ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 5 *РАДИОФИЗИКА* *1970*

УДК 621 372 8

ВОЗБУЖДЕНИЕ ОТКРЫТЫХ ОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДОВ

А. Б. Маненков

Рассмотрена задача о возбуждении открытых волноводов заданными источниками Полученные формулы пригодны для однородных волноводов с произвольной формой сечения и с произвольной средой. Рассмотрена задача о перерождении волн в диэлектрическом волноводе на малой неоднородности.

Рассмотрим открытый однородный волновод, при возбуждении которого происходит излучение в свободное пространство (например, диэлектрический стержень, желобковый волновод и т. д.). В таком волноводе может существовать система бегущих волн, как в закрытых волноводах [1,2]. Однако из-за неполноты указанной системы волн поля при возбуждении нельзя представить в виде разложения по этой системе. Некоторые частные задачи для волноводов с простой геометрией удается решить с помощью интегралов Фурье [3]. Задачи, сводящиеся к скалярным (двумерные задачи, а также задача о симметричном возбуждении цилиндра), рассмотрены Шевченко [4–6]. В данной статье получено решение задачи о возбуждении открытых однородных волноводов произвольного вида тем же методом, что и в работах Вайнштейна [1] На структуру волновода и расположение источников мы не будем накладывать никаких ограничений. В построенном нами решении векторной задачи нетрудно выделить члены, соответствующие волнам с малым радиационным затуханием; эти волны могут быть найдены либо точно, либо каким-нибудь приближенным методом [1]

Характер решения задачи был выяснен в [1,2]. Если открытый волновод окружить металлической оболочкой радиуса r_m, то при больших r_m в такой «закрытой» системе существуют волны, которые слабо зависят от оболочки, а также волны, которые вблизи оболочки представляют собой стоячие цилиндрические волны. Волны первого типа при $r_m \to \infty$ переходят в волны дискретного спектра. Волны второго типа переходят в волны непрерывного спектра, а разложение в ряд по этим волнам переходит в интеграл

1. СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ОТКРЫТОГО ВОЛНОВОДА

Будем рассматривать возбуждение открытого волновода (рис. 1) заданными источниками, занимающими конечный объем, т. е. решать неоднородные уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} E = ik\mu H - \frac{4\pi}{c} j^m, \quad \operatorname{rot} H = -ik\varepsilon E + \frac{4\pi}{c} j^e \tag{1}$$

(зависимость от времени полагаем в виде $\exp(-i\omega t)$, $\omega = kc$). Комплексные проницаемости ε и μ могут зависеть от поперечных полярных координат r и φ и от частоты. Волновод будем считать бесконечным и однородным вдоль оси z, причем

$$\varepsilon = \mu = 1 \quad \text{при } r > \tilde{r}, \tag{2}$$

Далее допустим, что в среде нет активных веществ, т. е. $\operatorname{Im}\varepsilon \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\mu \geqslant 0$. Функции $\varepsilon(r, \varphi)$ и $\mu(r, \varphi)$ будем предполагать непрерывными (обобщение на случай разрывных функций, а также переход к идеальному проводнику или к граничным условиям Леонтовича нетрудно сделать в окончательных результатах). Если токи отличны от нуля только в конечной области пространства, поля должны удовлетворять условиям излучения на бесконечности:

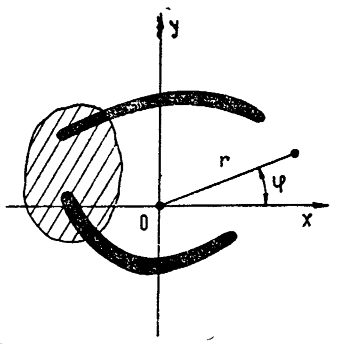

Рис. 1. Поперечное сечение открытого однородного волновода.

$$\lim_{R\to\infty} RE = \lim_{R\to\infty} RH = 0 \quad (\operatorname{Im} k > 0), \tag{3}$$

где $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$.

Введем, как и в [1], полную систему волн открытого волновода. Однородные уравнения (1) имеют решения вида

$$\begin{aligned} E_\varkappa^{(1,2)} &= E^{(1,2)}(r, \varphi; \varkappa)\exp(ih_\varkappa^{(1,2)} z), \\ H_\varkappa^{(1,2)} &= H^{(1,2)}(r, \varphi; \varkappa)\exp(ih_\varkappa^{(1,2)} z), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$h_\varkappa^{(1)} = h_\varkappa, \quad h_\varkappa^{(2)} = -h_\varkappa, \quad h_\varkappa = (k^2 - \varkappa^2)^{1/2} \tag{5}$$

и $\varkappa$ — некоторый параметр. Во всех формулах индекс 1 относится к прямым волнам, у которых $\operatorname{Im} h_\varkappa^{(1)} > 0$, а индекс 2 — к обратным. При $r > \tilde{r}$ поля можно выразить через двумерные функции Герца $\Pi_\varkappa^e(r, \varphi)$ и $\Pi_\varkappa^m(r, \varphi)$, которые являются решениями уравнений

