fluctuations are considered its operation being described phenomenologically. The mode interaction is shown to lead to correlation of separate mode fluctuations and to peculiarities in their spectra. The calculations are illustrated by experimental data of measuring the laser intensity fluctuations at 0.63 μ wavelength.

УДК 621.378.325

О ЕСТЕСТВЕННЫХ ФЛУКТУАЦИЯХ ИНТЕНСИВНОСТИ He-Ne ЛАЗЕРА НА ВОЛНЕ 1,15 мк

В. М. Геликонов, Ю. И. Зайцев

Экспериментально изучены закономерности в спектрах естественных флуктуаций интенсивности излучения лазера на длине волны 1,15 мк при изменении мощности генерации вплоть до утроенного значения мощности насыщения активной среды. Результаты эксперимента находятся в соответствии с выводами теории.

1. Результаты экспериментальных исследований естественных флуктуаций интенсивности He-Ne лазера на волнах 0,63 и 3,39 мк изложены в работах [1-3]; сопоставление полученных данных с развитой в [4] теорией дало удовлетворительное согласие. В настоящем сообщении приводятся результаты экспериментального изучения естественных флуктуаций интенсивности одномодового He-Ne лазера на волне 1,15 мк; на этой волне ранее изучались [5] лишь флуктуации, обусловленные техническими причинами (шумами газоразрядной плазмы). Отметим, что описываемые исследования были проведены в большом интервале мощностей и, в частности, при большем превышении порога генерации, чем это имело место в исследованиях на волнах 0,63 и 3,39 мк. Отметим, что в отличие от [1-3] данные опыты проводились при генерации лазера как на аксиальном типе колебаний TEM_{00q}, так и на типе TEM_{10q}.

2. Согласно [2], спектральная плотность $\overline{M_F^2}$ коэффициента хаотической модуляции интенсивности на частоте F в центре перехода равна

$$\overline{M_F^2} = \overline{M_0^2} / \left[1 + \left(\frac{2\pi F}{\rho} \right)^2 \right] = \frac{32\pi^2 (\Delta\nu)^2 h\nu \tilde{\beta}\alpha}{P\rho^2} \times \frac{x_2^0}{x_2} / \left[1 + \left(\frac{2\pi F}{\rho} \right)^2 \right], \tag{1}$$

где $h\nu$ — энергия фотона, $\tilde{\beta}\alpha$ — параметр порядка 1,5—2, P — полная мощность, отдаваемая активной средой, $\Delta\nu$ — полоса резонатора, ρ — прочность предельного цикла, описывающего процессы в системе, x_2^0/x_2 — отношение мнимых составляющих диэлектрической восприимчивости среды при отсутствии колебаний и при их наличии.

Из (1) следует, что при данном значении P на уровень флуктуаций существенно влияет величина ρ , которая зависит от $\tilde{\partial}x_2/\partial P$. Как и в отмеченных работах [1, 2], примем для x_2 аппроксимацию

$$\tilde{x}_2 = x_2^0 / \sqrt{1 + \gamma P} = A \exp[-x^2] / \sqrt{1 + \gamma P}, \tag{2}$$

где $\gamma = \gamma(x)$ — параметр нелинейности, x — относительная отстройка от центра линии перехода, A — значение x_2^0 при $x=0$. Значения A и γ легко

определяются из опыта (см., например, [2]). Пользуясь (2), можно получить [2,3] при $x = 0$

$$p/2\pi = \frac{\Delta\nu}{2} \frac{\gamma P}{1 + \gamma P} = \frac{2\pi\nu A l}{L} \frac{\gamma P}{(1 + \gamma P)^{3/2}}, \quad (3)$$

где l и L — соответственно длина разрядного промежутка и длина резонатора лазера.

Как следует из (3), при $\gamma P \ll 1$ величина $p \sim P$, и при этом приближенно $M_0^2 \sim P^{-3}$, что и было получено экспериментально в работах [1–3]. Однако при достаточном превышении над порогом генерации ($\gamma P \gtrsim 1$) такая зависимость не имеет места. Полагая, что изменение P происходит из-за изменения $\Delta\nu$ (т. е. A и γ — константы), легко получить из (3), что максимум p наблюдается при $\gamma P = 2$; при этом $p/2\pi = \Delta\nu/3$. При достаточно больших значениях $\gamma P \gg 1$ приближенно $M_0^2 \sim P^{-1/2}$.

3. Экспериментальная установка и методика измерения $\overline{M_F^2}$ были такими же, как и в работе [2]. Разрядная трубка с брестеровскими окнами при давлении около 3 тор (соотношение He—Ne—1:5) диаметром $\approx 1,5$ мм и длиной разряда 15 см питалась постоянным током 3,5 ма. Длина резонатора ≈ 250 мм. Одно из зеркал было плоским, второе — сферическим ($R=2,5$ м). Определенные на опыте величины A и γ имели значения соответственно $(1,7 \div 1,8) \cdot 10^{-8}$ и примерно 6 мвт $^{-1}$. Небольшой юстировкой зеркал возможно было переходить с колебаний ТЕМ $_{00q}$ на ТЕМ $_{10q}$ колебания, а также изменять мощность генерации (за счет изменения величины $\Delta\nu$). Спектр излучения контролировался сканируемым резонатором бегущей волны, а структура моды — при помощи электронно-оптического преобразователя. Эксперимент проводился в основном при $x = 0$, т. е. в центре перехода.

Мощность генерации P определялась по отношению $P/P_T = \Delta\nu/\Delta\nu_T$, где P_T и $\Delta\nu_T$ — соответственно мощность на выходе лазера и часть полосы резонатора, определяемая лишь величиной коэффициента прозрачности зеркала [2]. Измерение $\Delta\nu$ проводилось лишь для моды ТЕМ $_{00q}$; $\Delta\nu$ изменялась в пределах от 34 до 15 Мгц, что позволяло изменять P от 1 до 500 мквт ($P_T/P \approx 0,15 \div 0,35$). Для моды ТЕМ $_{10q}$ изменение P_T было от 0,4 до 10 мквт. В качестве фотоприемника использовался германиевый фотодиод, имеющий чувствительность на волне 1,15 мк около 0,8 мка · мквт $^{-1}$.

Методы определения значений p указаны в [2]. В нашем случае, при $\gamma P \gtrsim 1$, наиболее пригодным оказался метод модуляции: изменение тока разряда I с малой частотой (много меньшей $p/2\pi$) при глубине модуляции $m_I \ll 1$ вызывает модуляцию интенсивности лазерного излучения с коэффициентом M . Несложный расчет показывает, что величина p может быть определена из выражения

$$p = \frac{2\pi\Delta\nu I dG/dI}{G \ln G} \frac{m_I}{M} = 2\pi \Delta\nu a \frac{m_I}{M}, \quad (4)$$

где G — усиление по мощности на один проход активной среды; по полученным данным $a \approx 0,43^*$. Определенные таким способом значения p

* Отметим, что в формуле для p , приведенной в [3], в знаменателе опущен сомножитель G .

удовлетворительно согласуются с результатами флуктуационных измерений (по спаду $\overline{M_F^2}$ в зависимости от F).

4. Закономерности поведения $p/2\pi$ и $\overline{M_0^2}$ с ростом P изучались в широком диапазоне мощностей для TEM_{00q} моды при $x = 0$. На рис. 1 точками отмечены значения $p/2\pi$, определенные модуляционным методом; сплошная кривая — теоретическая зависимость (3). Из рисунка следует удовлетворительное согласие хода изменения p с отмеченным выше законом. На том же рисунке кружочками показаны найденные экспериментально значения $\overline{M_0^2}\sqrt{P}$. Полученный характер спада величины $\overline{M_0^2}$ с ростом P удовлетворительно согласуется с закономерностью, следующей из теории. При P в пределах от 1 до 2 мквт $\overline{M_0^2}P^3$ примерно постоянно, но при больших значениях P (при $P \approx 500$ мквт $\gamma P = 3$) имеется тенденция к постоянству

$$\overline{M_0^2}\sqrt{P} = 32 h\nu \tilde{\beta} \alpha V \tilde{\gamma} \approx 6 \cdot 10^{-16} \text{ вт}^{1/2} \cdot \text{гц}^{-1}.$$

Как уже отмечалось, для моды TEM_{10q} приводились измерения спектра флуктуаций интенсивности лишь при малых превышениях порога генерации. Для сравнения флуктуаций интенсивности разных мод на рис. 2 приведены полученные из опытов значения $p/2\pi$ и $\overline{M_0^2}$ в зависимости от P_T ; для моды TEM_{00q} они отмечены кружочками, для моды TEM_{10q} — точками. В пределах точности эксперимента данные для обеих мод практически совпадают.

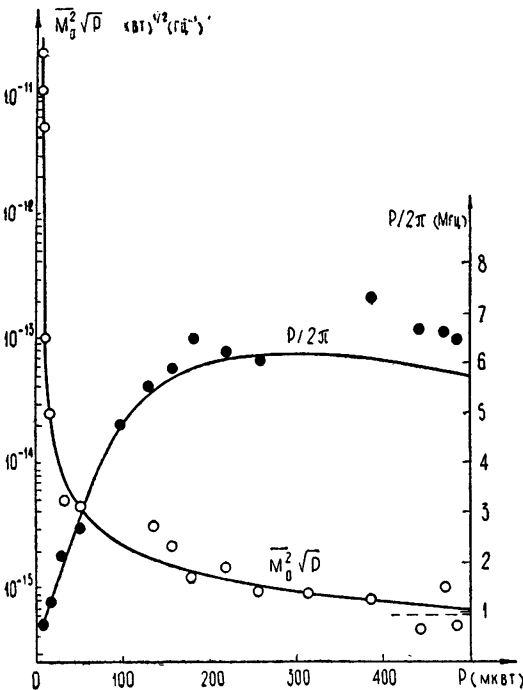


Рис. 1.

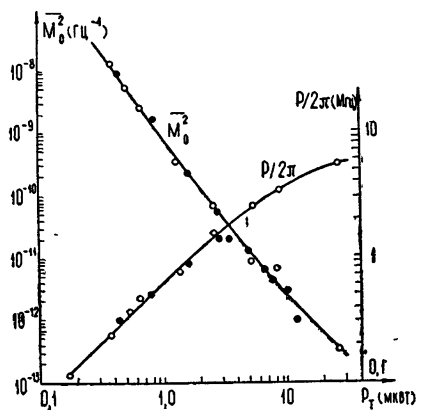


Рис. 2.

Кроме описанных выше опытов при настройке на центр перехода ($x=0$) исследовались флуктуации и определялись параметры p и γ при расстройках от центра перехода ± 300 Мгц для моды TEM_{00q} . Как и для волн 0,63 и 3,39 мк [2,3], параметры p и γ при $x \neq 0$ несколько меньше

(до 40%) их значений, соответствующих $x = 0$ при одинаковых мощностях генерации; величина $\overline{M_0^2}$ имеет тенденцию увеличиваться с ростом x .

В заключение приведем график $\overline{M_F^2}$ как функции F (рис. 3) для He-Ne лазера на волнах 0,63 мк (кривая 1), 1,15 мк (кривая 2) и 3,39 мк (кривая 3) при мощности P соответственно 15, 10, 10 мвт. Данные для волн 0,63 и 3,39 мк взяты из работы [6]. Этот рисунок показывает, что спектры флуктуаций интенсивности одночастотного лазера на $\lambda = 1,15, 0,63$ и 3,39 мк по характеру аналогичны. В то же время протяженность спектров и величина $\overline{M_0^2}$ существенно отличаются, что объясняется в основном различием значений γ для этих волн.

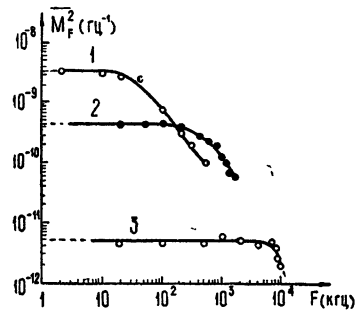


Рис. 3.

5. Приведенные выше экспериментальные результаты удовлетворительно согласуются с теорией естественных флуктуаций, представленных в [4]. Опыты производились в широком диапазоне мощностей от $\gamma P \ll 1$ до $\gamma P \approx 3$, что позволило проследить влияние характера насыщения активной среды на закономерности поведения ρ и $\overline{M_0^2}$ с ростом P для двух крайних предельных случаев. При $\gamma P \ll 1$ $\rho \sim P$ и, соответственно, $\overline{M_0^2} \sim P^{-3}$. При $\gamma P > 1$ ρ слабо зависит от P и уменьшение $\overline{M_0^2}$ происходит пропорционально $\sim P^{-1/2}$. Сопоставление приведенных данных с результатами работ [1-3] подтверждает, что при одинаковых мощностях генерации характер спектров флуктуаций в основном определяется нелинейными свойствами рассматриваемых переходов. Отметим также, что сравнение спектров флуктуаций интенсивности при генерации лазером аксиального и неаксиального типов колебаний не показало какого-либо заметного влияния пространственной структуры поля на характер флуктуаций.

Авторы признательны И. Л. Берштейну за критические замечания при обсуждении текста рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Freed, Н. А. Haus, Phys. Rev., 141, 287 (1966).
2. Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 1, 60 (1969).
3. И. А. Андропова, ЖЭТФ, 56, 417 (1969).
4. И. Л. Берштейн, И. А. Андропова, Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 1, 59 (1967).
5. Р. Т. Volwijn, Phys. Lett., 13, № 4, 311 (1964).
6. И. А. Андропова, Ю. И. Зайцев, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 1, 149 (1968).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
22 июля 1969 г.

NATURAL He-Ne LASER INTENSITY FLUCTUATIONS AT A WAVELENGTH
OF 1.15 μ

V. M. Gelikonov, Yu. I. Zaitsev

The regularities are experimentally studied in the spectra of the natural intensity fluctuations of 1.15 μ laser radiation when the generation power varies up to the tripple value of the saturation power of the active medium. The experimental results agree with theoretical conclusions.

УДК 535.1

ТЕОРИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ САМОФОКУСИРОВКИ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ*

С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов

Развивается теория волновых пучков в периодических системах тонких самофокусирующих элементов. В безабберационном приближении найдено стационарное (повторяющееся) решение для случая «керровских» и тепловых линз. Показано, что в отличие от линейных линзовых волноводов устойчивыми являются только доконфокальные системы. С помощью численных методов исследован вопрос о канализации световых пучков с учетом аббераций нелинейных линз

Хорошо известен эффект внешней самофокусировки волновых пучков одиночными плоскопараллельными слоями нелинейного диэлектрика [1, 2]. Суть его состоит в том, что под действием интенсивного поля пучка такие слои приобретают линзовые свойства. По-видимому, впервые этот эффект был зафиксирован в эксперименте по снижению порога вынужденного комбинационного рассеяния в кювете с самофокусирующей жидкостью, когда перед ней стояла кювета с несофокусирующей жидкостью [3]. Изучалась также внешняя тепловая самофокусировка в жидкостях и стеклах [4, 5].

В данной работе развивается теория волновых пучков в периодических системах тонких самофокусирующих элементов. Полученные результаты применимы к теории открытых резонаторов с нелинейными элементами (просветляющиеся затворы на основе сильно самофокусирующихся жидкостей, тепловые линзы), а также представляют интерес с точки зрения изучения возможностей применения самофокусирующих элементов для канализации световых пучков.

Рассмотрим прохождение гауссовых пучков через периодически расположенные тонкие плоскопараллельные пластинки нелинейного диэлектрика (рис. 1). Предварительные сведения о свойствах такой системы можно получить в безабберационном приближении, заменяя пластинки линзами с фокусным расстоянием $FNL(a^2, P)$, зависящим от ширины a и мощности пучка P . Для нелинейности, обусловленной керр-эффектом (в приближении геометрической оптики),

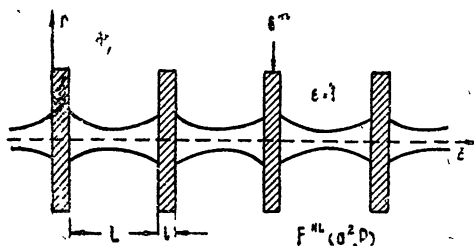


Рис. 1. Оптический волновод с нелинейными корректорами.

$$FNL = \frac{n_0 a^4 P_{кр}}{lP} \quad (1)$$

* Результаты работы были доложены на Вавиловской конференции по нелинейной оптике (г. Новосибирск, июль 1969 г.) и на конференции по нелинейной оптике в г. Белфасте (Северная Ирландия, сентябрь 1969 г.).

Здесь l — толщина пластинки, n_0 — ее линейный коэффициент преломления, $P_{кр}$ — критическая мощность самофокусировки. Все пространственные размеры в (1) и ниже определены в единицах k_0^{-1} . Для тепловой линзы (в том же приближении)

$$F^{NL} = \frac{a^2}{\beta l}, \quad (1a)$$

где $\beta = \frac{n'_T \alpha}{\pi \chi_T}$, α — коэффициент линейного поглощения, χ_T — коэффициент теплопроводности.

Ширина a_0 стационарного (повторяющегося) пучка определяется из условия

$$a_0^2 = \frac{L}{(1 - g^2)^{1/2}}, \quad (2)$$

где L — период системы, $g = 1 - L/2F^{NL}$ — параметр фокусировки, применяющийся в теории лучевых волноводов [6]. Из (2) имеем

$$a_0^2 = \frac{L}{2} \frac{P/P_{кр}}{\sqrt{n_0 \gamma (P/P_{кр} - n_0 \gamma)}} \quad (\gamma = L/l) \quad (3)$$

для керровских линз и

$$a_0^2 = \frac{L}{2} \left(\frac{P}{\bar{P}} + \frac{\bar{P}}{P} \right) \quad \left(\bar{P} = \frac{2}{\beta l} \right) \quad (3a)$$

— для тепловых.

