

УДК 538.56

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ВНЕШНЕЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА

Е. Н. Васильев, В. Г. Каменев

Сравниваются два интегральных уравнения, описывающих внешнюю электродинамическую задачу для идеально проводящего тела с точки зрения их пригодности для численного решения. Дается алгоритм решения одного из уравнений, обеспечивающий высокую точность решения как вблизи от особых точек уравнения, так и вдали от них.

Рассматривается внешняя электродинамическая задача для идеально проводящего тела в следующей постановке. Требуется найти решение неоднородных уравнений Максвелла в области, внешней по отношению к объему V , удовлетворяющее условию излучения и граничному условию. Наиболее общим граничным условием будет требование обращения в нуль поля внутри области V .

Одним из возможных способов численного решения этой задачи является сведение ее к интегральному уравнению с последующим численным решением последнего. Ниже анализируются два интегральных уравнения второго рода с точки зрения пригодности их для численного решения.

При составлении интегральных уравнений для задачи дифракции полное поле обычно представляется в виде суперпозиции первичного, т. е. поля сторонних источников в свободном пространстве, и вторичного, т. е. поля, рассеянного телом.

Вторичное поле может быть представлено различными способами. Наиболее естественным является представление вторичного поля как поля истинных электрических токов, текущих по поверхности Σ , ограничивающей тело V . Однако то же поле можно записать и как поле некоторого распределения магнитных токов на той же поверхности.

Представим вторичное поле в виде поля магнитных токов и применим граничное условие

$$[n, E]_{\Sigma_e} = 0. \quad (1)$$

Здесь Σ_e — внешняя сторона поверхности Σ , n — внешняя нормаль к поверхности Σ , E — полное электрическое поле. С учетом того, что электрическое поле имеет разрыв первого рода на листе магнитного тока, (1) приводит к интегральному уравнению [1–3]

$$J^M(p) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \left[n(p), \left[J^M(q), \text{grad} \frac{e^{-i\rho}}{\rho} \right] \right] d\sigma_q = -2 J^M \text{перв}(p), \quad (2)$$

$$p \in \Sigma, \quad q \in \Sigma,$$

в котором p — точка наблюдения, q — точка интегрирования, $J^M(p)$ — искомая плотность тока, ρ — расстояние между точками p и q , $J^M \text{перв} = -[n, E \text{перв}]$, $E \text{перв}$ — первичное электрическое поле. В уравнении (2)

и всюду ниже все пространственные координаты и расстояния предполагаются нормированными, т. е. умноженными на волновое число.

Ядро интегрального уравнения (2) имеет особенность при совпадении точек p и q . Однако несобственный интеграл от ядра сходится абсолютно, поэтому к уравнению (2) полностью применимы теоремы Фредгольма [4].

Заметим, что задача внутреннего возбуждения объема V с граничным условием вида (1), но примененным на внутренней стороне поверхности Σ , приводит к интегральному уравнению, отличающемуся от (2) только знаком внеинтегрального члена $J^M(p)$.

Уравнение (2) подробно изучено [1-3]. В частности, показано, что решение его существует и единственно тогда и только тогда, когда объем V нерезонансный. При этом имеет место первый случай альтернативы Фредгольма для уравнения (2) [4]. Если объем V резонансный, т. е. частота колебаний такова, что в нем могут существовать собственные колебания (с граничным условием (1), примененным на поверхности Σ), то имеет место второй случай указанной альтернативы, и решение интегрального уравнения (2) не существует. Чтобы удовлетворить условию существования решения в резонансной точке, приходится видоизменять уравнение (2), вводя в его правую часть токи, соответствующие собственным колебаниям в области V [1-3].