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \varkappa^2\Phi = 0. \tag{6}$$

Собственные волны задачи (1) вводим как решения однородных уравнений вида (4), функции Герца которых при $r \to \infty$ удовлетворяют неравенствам

$$|\sqrt{r}\,\Pi_\varkappa^e| \leqslant \text{const}, \qquad |\sqrt{r}\,\Pi_\varkappa^m| \leqslant \text{const}. \tag{7}$$

Из этого множества решений выделим собственные волны непрерывного спектра с вещественными $\varkappa > 0$, функции Герца которых при $r \to \infty$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi_{\tau\varkappa}^e(r, \varphi) &\simeq g_{\tau\varkappa}^e(\varphi)/\sqrt{r}\,(e^{i\varkappa r} + \Gamma_\tau(\varkappa)\,e^{-i\varkappa r}), \\ \Pi_{\tau\varkappa}^m(r, \varphi) &\simeq g_{\tau\varkappa}^m(\varphi)/\sqrt{r}\,(e^{i\varkappa r} + \Gamma_\tau(\varkappa)\,e^{-i\varkappa r}), \end{aligned} \tag{8}$$

где τ — дискретный индекс.

Введем также собственные волны дискретного спектра, для которых $\varkappa$ принимает комплексные значения $\varkappa_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и функции Герца при $r \to \infty$ имеют вид

$$\Pi_n^e(r, \varphi) \simeq (g_n^e(\varphi)/\sqrt{r})\exp(i\varkappa_n r), \quad \Pi_n^m(r, \varphi) \simeq (g_n^m(\varphi)/\sqrt{r})\exp(i\varkappa_n r), \tag{9}$$

где $\operatorname{Im}\varkappa_n \geqslant 0$. Формулы (9) могут быть получены из (8) при $\varkappa = \varkappa_n$ с учетом того, что

$$\Gamma_{\tau_n}(\varkappa_n) = 0. \tag{10}$$

Собственные волны будем обозначать соответственно $E_{\tau\varkappa}^{(1,2)}$, $H_{\tau\varkappa}^{(1,2)}$ и $E_n^{(1,2)}$, $H_n^{(1,2)}$.

Метод введения функций (8), (9) почти дословно повторяет метод введения собственных функций при решении скалярной задачи о возбуждении открытого резонатора (см. [1], стр. 356). Однако в отличие от [1] рассматривается не одна скалярная функция, а каждой волне (4) ставится в соответствие два матричных столбца:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi}^e_\varkappa(\varphi) \\ \\ \tilde{\chi}^m_\varkappa(\varphi) \end{pmatrix} \frac{e^{-i\varkappa r}}{\sqrt{r}} + \begin{pmatrix} \chi^e_\varkappa(\varphi) \\ \\ \chi^m_\varkappa(\varphi) \end{pmatrix} \frac{e^{i\varkappa r}}{\sqrt{r}}, \tag{11}$$

в которых верхние элементы соответствуют электрической функции Герца, а нижние—магнитной. Далее определяется оператор $\hat{S}$ [1]:

$$\hat{S}\begin{pmatrix} \tilde{\chi}^e_\varkappa(\varphi) \\ \\ \tilde{\chi}^m_\varkappa(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^e_\varkappa(\varphi) \\ \\ \chi^m_\varkappa(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Функции (8), (9) получаются из собственных функций оператора $\hat{S}^{-1}$, удовлетворяющих соотношению

$$\hat{S}^{-1}\begin{pmatrix} g^e_{\tau\varkappa} \\ \\ g^m_{\tau\varkappa} \end{pmatrix} = \Gamma_\tau(\varkappa)\begin{pmatrix} g^e_{\tau\varkappa} \\ \\ g^m_{\tau\varkappa} \end{pmatrix} \tag{13}$$

($\Gamma_\tau(\varkappa)$ — собственные значения $\hat{S}^{-1}$).

Волны дискретного спектра существуют в однородной системе с диэлектриком и являются медленными волнами; поля этих волн экспоненциально убывают при $r \to \infty$. При отсутствии потерь в веществе $\varkappa_n$ принимают мнимые значения $\varkappa_n = i|\varkappa_n|$, т. е. эти волны распространяются вдоль оси z без затухания. Для продольного волнового числа $h_\varkappa$ в формуле (5) выбираем ту ветвь корня, которая в точках спектра $0 < \varkappa < \infty$, $\varkappa = \varkappa_n$ имеет $\operatorname{Im} h_\varkappa > 0$ при $\operatorname{Im} k > 0$; разрез в комплексной плоскости $\varkappa$ функции $h_\varkappa$ проведем как показано на рис. 2. Отметим, что прямые и обратные волны можно всегда выбрать так, чтобы выполнялись равенства [2]

$$\left[lE^{(2)}_{\tau\varkappa}(z)\right] = -\left[lE^{(1)}_{\tau\varkappa}(-z)\right],$$
$$\left[lH^{(2)}_{\tau\varkappa}(z)\right] = \left[lH^{(1)}_{\tau\varkappa}(-z)\right], \tag{14}$$

где l — орт вдоль оси z.