Стационарное решение для керровских линз существует в области

$$P \geq P_{пор} = P_{кр} \gamma n_0, \quad (4)$$

а для тепловых — при $\bar{P} > 0$. Минимум ширины пучка a_0 , соответствующий конфокальному волноводу ($F^{NL} = L/2$), достигается при $P = 2P_{пор}$ в первом и при $P = \bar{P}$ — во втором случае. Всей области существования стационарного решения соответствует изменение F^{NL} в пределах

$$\frac{L}{4} < F^{NL} < \infty. \quad (5)$$

В линейных линзовых волноводах область устойчивости стационарного пучка по отношению к возмущениям его параметров совпадает с областью (5) существования самого стационарного решения. Рассмотрение малых отклонений параметров пучка от стационарного в нелинейных волноводах приводит к следующему условию устойчивости стационарного режима:

$$-g^2 < 2g(1-g) \left(\frac{1-g}{1+g} \right)^{1/2} F_a'^{NL}(a^2, P) < 1-g^2, \quad (6)$$

где g определяется из уравнения

$$F^{NL}(L/(1-g^2)^{1/2}, P) = \frac{L}{2(1-g)}. \quad (7)$$

Из (6) видно, что при $F_a'^{NL}(a^2, P) > 0$ точка $g = 0$, соответствующая конфокальной системе, лежит на границе области устойчивости

стационарного пучка. В применении к керровским и тепловым линзам условие (6) переходит в

$$\frac{L}{2} < F^{NL} < \infty, \quad (8)$$

что соответствует лишь доконфокальным (считая от $F^{NL} = \infty$) системам. Законфокальные системы неустойчивы. Таким образом, по нелинейному волноводу могут быть переданы мощности, лежащие в пределах

$$P_{\text{пор}} < P < 2P_{\text{пор}} = P_{\text{конф}} \quad (9)$$

для керровских линз и

$$0 < P < \bar{P} = P_{\text{конф}}$$

— для тепловых.

Произведем оценку граничных мощностей. Например, для кювет с сероуглеродом ($P_{\text{кр}} = 10 \text{ квт}$) толщиной 1 мм, расположенных на расстоянии 100 см друг от друга, $P_{\text{пор}} = 16,7 \text{ Мвт}$, $P_{\text{конф}} = 33,4 \text{ Мвт}$. Для волновода из тепловых линз с параметрами $L = 100 \text{ см}$, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, $l = 1 \text{ см}$, $n_T' = 2 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}$, $\alpha = 10^{-2} \text{ см}^{-1}$, $\chi_T = 10^{-2} \text{ вт} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{град}^{-1}$, $P_{\text{конф}} = 2,5 \text{ вт}$.

Интересен вопрос о возможности канализации волновых пучков с учетом aberrаций нелинейных линз, а также о захвате нелинейным волноводом пучков, сильно несогласованных со структурой стационарного пучка (устойчивость в «большом»). Рассмотрение этих вопросов требует привлечения численных методов. Такое рассмотрение было проведено для двумерного диафрагмированного волновода из 50 нелинейных элементов керровского типа. Определялась последовательность функций $u_1^{(N)}$, $u_2^{(N)}$ ($N = 1, 2, \dots, 50$), описывающих поле соответственно на входе и выходе нелинейных элементов. Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} |u_2^{(N)}(\xi)| &= |u_1^{(N)}(\xi)|, \\ \arg u_2^{(N)}(\xi) &= \arg u_1^{(N)}(\xi) - |u_1^{(N)}(\xi)|^2, \\ u_1^{(N+1)}(\xi) &= \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_{-1}^1 u_2^{(N)}(\xi') \exp \left[-i \frac{c}{2} (\xi - \xi')^2 \right] d\xi' \end{aligned} \quad (10)$$

при начальных условиях (гауссов пучок)

$$|u_1^{(0)}(\xi)| = u_0 \exp \left(-\frac{c\xi^2}{2c_L} \right), \quad \arg u_1^{(0)} = \frac{1}{2} |u_1^{(0)}(\xi)|^2,$$

где

$$\xi = \frac{x}{a_s}, \quad u = \sqrt{n_2 l} E_0, \quad c = \frac{a_s^2}{L}, \quad c_L = \frac{a^2}{L},$$

a_s — ширина ограничивающей диафрагмы, a — ширина начального гауссова пучка, n_2 — коэффициент нелинейности в зависимости $n^{NL} = n_0 + n_2 |E_0|^2$.

Геометрический расчет, подобный вышеописанному, дает следующую связь между параметрами стационарного пучка:

$$c_L = \frac{1 + u_0^4}{2u_0^2}. \quad (11)$$

Соответствующая зависимость изображена на рис. 2 (кривая I). Она была использована для ориентировки в выборе начальных условий (кривые 1, 2, 3 на рис. 2).

Рис. 2. I—связь между параметрами стационарного пучка в двумерном волноводе с керровскими линзами. Пунктиром показана неустойчивая ветвь стационарного решения.

II—связь между параметрами квазистационарного пучка в конце нелинейного волновода, полученная в результате численных расчетов. Штрих-пунктирные кривые 1, 2, 3 соответствуют начальным пучкам в численных расчетах.

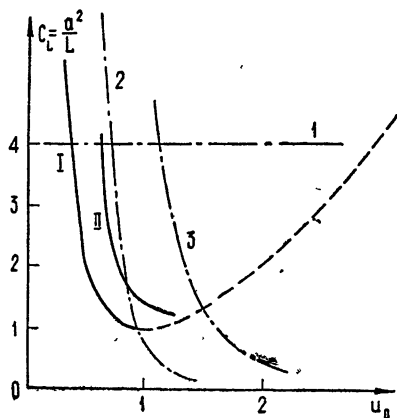


Рис. 3, на котором показана зависимость коэффициента потерь $\delta = -\lg T$ (T — энергетический коэффициент передачи) от номера корректора

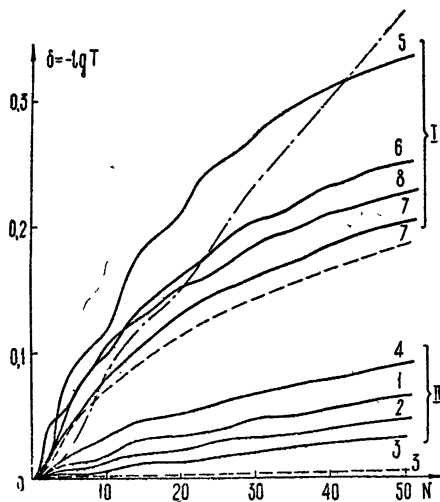


Рис. 3. Зависимость коэффициента потерь от номера нелинейного корректора для пучков с различной начальной мощностью. Группа кривых I соответствует доконфокальному режиму, группа кривых II — законфокальному:

- | | | |
|---|---|-----------------------------------|
| I. $\sqrt{c_L} u_0^2 = 0,96$
($c=20$) | { | $c_L = 6, \quad u_0 = 0,63$ (1) |
| | | $c_L = 4, \quad u_0 = 0,7$ (2) |
| | | $c_L = 2, \quad u_0 = 0,83$ (3) |
| | | $c_L = 1, \quad u_0 = 0,96$ (4) |
| II. $\sqrt{c_L} u_0^2 = 2,56$
($c=20$) | { | $c_L = 3, \quad u_0 = 1,22$ (5) |
| | | $c_L = 2, \quad u_0 = 1,34$ (6) |
| | | $c_L = 1, \quad u_0 = 1,6$ (7) |
| | | $c_L = 0,7, \quad u_0 = 1,75$ (8) |

Пунктирные кривые (3) и (7) соответствуют пучкам в нелинейном волноводе с увеличенным размером ограничивающей диафрагмы $c=40$.

(Для сравнения штрих-пунктирной линией показана зависимость коэффициента потерь пучка $c_L = 4, u_0 = 0,7$ в обычном диафрагменном волноводе $c = 20$.)

ректора N , характеризует поведение пучка в нелинейном волноводе в различных случаях. При малых значениях начальной мощности пучка, лежащих в области устойчивости стационарного решения (доконфокальный волновод), потери малы (группа кривых I) и на порядок меньше потерь обычного диафрагменного волновода. При мощности пучка, соответствующей законфокальному режиму, потери велики (группа II). С увеличением размера ограничивающей диафрагмы потери (пунктирные кривые для $c = 40$) в первом случае уменьшаются, а во втором практически не меняются, что свидетельствует об отсутствии захвата пучка нелинейным волноводом.

Интересно, что при $P \gg P_{\text{конф}}$ диафрагмирование системы, уменьшая мощность пучка, приводит к постепенному переходу пучка в об-

ласть устойчивости и захвату его нелинейным волноводом. Это подтверждается и анализом структуры стационарных (точнее, квазистационарных—из-за постепенного уменьшения мощности) пучков в конце нелинейного волновода. На плоскости параметров (c_L , u_0) им, как и в доконфокальном случае, отвечает лишь одна левая ветвь стационарного режима (рис. 2, кривая II), что полностью согласуется с результатом безабберационного приближения.

В заключение укажем на возможные проявления и некоторые приложения эффекта периодической самофокусировки. Наличие самофокусирующих элементов внутри резонаторов оптических квантовых генераторов должно влиять на пространственно-временную структуру излучения (автомодуляция, ограничение мощности, изменение расходимости и т. п.). Периодические системы с элементами керровского типа могут быть использованы для селекции импульсов по мощности. Следует ожидать также, что нелокальность теплового воздействия пучка на коэффициент преломления нелинейных элементов позволит использовать тепловые линзы для канализации излучения не только одномодовых, но и многомодовых лазеров. Заметим, что отсутствие первоначальной аксиальной симметрии элементов должно облегчить юстировку нелинейных волноводов, однако вопрос о роли аббераций, вызванных асимметрией амплитудного профиля первоначального пучка требует дополнительного рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. D. Mc W a n e, Nature, 211, 1081 (1966).
2. A. E. Кап л а н, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 6, 869 (1969).
3. P. L a l l e m a n d, N. B l o e m b e r g e n, Phys. Rev. Lett., 15, 1010 (1965).
4. С. А. А х м а н о в, Д. П. К р и н д а ч, А. И. С у х о р у к о в, Р. В. Х о х л о в, Письма в ЖЭТФ, 6, 509 (1967).
5. S. A. A k h m a n o v, D. P. K r i n d a c h, A. V. M i g u l i n, A. P. S u k h o r u k o v, R. V. K h o k h l o v, IEEE J. Quant. Electr., QE-4, 568 (1968).
6. Н. К о г е л н и к, Т. Л и, Proc. IEEE, 54, № 10, 1312 (1966).

Научно-исследовательский радиофизический институт
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
29 октября 1969 г.

THE THEORY OF PERIODIC SELF-FOCUSING OF LIGHT BEAMS

S. N. Vlasov, V. A. Petrishchev, V. I. Talanov

The wave beam theory in periodic systems of thin self-focusing elements is developed. A stationary (repeated) solution is found in the aberrationless approximation for the case of „Kerr“ and thermal lenses. It is shown that unlike the linear lens waveguides, only pre-confocal systems are stable. The question on channeling light beams is investigated by numerical methods, with taking into account the nonlinear lens aberration.

Примечание при корректуре. Численные расчеты аксиально-симметричных волновых пучков качественно дают ту же картину периодической самофокусировки, что и в двумерном случае. В частности, параметры устойчивых и неустойчивых режимов, а также профили стационарных пучков хорошо согласуются с формулой (11) безабберационного приближения, в которой, однако, следует заменить u_0 на $0,5 u_0$. Последнее уточнение связано с тем, что формула (11) получена в так называемом приосевом приближении, дающем в 4 раза заниженное значение критической мощности самофокусировки. Аналогичное уточнение формулы (11) приосевого приближения для двумерных пучков заключается в замене u_0 на $0,6 u_0$. При этом кривые I и II на рис. 2 практически совпадают,

УДК 538.574.6

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ РЕШЕТКАХ

А. И. Ена, Л. Н. Литвиненко, В. П. Шестопалов

Рассмотрена дифракция плоской электромагнитной волны на многоэлементной решетке — структуре, представляющей собой бесконечную последовательность периодически расположенных групп лент из n лент в каждой группе. Показано, что такие решетки имеют важные для практических приложений свойства: они прозрачны для H -поляризованных волн в весьма широком диапазоне частот, в то время как для E -поляризации решетка аналогична одноэлементной с тем же периодом.

Предлагается эффективный приближенный способ расчета дифракционных полей у таких решеток с использованием эквивалентных граничных условий, результаты расчета сравниваются со строгим решением, проведенным для частного случая решетки с пятью элементами на периоде.

В том случае, когда период дифракционной решетки соизмерим с длиной падающей электромагнитной волны, рассеянное решеткой поле имеет ряд специфических особенностей: амплитуды основной волны отраженного (прошедшего) поля и волн дифракционного спектра сильно зависят от частоты, наблюдаются различные резонансные явления и т. д. При этом основное влияние на свойства рассеянного поля оказывает конфигурация решетки. Варьируя число элементов (лент, проводов и т. д.) на периоде решетки и их взаимное расположение, можно эффективно управлять дифрагированным полем. Мы будем рассматривать периодические решетки из нескольких бесконечно тонких металлических лент на периоде — многоэлементные решетки.

Свойства двухэлементных решеток с двумя лентами различной ширины на периоде хорошо изучены; наиболее важным из них является несимметрия дифракционных спектров [1, 2] (исследование дифракции электромагнитных волн на таких решетках основано на методе задачи Римана — Гильберта [3]). Этот метод удалось обобщить на решетки с произвольным числом лент на периоде [4], однако если число лент велико, то использование метода Римана — Гильберта затруднено из-за громоздкости уравнений и вряд ли целесообразно, если на периоде больше пяти лент. Вместе с тем, многоэлементные решетки с большим числом лент на периоде как объекты исследования весьма перспективны из-за целого ряда особенностей их дифракционных свойств. Такие решетки могут найти применение в качестве элементов тракта миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов, фильтров, антенных устройств и т. п.; в теоретическом плане эти решетки могут рассматриваться как модели импедансных поверхностей с переменным импедансом в направлении, перпендикулярном образующим лент.

Рассмотрим здесь лишь одну разновидность многоэлементных решеток — бесконечную последовательность периодически расположенных групп из n лент в каждой группе. Период решетки L , все ленты решетки идентичны, расстояния между двумя ближайшими лентами в группе также одинаковы и равны d , совместная ширина ленты и узкой щели t , расстояние между группами лент D . Такая решетка с достаточно боль-

шим числом лент в группе обладает уникальными дифракционными свойствами: она практически прозрачна для плоских волн H -поляризации в широком диапазоне частот, который можно оценить грубо как $0 < x \leq n$ ($x = L/\lambda$, λ — длина падающей электромагнитной волны), и ведет себя в случае E -поляризации аналогично одноэлементной решетке с периодом L и шириной лент $L-D$.

Для области частот $0 < x \leq 1$, где использование такой решетки наиболее целесообразно, удается предложить эффективный способ приближенного расчета ее дифракционных характеристик. Точность такого расчета в принципе тем выше, чем больше число элементов в группе и чем дальше одна от другой расположены эти группы. Погрешность предлагаемого метода расчета может быть оценена путем сравнения с результатами, полученными строгим методом с использованием задачи Римана — Гильберта. Такое сравнение проводится нами для многоэлементной решетки с пятью лентами на периоде, и, как показывают результаты расчета, уже для такого числа элементов наблюдается хорошее согласие с точным решением. Для простоты мы ограничимся здесь лишь случаем нормального падения плоской электромагнитной волны.

1. МЕТОД ЗАДАЧИ РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА

Рассмотрим прежде всего в самых общих чертах строгий метод получения решения. В плоскости xOy расположена неограниченная в направлениях Ox и Oy периодическая пятиэлементная решетка, начало координат находится посередине третьей ленты, так что решетка симметрична относительно оси Ox (рис. 1а). Величины d_1, d_2, d_3, d_4 и d_5 определяют ширину и расположение лент на периоде. Поскольку решетка сим-

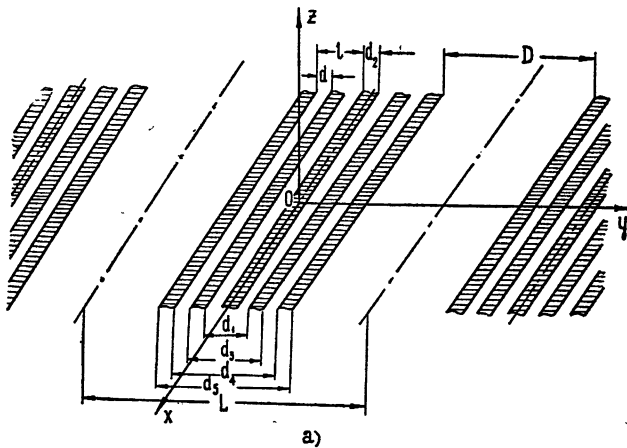


Рис. 1а.

метрична, достаточно рассмотреть лишь случай E -поляризации, когда вектор E падающей плоской волны параллелен лентам решетки. В случае произвольной поляризации можно воспользоваться принципами суперпозиции и двойственности, поскольку дополнительная решетка оказывается также симметричной пятиэлементной.

Пусть сверху ($z > 0$) нормально падает плоская электромагнитная волна с составляющими

$$E_x^{(\text{пад})} = e^{-ikz}, \quad E_z^{(\text{пад})} = E_y^{(\text{пад})} = 0 \quad (1)$$

(временной фактор подразумевается в виде $e^{-i\omega t}$). Поле, возникшее в результате дифракции этой волны на решетке, должно быть однородным вдоль оси Ox и периодическим с периодом L в направлении Oy . Поэтому его целесообразно искать в виде ряда Фурье

$$E_x = e^{-kz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i\gamma_n z) \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} y\right) \quad (z > 0); \quad (2)$$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \exp(-i\gamma_n z) \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} y\right) \quad (z < 0). \quad (2a)$$

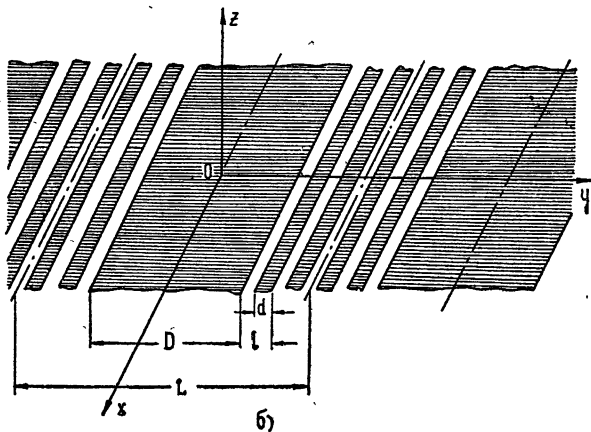


Рис. 16.

