ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 5 *РАДИОФИЗИКА* *1970*

УДК 523 164

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК В РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ ИНТЕНСИВНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Л. Г. Содин

Рассмотрено оптимальное определение интенсивности точечного источника космического радиоизлучения при аддитивных и мультипликативных помехах на входе радиометра с заданной полосой пропускания высокочастотной части Диаграмма направленности радиотелескопа считается точно известной.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При прохождении дискретного источника космического излучения через диаграмму радиотелескопа запись сигнала на ленте линейного радиометра* может быть представлена следующей формулой:

$$u(t) = Am(t)\,S(t) + n(t) + b, \tag{1}$$

где $S(t)$ — функция, определяемая формой диаграммы направленности радиотелескопа, A — искомая интенсивность источника, $m(t)$ — мультипликативный шум (модуляция при распространении сигнала в стохастической среде), $n(t)$ — аддитивный шум (тепловой шум радиометра, распределенное излучение фона), b — «смещение» записи на ленте, связанное обычно с паразитными эффектами в аппаратуре. О величинах, входящих в (1), сделаем следующие предположения.

1) $n(t)$ — гауссов шум с нулевым средним и дисперсией ν^2**:

$$p_n(n) = (2\pi\nu^2)^{-1/2} \exp(-n^2/2\nu^2). \tag{2}$$

2) b — распределено нормально с $\langle b \rangle = 0$ и дисперсией β^2:

$$p_b(b) = (2\pi\beta^2)^{-1/2} \exp(-b^2/2\beta^2); \tag{3}$$

за время наблюдения b не изменяется.

3) Для интенсивности A задан априорный закон распределения

$$p_A(A) = (2\pi\alpha^2)^{-1/2} \exp[-(A-A_0)^2/2\alpha^2], \tag{4}$$

полученный, например, в результате анализа прошлых измерений; за время измерений полагаем $A = \text{const}$. При отсутствии априорных данных следует считать $\alpha \to \infty$.

4) Для $m(t)$ будем брать различные законы распределения с $\langle m(t) \rangle = 1$ (угловые скобки здесь и далее будут означать усреднение по ансамблю, черта сверху—усреднение по непрерывному или ди-

* Предположение о линейности справедливо для достаточно малых входных сигналов; именно этот случай обычно имеет место в радиастрономических измерениях.

** Распределение аддитивного шума в радиометре интенсивностей может быть и не гауссовским. В этом случае оптимальный алгоритм обработки, полученный в настоящем разделе, будет наилучшим в классе линейных.

скретному времени: $\bar{x} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)\,dt, \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} x_k.$

Определение (оценку) параметра A будем проводить по методу максимальной обратной вероятности [1]. В общем случае возможны такие ситуации, когда параметры помех $\nu^2, \langle m^2 \rangle, \beta$ неизвестны. В этом случае необходимо по результатам эксперимента оценить и их. Попытка решить задачу в самом общем виде приводит к системе нелинейных алгебраических или интегральных уравнений, решение которых возможно лишь численными методами. В связи с этим рассмотрим вначале отдельные частные случаи.

2. АДДИТИВНЫЕ ПОМЕХИ

В этом случае на выходе радиометра напряжение $u(t) = AS(t) + n(t)$. Для упрощения записи промежуточных выкладок будем рассматривать дискретную выборку $\{u_k\}$ объема N, причем все u_k считаем независимыми. Многомерная вероятность выборки $\{u_k\}$ из (1)—(4) имеет вид

$$p(u_1 \ldots u_N \mid A,\ b) = (\sqrt{2\pi}\nu)^{-N} \exp\left\{-\frac{1}{2\nu^2}\sum_{k=1}^{N}(u_k - AS_k - b)^2\right\}.$$

По формуле Байеса условная вероятность параметров A, b, для заданного набора $u_1 \ldots u_N$,

$$p(A,\ b \mid u_1 \ldots u_N) = \mathrm{const}\ p_A(A)\, p_b(b)\, p(u_1 \ldots u_N \mid A,\ b)$$