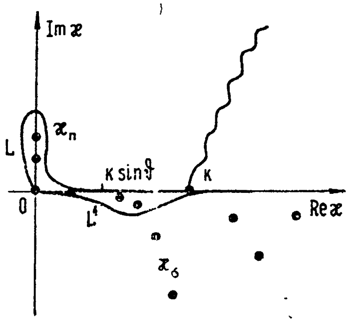

Рис. 2. Комплексная плоскость параметра $\varkappa$ (волнистой линией изображен разрез функции $h_\varkappa$).

Условие ортогональности волн выводится с помощью леммы Лоренца [2]. Рассмотрим сначала волны непрерывного спектра ($0 < \varkappa < \infty$). Обозначим через

$$I^{\alpha\beta}_{\tau\varkappa,\tau'\varkappa'}(z) = \int\limits_{z=\mathrm{const}} \left(\left[E^{(\alpha)}_{\tau\varkappa} H^{(\beta)}_{\tau'\varkappa'}\right] - \left[E^{(\beta)}_{\tau'\varkappa'} H^{(\alpha)}_{\tau\varkappa}\right]\right) l\,dS \tag{15}$$

($\alpha, \beta = 1, 2$) интеграл по поперечному сечению $z = \mathrm{const}$. Из определения следует, что

$$I^{\alpha\beta}_{\tau\varkappa,\tau'\varkappa'}(z) = I^{\alpha\beta}_{\tau\varkappa,\tau'\varkappa'}(0) \exp\left[i\left(h^{(\alpha)}_{\varkappa} + h^{(\beta)}_{\varkappa'}\right) z\right]. \tag{16}$$

Проинтегрируем тождество

$$\operatorname{div}\left(\left[E^{(\alpha)}_{\tau\varkappa} H^{(\beta)}_{\tau'\varkappa'}\right] - \left[E^{(\beta)}_{\tau'\varkappa'} H^{(\alpha)}_{\tau\varkappa}\right]\right) = 0 \tag{17}$$

по объему цилиндра с осью z между двумя плоскостями z и z' и с радиусом оснований r_0 ($r_0 \gg \tilde{r}$), преобразуя затем объемный интеграл в поверхностный. Интеграл по боковой поверхности сводится к сумме членов вида $\exp\left[\pm i(\varkappa \pm \varkappa') r_0\right]$, умноженных на функции, не имеющие особенностей при вещественных $\varkappa$ и $\varkappa'$; при $r_0 \to \infty$ этот интеграл стремится к нулю. Отсюда вытекает, что $I^{\alpha\beta}_{\tau\varkappa,\tau'\varkappa'}$ не зависит от z, поэтому в силу (16) получаем условие ортогональности

$$I^{\alpha\beta}_{\tau\varkappa,\tau'\varkappa'} = 0. \tag{18}$$

Равенство (18) может нарушаться только в том случае, когда $h^{(\alpha)}_{\varkappa} = -h^{(\beta)}_{\varkappa'}$, что при отсутствии вырождения возможно лишь при $\alpha \neq \beta$ и $\varkappa = \varkappa'$. В случае вырождения условие (18) выполняется при надлежащем выборе собственных волн.

Возьмем интеграл от (17) по объему цилиндра между двумя бесконечно близкими сечениями z и $z + \Delta z$ и перейдем опять к поверхностному интегралу. Учитывая (14), нетрудно получить соотношение (разделив на $\Delta z \to 0$)

$$I^{12}_{\tau\varkappa,\tau'\varkappa'} = \lim_{r_0 \to \infty} \frac{k r_0 (h_{\varkappa} + h_{\varkappa'})}{\varkappa^2 - \varkappa'^2} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left(\varkappa'^2 \Pi^e_{\tau'\varkappa'} \frac{\partial \Pi^e_{\tau\varkappa}}{\partial r} - \varkappa^2 \Pi^e_{\tau\varkappa} \frac{\partial \Pi^e_{\tau'\varkappa'}}{\partial r} + \varkappa'^2 \Pi^m_{\tau'\varkappa'} \frac{\partial \Pi^m_{\tau\varkappa}}{\partial r} - \right. \tag{19}$$

$$\left. - \varkappa^2 \Pi^m_{\tau\varkappa} \frac{\partial \Pi^m_{\tau'\varkappa'}}{\partial r}\right) d\varphi.$$

Отсюда, подставляя асимптотические выражения (8), имеем при вещественных положительных $\varkappa$ и $\varkappa'$

$$I^{\alpha\beta}_{\tau\varkappa,\tau'\varkappa'} = \frac{4\pi}{c} (\beta - \alpha) D_\tau(\varkappa) \delta_{\tau\tau'} \delta(\varkappa - \varkappa'), \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned} D_\tau(\varkappa) &= -\omega \varkappa^2 h_\varkappa \Gamma_\tau(\varkappa) G_\tau(\varkappa), \\ G_\tau(\varkappa) &= \int_0^{2\pi} \left[(g^e_{\tau\varkappa})^2 + (g^m_{\tau\varkappa})^2\right] d\varphi. \end{aligned} \tag{21}$$