Рассмотрим теперь второе уравнение. Оно выводится в предположении, что по поверхности текут электрические токи. Применение граничного условия

$$[n, H]_{\Sigma_i} = 0, \quad (3)$$

где Σ_i — внутренняя сторона поверхности Σ , H — суммарное магнитное поле, сводит задачу к интегральному уравнению [5]

$$J^s(p) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \left[n(p), \left[J^s(q), \text{grad} \frac{e^{-i\rho}}{\rho} \right] \right] d\sigma_q = 2J^s \text{ перв}(p), \quad (4)$$

$$p \in \Sigma, \quad q \in \Sigma.$$

В уравнении (4) $J^s(p)$ — искомый электрический ток, $J^s \text{ перв} = [n, H^{\text{перв}}]$, $H^{\text{перв}}$ — первичное магнитное поле.

Уравнение соответствующей внутренней задачи так же, как и в случае уравнения (2), отличается от (4) только знаком внеинтегрального члена $J^s(p)$.

Уравнение (4) изучено менее подробно, чем (2), хотя оно безусловно заслуживает внимания. Так же, как и (2), уравнение (4) имеет особые точки, связанные с резонансом внутренней области. Это можно видеть из совпадения ядер уравнений (2) и (4).

Наличие особых точек у уравнения внешней задачи, связанных с резонансами внутренней области, на первый взгляд кажется неестественным. Тем не менее их происхождение связано с очень простым фактом. Действительно, граничным условием для идеально проводящего тела является обращение в нуль поля внутри него (в области V для внешней задачи). Из этого условия вытекают (1) и (3), однако обратное утверждение не всегда верно. Если объем V нерезонансный, то с помощью теоремы Пойнтинга нетрудно показать, что из (1) и (3) следует равенство нулю поля внутри области V . При наличии резонанса в объеме V могут существовать собственные колебания, и из (1) и (3) не следует равенства нулю поля в объеме V . Таким образом, при резонансе области граничные условия (1) и (3) должны быть дополнены условием, исключающим собственные колебания в этой области.

Ситуация с уравнением (2) еще сложнее. Решение этого уравнения дает истинное поле только во внешней области (что, впрочем, и требуется). Поле оказывается не равным нулю внутри V даже при отсутствии резонанса.

В отличие от (2), решение уравнения (4) при резонансе внутренней области существует, хотя и не является единственным. Не останавливаясь на доказательстве этого факта подробно, наметим его основные моменты. Как следует из теорем Фредгольма [4], условием существования решения интегрального уравнения в особой точке является ортогональность его правой части (функция $J^{\text{перв}}(\rho)$ в (4)) к решениям однородного интегрального уравнения, союзного с (4). Методом, подобным примененному в [2], нетрудно показать, что союзное интегральное уравнение совпадает с однородным интегральным уравнением для электрического тока и внутренней задачи. Решениями его являются электрические токи, соответствующие собственным колебаниям области V при граничном условии (1). Далее используется квадратичное соотношение [6]

$$\int_{\Sigma} \left\{ [H_1, H_2] - \frac{\varepsilon}{\mu} [E_1, E_2] \right\} d\sigma = \int_V \left(j_1^{\text{перв}} H_2 - j_2^{\text{перв}} H_1 + \frac{\varepsilon}{\mu} j_1^{\text{перв}} E_2 - \frac{\varepsilon}{\mu} j_2^{\text{перв}} E_1 \right) dv. \quad (5)$$

Предполагается, что одно из полей есть поле собственной волны в V , а второе—первичное поле. Тогда поверхностный интеграл представляет собой скалярное произведение решения однородного союзного уравнения и правой части уравнения (4), а объемный интеграл обращается в нуль. Действительно, поле собственной волны удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла, а источники первичного поля находятся вне области V . Таким образом, условие ортогональности правой части уравнения (4) к решениям союзного интегрального уравнения выполняется, и решение (4) всегда существует. При доказательстве существенно используется то, что правая часть (4) не произвольна и является полем, удовлетворяющим уравнениям Максвелла.