может быть записана в виде $M \exp(-L^2/2\nu^2)$, где $M = \mathrm{const}$, а

$$L = N\left\{A^2\left(\overline{S^2} + \frac{\nu_0^2}{\alpha^2}\right) - 2A\left(\overline{Su} - \frac{A_0\nu_0^2}{\alpha^2}\right) + b^2\left(1 + \frac{\nu_0^2}{\beta^2}\right) - 2b\bar{u} + 2Ab\bar{S}\right\},$$

$$\nu_0^2 = \nu^2/N.$$

Значения оценок $\hat{A}, \hat{b}$, дающие минимум L, отыскиваются без затруднений и равны

$$\hat{A} = \frac{\overline{Su} + qA_0 - (1/r)\,\bar{u}\,\bar{S}}{\overline{S^2} + q - (1/r)\,(\bar{S})^2},$$

$$\hat{b} = \frac{\bar{u}\,\overline{S^2} - \bar{S}\,\overline{uS} + q(\bar{u} - A_0\bar{S})}{r\,(\overline{S^2} + q) - (\bar{S})^2}, \tag{5}$$

где $q = \nu_0^2/\alpha^2$, $r = 1 + \nu_0^2/\beta^2$. Формулы (5) являются обобщением оптимального корреляционного приемника [1] на случай неопределенного среднего уровня записи.

При большом объеме измерений или весьма неопределенных априорных сведениях об измеряемой величине ($q \to 0$, $r \to 1$)

$$\hat{A} = \frac{\overline{Su} - \bar{S}\,\bar{u}}{\overline{S^2} - (\bar{S})^2}. \tag{5а}$$

При ограниченном объеме измерений слагаемое qA_0 влияет на $\hat{A}$; этот случай следует классифицировать как случай малоэффектных измерений, когда оценка $\hat{A}$ в заметной степени определена до эксперимента. Как видно из (5), $\hat{A}$ — случайная величина, линейно связанная с u, а потому распределенная нормально. Усредняя $\hat{A}$ и $\hat{A}^2$ по помехе $n(t)$, получим среднее и дисперсию оценки:

$$\langle \hat{A} \rangle = A + \frac{q(A_0 - A) + b\overline{S}(1 - 1/r)}{\overline{S^2} + q - (1/r)(\overline{S})^2} \tag{6}$$

(при $N \to \infty$, $q \to 0$, $r \to 1$, $\langle \hat{A} \rangle \to A$, следовательно, оценка асимптотически несмещенная),

$$\delta^2 = \langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle = \nu_0^2 \frac{\overline{S^2} - (2r - 1)(\overline{S})^2/r^2}{[\overline{S^2} + q - (1/r)(\overline{S})^2]^2}. \tag{7}$$

Для измерений высокой эффективности ($q = 0$, $r = 1$)

$$\delta^2 = \frac{\nu_0^2}{\overline{S^2} - (\overline{S})^2}, \tag{7а}$$

т. е. дисперсия оценки интенсивности равна дисперсии шума, деленной на энергию переменной составляющей сигнала.

В том случае, когда постоянного смещения на записи нет ($\beta \to 0$),

$$\delta^2 = \nu_0^2 / \overline{S^2} \tag{7б}$$

и дисперсия оценки уменьшается, так как используется энергия всего сигнала, а не только его переменной составляющей. Таким образом, неопределенность нулевого уровня записи, часто имеющая место в радиоастрономических измерениях, приводит к увеличению погрешности.

Из приведенных соотношений можно было бы сделать вывод, что всегда следует стремиться брать $N \to \infty$. Однако при ограниченной длительности записи слишком малый интервал между отсчетами нарушит сделанное выше предположение о некоррелированности выборки.