Остальные компоненты поля определяются из уравнений Максвелла. Величина

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2} \quad (3)$$

($\text{Im } \gamma_n > 0$; если $\text{Im } \gamma_n = 0$, то $\text{Re } \gamma_n > 0$) выбирается таким образом, чтобы поля (2), (2a) удовлетворяли уравнению Гельмгольца; константы a_n и β_n подлежат определению.

Граничные условия заключаются в том, что на металлических лентах тангенциальные составляющие электрического поля обращаются в нуль, а на щелях все поле должно быть непрерывно. Отсюда, так как правые части формул (2) и (2a) должны совпадать при $z = 0$, следуют равенства

$$\beta_0 = 1 + \alpha_0, \quad \beta_n = \alpha_n \quad (n \neq 0) \quad (4)$$

и система функциональных уравнений для отыскания коэффициентов:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} y\right) &= 0 \quad (\text{на металле}), \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \gamma_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} y\right) &= k \quad (\text{на щелях}). \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (5) мало пригодна как для качественных исследований, так и для проведения численных расчетов. Запишем для про-

стоты (5) в виде $A\bar{\beta} = \bar{f}$. Оператор A , оказывается, можно представить в виде суммы $A = A_1 + A_2$, где оператор A_1 , с одной стороны, вбирает в себя особенности (в смысле плохой сходимости) оператора A , а с другой — допускает обращение в явной форме. Это обращение, выполняемое с помощью аппарата задачи Римана—Гильберта теории аналитических функций, приводит к системе

$$\bar{\beta} + A_1^{-1} A_2 \bar{\beta} = A_1^{-1} \bar{f}. \quad (6)$$

Результирующее соотношение (6) представляет собой бесконечную неоднородную систему линейных алгебраических уравнений с быстроубывающими коэффициентами, эквивалентную системе функциональных уравнений (5). Система (6) в явном виде приводится в [5], там же вычисляются ее коэффициенты. Численное решение этой системы находится с помощью метода редукции. Выбирая достаточное число уравнений, т. е. учитывая влияние соответствующего количества гармоник дифракционного спектра, можно получить решение с любой необходимой точностью. Как показывают проведенные исследования [1, 4], число уравнений $x_{\max} + 2$ обеспечивает точность вычисления коэффициентов прохождения и отражения при $x \ll x_{\max}$ до четвертого знака.

Наиболее громоздким оказывается вычисление коэффициентов системы уравнений, причем с ростом числа лент на периоде решетки не только усложняется их вид, но и увеличивается порядок системы. Таким образом, решение задач дифракции этим методом, хотя и дающим исчерпывающее строгое решение, свободное от ограничений на параметры структуры, для решеток с большим числом лент на периоде становится затруднительным. Поэтому представляет большой интерес рассмотрение упрощенных методов, дающих достаточно хорошее приближение. Одним из них является метод решения с помощью эквивалентных граничных условий.

2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И МНОГОЭЛЕМЕНТНАЯ РЕШЕТКА

Рассмотрим одноэлементную решетку с периодом l и шириной щелей d . Если на такой решетке дифрагирует нормально падающая плоская волна, причем выполняется условие $l/\lambda < 1^*$, то периодические неоднородности поля имеют локальный характер, и на достаточном удалении от решетки будет распространяться однородная плоская волна, отличающаяся от падающей фазой и амплитудой. В таком случае для отыскания полей в дальней зоне (зона Фраунгофера) целесообразно сформулировать усредненные граничные условия, считая решетку однородной полупрозрачной пленкой. Такие усредненные (или эквивалентные) граничные условия на плоской решетке имеют следующий вид соответственно для E - и H -поляризации:

$$\begin{aligned} E_x^1|_{z=0} &= E_x^2|_{z=0}, \\ (H_y^1 - H_y^2)|_{z=0} &= 2 \frac{b_0 - 1}{b_0} E_x|_{z=0}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E_y^1|_{z=0} &= E_y^2|_{z=0}, \\ (H_x^1 - H_x^2)|_{z=0} &= 2 \frac{A_0}{1 - A_0} E_y|_{z=0}, \end{aligned} \quad (8)$$

* В случае наклонного падения это условие имеет вид $l/\lambda < (1 + |\sin \alpha|)^{-1}$ (угол падения α отсчитывается от нормали к решетке).

где b_0 и A_0 — комплексные амплитуды прошедшей и отраженной основной волны (нулевой пространственной гармоники) при соответствующих поляризациях, индексами 1 и 2 обозначены поля над и под решеткой, расположенной в плоскости $z = 0$ (ось Ox параллельна лентам решетки, волна падает из области $z > 0$).

Эквивалентные граничные условия (7) и (8) совпадают с граничными условиями Конторовича — Мойжеса, полученными при решении квазистатической задачи [6], если для коэффициентов b_0 и A_0 ограничиться приближением Ламба — Рэлея [7]. В таком приближении условия (7), (8) будут пригодны в том же частотном диапазоне, что и приближение Ламба для b_0 и A_0 , т. е. для $l/\lambda \leq 0,3$. Если коэффициенты b_0 и A_0 находить из строгого решения задачи дифракции, то условия вида (7), (8) пригодны для значений l/λ вплоть до единицы. Заметим, что соотношения (7) и (8) являются частным случаем эквивалентных граничных условий, полученных в [8] для любых плоских периодических ленточных решеток при наклонном падении плоской волны.

Вернемся теперь к задаче дифракции плоской волны (1) на пятиэлементной решетке (рис. 1). Будем считать, что $x \leq 1$, а следовательно, $l/\lambda \ll 1$; в таком случае поле на широкой щели (ее ширина D) можно считать непрерывным, а на всей ширине группы лент ($L-D$) потребовать, чтобы дифрагированное поле удовлетворяло эквивалентным граничным условиям (7) или (8) при E - или H -поляризации соответственно. Поступая таким образом, мы предполагаем, что на ограниченной группе с «периодом» l выполняются те же эквивалентные граничные условия, что и на бесконечной периодической (с периодом l) решетке.

В [9] показано и в [10] подтверждено экспериментально, что решетка, состоящая из четырех лент, качественно ведет себя как бесконечная, т. е. зависимость коэффициентов прохождения и отражения от частоты (при $l/\lambda \leq 1$) имеет аналогичный характер с довольно острой особенностью в точке $l/\lambda = 1$. С ростом числа лент решетка по своим свойствам все более приближается к бесконечной и точнее, следовательно, выполняются на ней эквивалентные граничные условия. Естественно, влияния краевых эффектов такие граничные условия не учитывают, однако, сравнивая результаты с решением, полученным строгим методом, можно оценить степень этого влияния, что само по себе представляется достаточно важным, так как условия Конторовича — Мойжеса применялись для решения задачи о дифракции плоской волны на полуограниченной решетке [11]. Вопрос о законности использования эквивалентных граничных условий вблизи края решетки в работе [11] остался, вообще говоря, открытым, так как строгого решения этой задачи пока не существует.

3. ПОЛУЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ С ПОМОЩЬЮ УСРЕДНЕННЫХ УСЛОВИЙ

При решении задачи дифракции плоской волны на многоэлементной решетке с использованием эквивалентных условий многоэлементная решетка фактически заменяется одноэлементной с периодом L и шириной щели D . На щели все поле непрерывно, а на «квазиленте» (ее ширина $L-D$) выполняются эквивалентные граничные условия. Будем сначала рассматривать случай E -поляризации, тогда при дифракции волны (1) дифрагированное поле можно искать в виде (2) и (2а). Непрерывность поля в щели и условия (7) обеспечивают выполнение равенств (4), выражающих связь между амплитудами дифракционных гармоник прошедшего и отраженного полей, и приводят к следующим функциональным уравнениям для нахождения этих амплитуд:

$$-k + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \gamma_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} y\right) = k \frac{b_0 - 1}{b_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} y\right) \quad (\text{на „квaziленте“}), \quad (9)$$

$$-k + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n \gamma_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} y\right) = 0 \quad (\text{на щели}).$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{kL}{2\pi} = \frac{L}{\lambda} = x, \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2} = \frac{2\pi |n|}{L} i(1 - \varepsilon_n) \quad (n \neq 0), \quad (10)$$

$$\varepsilon_n = 1 + i\sqrt{x^2/n^2 - 1}, \quad \frac{L-D}{L} \pi = \theta, \quad \frac{2\pi n}{L} = \varphi.$$

Используя (10) и учитывая, что область щели соответствует значениям угла $\theta < |\varphi| \leq \pi$ (начало координат располагается на середине «квaziленты»), а «квaziленты» — значениям $|\varphi| < \theta$, запишем (9) в виде

$$\sum_{n \neq 0} \beta_n |n| (1 - \varepsilon_n) e^{in\varphi} \begin{cases} = ix \left[\beta_0 - 1 - \frac{b_0 - 1}{b_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\varphi} \right] & (|\varphi| < \theta) \\ = ix(\beta_0 - 1) & (\pi \geq |\varphi| > \theta) \end{cases} \quad (11)$$

Таким образом, известна периодическая функция, нетрудно отыскать ее фурье-коэффициенты:

$$\beta_m |m| (1 - \varepsilon_m) = \frac{ix(1 - b_0)}{\pi b_0} \left\{ \beta_0 \frac{\sin m\theta}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\sin(n-m)\theta}{(n-m)} + \frac{\sin(n+m)\theta}{(n+m)} \right] \right\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots); \quad (12)$$

$$\beta_0 = \frac{\pi b_0 + 2(b_0 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{\sin n\theta}{n}}{\pi b_0 - (b_0 - 1)\theta}. \quad (13)$$

Заметим, что в (12) и (13) учтена симметрия поля, т. е. $\beta_{-n} = \beta_n$.

Уравнения (12), (13) образуют бесконечную систему линейных неоднородных алгебраических уравнений с простыми коэффициентами, пригодную для численного решения методом редукции. Строго обосновать законность использования метода редукции для системы вида (12), (13) не удастся, однако сходимость ее проверялась численно и сравнивалась, кроме того, с результатами строгого решения. При этом оказалось, что достаточно сохранить в системе (12) пятнадцать уравнений; дальнейшее увеличение их числа на точность решения не влияет. Отметим, что аналогичные по характеру убывания системы уравнений исследовались в [12], результаты численных расчетов хорошо совпадают с экспериментом.

Система уравнений (12), (13) допускает непосредственно предельный переход при $\theta \rightarrow \pi$, когда группы лент располагаются вплотную, и в случае $\theta \rightarrow 0$, когда ширина «квaziленты» стремится к нулю. Как легко видеть, в этих предельных случаях коэффициенты $\beta_m = 0$

(что вполне естественно, так как «квазиленга» является однородной структурой), а β_0 равно b_0 или единице соответственно.

Рассмотрим теперь дифракцию H -поляризованной волны. Пусть на многоэлементную решетку падает плоская электромагнитная волна с составляющими

$$H_x^{(\text{пад})} = e^{-ikz}, \quad H_z^{(\text{пад})} = H_y^{(\text{пад})} = 0. \quad (14)$$

Дифрагированное поле в таком случае будет

$$H_x = e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n \exp(i\gamma_n z) \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} y\right) \quad (z > 0), \quad (15)$$

$$H_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\beta}_n \exp(-i\gamma_n z) \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} y\right) \quad (z < 0),$$

остальные составляющие определяются из уравнений Максвелла. Требование непрерывности всего поля на щели и выполнения условий (8) на «квазиленге» приводит к следующей системе функциональных уравнений для отыскания дифракционных спектров отраженного поля:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} y\right) = 0 \quad (\text{на щели}); \quad (16)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n \exp\left(i \frac{2\pi n}{L} y\right) = \frac{A_0}{1 - A_0} \left[1 - \bar{\alpha}_0 - \sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_n \frac{\gamma_n}{k} \exp\left(i \frac{2\pi n}{l} y\right) \right] \quad (\text{на «квазиленге»}), \quad (16a)$$

при этом коэффициенты $\bar{\beta}_n$ находятся из соотношений

$$\bar{\beta}_0 = 1 - \bar{\alpha}_0, \quad \bar{\beta}_n = -\bar{\alpha}_n \quad (n \neq 0).$$

В обозначениях (11) уравнения (16), (16 а) имеют вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n e^{in\varphi} = 0 \quad (\theta < |\varphi| < \pi), \quad (17)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n e^{in\varphi} = \frac{A_0}{1 - A_0} \left(1 - \bar{\alpha}_0 - i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n \frac{|n|}{x} (1 - \varepsilon_n) e^{in\varphi} \right) \quad (|\varphi| < \theta).$$

Систему (17) нельзя заменить эквивалентной ей системой линейных алгебраических уравнений таким же способом, как это мы сделали для функциональных уравнений (11), поэтому запишем ее несколько иначе:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n e^{in\varphi} = 0 \quad (\theta < |\varphi| \leq \pi), \quad (18)$$

$$\sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_n |n| e^{in\varphi} = ix \frac{\bar{\alpha}_0}{A_0} - ix + \sum_{n \neq 0} \bar{\alpha}_n \left(\varepsilon_n |n| + \frac{ix(1 - A_0)}{A_0} \right) e^{in\varphi} \quad (|\varphi| < \theta).$$

В таком виде система (18) является стандартной для применения формализма задачи Римана — Гильберта [3]. В результате мы имеем (учитывая, что $\bar{\alpha}_{-n} = \bar{\alpha}_n$)

$$\begin{aligned}
 -\bar{\alpha}_0 &= ix \frac{\bar{\alpha}_0}{A_0} V_{[0]}^0 - ix V_{[0]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \left(\varepsilon_n n + \frac{ix(1-A_0)}{A_0} \right) [V_{[0]}^n + V_{[0]}^{-n}] + 2cR_{[0]}, \\
 0 &= ix \frac{\bar{\alpha}_0}{A_0} V_0^0 - ix V_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \left(\varepsilon_n n + \frac{ix(1-A_0)}{A_0} \right) [V_0^n + V_0^{-n}] + 2cR_0, \\
 \bar{\alpha}_m &= ix \frac{\bar{\alpha}_0}{A_0} \frac{V_m^0}{m} - ix \frac{V_m^0}{m} + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \left(\varepsilon_n n + \frac{ix(1-A_0)}{A_0} \right) [V_m^n + V_m^{-n}] + 2c \frac{R_m}{m} \\
 &\quad (m = 1, 2, 3 \dots).
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Коэффициенты системы (19) вычислены в [3]. Поскольку диагональный элемент матрицы коэффициентов ведет себя при $m \rightarrow \infty$ как $0 \left(\frac{1}{m} \right)$, то порядок сходимости этой системы не хуже, чем уравнений (12), (13), и она пригодна для численного решения.

4. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Задача дифракции электромагнитных волн на пятиэлементной решетке исследовалась численно для случаев E - и H -поляризации, при этом сравнение результатов строгого решения и аналогичных результатов решения систем (12), (13) и (19) позволило оценить эффективность приближенного метода.

Нас интересовали, в первую очередь, зависимости модуля коэффициента прохождения от частоты, ширины «квазиленты» и параметра d/l . На рис. 2 представлены такие зависимости $|\beta_0|$ от x для трех значений параметра θ в случае E -поляризации. Хорошее совпадение результатов, полученных обоими методами (результаты приближенного

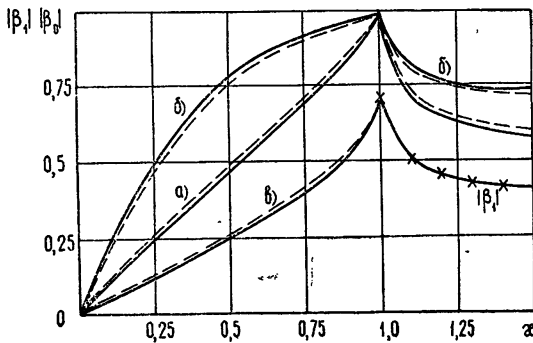


Рис. 2. Зависимость модуля коэффициента прохождения от частоты. Строгое решение — сплошная линия, приближенное — пунктирная. Параметры решетки: а) $\theta = \pi/2$, $d/l = 0,5$; б) $\theta = \pi/4$, $d/l = 0,5$; в) зависимость модуля коэффициента прохождения первой гармоники от частоты при $\theta = \pi/2$, $d/l = 0,5$.

метода изображены пунктирной кривой), наблюдается вплоть до значений $x = 1$ для $\theta = \frac{\pi}{4}$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$. Изменение параметра d/l (коэффициента заполнения в группе лент) на совпадение результатов влияет незначительно, сказываясь несколько больше при $\theta = \frac{\pi}{4}$. Более сильное

влияние оказывает изменение параметра θ , определяющего расстояние между группами лент («квазилентами»), а также (при постоянном количестве лент в группе) величину l .

При значениях θ , больших $\frac{\pi}{2}$, когда расстояние между «квазилен-
тами» меньше половины периода решетки L , расхождение между
результатами обоих методов становится значительным. Это естествен-
но, так как на «квазиленте» ставятся граничные условия, которые
формулируются на бесконечной решетке и не учитывают взаимо-
действия между «квазиленитами». Такое взаимодействие может опреде-
ляться либо краевыми эффектами, так как на границах «квазилент»
формируются цилиндрические волны, либо взаимодействием собствен-
ных дифракционных спектров групп элементов. Если последнее имеет
место, то при расстояниях между «квазиленитами», кратных l , откло-
нение от результатов, полученных строгим методом, должно быть мини-
мальным. Однако, как видно на рис. 3, такой эффект не наблюдается,
и основным источником погрешности, следовательно, является взаимо-
действие краевых волн.