Уравнения (2) и (4) позволяют построить простые алгоритмы для решения внешней электродинамической задачи с использованием приближенной замены интегрального уравнения системой линейных алгебраических уравнений. Наиболее просто это делается в случае цилиндрических тел или тел вращения, когда интегральные уравнения (2) и (4) можно свести к одномерным. В частности, интегральное уравнение для осесимметричного возбуждения тела вращения волной ТМ, полученное из (4), имеет вид [7]

$$J_v^{\text{перв}}(v) + \int_0^L P(v, v') J_v^{\text{перв}}(v') dv' = 2 J_v^{\text{перв}}(v), \quad (6)$$

где v — длина дуги меридиональной линии тела. Ядро определяется формулой

$$P(v, v') = - \frac{\partial S_1}{\partial n} - S_1 \sin \theta. \quad (7)$$

В формуле (7) функция S_m , подробно описанная в [8], определяется выражением

$$S_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-i \sqrt{(z-z')^2 + R^2 + (R')^2 - 2RR' \cos \psi} - im\psi)}{\sqrt{(z-z')^2 + R^2 + (R')^2 - 2RR' \cos \psi}} d\psi.$$

Здесь и в (7) z, R, z', R' — нормированные (умноженные на волновое число) цилиндрические координаты точек v и v' соответственно; θ' — угол между направлением внешней нормали n в точке v' и осью z , совпадающей с осью вращения тела.

При численном решении интегрального уравнения его, как правило, тем или иным путем сводят к системе линейных алгебраических уравнений. Наиболее простым и вместе с тем пригодным в случае неограниченных ядер методом является метод Крылова и Боголюбова. Он заключается в том, что интервал интегрирования в (6) делится на N подынтервалов, и на каждом подынтервале искомая функция полагается постоянной и выносится за знак интеграла. После этого координате v дается N значений в серединах интервалов, и интегральное уравнение (6) приближенно сводится к следующей системе уравнений:

$$J_v^3(v_s) + \sum_{l=1}^N J_v^3(v_l) C(v_s, v_l) = 2 J_v^3 \text{перв}(v_s) \quad (s=1, 2, \dots, N), \quad (8)$$

где

$$C(v_s, v_l) = \int_{v_l - \Delta v_l / 2}^{v_l + \Delta v_l / 2} P(v_s, v') dv',$$

Δv_l — длина интервала, в пределах которого искомый ток считается постоянной величиной

Совершенно так же можно свести к системе линейных алгебраических уравнений интегральное уравнение относительно магнитных токов.

В неособых точках численные методы, основанные на (2) и (4), более или менее эквивалентны. В особых точках положение резко меняется. В правую часть уравнения (2) приходится добавлять дополнительный член, нахождение которого, в случае произвольной формы области V , представляет собой сложную самостоятельную задачу.

В этой ситуации использование уравнения (4) дает заметное преимущество. Поскольку уравнение (4) не видоизменяется в особой точке, то в частном случае осесимметричной ТМ волны остаются неизменными уравнение (6) и система (8). Однако при решении системы линейных алгебраических уравнений (8) вблизи особой точки происходит потеря точности, так как определитель системы близок к нулю. Чтобы избежать этого, следует добавить условие, ликвидирующее неоднозначность решения уравнения (4) и его частного случая (6).

Как указывалось выше, источником неоднозначности является наличие собственных колебаний во внутренней области. Поэтому дополнительным условием, обеспечивающим однозначность решения интегрального уравнения, может быть условие, требующее обращения в нуль поля во внутренней области. Наиболее удобным с точки зрения простоты алгоритма вычислений является требование обращения в нуль поля H в нескольких внутренних точках области V . Собственно говоря, в случае невырожденных колебаний во внутренней области достаточно потребовать равенства нулю поля в одной точке, не совпадающей с узлом (нулем) собственной функции. Введение условий, требующих равенства нулю поля в нескольких точках, обеспечивает однозначность и при наличии вырождения.