В связи с этим рассмотрим предельный случай непрерывного времени ($N \to \infty$) при заданной длительности записи T. Для упрощения выкладок определим форму сигнала так, чтобы $\overline{S} = 0$*, и положим $q = 0$, $r = 1$. Тогда предельным переходом из (5) получим стандартный алгоритм определения оценки [2],

$$\hat{A} = \int_0^T S(t)\, u(t)\, dt \Big/ \int_0^T S^2(t)\, dt, \tag{5б}$$

и дисперсию оценки

$$\delta^2 = \frac{1}{T^2 (\overline{S^2})^2} \int_0^T \int_0^T S(t)\, S(\tau) \langle n(t)\, n(\tau) \rangle dt\, d\tau.$$

При естественном предположении, что интервал корреляции много короче длительности сигнала $S(t)$, получим

* Очевидно, это не ограничивает общности.

$$\delta^2 = \nu^2 R / T \overline{S^2}, \tag{8}$$

где $R = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\, dt$ — радиус корреляции. Нетрудно видеть, что для коррелированного шума фильтрация, описываемая (5б), не является оптимальной. Для получения оптимального приемника перед коррелятором (5 б) необходимо поставить фильтр, приводящий коррелированный шум к белому.

Для получения конкретных соотношений рассмотрим случай $\rho(t) = \exp(-|t|/\tau)$, соответствующий предварительной фильтрации белого шума однозвенным R-C фильтром с постоянной времени τ. Для этого случая оптимальная оценка равна (в предположении $q = 0$, $r = 1$)

$$\hat{A} = \frac{\overline{Su} + \tau^2 \overline{S'u'} - \overline{S}\,\overline{u}}{\overline{S^2} - (\overline{S})^2 + \tau^2 (\overline{S'})^2}, \tag{9}$$

а ее дисперсия

$$\delta^2 = \frac{\nu^2 R}{T\overline{S^2}\left[1 + \tau^2 \dfrac{(\overline{S'})^2}{(\overline{S^2})}\right]^2} \tag{10}$$

меньше, чем при субоптимальной обработке (8). Отметим, что величина выигрыша на практике мала и можно пользоваться фильтром (5), построенным без учета коррелированности шума.

Иногда для упрощения алгоритма (или структуры фильтра) целесообразно вместо оптимальной весовой функции $S(t)$ использовать некоторую другую $S_1(t)$, более удобную для реализации. В этом случае следует ожидать роста дисперсии оценки

$$\hat{A}_1 = \frac{\overline{S_1 u} - \overline{S_1}\,\overline{u}}{\overline{S_1^2} - (\overline{S_1})^2}.$$

Степень роста дисперсии для весовых функций некоторых типов, удобных для цифровой или аналоговой обработки, приведены в таблице; $S(t)$ взято равным $\sin(\pi t/M)/(\pi t/M)$.

Таблица 1

Вид $S_1(t)$	$\begin{cases} 1, \lvert t\rvert < \tau/2 \\ 0, \lvert t\rvert > \tau/2 \end{cases}$	$\begin{cases} e^{-t/\tau}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} te^{-t/\tau}, & \tau > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} t^2 e^{-t/\tau}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	e^{-t^2/τ^2}
оптимум τ	$\frac{4}{\pi} M$	0,38 M	0,21 M	0,19 M	0,56 M
рост дисперсии	1,22	2,18	1,64	1,51	1,13

Рассмотрим теперь роль влияния длительности записи сравнительно с длительностью сигнала $S(t)$ для $S(t) = \sin(\pi t/M)/(\pi t/M)$. При этом следует различать случаи отсутствия и наличия неопределенного смещения записи. При наличии смещения записи (7а)

$$\delta_T^2 = \frac{\nu^2 R}{M}\left[1 + \left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right)\frac{M}{T}\right] \tag{11}$$

(T — длительность записи; $-T/2 \leqslant t \leqslant T/2$).