На рис. 2 зависимость $|\beta_0|$ от частоты приведена и для значений κ , больших единицы, однако при этом результаты строгого и приближенного метода не совпадают, хотя эквивалентные граничные условия справедливы на «квазиленте», например, для $\theta < \pi/2$ по крайней мере до $\kappa < 10$, поскольку при этом отношение l/λ меньше единицы. Причина несовпадения результатов,

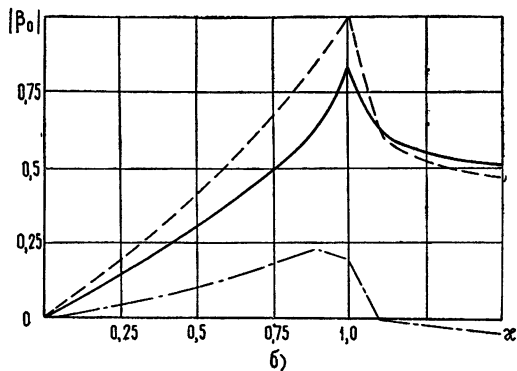
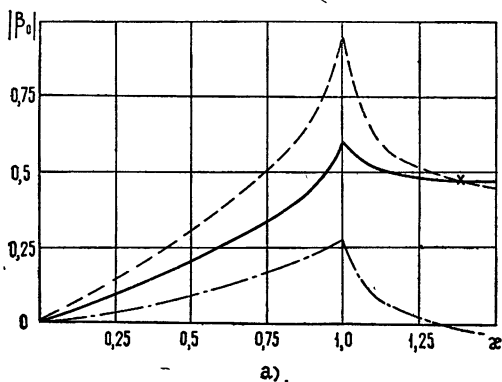


Рис. 3а, б. Зависимость модуля коэффициента прохождения от частоты для решеток, у которых $\theta > \pi/2$. Сплошная линия—точный расчет, пунктирная—приближенный;

а) $\theta = 3\pi/2$, $d/l = 0,5$; б) $\theta = \frac{5}{8}\pi$, $d/l = 0,5$.

Штрих-пунктирной линией показана разность между решениями « строгим и приближенным.

очевидно, заключается в том, что при $\kappa > 1$ от решетки начинают распространяться дифракционные гармоники, в то время как граничные условия сформулированы правильно лишь для волн, нормальных к плоскости решетки.

Для H -поляризации коэффициент прохождения оказывается практически равным единице во всем интервале $0 < \kappa < 1$, причем его значение почти не зависит от параметра d/l . В табл. 1 приведены значения коэффициента прохождения $|\beta_0|$ для $\theta = \pi/2$, $d/l = 0,5$, и ряда значений параметра κ .

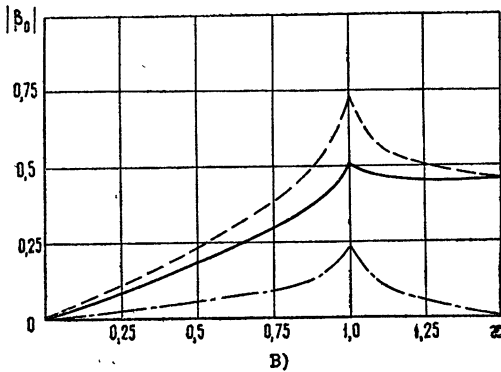


Рис. 3в. Зависимость модуля коэффициента прохождения от частоты для решеток, у которых $\theta > \pi/2$. Сплошная линия — точный расчет, пунктирная — приближенный:

$$в) \theta = \frac{5}{7} \pi, d/l = 0,5.$$

Штрих-пунктирной линией показана разность между решениями строгим и приближенным.

Таблица 1

κ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
$ \bar{\beta}_0 $	1	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9995	0,9993	0,9986

Следует заметить, что из-за прозрачности решетки для H -поляризованной волны роль дифракционных гармоник в ее спектре мала даже при $\kappa > 1$, поэтому результаты расчетов, выполненных для указанной поляризации с помощью эквивалентных условий, оказываются справедливыми и для значений κ больших единицы; например, для пятиэлементной решетки с $\theta = \pi/2$ этим методом можно пользоваться до $\kappa \leq 5$.

Сравнение результатов точного и приближенного методов расчета дифракционных полей по значениям коэффициента прохождения позволяет судить лишь о правильности описания в дальней зоне. В ближней зоне существенную роль играют пространственные гармоники (особенно в случае E -поляризации). Сравнение амплитуд гармоник вполне возможно (см., например, рис. 2, где приведены зависимости $|\beta_1|$ от κ , посчитанные обоими методами). Однако картина поля вблизи решетки зависит от большого числа амплитудных и фазовых соотношений между гармониками, поэтому наиболее полно и наглядно такое сопоставление может быть проведено с помощью картины амплитудного распределения (рис. 4), а также фазового распределения и линий потока мощности, которые здесь не приводятся за недостатком места.

Построение таких картин проводится непосредственно по формулам (2), (2а) с помощью методики, близкой к изложенной в [13]. В (2), (2а) подставлялись значения α_n и β_n , подсчитанные точным и приближенным методами; картины полей в ближней зоне при этом достаточно хорошо совпадают. Отметим, что аналогичные картины распределения амплитуд (а также фаз и потока мощности) могут служить самостоятельным способом качественного и даже количественного исследования дифракционных явлений, так как содержат наиболее полную информацию о поле в целом. На рис. 4а (коэффициенты рассчитаны с помощью эквивалентных граничных условий) хорошо видно, что усредненные условия представляют группу лент однородной полупрозрачной пленкой: линии равной амплитуды напряженности прохо-

дят сквозь «квазилену». На расстоянии порядка $0,1 \lambda$ от плоскости решетки картины полей, вычисленные точным (рис. 4 б) и приближенным методами, практически совпадают.

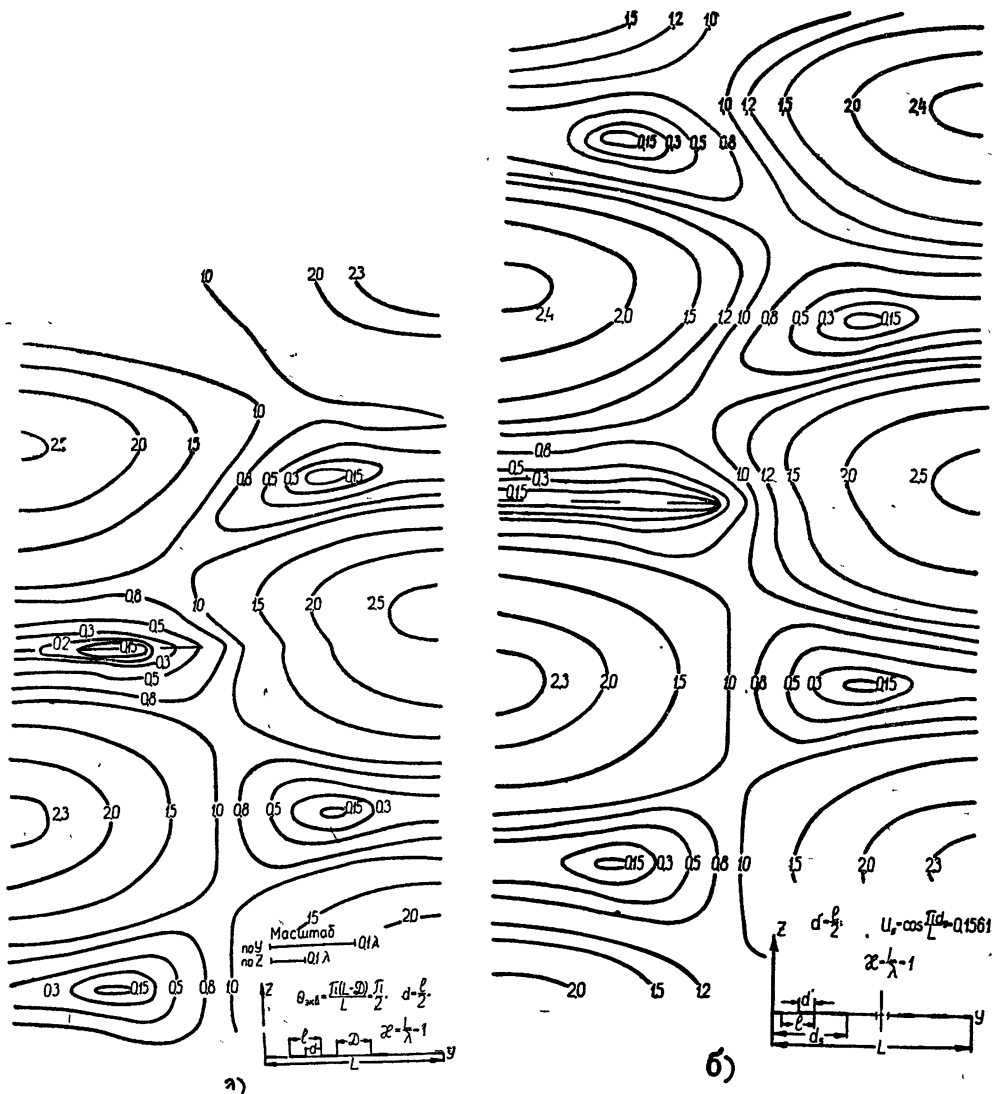


Рис. 4. Распределение линий постоянной амплитуды для решетки с параметрами $\theta = \pi/2$, $d/l = 0,5$ при $L/\lambda = 1$, рассчитанное строгим (а) и приближенным [б] методами.

Заметим в заключение, что электродинамический принцип двойственности позволяет использовать предложенный здесь приближенный способ анализа дифракционных свойств решетки, дополнительной к изображенной на рис. 1 а. Для такой решетки (см. рис. 1 б) коэффициенты β_n описывают отраженное поле H -поляризованной волны, а α_n — прошедшее поле E -поляризованной. Зависимости коэффициентов прохождения от частоты у такой решетки с десятью щелями на периоде приведены на рис. 5. Эта структура в диапазоне $x \ll 1$ практически

непрозрачна для E -поляризации, а для H -поляризованной волны решетка ведет себя как одноэлементная с периодом L .

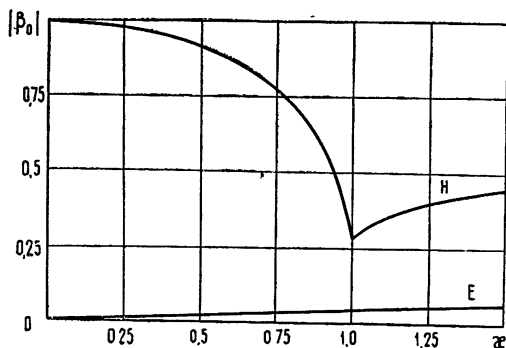


Рис. 5. Зависимость коэффициентов прохождения E - и H -поляризованной волны от частоты для десятиэлементной решетки с параметрами $\theta = \pi/2$, $d/l = 0,5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Н. Литвиненко, В. П. Шестопапов, Численные методы решения задач математической физики, изд. Наука, М., 1966.
2. А. И. Ена, Л. Н. Литвиненко, В. П. Шестопапов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 11, № 1, 110 (1968).
3. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов, ЖТФ, 32, № 4, 381 (1962).
4. Л. Н. Литвиненко, Диссертация, Харьков, 1965.
5. А. И. Ена, Радиотехника, изд. ХГУ, № 7, 11 (1968).
6. Б. Я. Мойжес, ЖТФ, 25, № 1, 158 (1955).
7. Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947.
8. Г. Н. Гестрин, Л. Н. Литвиненко, К. В. Маслов, В. П. Шестопапов, ЖТФ, 34, № 11, 1962 (1964).
9. Saermark, Appl. Sci. Res., 5, 29 (1959).
10. В. П. Шестопапов, В. А. Слюсарский, ЖТФ, 34, № 9, 1649 (1964).
11. А. Е. Безменов, Изв. высш. уч. зав. — Радиотехника, № 3, 271 (1958).
12. С. А. Масалов, Диссертация, Харьков, 1966.
13. В. Е. Буданов, С. А. Масалов, В. П. Шестопапов, Радиотехника, ХГУ, № 4, 11 (1967).

Харьковский институт радиоэлектроники

Поступила в редакцию
25 марта 1969 г.

DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON MULTI-ELEMENT ARRAYS

A. I. Ena, L. N. Litvinenko, V. P. Shestopalov

The diffraction of a plane electromagnetic wave on a multi-element array — the structure consisting of an infinite succession of periodically situated tape groups of n tapes in each group has been considered. These arrays are shown to have important, for practical applications, properties: they are transparent for H -polarized waves in a rather wide frequency range while for E -polarization, the array is like the one-element with the same period.

An effective approximate way is suggested for calculating the diffraction fields of these arrays under equivalent boundary conditions. Results of calculation are compared with a strict solution carried out for a particular case of the array with five elements in the period.

УДК 538.56

ОБ ЭВОЛЮЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Н. Н. Филоненко

Рассматривается распространение нелинейной периодической волны в среде, параметры которой меняются во времени и в пространстве настолько быстро, что могут выполняться резонансные условия. В случае одного резонанса получен интеграл движения в окрестности этого резонанса. Подробно исследуется случай большого числа резонансов между возмущением и волной и находится условие, при котором резонансное воздействие среды приводит к хаотизации фазы волны. Последнее позволяет перейти от динамического описания эволюции волны со временем к статистическому.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния возмущений на нелинейные периодические волны, распространяющиеся в среде с дисперсией. Хорошо разработанный метод Уитэма [1], используемый обычно для такой цели, связан с усреднением по периоду и частоте колебания волны и позволяет учитывать лишь медленно меняющиеся во времени и в пространстве возмущения. Влияние таких адиабатических изменений параметров среды на движение нелинейной периодической волны исследовалось подробно с помощью метода Уитэма в работах [2]. Ниже мы рассматриваем другой случай, при котором возможен резонанс между возмущением и нелинейной волной, и предлагаем новый подход к такого рода задачам, который является дальнейшим развитием метода работы [3].

Отличительным свойством резонансных явлений в данном случае является наличие «сильной связи» между фурье-гармониками нелинейной волны. Это приводит к влиянию резонанса не только на соответствующую фурье-гармонику волны, но и на все остальные. Особое внимание в работе уделено случаю, когда изменение параметров среды приводит к возникновению большого числа резонансов. Показано, что при определенных условиях такое возмущение приводит к хаотизации фазы волны. Временная эволюция волны в этом случае описывается уравнением Фоккера—Планка.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы будем рассматривать уравнение Кортевега—де-Вриза с правой частью, носящее в некотором смысле универсальный характер. Это уравнение описывает различные движения в нелинейных средах с дисперсией при условии, что амплитуда мала, но конечна, а дисперсия является слабой (например, волны на поверхности тяжелой жидкости с конечной глубиной, нелинейные ионно-звуковые волны в холодной плазме и др. (см., например, [4])):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \varepsilon F(v, x, t), \quad (1)$$

где $v(x, t)$ — скорость среды, x, t — координата и время, $F(v, x, t)$ — некоторая функция скорости, координат и времени. Последний член в уравнении (1) возникает вследствие изменения параметров среды во времени и в пространстве [3]. Уравнение (1) записано в безразмерных переменных таким образом, что скорость волны бесконечно малой амплитуды без учета дисперсии и характерный масштаб длины (например, дебаевский радиус для ионного звука) приняты равными единице.

В нелинейных средах с дисперсией могут существовать периодические волны с установившимся профилем, распространяющиеся с некоторой постоянной скоростью u [5]. Такие решения, так называемые «кноидальные» волны, существуют и у уравнения Кортевега—де-Вриза, условие применимости которого связано с ограничением $a \equiv (u-1) \ll 1$.

Внешнюю силу $F(v, x, t)$ выберем в виде

$$F(v, x, t) = 2F \sum_{s=1}^S \cos(n_0 kx - svt), \quad (2)$$

где $S \gg 1$ и $2\pi/k$ — длина волны невозмущенного решения. Эта периодическая по координате функция представляет собой ряд коротких импульсов длительностью $\sim 2\pi/Sv$, следующих периодически с частотой v .

Такой выбор возмущения обусловлен двумя причинами: 1) возмущения, входящие параметрически в задачу, дают более слабый эффект из-за малости амплитуды волны ($\max v \sim a$); 2) возмущения с волновым числом, кратным волновому числу невозмущенной волны, оказывают наиболее сильное влияние на последнюю [3].

Предварительно мы построим решение уравнения (1) для простого случая гармонического возмущения ($S = 1$).

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Разложим уравнение (1) с внешней силой в виде $F(x, t) = 2F \cos(n_0 kx - vt)$ в ряд Фурье по координате:

$$\frac{dv_n}{dt} + iknv_n + (ikn)^3 v_n + \frac{ikn}{2} \sum_{n_1} v_{n_1} v_{n-n_1} = \varepsilon F (e^{-ivt} \delta_{n, n_0} + e^{ivt} \delta_{n, -n_0}), \quad (3)$$

$\delta_{m, l}$ — символ Кронекера,

$$v_n = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-inkx} v(x, t), \quad v_{-n} = v_n^*.$$

Решение невозмущенного уравнения Кортевега—де-Вриза с длиной волны $2\pi/k$ и скоростью u имеет следующий вид [6]:

$$v^{(0)}(x - ut) = a + 2a(1 + p^2)/3p^2 - 2a \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{\frac{a}{6}} \frac{(x - ut)}{p} \right], \quad (4)$$

где

$$a = \frac{6}{\pi^2} k^2 p^2 K^2(p). \quad (5)$$

Здесь $\operatorname{sn}(z)$ — эллиптическая функция Якоби с модулем $0 \leq p \leq 1$, $K(p)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Величина a играет роль амплитуды волны. Амплитуда волны a и модуль функции Якоби p однозначно определяются заданием волнового числа k и ско-

рости u . Однако в дальнейшем нам эта связь не понадобится. Приведем здесь разложение функции Якоби в ряд Фурье, которым в дальнейшем будем часто пользоваться:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}^2(z) &= -\frac{1}{2a} \left(a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nkz \right), \\ a'_0 &= -24k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2}, \\ a_0 &= \alpha + 2a(1+p^2)/3p^2 + a'_0, \\ a_n &= 24k^2 \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \quad (n \neq 0), \\ q &= \exp \left[-\frac{\pi K(p')}{K(p)} \right] \quad (p' = \sqrt{1-p^2}). \end{aligned} \tag{6}$$

Будем искать решение для n -го осциллятора волны в следующем виде:

$$v_n(q, \psi, vt) = a_n(q) e^{in\psi} + \varepsilon U_{1n}(q, \psi, vt) + \dots; \tag{7}$$

$$\frac{dq}{dt} = \varepsilon A_1(q, \theta) + \varepsilon^2 A_2(q, \theta) + \dots,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(q) + \frac{v}{n_0} + \varepsilon B_1(q, \theta) + \dots, \tag{8}$$

$$\psi \equiv (\theta - vt/n_0).$$

При исследовании этой задачи мы, в сущности, используем метод Ван-дер-Поля (см., например, [7]). В данном случае задача усложняется из-за сильной нелинейности, а также из-за того, что число осцилляторов волны бесконечно. Следует заметить, что решение (7) не является общим решением задачи, так как не является решением при произвольных начальных условиях. Мы ищем решение в виде суммы двухпараметрического семейства осцилляторов, которое при начальном условии, близком к профилю нелинейной периодической волны, может с достаточной степенью точности представлять решение для случая малых ε .