По форме дополнительное условие очень мало отличается от интегрального уравнения (4) или, в частном случае осесимметричной ТМ волны, от (6). Оно записывается так же, однако отсутствует внеинтегральный член, и точка v пробегает несколько фиксированных значений внутри области V . В системе линейных алгебраических уравнений (8) дополнительное условие представляет собой несколько дополнительных

уравнений, по форме таких же, как и остальные, но без свободного члена в левой части. Таким образом, система линейных алгебраических уравнений, приближенно эквивалентная уравнению (6) с дополнительным условием, имеет вид

$$J_v^s(v_s) + \sum_{l=1}^N J_v^s(v_l) C(v_s, v_l) = 2 J_v^s \text{перв}(v_s) \quad (s=1, 2, \dots, N),$$

$$\sum_{l=1}^N J_v^s(v_l) C(v_s^{\text{вн}}, v_l) = 2 J_v^s \text{перв}(v_s^{\text{вн}}) \quad (s=N+1, \dots, N+n).$$

Индекс «вн» у $v_s^{\text{вн}}$ означает, что точка $v_s^{\text{вн}}$ находится внутри области V , а не на поверхности тела. Нетрудно заметить, что матрица системы (10) прямоугольная.

Алгоритм решения внешней электродинамической задачи, основанный на использовании системы (10), одинаково хорошо работает как при наличии, так и при отсутствии резонанса. Когда резонанса внутренней области нет, первые N уравнений системы (10) с определенной степенью точности обеспечивают равенство нулю поля в объеме V , поэтому дополнительные условия, хотя и являются излишними, не делают систему (10) несовместной. Для решения таких систем существует стандартная методика [10], которая состоит в обработке системы (10) по методу наименьших квадратов.

Если область V резонансная, но без вырождения, то равенство нулю поля внутри V обеспечивает N первых уравнений плюс одно дополнительное условие. Тогда оставшиеся $n-1$ дополнительных условий излишни, но не нарушают совместности системы.

Такая же ситуация имеет место при вырождении, если дополнительных условий взято достаточно много. Заметим, что при относительно небольших электрических размерах области V (а рассматриваемый алгоритм эффективен только при этом условии) вырождение вообще представляет собой крайне редкий случай, а кратное вырождение — тем более.

Проиллюстрируем сказанное на примере осесимметричного возбуждения идеально проводящего шара поперечной щелью. Эта задача удобна тем, что помимо численного, для нее можно получить аналитическое решение методом собственных функций. Кроме того, для шара нетрудно найти радиус, соответствующий резонансу внутренней области. При рассматриваемом возбуждении наименьшее значение нормированного (умноженного на волновое число) радиуса, при котором имеет место резонанс, составляет $a = 4,49$. При этом следует иметь в виду, что внешнему возбуждению ТМ волной соответствуют резонансы ТЕ волны внутренней области.

Расчет проводился с помощью алгоритма, основанного на решении системы (8) (рис. 1), и с помощью алгоритма, основанного на решении системы (10) (рис. 2). Затем оба решения сравнивались с решением, полученным по методу собственных функций.

Расчет распределения токов по поверхности шара методом собственных функций затруднен из-за плохой сходимости рядов, поэтому сравнение с методом собственных функций проводилось по характеристикам излучения в дальней зоне.

На рис. 1а и 2а показано распределение тока I для трех значений радиуса шара $a = 4,00; 4,40; 4,49$. Кольцевая возбуждающая щель во всех случаях была расположена при $\theta = 87,5^\circ$ и имела угловой размер $\Delta\theta = 5^\circ$.

Из сравнения рис. 1а и рис. 2а видно, что в нерезонансном случае ($a = 4,00$, кривая 2; $a = 4,40$, кривая 3) результаты расчета по обоим алгоритмам совпадают. В резонансном случае (кривая 1) имеется резкое расхождение.

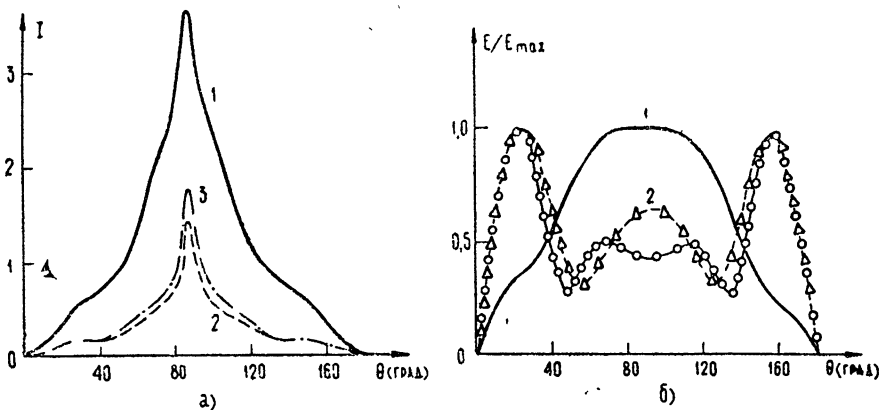


Рис. 1. Распределение тока и характеристики излучения кольцевой щели на шаре:

1— $\circ\circ\circ$ — характеристика излучения, рассчитанная методом собственных функций ($a = 4,49$); 2— $\Delta\Delta\Delta$ — то же для $a = 4,0$.

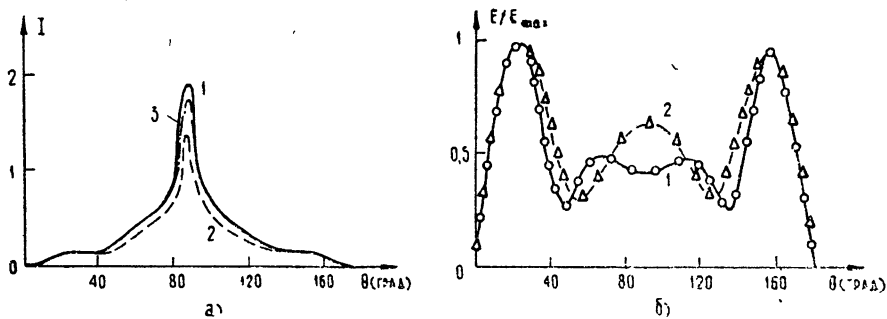


Рис. 2. Распределение тока и характеристики излучения кольцевой щели на шаре:

1— $\circ\circ\circ$ — характеристика излучения, рассчитанная методом собственных функций ($a = 4,49$); 2— $\Delta\Delta\Delta$ — то же для $a = 4,0$.

На рис. 1б приведены характеристики излучения поля в дальней зоне для двух значений радиуса шара $a = 4,00$; $4,49$. При $a = 4,00$ расчет, основанный на решении системы (8) (пунктирная кривая), полностью совпадает с результатами расчета по методу собственных функций (треугольники). В резонансном случае кривые имеют разный характер (сплошная кривая — расчет, основанный на решении системы (8), кривая с кружочками — метод собственных функций), так что о количественном совпадении не приходится говорить.

Те же результаты, но вычисленные с помощью модифицированного метода, т. е. с дополнительными условиями (система (10)), приведены на рис. 2б. Здесь никакой потери точности нет. Введение одного, двух и четырех дополнительных уравнений в системе (10) дало практически одинаковые результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд. Мир, М., 1964.
2. С. Muller, Math. Annalen, 123, № 4, 345 (1951).
3. С. Muller, Math. Zeitschrift, 56, № 3, 80 (1952).
4. И. Г. Петровский, Лекция по теории интегральных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
5. А. Мауэ, Zs. f. Physik., 126, 606 (1949)
6. А. Куявский, Acta Phys. Polon., 21, 591 (1962).
7. Е. Н. Васильев, А. Р. Серегина, Радиотехника и электроника, 8, № 12, 1972 (1963)
8. Е. Н. Васильев, Вычислительная математика и математическая физика, 5, № 5, 841 (1965).
9. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, ГИФМЛ, М.—Л., 1962
10. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 3, ч. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1949.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию
31 октября 1968 г.,
после доработки
1 августа 1969 г.

THE NUMERICAL SOLUTION OF THE EXTERNAL ELECTRODYNAMIC
PROBLEM FOR A PERFECTLY CONDUCTING BODY

E. N. Vasil'ev, V. G. Kamenev

From the point of view of the applicability in the numerical solution two integral equations describing the external electrodynamic problem for a perfectly conducting body are compared. The algorithm is given for solving one of the equations providing the high accuracy of solution both near specific points of equation and far from them.