Для волн дискретного спектра условие ортогональности имеет вид

$$I^{\alpha\beta}_{ns} = I^{\alpha\beta}_{\tau_n \varkappa_n, \tau_s \varkappa_s} = \frac{4\pi}{c} (\beta - \alpha) N_n \delta_{ns}. \tag{22}$$

Кроме того, эти волны ортогональны волнам непрерывного спектра [5]:

$$\int\limits_{z=\mathrm{const}} \left(\left[E^{(\alpha)}_{\tau\varkappa} H^{(\beta)}_n\right] - \left[E^{(\beta)}_n H^{(\alpha)}_{\tau\varkappa}\right]\right) l\, dS = 0 \tag{23}$$

при $0 < \varkappa < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$

Найдем связь между N_n и $D_\tau(\varkappa)$. Положим в правой части равенства (19) при фиксированном $r_0 \gg \tilde{r}$ $\tau = \tau' = \tau_n$, $\varkappa = \varkappa' = \varkappa_n$. Учитывая равенство (10) и переходя затем к пределу при $r_0 \to \infty$, имеем

$$N_n = \frac{i}{2\pi} \frac{dD_{\tau_n}(\varkappa_n)}{d\varkappa} = -\frac{i\omega\varkappa_n^2}{2\pi} h\varkappa_n G_{\tau_n}(\varkappa_n) \frac{d\Gamma_{\tau_n}(\varkappa_n)}{d\varkappa}. \tag{24}$$

Здесь принято во внимание, что поля волн дискретного спектра экспоненциально убывают при $r \to \infty$.

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ОТКРЫТОГО ВОЛНОВОДА

Найдем поле, возбуждаемое токами в открытом волноводе. Будем предполагать, что источники занимают конечный объем при $r < r_1$ и $z_1 < z < z_2$. Введенная выше система волн непрерывного и дискретного спектров образует полную систему вне источников [1, 2], поэтому возбуждаемое токами поле можно разложить по этой системе. Коэффициенты разложения (амплитуды) будем обозначать через $C_n^{(1,2)}$ и $C_{\tau\varkappa}^{(1,2)}$.

Применяя лемму Лоренца к искомому полю E, H и к одной из волн $E_n^{(1,2)}$, $H_n^{(1,2)}$ или $E_{\tau\varkappa}^{(1,2)}$, $H_{\tau\varkappa}^{(1,2)}$ и учитывая условия излучения, нетрудно получить (ср. [2], стр. 440)

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\alpha=1,2}\Big(\sum_n C_n^{(\alpha)} E_n^{(\alpha)} + \sum_\tau \int_0^\infty C_{\tau\varkappa}^{(\alpha)} E_{\tau\varkappa}^{(\alpha)} d\varkappa\Big) + \frac{4\pi}{i\omega\varepsilon} j_z^e\, l, \\ H &= \sum_{\alpha=1,2}\Big(\sum_n C_n^{(\alpha)} H_n^{(\alpha)} + \sum_\tau \int_0^\infty C_{\tau\varkappa}^{(\alpha)} H_{\tau\varkappa}^{(\alpha)} d\varkappa\Big) + \frac{4\pi}{i\omega\mu} j_z^m\, l, \end{aligned} \tag{25}$$

где амплитуды

$$\begin{aligned} C_n^{(1)}(z) &= \frac{1}{N_n}\int_{(z_1,\, z)} \big(j^e E_n^{(2)} - j^m H_n^{(2)}\big)\, dV, \\ C_n^{(2)}(z) &= \frac{1}{N_n}\int_{(z;\, z_2)} \big(j^e E_n^{(1)} - j^m H_n^{(1)}\big)\, dV, \\ C_{\tau\varkappa}^{(1)}(z) &= \frac{1}{D_\tau(\varkappa)}\int_{(z_1;\, z)} \big(j^e E_{\tau\varkappa}^{(2)} - j^m H_{\tau\varkappa}^{(2)}\big)\, dV, \\ C_{\tau\varkappa}^{(2)}(z) &= \frac{1}{D_\tau(\varkappa)}\int_{(z;\, z_2)} \big(j^e E_{\tau\varkappa}^{(1)} - j^m H_{\tau\varkappa}^{(1)}\big)\, dV \end{aligned} \tag{26}$$

(dV — элемент объема). В формулах (26) скобка $(z_1; z)$ означает интегрирование по всем источникам, расположенным левее данного сечения z, а скобка $(z; z_2)$ — по всем источникам правее z. Выражения (25), (26) дают решение задачи (1) о возбуждении произвольного открытого волновода в виде разложения по системе волн непрерывного и дискретного спектров.