Из уравнения (3) с учетом (7), выписав все члены нулевого порядка, получим функциональный вид $\omega(q)$:

$$\omega[q(u, k)] = k \left[-1 + (kn)^2 - \frac{1}{2} \frac{\sum a_{n_1} a_{n-n_1}}{a_n} \right] = -ku. \tag{9}$$

Разложим теперь функции $U_{sn}(q, \psi, vt)$ в ряд Фурье по фазе $\psi = (\theta - \frac{v}{n_0} t)$ и по времени vt :

$$U_{sn}(q, \psi, vt) = \sum_{m, l=-\infty}^{\infty} U_{sn}^{ml}(q) \exp[i(m\psi + lvt)]; \tag{10}$$

$$U_{sn}^{ml}(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int d\psi d(vt) U_{sn}(q, \psi, vt) \exp[-i(m\psi + lvt)] \quad (n \neq m); \tag{11}$$

$$U_{sn}^{n0} = 0. \tag{12}$$

Последнее условие не ограничивает общности, так как все отличные от нуля гармоники $U_{sn}^{n_0}$ могут быть включены в основную соответствующим выбором $A_s(q, \theta)$ и $B_s(q, \theta)$.

Выписав далее все члены порядка ε в уравнении для n_0 -го осциллятора, мы найдем величины $A_1(q, \theta)$ и $B_1(q, \theta)$ с учетом (12) в явном виде:

$$\left[\frac{da_{n_0}}{dq} A_1(q, \theta) + in_0 a_{n_0} B_1(q, \theta) \right] \exp \left[in_0 \left(\theta - \frac{\nu}{n_0} t \right) \right] = F e^{-lv t}; \quad (13)$$

$$A_1(q, \theta) = \frac{F}{da_{n_0}/dq} \cos n_0 \theta, \quad (14)$$

$$B_1(q, \theta) = - \frac{F}{n_0 a_{n_0}} \sin n_0 \theta.$$

Для функций U_{ln}^{ml} при $n \neq m$ получим следующую бесконечную неоднородную алгебраическую систему уравнений:

$$U_{ln}^{ml} i [m\omega + l\nu - (kn)^3] + ikn \sum_{n_1+m_1=m} a_{n_1} U_{1, n-n_1}^{m_1, l} = \varphi_n^{ml}, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{n_0}^{0, 1} &= 0, & \varphi_{-n_0}^{0, -1} &= 0, \\ \varphi_n^{ml} &= F \left[\frac{a_n n}{a_{n_0} n_0} - \frac{da_n/dq}{da_{n_0}/dq} \right] \delta_{m, n+n_0} \delta_{l, 1} - \\ &- F \left[\frac{na_n}{n_0 a_{n_0}} + \frac{da_n/dq}{da_{n_0}/dq} \right] \delta_{m, n-n_0} \delta_{l, -1} \quad (l \neq \pm 1, n \neq \pm n_0, m \neq 0). \end{aligned} \quad (16)$$

Теперь ясно, что система (15) разбивается на 3 независимые подсистемы уравнений: на 2 неоднородные подсистемы для семейств функций $U_{ln}^{n+n_0, 1}$ и $U_{ln}^{n-n_0, -1}$ и однородную подсистему уравнений для всех прочих функций. Последняя имеет тривиальное решение, которое мы и выберем. Функции $U_{ln}^{n+n_0, 1}$ и $U_{ln}^{n-n_0, -1}$ будут найдены в Приложении.

Таким образом, решение возмущенной задачи в первом приближении по ε свелось к решению всего лишь двух дифференциальных уравнений первого порядка для величин q и θ с параметрами ν и n_0 :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon F}{24k n_0^2} \frac{(1 - q^{2n_0})^2}{q^{n_0-1} (1 + q^{2n_0})} \cos n_0 \theta, \quad (17)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(q) + \frac{\nu}{n_0} - \frac{\varepsilon F}{24k^2 n_0^2} \frac{(1 - q^{2n_0})}{q^{n_0}} \sin n_0 \theta.$$

Уравнение (17) имеет, как легко проверить, следующий интеграл движения:

$$\begin{aligned} &- \int_{q_0}^q dq \frac{(\omega + \nu/n_0)}{q} \frac{n_0}{2} \frac{1 + q^{2n_0}}{1 - q^{2n_0}} = \\ &= \frac{\varepsilon F}{24k^2 n_0^2} \frac{q^{n_0} - q^{-n_0}}{2} \sin n_0 \theta + \text{const.} \end{aligned} \quad (18)$$

Как видно из (6), величина $N = -1/\ln q$ представляет собой эффективное число гармоник в нелинейной волне, т. е. число гармоник волны, а вместе с ним и ее амплитуда a , связанные соотношением (5), совершают малые колебания.

Оценим амплитуду этих колебаний из уравнения (18), разложив интеграл в ряд по ε и считая также, что $n_0/N < 1$ и $N \gg 1$.

При $\omega(q_0) \neq -\frac{\nu}{n_0}$

$$\frac{N - N_0}{N_0} \approx \frac{\delta}{12\pi^2} \frac{\alpha}{un_0} \sin n_0\theta + c_1,$$

$$\frac{a - a_0}{a_0} \approx \frac{\delta}{6\pi^2} \frac{\alpha}{un_0} \sin n_0\theta + 2c_1. \tag{19}$$

При $\omega(q_0) = -\frac{\nu}{n_0}$

$$\left(\frac{N - N_0}{N_0}\right)^2 \approx \frac{\delta}{6\pi^2} \frac{1}{n_0} \sin n_0\theta + c_2,$$

$$\left(\frac{a - a_0}{a_0}\right)^2 \approx \frac{2\delta}{3\pi^2} \frac{1}{n_0} \sin n_0\theta + 4c_2. \tag{19'}$$

Здесь $\delta \equiv \varepsilon F/N^3 k^5 = \varepsilon F/k^3 a^{3/2}$ — параметр малости задачи.

Резюмируя, можно сказать, что основной результат влияния гармонического возмущения на волну есть периодическое изменение ее профиля с частотой $\sim (n_0\omega + \nu)$. Отдельный горб волны периодически заостряется и расплывается. Кроме того, в волне появляются малые, $\sim \delta$, осцилляции разных длин волн с комбинационными частотами $(n + n_0)\omega + \nu$ и $(n - n_0)\omega - \nu$, амплитуды которых вычислены в Приложении. При этом влияние возмущения тем больше, чем ближе длина волны возмущения к длине нелинейной волны. Это физически естественный результат слабого влияния, порядка $k/n_0 k$, быстрых осцилляций внешней силы на основной медленный процесс. При приближении частоты возмущения к частоте резонансной гармоники волны амплитуда модуляции возрастает в $1/\sqrt{\varepsilon}$ раз.

Анализ импульсного по времени возмущения является гораздо более сложным, однако следует ожидать, что влияние такого возмущения может быть учтено при помощи статистических методов [3].

3. СЛУЧАЙ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

При изучении более простого случая гармонического возмущения стало ясно, что результат влияния внешнего возмущения на волну имеет две качественно различных стороны: 1) изменение параметров волны как целого и 2) появление в решении различных комбинационных гармоник, причем наиболее важным в эволюции волны является первый эффект, который мы и попытаемся выделить.

Рассмотрим уравнения для величин $H(t)$ и $\psi(t)$, где функционал

$$H\{v_n\} = -\frac{1}{2} \sum_n [1 - (kn)^2] v_n v_{-n} - \frac{1}{6} \sum_{n_1+n_2+n_3=0} v_{n_1} v_{n_2} v_{n_3}$$

в невозмущенном случае является интегралом движения, а $\psi(t)$ — фаза волны. H и ψ подчиняются следующим уравнениям движения, в которых мы удержим только старший член по ε :

$$\frac{dH}{dt} = 2\varepsilon u F a_{n_0} \sum_{s=1}^S \cos(n_0 \psi + svt); \quad (20)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(H) = -ku. \quad (21)$$

Наиболее сильное влияние возмущения мы можем ожидать при резонансе — $sv = n_0 \omega(H_s)$, где H_s — значение H , соответствующее указанному резонансу. При этом H , а с ней и $\omega(H)$ сильно изменяются. В случае гармонического возмущения, как уже было выяснено в разд. 2, легко найти интеграл движения уравнений (20) и (21)

$$\int^H dH \frac{(n_0 \omega(H) + sv)}{2\varepsilon u(H) F a_{n_0}} = \sin(n_0 \psi + svt) + \text{const.} \quad (23)$$

Разлагая (23) в ряд вблизи резонанса $H = H_s$, имеем

$$n_0 \frac{d\omega(H_s)}{dH} (H - H_s)^2 = 2\varepsilon F u(H_s) a_{n_0}(H_s) \sin(n_0 \psi + svt) + \text{const.}$$

Движение параметров волны H и ψ в этом случае происходит в некоторой ограниченной области. Максимальный размер такой области вблизи резонанса равен

$$\Delta H = H_{\max} - H_s = \sqrt{2\Psi(H_s)/n_0 \frac{d\omega(H_s)}{dH}} \quad (24)$$

или, по частоте,

$$\Delta\omega = \frac{d\omega(H_s)}{dH} \Delta H = \sqrt{\frac{2\Psi(H_s)}{n_0} \frac{d\omega}{dH}}, \quad (25)$$

где $\Psi(H) = 2\varepsilon u(H) a_{n_0}$.

Если некоторый резонанс происходит на частоте — $sv = n_0 \omega(H_s)$, то ближайший к нему резонанс будет на частоте — $(s+1)v = n_0 \omega(H_{s+1})$, причем, расстояние между резонансами по частоте равно

$$\Omega = \omega(H_s) - \omega(H_{s+1}) = \frac{v}{n_0}.$$

Уравнения типа (20), (21) изучались Арнольдом, Колмогоровым и Мозером. Было показано [8], что при достаточно малых $\delta \ll 1$ система устойчива, т. е. для нее можно построить интеграл движения в виде сходящегося ряда по степеням δ , при этом H изменяется квазипериодически в некоторой ограниченной области. Необходимое ограничение на δ для существования приближенного интеграла движения не выяснено, существует лишь жесткое условие на δ , удобное для построения теории.

В случае, когда параметр $K = \left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)^2 \gg 1$, т. е. происходит перекрытие резонансов друг с другом по частоте, движение осциллятора, описываемое уравнениями (20), (21), становится перемешивающимся [9]. При этом условия фаза $\psi(t)$ изменяется квазистохастически.

Можно предположить, что область стохастичности движения системы (20), (21) отделена от области устойчивости условием $K \sim 1$. Исследуемым уравнениям в области стохастичности можно дать любопытную

интерпретацию. Заметим, что в правой части уравнения (20) стоит сумма большого числа гармоник с различными частотами sv . Такую функцию можно представить в виде суммы δ -функций с периодом $2\pi/\nu$ при $S \gg 1$, если ширина импульса по времени много меньше характерного времени изменения величины H в среднем

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= 2\epsilon u F a_{n_0} \sum_{s=1}^S \cos(n_0\psi + sv t) \simeq \\ &\simeq 2\epsilon u F a_{n_0} \frac{\pi}{\nu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(n_0\psi) \delta\left(t - m \frac{2\pi}{\nu}\right) \quad (S \gg 1). \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь хорошо видно, что величина H периодически через большие промежутки времени $\sim 2\pi/\nu$ испытывает толчки, оставаясь приблизительно постоянной между толчками. Легко вычислить скачок ΔH_m на m -м толчке:

$$\Delta H_m = 2\epsilon u F a_{n_0} \frac{\pi}{\nu} \cos(n_0\psi_m),$$

где $n_0\psi_m$ — фаза в момент m -го толчка. При этом частота $\omega(H)$ испытывает приращение

$$\Delta\omega = \frac{d\omega}{dH} \Delta H_m.$$

Очевидно, что величина толчка существенно зависит от фазы $n_0\psi_m$. Посмотрим теперь, каково будет значение фазы ψ_{m+1} в момент $(m+1)$ -го толчка.

Если величина $K_0 = 2\pi n_0 \Delta\omega(H)/\nu \gg 1$, то к новому толчку фаза получит большое приращение также и за счет сдвига частоты при предыдущем толчке. По прошествии нескольких толчков «истинная» фаза $2\pi\{n_0\Delta\omega/\nu - [n_0\Delta\omega/\nu]\}$ «размажется» по промежутку $(0, 2\pi)$ и система как бы успеет «забыть» свою предысторию. Здесь $[z]$ — целая часть z .

Последовательность фаз $n_0\psi_m$, а вместе с ней и $\Delta H_m \sim \cos n_0\psi_m$ становятся случайными функциями времени. Нетрудно оценить время расщепления корреляций τ_c для последовательности фаз ψ_m подобно тому, как это делается в работе [10].

Получим $\tau_c = n_0/\nu \ln K_0$. В этой интерпретации поведения системы (20), (21) в области стохастичности особенно хорошо понятна аналогия движения H с броуновским движением. Параметры K и K_0 , введенные, казалось бы, на основе различных физических соображений перекрытия резонансов и толчкообразного воздействия внешней силы, совпадают с точностью до несущественного множителя. Оценим возможность выполнения неравенства $K \gg 1$ для важного случая длинных нелинейных периодических волн с большим числом фурье-гармоник ($N \gg 1$, $k \ll 1$):

$$K \simeq \delta(as)^2/u^2 n_0 N = \delta n_0 (ka)^2/\nu^2 N \gg 1. \quad (27)$$

Область стохастичности всегда существует при достаточно редких толчках ($\nu \rightarrow 0$).

4. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ

Как было указано в предыдущем разделе, величина H периодически испытывает малые изменения $\Delta H \ll 1$, пропорциональные $\cos n_0\psi$, где фаза ψ случайна. Отсюда ясно, что для статистического описания

поведения H можно ввести функцию распределения $f(H, t)$, удовлетворяющую уравнению Фоккера — Планка. Удобнее сразу записать кинетическое уравнение для функции распределения $F(I, t)$, где I связано с H посредством соотношения $\frac{dH}{dI} = \omega(H)$ и имеет смысл переменной действия.

Уравнение Фоккера — Планка для функции $F(I, t)$ имеет следующий вид (см., например, [11]):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} \langle (\Delta I)^2 \rangle \Omega \frac{\partial F}{\partial I}, \quad (28)$$

где $\langle (\Delta I)^2 \rangle$ — изменение $(\Delta I)^2$ за один толчок, усредненное по случайной фазе ψ . Остается вычислить $\langle (\Delta I)^2 \rangle$, зная

$$(\Delta I_m)^2 = \left(\frac{dI}{dH} \Delta H_m \right)^2 = (2\pi\epsilon u F a_{n_0} \cos n_0 \psi_m / \omega v)^2, \quad (29)$$

где ΔI_m — изменение действия I на m -м толчке. Отсюда

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle = (2\pi\epsilon F a_{n_0} / k v)^2. \quad (30)$$

Теперь нетрудно написать и уравнение для $f(H, t)$, учтя, что $F(I, t) = \omega f(H, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial H} \langle \Delta H \rangle \Omega f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial H^2} \langle (\Delta H)^2 \rangle \Omega f, \quad (31)$$

где

$$\langle (\Delta H) \rangle = \frac{\omega}{2} \frac{d}{dH} [\omega \langle (\Delta I)^2 \rangle] \quad (32)$$

и

$$\langle (\Delta H)^2 \rangle = \omega^2 \langle (\Delta I)^2 \rangle. \quad (33)$$

Таким образом, величина H , а вместе с ней и скорость волны u будут увеличиваться со временем в соответствии с уравнением диффузии (31).