При $b=0$

$$\delta_T^2 = \frac{\nu^2 R}{M}\left(1+\frac{2}{\pi^2}\frac{M}{T}\right). \tag{11a}$$

«Протяженность» сигнала равна $2M$. Видно, что из-за неопределенности уровня записи следует выбирать $T \gg 10M$, в то же время при отсутствии паразитного смещения достаточно $T \gg 2M$. Из полученных соотношений видны основные требования к оптимальному измерителю, позволяющие разумно организовать процесс измерения и правильно выбрать алгоритм обработки записи.

3. ЧИСТО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ПОМЕХИ

В этом случае будем полагать $u = Am(t)S(t)$. Плотность распределения для N-мерной некоррелированной выборки

$$p(u_1 \ldots u_N \mid A, \mu) = p_m(m_1 \ldots m_N) \mid m_1 = \frac{u_1}{AS_1} \ldots m_N = \frac{u_N}{AS_N}$$

полностью определяется плотностью распределения мультипликативного шума. Так как дисперсия $m(t)$ (обозначается далее μ) определяется средой, в которой происходит распространение сигнала (в радиоастрономии — межзвездной и межпланетной плазмой, ионосферой, тропосферой), то величина μ обычно неизвестна, и вместе с оценкой A мы будем искать оценку μ. Для упрощения основных соотношений положим априорно равновероятными любые значения A.

1) Гауссова мультипликативная помеха:

$$p_m(m) = (\sqrt{2\pi}\,\mu)^{-1} \exp\left[-(m-1)^2/2\mu^2\right].$$

Такой закон распределения может приближать реальный физический процесс только в случае малой дисперсии $\mu \ll 1$. Максимизируя по A и по μ $p(u_1 \ldots u_N \mid A, \mu)$, найдем требуемые оценки

$$\begin{gathered} \hat{A} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{u_k}{S_k} = \overline{\left(\frac{u}{S}\right)}, \\ \hat{\mu}^2 = \frac{\overline{\left(\frac{u}{S}\right)^2} - \left[\overline{\left(\frac{u}{S}\right)}\right]^2}{\overline{\left(\frac{u}{S}\right)}^2}. \end{gathered} \tag{12}$$

Важно отметить, что формула для оценки не зависит от уровня шума.

2) Более реальной следует считать мультипликативную помеху с гамма-распределением [3]:

$$p_m(m) = \frac{m^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \exp\left(-\frac{m}{c} - \beta\right), \qquad m \geqslant 0.$$

Если $\langle m \rangle = 1$, то $c = 1/\beta$ и

$$p_m(m) = \frac{(m\beta)^\beta}{m\,\Gamma(\beta)} \exp(-m\beta).$$

При этом дисперсия помехи $\mu = \beta^{-1/2}$. Уравнение правдоподобия приводит к оценке $\hat{A} = \overline{(u/S)}$. Для определения параметра β получается трансцендентное уравнение

$$\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} - \ln\beta = \overline{\ln\frac{u}{S}} - \overline{\left(\frac{u}{S}\right)}.$$

Оценка интенсивности не зависит от уровня шумов.

3) При распространении в толстом флуктуирующем слое мультипликативный шум часто имеет логарифмически-нормальное распределение [3]:

$$p_m(m) = M\left(\sqrt{2\pi}\,\mu m\right)^{-1}\exp\left[-\frac{(\lg m - \lg m_0)^2}{2\mu^2}\right].$$

Если $\langle m \rangle = 1$, то $\lg m_0 = -\mu^2/2M \quad (M = \lg e)$,

$$p_m(m) = \left(\sqrt{2\pi}\,\mu m\right)^{-1}\exp\left[-\frac{(\lg m + \mu^2/2)^2}{2\mu^2}\right].$$

Максимизируя функцию правдоподобия, получаем оценки

$$\hat{A} = \exp\left(L + \frac{L^2}{2} - \frac{Q}{2}\right), \qquad \hat{\mu} = (Q - L^2)^{1/2}. \tag{13}$$

Здесь

$$L = \overline{\ln\frac{u}{S}}, \quad Q = \overline{\left(\ln\frac{u}{S}\right)^2}.$$

Подведем некоторые итоги. Для случая мультипликативной помехи характерным оказалось то, что оценка определяется отношением u_k/S_k (а не произведением u_kS_k, как для аддитивной помехи). Физический смысл этого ясен, но явление это неприятное, так как при наличии дополнительного аддитивного шума отношение u_k/S_k при некоторых k может оказаться очень большим. А из-за этого вырастает дисперсия оценки.