Будем вычислять интегралы (25) в комплексной плоскости $\varkappa$, продолжая аналитически функции $E_{\tau\varkappa}^{(1,2)}$, $H_{\tau\varkappa}^{(1,2)}$ и $C_{\tau\varkappa}^{(1,2)}$. Предположим, что эти функции не имеют особенностей, кроме полюсов, вблизи вещественной полуоси $0 < \varkappa < \infty$ при $\mathrm{Im}\,\varkappa < 0$ [1]. Разрезы функции $h_\varkappa$ можно всегда провести вне этой области. Отметим, что разложения (25) можно заменить интегралами по контуру L (рис. 2), который охватывает точки дискретного спектра:

$$E = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\tau} \int_L C_{\tau\varkappa}^{(\alpha)} E_{\tau\varkappa}^{(\alpha)} d\varkappa + \frac{4\pi}{i\omega\varepsilon} j_z^e l,$$
$$H = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\tau} \int_L C_{\tau\varkappa}^{(\alpha)} H_{\tau\varkappa}^{(\alpha)} d\varkappa + \frac{4\pi}{i\omega\mu} j_z^m l. \tag{27}$$

Здесь учтено, что точки $\varkappa_n$ являются полюсами функций $C_{\tau\varkappa}^{(1,2)}$, и поэтому ряд по волнам дискретного спектра является суммой вычетов [5].

Продолжая амплитуды в область $\mathrm{Im}\,\varkappa<0$, $\mathrm{Re}\,\varkappa>0$, мы придем к полюсам функций $C_{\tau\varkappa}^{(1,2)}$, которые соответствуют корням уравнения

$$\Gamma_\tau(\varkappa) = 0. \tag{28}$$

Обозначим корни через $\varkappa_\sigma$ (σ — номер корня), а соответствующие волны через $E_\sigma^{(1,2)}$, $H_\sigma^{(1,2)}$ ($E_\sigma^{(1,2)} = E_{\tau_\sigma \varkappa_\sigma}^{(1,2)}$ и т. д.). Эти волны будем называть «квазисобственными» (см. [1], § 69) или «вытекающими» [5] волнами задачи; функции Герца этих волн при $r \to \infty$ имеют вид

$$\Pi_\sigma^e(r, \varphi) \simeq g_\sigma^e(\varphi)/\sqrt{r}\exp(i\varkappa_\sigma r),$$
$$\Pi_\sigma^m(r, \varphi) \simeq g_\sigma^m(\varphi)/\sqrt{r}\exp(i\varkappa_\sigma r) \tag{29}$$

(здесь $g_\sigma^{e,m} = g_{\tau_\sigma \varkappa_\sigma}^{e,m}$, $\mathrm{Im}\,\varkappa_\sigma < 0$). «Квазисобственные» волны затухают при $z \to \pm\infty$ даже при $\mathrm{Im}\,\varepsilon = \mathrm{Im}\,\mu = 0$, так как эти волны непрерывно излучают энергию. Вне волновода поля этих волн имеют вид конических волн, распространяющихся под углами $\vartheta_\sigma = \arcsin(\mathrm{Re}\,\varkappa_\sigma/k)$ к оси z [5]. В диэлектрическом волноводе «квазисобственные» волны формируются из-за неполного отражения лучей от границы раздела сред.

При вычислении вычетов в простых полюсах $\varkappa_\sigma$ необходимо знать величину

$$N_\sigma = \frac{i}{2\pi}\frac{dD_{\tau_\sigma}(\varkappa_\sigma)}{d\varkappa}, \tag{30}$$

которая играет роль нормы для волн $E_\sigma^{(1,2)}$, $H_\sigma^{(1,2)}$. Полагая в (19) $\tau = \tau' = \tau_\sigma$ и $\varkappa = \varkappa' = \varkappa_\sigma$, получаем

$$N_\sigma = \lim_{r_0 \to \infty e^{i\gamma}} \frac{c}{4\pi} \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \left(\left[E_\sigma^{(1)} H_\sigma^{(2)}\right] - \left[E_\sigma^{(2)} H_\sigma^{(1)}\right]\right) l r\, dr\, d\varphi, \tag{31}$$

где символ $r_0 \to \infty e^{i\gamma}$ означает, что после достижения больших r_0, при которых справедливы формулы (8), дальнейшее изменение r_0 производится в комплексной плоскости так, что $\exp(2i\varkappa_\sigma r_0) \to 0$ (ср. [1], стр. 362).

Вблизи открытого волновода в выражениях для полей (25) имеет смысл выделить «квазисобственные» волны, у которых малы $\mathrm{Im}\,h_\sigma$. Для этого контур интегрирования $(0; \infty)$ следует сместить вниз (рис. 2) и вычислить вычеты в полюсах $\varkappa_\sigma$. После этих преобразований получим

$$E=\sum_{\alpha=1,2}\Big(\sum_n C_n^{(\alpha)}E_n^{(\alpha)}+\sum_\sigma C_\sigma^{(\alpha)}E_\sigma^{(\alpha)}+\sum_\tau\int_{L'}C_{\tau\varkappa}^{(\alpha)}E_{\tau\varkappa}^{(\alpha)}\,d\varkappa\Big)+\frac{4\pi}{i\omega\varepsilon}\,j_z^e\,l,$$
$$H=\sum_{\alpha=1,2}\Big(\sum_n C_n^{(\alpha)}H_n^{(\alpha)}+\sum_\sigma C_\sigma^{(\alpha)}H_\sigma^{(\alpha)}+\sum_\tau\int_{L'}C_{\tau\varkappa}^{(\alpha)}H_{\tau\varkappa}^{(\alpha)}\,d\varkappa\Big)+\frac{4\pi}{i\omega\mu}\,j_z^m\,l, \tag{32}$$