Оценим коэффициенты $\langle \Delta H \rangle$ и $\langle (\Delta H)^2 \rangle$ для случая нелинейных волн с большим периодом $k \ll 1$, $N \gg 1$ (см. разд. 2). В этом случае

$$dH/d\omega = 2u \sqrt{\alpha} + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (34)$$

Используя (30) и (32), (33) и (34), получим

$$\begin{aligned} \langle \Delta H \rangle &= \alpha H_0 (\pi \delta k^2 / v)^2, \\ \langle (\Delta H)^2 \rangle &= \alpha H_0^2 (\pi \delta k^2 / v)^2, \\ H_0 &\equiv k u \alpha^{3/2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка для характерного времени диффузии

$$\tau_D = H_0^2 / \Omega \langle (\Delta H)^2 \rangle$$

или

$$\tau_D = n_0 v / \alpha (\pi \delta k^2)^2.$$

Следует указать, что выполнение критерия стохастичности (27) еще недостаточно для применимости уравнения (31). Необходимо также, чтобы характерное время диффузии было много больше времени между толчками $1/\nu$ и времени расщепления корреляций τ_c (см. разд. 3):

$$\tau_c/\tau_D \ll 1, \quad \tau_D \nu \ll 1. \quad (35)$$

Более сильное из неравенств (35) (это зависит от фактора $n_0/\ln K$) и условие $K \gg 1$ определяют область значений скорости волны, где применимо уравнение Фоккера — Планка:

$$\frac{N}{\delta n_0} \left(\frac{\nu}{ku} \right)^2 < \left(\frac{\alpha}{u} \right)^2 < n_0 \left(\frac{Nku}{\delta \nu} \right)^2. \quad (36)$$

При таких скоростях и амплитудах, что $(\alpha/u)^2 > (N/\delta n_0)(\nu/ku)^2$, нелинейность становится настолько малой, что локальные сепаратрисы, соответствующие отдельным резонансам, перестают перекрывать друг друга и наступает устойчивость движения в смысле Колмогорова, Арнольда [8]. В случае слишком больших амплитуд (нарушается правая часть неравенства (36)) отдельные скачки величины \dot{H} становятся настолько большими, что аналогия поведения параметров волны с броуновским движением будет уже неприменима. Однако следует заметить, что в реальных системах еще до нарушения этого условия может наступить опрокидывание волны, так что понадобятся другие уравнения для описания многопоточкового движения после опрокидывания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Существование ограниченного решения для бесконечной системы алгебраических уравнений (13) необходимо для применимости схемы приближений разд. 2. Рассмотрим, например, систему уравнений для функций $U_{ln}^{n+n_0, 1}$ (система уравнений для функций $U_{ln}^{n-n_0, -1}$ исследуется аналогично). Как известно, решение неоднородной алгебраической системы уравнений выражается в виде частного от двух определителей C_l и C :

$$U_l = C_l/C,$$

где

$$U_l \equiv U_{ll}^{l+n_0, 1},$$

C — определитель системы с элементами c_{sm} ($s, m = 0, 1, -1, 2, -2, \dots$),

$$c_{ss} = i[(s + n_0)\omega + ksa_0 - (ks)^3 + \nu],$$

$$c_{sm} = iksa_{|s-m|} \quad (s \neq m),$$

а C_l — определитель системы, в котором l -й столбец заменен столбцом свободных членов Φ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \varphi_n \equiv \varphi_n^{n+n_0, 1}.$$

Рассмотрим определители C^n и C_l^n , состоящие из первых n строк и n столбцов C и C_l . В каждом из определителей C^n и C_l^n поменяем местами l -й и n -й столбцы. Нетрудно привести каждый из определителей к треугольному виду, после чего они будут отличаться только n -м элементом диагонали:

$$\begin{aligned} C^n &= |(d_{sm})|, & C_l^n &= |(d_{sm}^l)|, \\ d_{sm} &= d_{sm}^l & (s = m \neq n), \\ d_{sm} &= 0 & (s < m), \\ d_{nn} &\neq d_{nn}^l. \end{aligned}$$

Оба определителя C^n и C_l^n равны теперь произведению их элементов, стоящих на диагонали. Совершив предельный переход $n \rightarrow \infty$, получим

$$U_l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{11} d_{22} \dots d_{nn}^l}{d_{11} d_{22} \dots d_{nn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{nn}^l}{d_{nn}}.$$

Остается вычислить d_{nn} и d_{nn}^l , а затем совершить предельный переход $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} d_{nn} &= c_{nl} - \frac{d_{n0}}{d_{00}} c_{0l} - \frac{d_{n1}}{d_{11}} c_{1l} - \dots - \frac{d_{nr}}{d_{rr}} c_{rl} - \dots - \frac{d_{n, 1-n}}{d_{1-n, 1-n}} c_{1-n, l}, \\ d_{nn}^l &= \varphi_n - \frac{d_{n0}}{d_{00}} \varphi_0 - \frac{d_{n1}}{d_{11}} \varphi_1 - \dots - \frac{d_{nr}}{d_{rr}} \varphi_r - \dots - \frac{d_{n, 1-n}}{d_{1-n, 1-n}} \varphi_{1-n}. \end{aligned}$$

Оценка всех величин, входящих в формулы (1) и (2), с учетом неравенств $N \gg 1$, $n \gg 1$ и $\alpha \ll 1$ дает

$$\begin{aligned} c_{sm} &\simeq 24 iks\alpha/N & (|s - m| \leq N), \\ c_{sm} &\simeq 12 iks |s - m| e^{-|s-m|/N} & (|s - m| > N), \\ c_{ss} &\simeq i[(s + n_0) ku - (ks)^3 + \nu], \\ d_{ll} &\simeq c_{ll}, \\ d_{nl} &\simeq c_{nl}, \end{aligned}$$

и окончательно получаем

$$\begin{aligned} d_{nn} &\simeq \frac{d_{nl} + c_{ll}}{d_{ll}}, \\ d_{nn}^l &\simeq \frac{d_{nl} \varphi_l}{d_{ll}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} U_l &\simeq \frac{\varphi_l}{c_{ll}} = - \frac{2iFla_l}{n_0 a_{n_0}} \frac{1}{[(n_0 + l) ku - (kl)^3 + \nu]} \times \\ &\times \frac{\exp(-2n_0/N) - \exp(-2l/N)}{[1 + \exp(-2n_0/N)][1 - \exp(-2l/N)]} \quad (l \neq 0, \pm n_0), \\ U_l &\simeq - \frac{iFNla_l}{24an_0 [(n_0 + l) ku - (kl)^3 + \nu]} \quad (n_0 \ll N). \end{aligned}$$

Видно, что U_1 пропорционально a_1 , так что добавка εU_1 к основному решению не искажает хвостовой части спектра нелинейной периодической волны. Влияние резонансов на высоких частотах, как уже указывалось в разд. 2, мало.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc., **A283**, 238 (1965); G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc., **A299**, 6 (1967).
2. F. P. Bretherton, C. J. R. Garrett, Proc. Roy. Soc., **A302**, 529 (1968); F. P. Bretherton, Proc. Roy. Soc., **A302**, 555 (1968).
3. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, ЖЭТФ, **56**, № 3, 1064 (1969).
4. C. S. Gardner, C. H. Su, Annual Report of Princeton Plasma Phys. Lab., **MATT-Q-24**, 329 (1966).
5. Р. З. Сагдеев, сб. Вопросы теории плазмы, Атомиздат, М., 4, 1964, стр. 20.
6. D. J. Korteweg, G. de Vries, Phil. Mag., **39**, 442 (1895).
7. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
8. В. И. Арнольд, УМН, **18**, № 6, 91 (1963).
9. Б. В. Чириков, Атомная энергия, **6**, 630 (1959).
10. Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, ЖЭТФ, **54**, № 5, 1590 (1968).
11. И. Н. Пригожин, Неравновесная статистическая механика, изд. Мир, М., 1964.

Новосибирский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 мая 1969 г.

EVOLUTION OF A NONLINEAR PERIODIC WAVE IN THE PRESENCE
OF RESONANCE DISTURBANCES

N. N. Filonenko

A consideration is given of the propagation of a nonlinear periodic wave in a medium the parameters of which vary in time and space so quickly that the resonance condition can be satisfied. For the case of one resonance, an integral of motion is derived in the vicinity of this resonance. A detailed analysis is made of the case of a large number of resonances between the disturbance and a wave. The condition is found under which the resonance effect leads to a random phase of the wave that enables one to use the statistical description of the wave evolution with time instead of dynamical.

Система уравнений (1) для случая слабых связей решалась аналитическим методом Хохлова [4], а для не малых связей и $n \leq 8$ с помощью электронной модулирующей установки для решения дифференциальных уравнений высокого порядка.

Решение системы (1) будем искать в виде

$$\begin{aligned} x_i &= A_i(t) \cos [\omega t + \varphi_i(t)], \\ \dot{x}_i &= -\omega A_i(t) \sin [\omega t + \varphi_i(t)], \end{aligned} \quad (2)$$

где $A_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ — медленно меняющиеся функции времени. Тогда для A_i и φ_i получим следующую систему укороченных уравнений:

$$\dot{A}_i = \delta A_i \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{4} A_i^2 \right) + \frac{1}{2} \alpha [A_{i-1} \cos \theta_{i-1} + A_{i+1} \cos \theta_{i+1} - 2A_i] \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \frac{1}{2} \alpha \frac{A_{i-1}}{A_i} \sin \theta_{i-1} - \frac{1}{2} \alpha \frac{A_i^2 + A_{i+1}^2}{A_i A_{i+1}} \sin \theta_i + \frac{1}{2} \alpha \frac{A_{i+2}}{A_{i+1}} \times \\ &\times \sin \theta_{i+1} + \Delta_{i+1} - \Delta_i \quad (i=1, 2, \dots, (n-1)); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \alpha \frac{A_2}{A_1} \sin \theta_1 + \Delta_1, \quad (5)$$

где $\theta_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ и $\Delta_i = \nu_i - \omega$. Внутри полосы синхронизации $\theta_i = 0$, и из уравнений (4) можно найти разности фаз между генераторами:

$$\sin \theta_{n-i} = \frac{\sum_{k=1}^{n-i} A_k^2 \sum_{k=n-i+1}^n \Delta_k A_k^2}{A_{n-i+1} A_{n-i} \sum_{k=1}^n A_k^2} - \frac{\sum_{k=n-i+1}^n A_k^2 \sum_{k=1}^{n-i} \Delta_k A_k^2}{A_{n-i+1} A_{n-i} \sum_{k=1}^n A_k^2}. \quad (6)$$

В случае слабых связей $\delta^2 < \alpha < \delta$ к уравнениям (3) — (6) можно применить метод поэтапного укорочения Хохлова [4].

Представим стационарные значения A_i в виде

$$A_i = A_{i0} + \alpha a_i, \quad (7)$$

где A_{i0} — амплитуда свободных автоколебаний i -го генератора ($\alpha=0$). Подставляя выражение (7) в (6) и пренебрегая членами порядка α , мы получим для стационарных разностей фаз выражение (6), в котором A_i заменены на A_{i0} . Поправки a_i к амплитудам генераторов легко найти, если подставить (7) в (3) и собрать члены порядка α :

$$a_i = \frac{\alpha [A_{i-1} \cos \theta_{i-1} + A_{i+1} \cos \theta_{i+1} - 2A_i]}{\delta \varepsilon_i A_i^2}. \quad (8)$$

Частоту синхронных колебаний найдем, подставляя значения $\sin \theta_i$ в (5):

$$\omega^2 = \frac{\sum_{k=1}^n A_{k0}^2 \nu_k^2}{\sum_{k=1}^n A_{k0}^2}. \quad (9)$$

На рис. 1 приведен график зависимости частоты ω синхронных колебаний в цепочке из восьми генераторов от расстройки на первом генераторе $\Delta = \nu_1 - \nu_2$, $\nu_i = \nu_2$ для $i \geq 2$. Амплитуды свободных колебаний всех генераторов одинаковы. Δ_{c1} и Δ_{c2} — соответственно максимальное и минимальное значения Δ , при которых в цепочке генераторов еще существует синхронный режим, т. е. колебания во всех генераторах происходят с одной и той же частотой. В случае слабых связей $\Delta_{c2} = -\Delta_{c1} = \Delta_c$ и Δ_c равно половине ширины полосы синхронизации в цепочке генераторов. Вне полосы синхронизации, т. е. при $\Delta > \Delta_{c1}$ или $\Delta < \Delta_{c2}$, в цепочке наблюдаются биения.

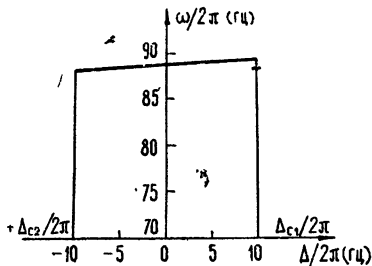


Рис. 1.

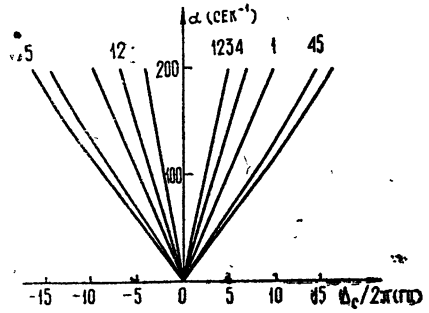


Рис. 2.

Из формулы (9) следуют два важных свойства системы (1). Во-первых, в цепочке из генераторов почти-синусоидальных колебаний в случае малых связей отсутствуют скачки частоты. Во-вторых, квадрат синхронной частоты есть среднее арифметическое от квадратов парциальных частот, взятое с весами, пропорциональными мощностям генераторов. В случае, когда мощности всех генераторов равны $A_i^2 = A_0^2$, синхронная частота колебаний лежит между верхней и нижней парциальными частотами генераторов в цепочке.

Рассмотрим зависимость ширины полосы синхронизации Δ_c цепочки генераторов от величины коэффициента связи между ними как функцию местоположения расстраиваемого генератора (или группы генераторов) в цепочке. Несколько графиков такой зависимости, полученных на электронной модели, приведено на рис. 2. Общее число генераторов в цепочке $n = 8$. Амплитуды свободных колебаний всех генераторов одинаковы. Цифрами на рис. 2 отмечены номера генераторов, частоты которых расстраиваются по отношению к остальным.

Из графиков видно, что полоса синхронизации при фиксированном коэффициенте связи существенно зависит от местоположения расстраиваемых генераторов в цепи. Влияние границы цепочки (крайний генератор связан только с одним соседним генератором) хорошо видно из сравнения графиков 1 и 5. Пятый генератор находится в середине цепочки. Ширина полосы синхронизации отличается почти в два раза.

Если в цепочке имеются две группы рядом стоящих генераторов с одинаковыми парциальными частотами в группах, то полоса синхронизации тем меньше, чем ближе отношение числа генераторов в группах к единице (случай, когда половина генераторов имеет одну парциальную частоту, а другая — другую). На рис. 2 это кривые 1, 12 и 1234. Максимальная полоса синхронизации соответствует случаю 1, а минимальная — случаю 1234. Для малых коэффициентов связи полученные на электронной модели графики хорошо согласуются с зависимостями,

найденными аналитически. Для не малых связей линейная зависимость между Δ_c и α нарушается (см. рис. 2).

На электронной модели были получены полосы синхронизации для цепочки генераторов, замкнутых в кольцо. Оказалось, что полоса синхронизации в случае 5 и 45 близка к полосе синхронизации в цепочке из восьми генераторов, замкнутых в кольцо, если расстраиваются один или два генератора соответственно. На рис. 3 приведено несколько графиков зависимости ширины полосы синхронизации Δ_c от коэффициента связи α в случае разных по мощности генераторов. (Расстраивается первый генератор по отношению к остальным, $n = 8$.) Амплитуды всех генераторов, за исключением первого, равны 4, цифры на рис. 3 обозначают амплитуду первого генератора. Как видно из рис. 3, с увеличением амплитуды первого генератора ширина полосы синхронизации уменьшается.

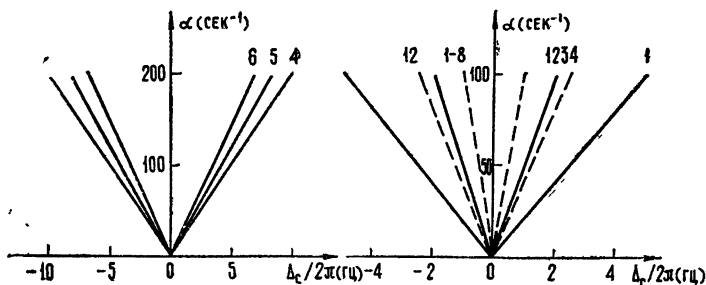


Рис. 3.

Рис. 4.

При увеличении числа генераторов в цепочке, например, в два раза (на рис. 4 пунктирные кривые соответствуют $n = 16$) полосы синхронизации при неизменном коэффициенте связи α (рассматривается только случай малых коэффициентов связи) между генераторами и прежнем отношении числа генераторов в группах сужаются вдвое. Так, графики 1 для $n = 8$ и 12 для $n = 16$ соответствуют одному отношению числа генераторов в группах — $1/8$, а полоса синхронизации в первом случае в два раза больше. Можно сравнить также 1 2 3 4 для $n = 8$ и 1—8 для $n = 16$.

В синхронном режиме распределение разностей фаз между генераторами в цепочке дается формулой (6). На рис. 5 представлено распределение разностей фаз в цепочке из восьми генераторов: $\Delta = \nu_1 - \nu_2$, $\nu_i = \nu_2$ для $i \geq 2$, $A_{i0} = A_0$. Как и следовало ожидать, максимальный сдвиг фаз наблюдается между теми двумя генераторами, между которыми максимальна расстройка по частоте. Для рассмотренного выше случая это θ_1 (см. рис. 5). При увеличении числа генераторов в цепочке и постоянном коэффициенте связи α максимальная разность фаз между генераторами растет пропорционально числу генераторов. На рис. 5 пунктиром проведена кривая зависимости разности фаз θ_2 между вторым и третьим генераторами в цепочке, у которой $n = 16$, от величины расстройки Δ (расстраиваются 1-й и 2-й генераторы). Для $n = 16$ θ_2 в два раза больше θ_1 для $n = 8$. Разность фаз между первым и послед-

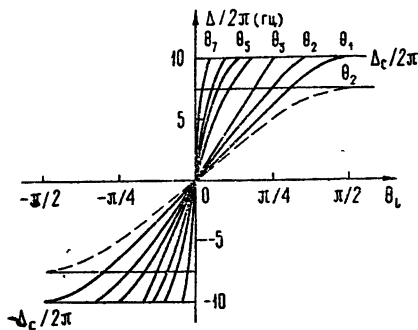


Рис. 5.

ним генераторами цепи $\varphi_n - \varphi_1$ изменяется с увеличением n более сложным нелинейным образом.

В работе [5] приведены некоторые экспериментальные результаты о протекании автоколебательной реакции окисления в длинных трубках. Если на одном из концов трубки создается локальная неоднородность, например, путем увеличения концентрации окислителя или просто есть граница рабочий раствор — газ, то из этой локальной неоднородности распространяются волны химической активности. О степени химической активности можно судить по окраске раствора.

