ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 5 *РАДИОФИЗИКА* *1970*

УДК 538 56

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ОТРАЖАЮЩЕГО ТЕЛА ПО ХАРАКТЕРИСТИКЕ РАССЕЯНИЯ

А. Г. Рамм

Доказано, что характеристика рассеяния позволяет однозначно определить форму отражающего тела

Рассматривается следующая задача. На тело D с поверхностью Г падает плоская волна. Тело предполагается выпуклым. Гауссова кривизна поверхности тела не обращается в нуль и непрерывна. Обозначим через $f(n, \nu, k)$ характеристику рассеяния плоской волны на теле D:

$$f(n, \nu, k) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma} \exp\left[-ik(\nu, s)\right]\frac{\partial u}{\partial n}\,ds, \tag{1}$$

где функция $u(x, n, k)$ является решением следующей задачи:

$$(\Delta+k^2)\,u=0 \quad \text{вне} \quad D, \quad u|_{\Gamma}=0, \quad u=\exp[ik(n, x)]+v; \tag{2}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|\left(\frac{\partial v}{\partial |x|} - ikv\right) = 0. \tag{3}$$

Требуется выяснить однозначно ли определяет функция $f(n, \nu, k)$ форму области D и дать способ построения области D по характеристике рассеяния. Насколько известно автору, в литературе отсутствует ответ на эти вопросы.

1. ИСХОДНАЯ ФОРМУЛА

Чтобы ответить на поставленные вопросы, вычислим характеристику рассеяния в коротковолновом приближении. В этом приближении положим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n_s}\right|_{\Gamma_-} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n_s}\right|_{\Gamma_+} = 2\frac{\partial \exp[ik(n, s)]}{\partial n_s}, \tag{4}$$

где Γ_+, Γ_- — соответственно освещенная и затененная части поверхности Г. Следовательно, при $k \gg 1$ формула (1) примет вид

$$f(n, \nu, k) = -\frac{2ik}{4\pi}\int_{\Gamma_+} \exp\left[-ik(\nu - n, s)\right](n, n_s)\,ds =$$
$$= \frac{k}{2\pi i}\int_{\Gamma_+} \exp\left[-ik\,|\nu - n|\,(l, s)\right](n, n_s)\,ds. \tag{5}$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАССЕЯНИЯ

Интеграл (5) вычислим методом стационарной фазы при $k \to \infty$, причем предполагаем выполненным условие $n \neq \nu$. Введем обозначение (уже использованное в формуле (5))

$$\frac{\nu - n}{|\nu - n|} = l. \tag{6}$$

Заметим, что

$$|n - \nu| = 2 \sin \frac{\widehat{n\nu}}{2}. \tag{7}$$

Рассмотрим ту точку M на поверхности Г, в которой нормаль к поверхности имеет направление l. В точке M падающая в направлении n волна отражается по закону геометрической оптики в направлении ν. Так как поверхность выпукла, такая точка на Г найдется и притом единственная. Введем систему координат с центром в точке M, осью z, направленной вдоль l, и осями x, y, направленными вдоль линий кривизны поверхности Г в точке M. Уравнение поверхности Г в этих координатах в окрестности точки M имеет вид

$$z = -\frac{x^2}{2R_1} - \frac{y^2}{2R_2}, \tag{8}$$

где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности Г в точке M.

Точка стационарной фазы для интеграла (5) находится из уравнения

$$0 = \nabla(l, s) = \nabla s_3 = \nabla z = -\frac{x}{R_1} e_1 - \frac{y}{R_2} e_2. \tag{9}$$

Отсюда следует, что M — точка стационарной фазы для интеграла (5). Вычисляя интеграл (5) методом стационарной фазы, получаем*

$$f(n, \nu, k) = \frac{k}{2\pi i} \frac{2\pi \sqrt{R_1 R_2}}{-ik|n - \nu|} = -\frac{1}{2} \sqrt{R_1 R_2}. \tag{10}$$