где

$$C_\sigma^{(1)}=\frac{1}{N_\sigma}\int_{(z_1;\,z)}\left(j^e E_\sigma^{(2)}-j^m H_\sigma^{(2)}\right)dV,$$
$$C_\sigma^{(2)}=\frac{1}{N_\sigma}\int_{(z;\,z_2)}\left(j^e E_\sigma^{(1)}-j^m H_\sigma^{(1)}\right)dV. \tag{33}$$

Если интеграл по L' мал, то поле вблизи волновода определяется «квазисобственными» волнами и волнами дискретного спектра.

Рассмотрим теперь поле вдали от волновода. Введем сферическую систему координат R, ϑ и φ ($z=R\cos\vartheta$). Будем считать, что источники находятся около начала координат. Найдем асимптотическое выражение для поля методом стационарной фазы. Так как вдали от волновода поля дискретного спектра экспоненциально малы, то в формулах (25) оставим только интегралы по непрерывному спектру. Вне источников при $r>\tilde{r}$ поля выражаются через векторы Герца [2] по формулам

$$E=\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi+k^2\Pi-ik\operatorname{rot}\Pi',$$
$$H=ik\operatorname{rot}\Pi+\operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi'+k^2\Pi', \tag{34а}$$

где, например, при $z>z_2$ отличные от нуля составляющие векторов равны

$$\Pi_z=\frac{1}{2}\sum_\tau\int_{-\infty}^{\infty}C_{\tau\varkappa}^{(1)}\,\Pi_{\tau\varkappa}^e\exp(ih_\varkappa z)\,d\varkappa,$$
$$\Pi_z'=\frac{1}{2}\sum_\tau\int_{-\infty}^{\infty}C_{\tau\varkappa}^{(1)}\,\Pi_{\tau\varkappa}^m\exp(ih_\varkappa z)\,d\varkappa. \tag{34б}$$

При выводе (34 б) мы учли, что в силу симметрии уравнений (7) относительно знака у $\varkappa$ [1] имеем

$$\Pi_{\tau,-\varkappa}^e=\pm\Pi_{\tau,\varkappa}^e,\qquad \Pi_{\tau,-\varkappa}^m=\pm\Pi_{\tau,\varkappa}^m,\qquad D_\tau(-\varkappa)=D_\tau(\varkappa),$$
$$\Gamma_\tau(-\varkappa)=1/\Gamma_\tau(\varkappa),\qquad C_{\tau,-\varkappa}^{(1,2)}=\pm C_{\tau,\varkappa}^{(1,2)}. \tag{35}$$

Если выполнено условие

$$kR\sin^2\vartheta\gg1, \tag{36}$$

то в окрестностях точек стационарной фазы можно заменить функции $\Pi_{\tau\varkappa}^e$ и $\Pi_{\tau\varkappa}^m$ их асимптотическими выражениями (8). В этом случае получаем

$$\Pi_z=\sum_\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C_{\tau\varkappa}^{(1)}g_{\tau\varkappa}^e}{2\sqrt{R\sin\vartheta}}\left(e^{iR\varkappa\sin\vartheta}+\Gamma_\tau(\varkappa)\,e^{-iR\varkappa\sin\vartheta}\right)\exp(iRh_\varkappa\cos\vartheta)\,d\varkappa, \tag{37}$$

$$\Pi_z' = \sum_\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{C_{\tau\varkappa}^{(1)} g_{\tau\varkappa}^m}{2\sqrt{R \sin\vartheta}} \left(e^{iR\varkappa \sin\vartheta} + \Gamma_\tau(\varkappa) e^{-iR\varkappa\sin\vartheta}\right) \exp(iRh_\varkappa \cos\vartheta)\, d\varkappa.$$

В интегралах (37) следует выделить две точки стационарной фазы: для первых слагаемых $\varkappa = k \sin\vartheta$, а для вторых $\varkappa = -k\sin\vartheta$. Из последней формулы с учетом (35) получаем асимптотические выражения:

$$\Pi_z = \sqrt{\frac{2\pi k}{\sin\vartheta}} \frac{\exp[i(kR - \pi/4)]}{R} \cos\vartheta \sum_\tau g_{-, k\sin\vartheta}^e C_{\tau, k\sin\vartheta}^{(1)}(z_2),$$

$$\Pi_z' = \sqrt{\frac{2\pi k}{\sin\vartheta}} \frac{\exp[i(kR - \pi/4)]}{R} \cos\vartheta \sum_\tau g_{\tau, k\sin\vartheta}^m C_{\tau, k\sin\vartheta}^{(1)}(z_2). \tag{38}$$

Аналогичные выражения получаются и при $z < z_1$.