Если моделировать трубку цепочкой связанных через диффузию генераторов, то в рамках предложенной модели можно качественно объяснить это явление. Пусть $x > 0$ соответствует окрашенному, а $x < 0$ — прозрачному раствору. Тогда, благодаря установившейся между генераторами разности фаз, $x > 0$ достигается в разных генераторах (или сечениях трубки) в разное время, что соответствует распространению волн химической активности от одного генератора к другому. Скорость распространения волн можно изменять, изменяя степень неоднородности (расстройку между генераторами, их мощности и т. п.), что согласуется с экспериментом.

Авторы глубоко признательны И. И. Минаковой и В. П. Кандидову за ценное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Марченко, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 10, № 11, 1533 (1967).
2. М. С. Полякова, Ю. М. Романовский, Г. А. Сидорова, Вестник МУ, Серия физики и астрономии, 6, 86 (1968).
3. Н. Г. Басов, Э. М. Беленов, В. С. Летохов, ЖТФ, 35, № 6, 1099 (1965).
4. Р. В. Хохлов, ДАН СССР, 97, № 3, 411 (1954).
5. А. М. Жаботинский, сб. Колебательные процессы в биологических и химических системах, изд. Наука, М., 1967.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
9 июня 1969 г.

A PROCESS OF SYNCHRONIZATION IN A CHAIN OF SELF-OSCILLATORS COUPLED BY CONDUCTIVITY

V. M. Malafeev, M. S. Polyakova, Yu. M. Romanovskii

Synchronous frequencies, stationary phase distribution and synchronization bands are found for a chain of self-oscillators coupled by conductivity with a soft self-excitation regime in the case of weak couplings.

УДК 621.385.6

**К КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТАТИЧЕСКОГО РЕЖИМА
ПЛОСКОГО МАГНЕТРОНА.
II. СОСТОЯНИЕ С ТОРМОЗЯЩИМ ПОЛЕМ НА КАТОДЕ**

В. И. Вигдорчик

Проводится исследование уравнения Пуассона для плоского магнетронного диода. Плотность электронов определяется на основе кинетической бесстолкновительной модели движения электронного газа в скрещенных полях [1]. Рассматривается случай тормозящего поля на катоде. Показано, что такое состояние пространственного заряда возможно при достаточно большой плотности тока эмиссии в далеком закритическом режиме; при этом электронная плотность убывает с удалением от катода.

Настоящая статья является продолжением работы Конторовича и автора [1], в которой изучена кинетическая бесстолкновительная модель движения электронного газа в скрещенных электрическом и магнитном полях в плоском магнетроне. В [1] найдена в явном виде функция распределения $f(\epsilon, p)$ (ϵ — энергия поперечного движения, p — обобщенный импульс) для плоского магнетронного диода. Показано, что при плотности заряда на катоде меньшей бриллюеновской и относительно небольшой температуре катода T уравнение Пуассона допускает исследование не только численными, но и аналитическими методами. В указанной работе [1] это уравнение исследовано и решено для случая, когда электрическое поле на катоде положительно (ускоряющее поле), и показано, что состояние электронного облака при этом близко к известному двухпоточному («бидромическому») режиму (см., например, [2]).

В настоящей работе рассмотрен случай тормозящего электрического поля на катоде. Из полученных распределений потенциала и плотности заряда следует, что в этом случае электронное облако локализова-

но вблизи катода в области $\sim \sqrt{\frac{2kT}{m\omega_c^2}}$, а плотность частиц в нем умень-

шается с удалением от катода. Ранее подобное распределение электронной плотности было найдено Линдсеем [3] при численном решении уравнения Пуассона при некоторых значениях магнитного поля, анодного напряжения и плотности тока эмиссии.

Установлена связь между внутренними характеристиками электронного облака (поле на катоде, характерный размер облака, поле на аноде) и внешними параметрами (магнитным полем, напряжением, плотностью тока эмиссии, температурой катода). Показано, что исследуемое состояние с тормозящим электрическим полем на катоде реализуется в плоском магнетронном диоде при магнитном поле, много большем критического, $H \gg H_{кр}$, и достаточно большой плотности тока эмиссии

$$|j_e| \approx j_k = \frac{m\omega_c}{8\pi|e|} \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}$$

1. ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Функция распределения электронов $f(\varepsilon, p, \xi)$ в плоском магнетронном диоде в канонических переменных ε (энергия поперечного движения) и p (обобщенный импульс) имеет вид [1]

$$f(\varepsilon, p, \xi) = \begin{cases} f_+ = f_e(\varepsilon) \theta(\varepsilon - \varepsilon_\xi(p)) \theta(\varepsilon - \varepsilon_0(p)) & (u_x > 0) \\ f_- = f_e(\varepsilon) \theta(\varepsilon - \varepsilon_\xi(p)) \theta(\varepsilon - \varepsilon_0(p)) \theta(\varepsilon_1(p) - \varepsilon) & (u_x < 0) \end{cases}; \quad (1.1)$$

$$u_x = \pm \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_\xi(p)}, \quad \varepsilon_0(p) = p^2, \quad \varepsilon_1(p) = (p+1)^2 - \frac{1}{h^2}, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_\xi(p) = (p + \xi)^2 - \eta(\xi).$$

Здесь разрывная θ -функция имеет вид

$$\theta(w) = \begin{cases} 1 & \text{при } w > 0 \\ 1/2 & \text{при } w = 0; \\ 0 & \text{при } w < 0 \end{cases}$$

$\eta(\xi) = \frac{2|e|\varphi(x)}{m\omega_c^2 d^2}$ — безразмерный потенциал $\varphi(x)$ в точке $\xi = \frac{x}{d}$ между катодом $x = 0$ ($\varphi(0) = 0$) и анодом $x = d$ ($\varphi(d) = \varphi_a$ — анодное напряжение); $\omega_c = |e|H/mc$ — циклотронная частота в магнитном поле H , направленном вдоль оси z ; $h = H/H_{кр}$ — отношение магнитного поля к критическому $H_{кр} = \sqrt{2mc^2\varphi_a/|e|d^2}$. В (1.1) входят также безразмерные переменные $\varepsilon = u_x^2 + u_y^2 - \eta(\xi)$ — энергия поперечного относительно оси z движения электрона, $p = u_y - \xi$ — его обобщенный импульс и $u(u_x, u_y) = \frac{1}{\omega_c} v(v_x, v_y)$ — безразмерная скорость.

Функция распределения электронов, эмиттируемых катодом [1]:

$$f_e(\varepsilon) = A \exp(-\alpha^2 \varepsilon), \quad A = \frac{2\alpha^3 |j_e|}{\omega_c d |e| \sqrt{\pi}}, \quad (1.3)$$

нормирована на плотность тока эмиссии j_e . Безразмерный параметр обратной температуры катода T [1]

$$\alpha^2 = \frac{m\omega_c^2 d^2}{2kT}, \quad (1.4)$$

который равен квадрату отношения зазора анод — катод d к тепловому циклотронному радиусу $\sqrt{2kT/m\omega_c^2}$, предполагается достаточно большим (см. (2.9) [1]):

$$1/\alpha^2 \ll 1. \quad (1.5)$$

Правая часть уравнения Пуассона, т. е. плотность электронов, определяется интегралом от функции распределения, который в переменных (ε, p) имеет в общем случае вид (см. п. 2 [1])

$$\eta''(\xi) = \frac{Q\alpha^3}{A\sqrt{\pi}} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon, p, \xi) \frac{d\varepsilon dp}{\sqrt{\varepsilon - \varepsilon_\xi(p)}}. \quad (1.6)$$

Здесь

$$Q = 8\pi e j_e / m \omega_e^2 d \quad (1.7)$$

— безразмерный параметр плотности пространственного заряда [1], а штрих означает дифференцирование по ξ .

Как показано в [1], применимость указанного решения (1.1) кинетического уравнения (1.1) [1], (1.5) [1] ограничена такими распределениями потенциала, которые удовлетворяют неравенствам (1.12) — (1.13) [1]:

$$\begin{aligned} \xi \eta'(\xi) - (\eta(\xi) + \xi^2) &\leq 0 \quad (\xi > 0), \\ \eta''(0) &\leq 2 \quad (\xi = 0). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Эти же неравенства определяют режим с плотностью пространственного заряда на катоде не больше бриллюеновской (см. (1.13а) [1]).

В пп. 3, 4 работы [1] рассмотрен частный случай режима (1.8), когда электрическое поле на катоде магнетрона положительно (ускоряющее поле): $\eta'(0) > 0$ (3.1) [1]. В настоящей работе исследован тот же режим в случае, когда поле на катоде имеет противоположный знак (тормозящее поле):

$$\eta'(0) < 0. \quad (1.9)$$

В этом состоянии энергия ε и обобщенный импульс p электрона, так же как в случае $\eta'(0) > 0$, могут в каждой точке ξ принимать только те значения, при которых $f(\varepsilon, p, \xi) \neq 0$ (см. (1.1)).

Соответствующие этому условию области на плоскости $(\varepsilon, \xi, p = \text{const})$ представлены на рис. 1 работы [1] для различных значений p . В рассматриваемом случае $\eta'(0) < 0$ при малых значениях $|p| \ll 1$, $(p > -\frac{1}{2} |\eta'(0)|)$ потенциальный барьер, т. е. та часть плоскости (ε, ξ) , где $\varepsilon_\xi(p) > \varepsilon_0(p)$ (см. (1.2)) и куда не могут попасть электроны эмиссии с энергией $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, поднимается от катода к аноду (см. рис. 11 [1]). В режиме с $\eta'(0) > 0$ при $|p| \ll 1$ ($p < \frac{1}{2} \eta'(0)$) вблизи катода барьер отсутствует (см. рис. 1в [1]).

Наиболее четко особенности функции распределения проявляются при исследовании области с $f(\varepsilon, p, \xi) \neq 0$ на плоскости $(\varepsilon, p, \xi = \text{const})$, которая показана штриховкой на рис. 1. Параболы $\varepsilon_\xi(p)$, $\varepsilon_0(p)$, $\varepsilon_1(p)$ определены в (1.2), пунктиром отмечена кривая $\varepsilon = -\eta(-p)$, по которой движется вершина параболы $\varepsilon_\xi(p)$ ($\varepsilon = -\eta(\xi)$, $p = -\xi$)*.

В режиме с $\eta'(0) < 0$ особую роль играет точка $\xi = \xi_1$, а также функция $\psi(\xi)$, которую мы ниже будем называть квази-потенциалом

$$\psi(\xi) = \eta(\xi) + \xi^2; \quad \psi(\xi_1) = 0. \quad (1.10)$$

График этой функции показан пунктиром на рис. 2**. При $0 < \xi < \xi_1$ вершина параболы $\varepsilon_\xi(p)$ лежит выше кривой $\varepsilon_0(p)$ и основной вклад в плотность электронов (1.6) дают значения ε и p вблизи этой вершины,

* Если на рис. 1 изменить направление и название осей $\varepsilon \rightarrow -\eta$, $p \rightarrow -\xi$, то пунктирная кривая окажется графиком потенциала $\eta(\xi)$.

** В случае $\eta'(0) > 0$ такая точка вообще не могла появиться, так как при этом потенциал положителен: $\eta(\xi) > 0$ при $\xi > 0$.

так как вблизи нее ε — наименьшее, а функция эмиссии максимальна. Эта ситуация показана на рис. 1.

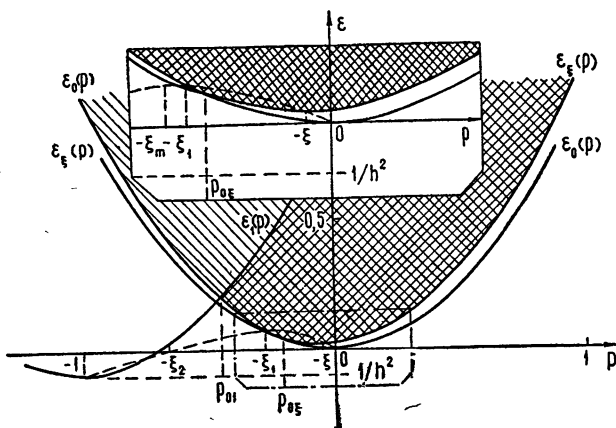


Рис. 1. Область определения $f(\varepsilon, p, \xi)$ на плоскости (ε, p) ($\xi = \text{const}$). Двойная штриховка соответствует той ее части, где $f_{\pm} \neq 0$. Пунктиром отмечена кривая $\varepsilon = -\eta(-p)$, по которой движется парабола $\varepsilon_{\xi}(p)$. Участок вблизи начала координат показан в рамке в удвоенном масштабе.

При $\xi_1 < \xi < 1$ ближайшей к оси p оказывается часть области вблизи точки пересечения парабол $\varepsilon_{\xi}(p)$ и $\varepsilon_0(p)$ (см. (2.5) [1]):

$$p = p_{0\xi} \equiv \frac{\Phi(\xi)}{2\xi}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{0\xi} \equiv p_{0\xi}^2, \quad (1.11)$$

$$\Phi(\xi) = \eta(\xi) - \xi^2.$$

Она и дает основной вклад в интеграл (1.6).

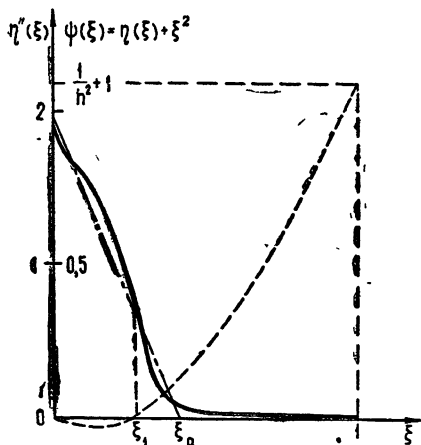


Рис. 2. Распределение плотности заряда в магнетроне с тормозящим полем на катоде (сплошная кривая). Приближенное распределение плотности показано штрих-пунктиром; пунктирная кривая — качественная зависимость квази-потенциала $\psi(\xi) = \eta(\xi) + \xi^2$ от координаты.

Отметим также некоторые общие свойства потенциала в случае $\eta'(0) < 0$. Как функция координаты $\eta(\xi)$ имеет два корня $\xi = 0$ и $\xi = \xi_2$, причем $\eta(\xi) \leq 0$, если $0 \leq \xi \leq \xi_2$, и $0 < \eta(\xi) \leq \frac{1}{h^2}$ при $\xi_2 < \xi \leq 1$. Точ-

ка минимума потенциала $\xi = \xi_m$ ($\eta'(\xi_m) = 0$) расположена дальше от катода, чем точка ξ_1 ($0 < \xi_1 \leq \xi_m < \xi_2 < 1$), так как из (1.8) следует, что $\eta'(\xi_1) \leq 0$ (см. (1.10)).

Эффективный потенциал $\Phi(\xi)$ (1.11), свойства которого были существенны в случае $\eta'(0) > 0$, в рассматриваемом состоянии никаких особенностей не имеет: $\Phi(\xi) \leq 0$ и убывает с ростом ξ .

Из того же условия (1.8) и очевидного неравенства $\eta''(\xi) \geq 0$ (плотность электронов не может быть отрицательной) можно получить существенные для дальнейшего ограничения на квазипотенциал $\psi(\xi)$:

$$1/2 \leq (\psi(\xi)/2\xi)' \leq 1. \quad (1.12)$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Исходя из общих свойств функции распределения и потенциала при $\eta'(0) < 0$, можно записать уравнение для $\eta(\xi)$ (2.6) [1] в виде (см. (1.10) и (1.11)):

$$\eta''(\xi) = 2Q\alpha \sqrt{\pi} \left[\theta \left(-\frac{\psi}{2\xi} \right) \exp(\alpha^2 \eta) + \frac{1}{2\pi} (I_0^- - K_0^- - K_1) \right], \quad (2.1)$$

где

$$I_0^- = 2 \int_{\varepsilon_{0\xi}}^{\infty} \exp(-\alpha^2 \varepsilon) \varphi_0^-(\varepsilon) d\varepsilon, \quad K_0^- = \int_{\varepsilon_{01}}^{\infty} \exp(-\alpha^2 \varepsilon) \varphi_0^-(\varepsilon) d\varepsilon,$$

$$K_1 = - \int_{\varepsilon_{01}}^{\infty} \exp(-\alpha^2 \varepsilon) \varphi_1(\varepsilon) d\varepsilon, \quad \varphi_0^- = \frac{\xi \sqrt{\varepsilon + \eta}}{2\sqrt{2\xi\varepsilon}(\varepsilon + \eta) \sqrt{p_{0\xi} \pm \sqrt{\varepsilon}}}, \quad (2.2)$$

$$\varphi_1 = \frac{-\eta + 1/h^2 + (1-\xi)\sqrt{\varepsilon + 1/h^2}}{2\sqrt{\varepsilon + 1/h^2}(\varepsilon + \eta) [\eta - 1/h^2 - (1-\xi)^2 + 2(1-\xi)\sqrt{\varepsilon + 1/h^2}]^{1/2}},$$

$$\varepsilon_{0\xi} = p_{0\xi}^2 \equiv \frac{(\eta - \xi^2)^2}{4\xi^2}, \quad \varepsilon_{01} = p_{01}^2, \quad p_{01} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h^2} - 1 \right).$$

Для исследования уравнения (2.1) необходимо воспользоваться малостью параметра $1/\alpha^2$ (см. 1.5)) в физически важном случае достаточно малой температуры катода T . Тогда интегралы I_0^- , K_0^- и K_1 (2.2) могут быть вычислены известными аналитическими методами [4]. Как видно из (2.2), интегралы K_0^- и K_1 содержат множитель $\exp(-\alpha^2 \varepsilon_{01})$, так как особенности подынтегральных функций расположены вдали от нижних пределов интегрирования.