Здесь были использованы очевидные равенства

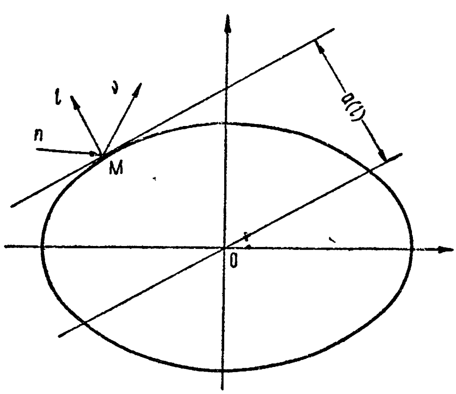

Рис. 1.

$$\sin \frac{\widehat{n\nu}}{2} = \cos(\widehat{\nu l}),$$

$$(n, l) = -\cos(\widehat{\nu l}), \tag{11}$$

$$\frac{(n, l)}{|n - \nu|} = -\frac{1}{2}.$$

Равенство (10) показывает, что характеристика рассеяния определяет гауссову кривизну выпуклой поверхности Г как функцию внешней нормали l. По теореме Минковского этими данными поверхность Г однозначно определяется ([1], стр. 182).

---

* Формулу (10) можно вывести из общих результатов Фока (см. формулы (2.16), (3.11) статьи [4]).

Предположим, что тело D — центрально-симметричное. Выбирая начало координат в точке 0 (см. рис. 1), вычисляя интеграл (5) методом стационарной фазы, учитывая, что в выбранных координатах $(l, s(M)) = a(l)$, и принимая во внимание равенства (7), (11), получим

$$f(n, \nu, k) = -\frac{1}{2}\sqrt{R_1 R_2}\exp[-2ika(l)\cos\widehat{\nu l}], \qquad n \neq \nu. \tag{12}$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ОБЛАСТИ ПО ХАРАКТЕРИСТИКЕ РАССЕЯНИЯ

Формула (12) показывает, что в выбранной системе координат характеристика рассеяния определяет величину $a(l)$ — полуширину тела в любом направлении l, т. е. опорную функцию тела. Форма поверхности определяется при этом формулами ([1], стр. 168)

$$x = \frac{\partial a}{\partial \alpha}, \qquad y = \frac{\partial a}{\partial \beta}, \qquad z = \frac{\partial a}{\partial \gamma}, \tag{13}$$

где $a = a(l) = a(\alpha, \beta, \gamma)$; α, β, γ — декартовы координаты орта l. Формула (13) дает параметрическое представление поверхности тела, причем параметром служит орт $l = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Зная функцию $a(l) = a(\alpha, \beta, \gamma)$ (в монографии [1] эта функция обозначается через $H(\alpha, \beta, \gamma)$), можно легко найти гауссову и среднюю кривизну поверхности ([1], стр. 169). При вычислении по формуле (13) надо иметь в виду, что const = const $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$. Поэтому, например, при $a(l) = R = \text{const}$ получим $x = R\alpha$, $y = R\beta$, $z = R\gamma$, что дает параметрическое уравнение сферы радиуса R. Выше была взята комбинация $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ (а не $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$), так как опорная функция $a(\alpha, \beta, \gamma)$ должна быть однородной функцией α, β, γ порядка 1 ([1], стр. 167).

Полезно иметь в виду, что форма области определится однозначно, если характеристика рассеяния известна лишь для таких n, ν, для которых орт l пробегает всю единичную сферу (например, при $\nu = -n$ и n, пробегающем всю единичную сферу). Кроме того, из формулы (10) следует, что при $k \gg 1$, $n \neq \nu$ характеристика рассеяния при фиксированных n и ν в системе координат с центром в точке M не зависит от k. Поэтому можно считать, что искомая функция двух переменных, описывающая уравнение поверхности, однозначно находится по известной функции также двух переменных—например, по функции $f(n, -n, k_0)$, где $k_0 = \text{const} \gg 1$.

4. ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА И ПОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ

Если $n = \nu$, то интеграл (5) легко вычисляется. Результат вычисления имеет вид

$$f(n, n, k) = -\frac{k}{2\pi i} S(n), \tag{14}$$

где $S(n)$ — площадь проекции поверхности Γ на плоскость, перпендикулярную орту n. Формула (14) вместе с известной оптической теоремой [2], согласно которой сечение рассеяния $\sigma = \sigma(n)$ плоской волны, падающей в направлении n, дается формулой

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\operatorname{Im} f(n, n, k), \tag{15}$$

приводит к известному [2] результату

$$\sigma = 2S(n). \tag{16}$$

Какие величины можно найти непосредственно по гауссовой кривизне выпуклой поверхности? Ответ на этот вопрос содержится в [1]. Здесь мы приведем несколько формул из указанной монографии. Площадь поверхности вычисляется по формуле ([1], стр. 176)

$$S = \int\limits_{\Sigma} \frac{d\omega}{K}, \qquad K = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2}}. \tag{17}$$

Здесь K — гауссова кривизна как функция внешней нормали, Σ — единичная форма, $d\omega$ — элемент площади ее поверхности.

Площадь проекции F_t выпуклого тела в направлении, характеризуемом ортом t, вычисляется как ([1], стр. 176)

$$F_t = \frac{1}{2} \int\limits_{\Sigma} \frac{|\cos \widehat{ts}|}{K(s)}\, d\omega, \tag{18}$$

где s — орт, пробегающий единичную сферу*.

Для того, чтобы площадь F_t не зависела от t, необходимо и достаточно, чтобы для любого t имело место равенство ([1], стр. 183)

$$K^{-1}(t) + K^{-1}(-t) = \text{const}. \tag{19}$$

5. ЭФФЕКТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ

Дадим способ определения формы области по характеристике рассеяния, отличный от изложенного в разд. 2, 3. Из формулы (5) следует, что

$$g(n, \nu, k) \equiv f(n, \nu, k) + f^*(-n, -\nu, k) = \frac{k}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \exp(-ik(\nu - n, s)) \times$$

$$\times (n, n_s)\, ds = \frac{kn}{2\pi i} \int\limits_{D} \nabla_y \exp(-ik(\nu - n, y))\, dy = \tag{20}$$

$$= \frac{1-(\nu, n)}{2\pi} k^2 \int\limits_{D} \exp(-ik|\nu - n|(l, y))\, dy.$$

Звездочка обозначает комплексное сопряжение. Пользуясь асимптотической формулой для преобразования Фурье характеристической функции области (см. [6], стр 42), получаем при $k \to \infty$ асимптотическое равенство

$$g(n, \nu, k) = -\frac{1-(\nu, n)}{2\pi} \frac{4\pi}{K(l)} \cos\{k_1 a(l)\} \frac{1}{|\nu - n|^2} = -\frac{\cos\{k_1 a(l)\}}{K(l)}, \tag{21}$$

$$k_1 \equiv k|n - \nu|, \qquad k \to \infty.$$

Формула (21) определяет полуширину $a(l)$ тела D в любом направлении, что позволяет эффективно определять форму поверхности Γ по формулам (13), если известна характеристика рассеяния при $k \to \infty$ и ортах n, ν, таких, что орт l, определенный формулой (6), пробегает всю единичную сферу.

---

* Из формул (16), (18) видно, что гауссова кривизна $K(s)$ позволяет вычислить сечение рассеяния $\sigma(n)$.

В заключение отметим, что несколько обратных задач, близких к рассмотренной здесь задаче, изучены в работах [3] и недавно вышедшей работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1 В Бляшке, Круг и шар, изд. Наука, М, 1967.
2 Х. Хёнл, А Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, изд Мир, М, 1967.
3. А Г Рамм, Радиотехника и электроника, **10**. № 11, 2062 (1965), Третий Всесоюзный симпозиум по дифракции волн, Рефераты докладов, изд Наука, М, Некоторые обратные задачи теории распространения волн, Тезисы докладов IV Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн, Харьков, 1967, Депонировано НИИЭиР.
4. В. А Фок, УФН, **36**, № 3, 308 (1948)
5. Р. Левис, Зарубежная радиоэлектроника, № 2, 100 (1970)
6. И М. Гельфанд, М И. Граев, Н. Я Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, Физматгиз, М, 1962

Ленинградский институт точной механики и оптики

Поступила в редакцию 4 марта 1969 г.

THE DETERMINATION OF THE FORM OF THE REFLECTED BODY FROM THE CHARACTERISTIC OF SCATTERING

A. G. Ramm

The characteristic of scattering is proved to permit a form of the reflecting body to be unique determined.