Найдем среднее значение радиальной компоненты вектора Умова—Пойнтинга $\overline{S}_R$ излучаемого поля вне волновода. В сферической системе координат, пренебрегая членами порядка $(kR)^{-2}$, нетрудно получить из (34) выражения для полей (ср. [2], стр. 432)

$$E_\vartheta = H_\varphi = -k^2 \Pi_z \sin\vartheta, \quad E_\varphi = -H_\vartheta = -k^2 \Pi_z' \sin\vartheta, \tag{39}$$

поэтому имеем

$$\overline{S}_R = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(E_\vartheta H_\varphi^* - E_\varphi H_\vartheta^*) = \frac{ck^4}{8\pi}(|\Pi_z|^2 + |\Pi_z'|^2)\sin^2\vartheta. \tag{40}$$

При $\vartheta \simeq \vartheta_\sigma$ вблизи точек стационарной фазы может находиться полюс $\varkappa_\sigma$ коэффициента $C_{\tau\varkappa}^{(1)}$. В этих направлениях поле излучения возрастает, если мнимая часть $\varkappa_\sigma$ мала. Такое возрастание обязано «квазисобственной» волне, поле которой вне волновода представляет собой совокупность лучей, распространяющихся под углом ϑ_σ к оси z [5]. Для этих ϑ асимптотические выражения полей в виде (38) справедливы при более сильном условии

$$kR\left|\sin\vartheta - \frac{\varkappa_\sigma}{k}\right|^2 \gg 1, \tag{41}$$

которое означает, что полюс $\varkappa_\sigma$ находится вне окрестности, дающей основной вклад в интегралы (35).

Рассмотрим физический смысл неравенства (41) Пусть $\sin\vartheta \sim 1$, тогда из (41) получаем при $k\sin\vartheta \simeq \operatorname{Re}\varkappa_\sigma$

$$R \gg k(\operatorname{Im}\varkappa_\sigma)^{-2}. \tag{42}$$

«Квазисобственная» волна $E_\sigma^{(1)}$, $H_\sigma^{(1)}$ затухает на расстоянии $(\operatorname{Im}\varkappa_\sigma)^{-1}$. На этом расстоянии происходит излучение этой волны, возбуждаемой источниками. Таким образом, последнее неравенство означает, что точка наблюдения должна находиться в «дальней зоне» для излучающего участка волновода длины $(\operatorname{Im}\varkappa_\sigma)^{-1}$, когда поле излучения формируется в сферическую волну. Вблизи углов ϑ_σ поле излучения определяется формулами

$$\Pi_z = \sqrt{\frac{k}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{\exp\left[i\left(kR + \pi/4\right)\right] g^e_\sigma(\varphi) \cos \vartheta}{RN_\sigma\left(k \sin \vartheta - \varkappa_\sigma\right)} \int\limits_{(z_1,\, z_2)} \left(j^e E^{(2)}_\sigma - j^m H^{(2)}_\sigma\right) dV,$$

$$\Pi'_z = \sqrt{\frac{k}{2\pi \sin \vartheta}} \frac{\exp\left[i\left(kR + \pi/4\right) g^m_\sigma(\varphi) \cos \vartheta\right.}{RN_\sigma\left(k \sin \vartheta - \varkappa_\sigma\right)} \int\limits_{(z_1;\ z_2)} \left(j^e E^{(2)}_\sigma - j^m H^{(2)}_\sigma\right) dV \quad (43)$$

и имеет резонансный знаменатсль ($k \sin \vartheta - \varkappa_\sigma$).

3. ПЕРЕРОЖДЕНИЕ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОСТИ В ОТКРЫТОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим задачу о перерождении медленной волны (в общем случае несимметричной), распространяющейся в диэлектрическом стержне, на малой неоднородности. Пусть имеем стержень произвольного сечения, диэлектрическая проницаемость которого равна

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(r,\ \varphi\right) + \Delta\varepsilon\left(r,\ \varphi,\ z\right) \qquad \left(|\Delta\varepsilon| \ll |\varepsilon_0|\right). \quad (44)$$

Будем считать, что изменение ε происходит только в небольшом объеме вблизи начала координат. Слева из бесконечности ($z = -\infty$) распространяется собственная волна $E^{(1)}_1$, $H^{(1)}_1$.