При вычислении интеграла I_0^- основной вклад дает точка ветвления $\varepsilon = \varepsilon_{0\xi}$, совпадающая с нижним пределом интегрирования. Объединяя результаты вычисления интегралов, получим уравнение Пуассона (2.1) в виде

$$\eta''(\xi) = 2Q\alpha \sqrt{\pi} \exp(\alpha^2 \eta) \left\{ \theta \left(-\frac{\psi}{2\xi} \right) + \left[1 - 2\theta \left(-\frac{\psi}{2\xi} \right) \right] \frac{\xi}{\sqrt{2|\eta - \xi^2|}} \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \operatorname{erfc} \frac{|\psi|}{2\xi} \right) - \frac{\lambda(\xi, \eta)}{4\alpha \sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{\alpha^2 \psi^2}{4\xi^2} \right) \right\} (1 + O(\alpha^{-2})), \quad (2.3)$$

где

$$\lambda(\xi, \eta) = b(\xi, \eta) (1 - \operatorname{erf} \alpha \sqrt{\varepsilon_{01} - \varepsilon_{0\xi}}) + c(\xi^*, \eta^*) \exp \left[-\alpha^2 (\varepsilon_{0\xi}^* - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\varepsilon_{0\xi} - \frac{1}{h^2} \left. \right) \left[(1 - \operatorname{erfc} \alpha \sqrt{\varepsilon_{01}^* - \varepsilon_{0\xi}^*}), \quad b(\xi, \eta) = \frac{(\eta + \xi |p_{01}|) \sqrt{|p_{01}| + |p_{0\xi}|}}{\sqrt{2\varepsilon} |p_{01}| (\varepsilon_{01} + \eta)}, \right. \\
 & c(\xi^*, \eta^*) = \frac{(\eta^* + \xi^* |p_{01}^*|) \sqrt{|p_{01}^*| + |p_{0\xi}^*|}}{\sqrt{2\xi^*} |p_{01}^*| (\varepsilon_{01}^* + \eta^*)}, \quad \xi^* = (1 - \xi), \\
 & \eta^* = \eta - \frac{1}{h^2}, \quad p_{01}^* = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{h^2} + 1 \right), \quad \varepsilon_{01}^* = (p_{01}^*)^2, \\
 & p_{0\xi}^* = \frac{1}{2\xi^*} [\eta^* - (\xi^*)^2], \quad \varepsilon_{0\xi}^* = (p_{0\xi}^*)^2,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt$ — интеграл вероятности.

Из уравнения (2.3) следует, что в области $\xi_1 < \xi \leq 1$, где $\psi > 0$ и $\left(\alpha \frac{\psi}{2\xi}\right)^2 \gg 1$, первый член в фигурных скобках равен нулю, а последние два слагаемых содержат экспоненциально малый множитель $\exp(-\alpha^2 \varepsilon_{0\xi})$. При этом правая часть уравнения (2.3) может быть заменена нулем.

В области $0 \leq \xi \leq \xi_1$ величина $\alpha\psi/2\xi$ не может предполагаться большой: $|\alpha\psi/2\xi| \leq 1$. При этом слагаемое с $\lambda(\xi, \eta)$ имеет порядок $1/\alpha \ll 1$ (1.5) и по сравнению с суммой двух остальных может быть опущено.

С учетом сделанных замечаний запишем уравнение (2.3) в виде*

$$\eta''(\xi) = \begin{cases} 2Q\alpha \sqrt{\pi} \exp(\alpha^2 \eta) \left[1 - \frac{\xi}{\sqrt{2(\xi^2 - \eta)}} \left(1 - \operatorname{erf} \left| \alpha \frac{\psi}{2\xi} \right| \right) \right], & \text{если } 0 \leq \xi \leq \xi_1, \quad \psi \leq 0 \\ 2Q\alpha \sqrt{\pi} \exp(\alpha^2 \eta) \frac{\xi}{\sqrt{2(\xi^2 - \eta)}} \left(1 - \operatorname{erfc} \alpha \frac{\psi}{2\xi} \right), & \text{если } \xi_1 < \xi, \quad 0 \leq \frac{\alpha\psi}{2\xi} \leq 1 \\ 0, & \text{если } \xi_1 < \xi \leq 1, \quad \frac{\alpha\psi}{2\xi} \gg 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

В прикатодной области, где

$$\xi \ll |\eta'(0)| \quad (\eta(\xi) \gg \xi^2), \tag{2.6a}$$

правая часть уравнения (2.5) принимает вид

$$\eta''(\xi) = 2Q\alpha \sqrt{\pi} \exp(-\alpha^2 \xi |\eta'(0)|) \left[1 - \sqrt{\frac{\xi/2}{|\eta'(0)|}} \left(1 - \operatorname{erf} \left| \alpha \frac{\eta'(0)}{2} \right| \right) \right]. \tag{2.6б}$$

* Здесь и ниже мы для сокращения не указываем в формулах порядок отбрасываемых членов. Соответствующие неравенства приводятся или описываются в тексте.

В непосредственной близости от катода $\xi \ll 1/a^2 |\eta'(0)|$ плотность электронов зависит от ξ по закону $\gamma - \beta \sqrt{\xi}$ ($\gamma = 2Q\alpha \sqrt{\pi}$, $\beta = Q\alpha \sqrt{2\pi/|\eta'(0)|} \left[1 - \operatorname{erf} \alpha \frac{|\eta'(0)|}{2} \right]$), как и в случае положительного поля на катоде (см. п. 3 [1]). Однако при $T \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$) коэффициент γ , вообще говоря, становится экспоненциально малым, так что при $\eta'(0) < 0$ плотность у катода уменьшается медленнее, чем в случае $\eta'(0) > 0$.

В окрестности нуля квазипотенциала, где $\xi \simeq \xi_1$ и

$$|\psi| = |\eta + \xi^2| \ll \xi^2, \quad (2.7a)$$

из уравнения (2.5) находим

$$\eta''(\xi) = Q\alpha \sqrt{\pi} \exp(\alpha^2 \eta) \left[1 - \operatorname{erf} \alpha \frac{\psi}{2\xi} + O\left(\frac{|\psi|}{\xi^2}\right) \right]. \quad (2.7b)$$

Используя свойства интеграла вероятности и условия на квазипотенциал $\psi(\xi)$ (1.12), можно показать, что правая часть уравнения (2.7b) быстро уменьшается при $\xi \simeq \xi_1$ на характерном расстоянии $|\xi - \xi_1| \sim \frac{1}{\alpha}$.

Такая зависимость плотности от ξ вблизи нуля квазипотенциала $\psi(\xi)$ (1.10) для случая $\eta'(0) < 0$ аналогична поведению $\eta''(\xi)$ у границы облака $\xi \simeq \xi_0$, т. е. вблизи нуля эффективного потенциала $\Phi(\xi)$ (1.11), для случая ускоряющего поля на катоде $\eta'(0) > 0$ (см. п. 3 [1]). В этом смысле точка ξ_1 может быть названа «границей» облака для режима с тормозящим полем на катоде.

Анализ уравнения (2.5) показывает, что для удовлетворения граничным условиям на потенциал

$$\eta(0) = 0, \quad \eta(1) = \frac{1}{h^2}, \quad \eta'(0) < 0 \quad (2.8)$$

необходимо, чтобы точка ξ_1 находилась на расстоянии $\xi_1 \sim \frac{1}{\alpha}$ от катода. (Если $\xi_1 \ll \frac{1}{\alpha}$, или $\frac{1}{\alpha} \ll \xi_1 \leq 1$, то одновременно удовлетворить условиям $\eta(1) = 1/h^2 > 0$ и $\eta'(0) < 0$ невозможно). При этом плотность убывает с ростом ξ :

$$\eta'''(\xi) \leq 0.$$

Для функции $\frac{\psi}{2\xi}$ отсюда получим

$$\left(\frac{\psi}{2\xi}\right)'' \leq 0. \quad (2.9)$$

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА И ПОТЕНЦИАЛА

Поскольку точное решение в аналитическом виде уравнения Пуассона в форме (2.5) неизвестно, будем искать его приближенное реше-

* Множитель $\exp(\alpha^2 \eta)$ в (2.7b), который также дает некоторый вклад в указанной области, несколько сглаживает этот скачок плотности.

ние в каждом из рассмотренных участков межэлектродного пространства ($0 \leq \xi < \xi_1$, $\xi \simeq \xi_1$, $\xi_1 < \xi \leq 1$).

Предположим, что абсолютная величина поля на катоде не слишком мала*:

$$|\alpha\eta'(0)| \leq 1. \quad (3.1)$$

Тогда в непосредственной близости от катода

$$\xi \ll |\eta'(0)| \leq \frac{1}{\alpha^2 |\eta'(0)|} \quad (3.2a)$$

можно пренебречь зависимостью от ξ в правой части уравнения (2.6б) и считать в этой области плотность электронов постоянной. Распределение потенциала при этом оказывается квадратичным, а поля — линейным:

$$\eta(\xi) = -|\eta'(0)|\xi + q\xi^2, \quad (3.2б)$$

где

$$q = Q\alpha \sqrt{\pi}. \quad (3.3)$$

В области $\xi \simeq \xi_1$ рассмотрим приближенное решение уравнения Пуассона (2.7б). Как видно из (1.13) и (2.9), функция $\frac{\psi}{2\xi} = \frac{\eta + \xi^2}{2\xi}$ является достаточно гладкой, так что можно искать ее в виде ряда по степеням разности $\xi - \xi_1$, ограничиваясь членами не выше второго порядка ($\psi(\xi_1) = 0$):

$$\psi/2\xi \simeq (D/2)(\xi - \xi_1) - (B/2)(\xi - \xi_1)^2. \quad (3.4a)$$

Здесь D и B — положительные коэффициенты, причем $1 \leq D \leq 2$.

Используя определение $\psi = \eta + \xi^2$ (1.10), находим из (3.4a) распределение потенциала в виде

$$\eta(\xi) = D\xi(\xi - \xi_1) - B\xi(\xi - \xi_1)^2 - \xi^2. \quad (3.4б)$$

Коэффициенты D и B не являются независимыми, а связаны условием

$$\eta''(\xi_1) = q \exp(-\alpha^2 \xi_1^2),$$

которое следует из уравнения (2.7б). Подставляя в левую часть этого равенства $\eta''(\xi)$ из (3.4б), получим связь между D и B :

$$2(D - 1 - B\xi_1) = q \exp(-\alpha^2 \xi_1^2). \quad (3.5)$$

Вдали от катода $\xi_1 < \xi \leq 1$ плотность исчезающе мала, поле постоянно, а распределение потенциала линейно по ξ ($\eta(1) = \frac{1}{h^2}$):

$$\eta(\xi) = \frac{1}{h^2} + C(\xi - 1). \quad (3.6)$$

Постоянная C имеет смысл электрического поля на аноде и, в силу граничных условий на потенциал (2.8), не может быть отрицательной:

$$C \equiv \eta'(1) \geq 0. \quad (3.7)$$

* В случае $|\alpha\eta'(0)| \ll 1$ свойства подынтегральных функций в уравнении (2.1) существенно отличаются от рассмотренных выше.

Коэффициенты D , B и величины ξ_1 , $\eta'(1)$, $\eta'(0)$ могут быть найдены как функции параметров $\frac{1}{h^2}$, q , α из условий непрерывности потенциала, поля и плотности заряда в точках $0 \leq \xi_k < \xi_1$ и $\xi_1 < \xi_a < 1$, которые лежат на границах областей применимости каждой пары найденных решений (3.26), (3.46) и (3.46), (3.6)*.

Приравнявая плотность, поле и потенциал из (3.26) и (3.46) в точке $\xi = \xi_k$, а из (3.46) и (3.6) — в точке $\xi = \xi_a$, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных D , B ; ξ_k , ξ_1 , ξ_a ; $\eta'(1)$, $\eta'(0)$. Учитывая связь (3.5) между D и B , запишем решение этой системы в параметрическом виде:

$$D = 1 + \frac{q}{3} [1 - \exp(-\tau^2)], \quad B = \frac{\alpha q}{6\tau} [2 - \exp(-\tau^2)], \quad \xi_k = 0,$$

$$\xi_a = \frac{\tau}{\alpha} \frac{2}{2 - \exp(-\tau^2)}, \quad |\eta'(0)| = \frac{\tau}{\alpha} \left(1 + \frac{2}{3} q + \frac{q}{6} \exp(-\tau^2) \right),$$

$$\eta'(1) = \frac{\tau}{6\alpha[2 - \exp(-\tau^2)]} [q \exp(-2\tau^2) + 2(3 + q) \exp(-\tau^2) + 4q - 12],$$

$$\frac{1}{h^2} = \eta'(1) + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right),$$

где параметр

$$\tau = \alpha \xi_1. \quad (3.9)$$

Из найденной связи между коэффициентами приближенных решений (3.2), (3.46), (3.6) уравнения Пуассона и внешними параметрами $\frac{1}{h^2}$, $q = \alpha Q \sqrt{\pi}$, α следует, что предложенная параболическая аппроксимация функции $\psi(\xi)/2\xi$ (3.4a) в области $\xi \simeq \xi_1$ оказывается применимой вплоть до катода, так как $\xi_k = 0$. При этом плотность электронов в области $0 < \xi < \xi_a$ (см. (3.46)) убывает линейно по координате ξ (штрих-пунктирная прямая на рис. 2). Такое поведение $\eta''(\xi)$ находится в хорошем соответствии с «треугольным» распределением, найденным Линдсеєм [3] при численном решении уравнения Пуассона (сплошная кривая на рис. 2).

Каждая из первых шести формул в (3.8) вместе с последней представляет собой параметрически заданную связь соответствующего коэффициента с внешними полями, током эмиссии и температурой катода. Положение точки $\xi_1 = \frac{\tau}{\alpha}$ определяется последним уравнением из (3.8) в неявном виде.

Верхний предел изменения параметра τ находим из неравенства (3.7), которое эквивалентно условию неотрицательности анодного потенциала (см. (3.8)):

$$\tau \leq \tau_0 \equiv \tau_0(q) = \left[\ln \frac{q}{\sqrt{9 + 18q - 3q^2} - (3 + q)} \right]^{1/2}. \quad (3.10)$$

* Для качественного исследования вместо непрерывности η , η' и η'' на участках перекрытия областей применимости (см. п. 4 [1]) достаточно потребовать непрерывности этих величин в точках, где «сшиваются» решения.

Из (3.10) и очевидного неравенства $\tau = \alpha \xi_1 > 0$ следует, что в режиме с тормозящим полем на катоде параметр пространственного заряда $q = Q\alpha \sqrt{\pi}$ (1.7) может меняться в ограниченных пределах

$$6/7 < q = |j_e/j_k| \leq 1, \quad (3.11)$$

где $j_k = (m\omega_c^2/8\pi|e|) \sqrt{2kT/\pi m}$. Правое неравенство в (3.11) следует из условия малости пространственного заряда (1.8), в которое нужно подставить $\eta''(0)$ из (2.6 б) (см. также п. 4 [1]).

Используя (3.11), можно показать, что

$$0 < \tau^2 \leq \tau_0^2 \ll 1. \quad (3.12)$$

При этом связь между электрическим полем на катоде и параметром $\frac{1}{h^2}$ находим в неявном виде

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{6} \frac{\tau}{\alpha} [q \exp(-2\tau^2) + 2(3+q) \exp(-\tau^2) + 4q - 12]; \quad (3.13a)$$

$$x = \alpha |\eta'(0)| \left(1 + \frac{5}{6} q\right)^{-1}. \quad (3.13b)$$

Зависимость $\frac{1}{h^2} (|\eta'(0)|)$ (3.13 а) легко обратить, если учесть, что τ (3.13 б) меняется в узком интервале вблизи $\tau \simeq \tau_0(q)$ (см. (3.1)), причем $\frac{1}{h^2}(\tau_0) = 0$ (см. (3.13а)):

$$|\eta'(0)| = \left[\tau_0/\alpha - \frac{3}{h^2} \sqrt{2\tau_0^2(3+2q)} \right] \left(1 + \frac{5}{6} q\right). \quad (3.14a)$$

Так как $\tau_0(q)$ (3.10) является быстро меняющейся функцией величины q (3.11), то связь (3.14 а) между $\eta'(0)$ и $\frac{1}{h^2}$, q , α можно упростить, пренебрегая медленной зависимостью от q в остальных членах:

$$\eta'(0) = -\frac{11}{6} \frac{\tau_0(q)}{\alpha} + \frac{1}{h^2} \frac{11}{20\tau_0^2(q)}. \quad (3.14b)$$

Таким образом, связь между электрическим полем на катоде и внешними полями при $\eta'(0) < 0$ и $\frac{1}{h^2} \ll 1$ является линейной. С ростом плотности тока эмиссии, т. е. пространственного заряда, $\eta'(0)$ уменьшается.

Как видно из (3.11), (3.14б), изученное в работе состояние магнетронного диода с тормозящим полем на катоде может существовать, если плотность тока эмиссии близка к предельной $|j_e| \simeq j_k$: $(j_k - |j_e|)/j_k \ll 1$, а магнитное поле намного больше критического ($H \gg H_{кр}$): $0 \leq \frac{1}{h^2} \leq \frac{\tau_0^2(q)}{\alpha} \ll 1/\alpha$.

Заметим также, что уравнение (2.3) не применимо при $|\alpha\eta'(0)| \ll 1$, и этот случай малого поля на катоде требует отдельного исследования (см. также сноску на стр. 948).

В заключение автор выражает благодарность В. М. Конторовичу за интерес к работе и полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Вигдорчик, В. М. Конторович, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 12, № 12, 1882 (1969).
2. С. Я. Брауде, ЖТФ, 6, 1048 (1936).
3. P. A. Lindsay, J. Appl. Phys., 33, 3298 (1962).
4. Van der Varden, Appl. Sci. Res., B2, 33 (1951).

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
12 мая 1969 г.

ON THE KINETIC THEORY OF THE STATIC REGIME OF A PLANE
MAGNETRON. II. THE STATE WITH A HINDERING FIELD ON THE CATHODE

V. I. Vigdorchik

The Poisson's equation for a plane magnetron diode is investigated. The electron density is determined on the basis of the kinetic collisionless model of electron gas motion in the intersected fields [1]. The case of the hindering electric field on the cathode is considered. This state of the space charge is shown to be possible at sufficiently large current density of emission in a far overcritical regime, the electron density decreases as removing from the cathode