Уравнения для полей можно записать в виде

$$\operatorname{rot} E = ikH, \quad \operatorname{rot} H = -ik\varepsilon_0 E + \left(-ik\Delta\varepsilon E\right). \quad (45)$$

Будем разлагать решение этих уравнений по системе волн регулярного волновода, у которого $\Delta\varepsilon \equiv 0$ [7]. В этом случае второе слагаемое ($-ik\Delta\varepsilon E$) будет играть роль стороннего тока. Положим $j^e = -\frac{i\omega}{4\pi}\Delta\varepsilon E^{(1)}_1$, считая, что поле в первом приближении не изменяется. На неоднородном участке волновода происходит возбуждение паразитных волн и сферической волны. Пусть нерегулярный участок находится при $z_1 < z < z_2$, тогда амплитуды волн дискретного спектра, распространяющихся от неоднородности, равны

$$C^{(\alpha)}_n = -\frac{i\omega}{4\pi N_n} \int\limits_{(z_1;\, z_2)} \Delta\varepsilon\, E^{(1)}_1 E^{(3-\alpha)}_n\, dV \qquad (n = 2,\ 3,\ \ldots). \quad (46)$$

Таким образом, мы находим коэффициент отражения от нерегулярного участка и коэффициенты преобразования волны $E^{(1)}_1$, $H^{(1)}_1$ в другие медленные волны.

Найдем долю энергии, которая уходит при преобразовании на неоднородности волновода в виде поля излучения. Диаграмма направленности сферической волны дается выражением (38). Основная часть излучения распространяется по направлениям ϑ_σ и $\pi - \vartheta_\sigma$. Будем считать, что выполнено условие (41), т. е. «квазисобственные» волны излучились из волновода. Интегрируя равенство (40) по всем направлениям $\vartheta \neq 0$ и $\vartheta \neq \pi$, для потока энергии, уносимой сферической волной, получим выражение

$$\frac{c^3 k^6}{4^4 \pi^3} \sum_\sigma \frac{\sin^2 \vartheta_\sigma \cos \vartheta_\sigma}{|N_\sigma|^2 \operatorname{Im} \varkappa_\sigma} \int\limits_0^{2\pi} \left(|g^e_\sigma|^2 + |g^m_\sigma|^2\right) d\varphi \times$$
$$\times \left(\Big|\int\limits_{(z_1;\, z_2)} \Delta\varepsilon\, E^{(1)}_1 E^{(1)}_\sigma\, dV\Big|^2 + \Big|\int\limits_{(z_1;\, z_2)} \Delta\varepsilon\, E^{(1)}_1 E^{(2)}_\sigma\, dV\Big|^2\right). \quad (47)$$

В формуле (47) сумма берется по всем значениям σ, у которых корни имеют малые мнимые части и $0 < \mathrm{Re}\,\varkappa_\sigma < k$ (выражение для потока энергии (47) справедливо только в том случае, когда излучением в направлениях $\vartheta \neq \vartheta_\sigma$ и $\vartheta \neq \pi - \vartheta_\sigma$ можно пренебречь).

Таким образом, при решении задачи о возбуждении открытого волновода поле разлагается по полной системе бегущих волн непрерывного и дискретного спектров. Основной вклад в возбуждаемое поле около волновода вносят медленные собственные волны и быстрые «квазисобственные» волны с малым затуханием. Вдали от оси волновода поле имеет вид сферической волны, распространяющейся от источников. Диаграмма излучения этой волны имеет максимумы вблизи направлений излучения «квазисобственных» волн.

Присутствие поля излучения приводит к тому, что в открытой системе источники всегда излучают часть энергии в стороны. В закрытом же волноводе с идеально проводящими стенками в случае ортогональности токов и полей распространяющихся волн мощность не отбирается от источников.

Следует отметить, что в некоторых волноводах, например, в канале в диэлектрике [8], «квазисобственные» волны являются единственными волнами, которые могут эффективно переносить энергию. Поэтому такие системы обладают волноводными свойствами за счет этих волн (см. также [9, 10]).

Автор выражает благодарность П. Л. Капице за обсуждение работы, Л. А. Вайнштейну за постановку задачи и редактирование статьи. Автор признателен Б. З. Каценеленбауму и А. Д. Шатрову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, изд. Сов. радио, М., 1966.
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, изд. Сов радио, М., 1957.
3. Б З. Каценеленбаум, ЖТФ, 19, № 10, 1168 (1949).
4. В. В Шевченко, Акуст. ж., 9, № 2, 215 (1963).
5. В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 9, № 1, 110 (1966)
6 В. В. Шевченко, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 2, 260 (1967).
7. В. Б. Бродский, Радиотехника и электроника, 3, № 5, 628 (1958).
8. E. A. J. Marcatili, R. A. Schmeltzer, BSTJ, 43, № 4(2), 1783 (1964).
9. В. Н. Мелехин, А. Б. Маненков, ЖТФ, 38, № 12, 2113 (1968).
10 В. Н. Мелехин, А. Б. Маненков, сб. Электроника больших мощностей, 6, изд. Наука, М, 1969, стр. 161.

Институт физических проблем
АН СССР

Поступила в редакцию
25 апреля 1969 г

EXCITATION OF OPENED HOMOGENEOUS WAVEGUIDES

A. B. Manenkov

The problem on excitation of opened waveguides by the given sources is considered. The formulas obtained are used for homogeneous waveguides with arbitrary-form section and arbitrary medium. The problem of the wave transformation in the dielectric waveguides on a small irregularity is considered.