Определим математическое ожидание и дисперсию оценки. Рассмотрим случаи помех, распределенных нормально и с гамма-распределением, когда для оптимальной оценки справедлива формула (12). Поскольку для этих случаев оценка линейная, расчеты не составляют труда и дают $\langle \hat{A} \rangle = A$ (несмещенная оценка), $\delta^2 = \mu^2 A^2/N$, относительная дисперсия

$$\Delta^2 = \frac{\mu^2}{N}. \tag{14}$$

Если мы при действии мультипликативной помехи воспользуемся обработкой, оптимальной для аддитивной помехи, $\hat{A}_1 = \overline{uS}/\overline{S^2}$, то для относительной дисперсии оценки получим

$$\Delta_1^2 = \frac{\mu^2}{N\overline{S^2}}. \tag{15}$$

Сравнение (14) и (15) показывает, что рост ошибок при этом определяется скважностью сигнала. При очень короткой записи, когда $\overline{S^2} \simeq 1$, потери вследствие неоптимальности обработки малы, но зато и сама дисперсия велика.

Для сравнения рассмотрим еще случай аддитивной помехи, но оценку сделаем по (12). При этом для оптимальной обработки (5) $\delta^2 = \nu^2/N\overline{S^2}$ (см. (7б)).

Для обработки по (12)

$$\delta_1^2 = \frac{\nu^2}{N}\left(\overline{\frac{1}{S^2}}\right). \tag{16}$$

При достаточно длинной записи $\delta_1^2 \to \infty$.

Таким образом, алгоритмы оптимальной обработки для мультипликативных и аддитивных помех взаимно противоречивы, и если присутствуют помехи обоих видов, желательно использовать метод обработки, построенный с учетом всех видов помехи. Следует отметить все же, что практически (15) лучше, чем (16), и использование коррелятора при мультипликативных помехах менее опасно, чем использование (12) при аддитивных помехах.

4. СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ АДДИТИВНОЙ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПОМЕХ

В рассматривамом случае будем полагать $u(t) = Am(t)S(t) + n(t)$, $m(t)$, $n(t)$ — гауссовы независимые шумы. Как и прежде, оценку A определим по некоррелированной выборке $u_1 \ldots u_N$. Плотность распределения выборки $\{u_k\}$

$$p(u_1 \ldots u_N \mid A, \mu, \nu) = \left[(2\pi)^{N/2} \prod_{k=1}^{N} (\nu^2 + A^2\mu^2 S_k^2)^{1/2}\right]^{-1} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(u_k - AS_k)^2}{\nu^2 + A^2\mu^2 S_k^2}\right\}. \tag{17}$$

Максимизируем логарифмическую функцию правдоподобия, равную, как следует из (17),

$$L(A, \mu, \nu) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\ln(\nu^2 + A^2\mu^2 S_k^2) + \frac{(u_k - AS_k)^2}{\nu^2 + A^2\mu^2 S_k^2}. \tag{18}$$

Как видно из структуры (18), уравнения максимального правдоподобия приведут к системе нелинейных алгебраических уравнений для $\hat{A}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\hat{\nu}^2 + \hat{A}^2\hat{\mu}^2 S_k^2} - \frac{(u_k - \hat{A}S_k)^2}{(\hat{\nu}^2 + \hat{A}^2\hat{\mu}^2 S_k^2)^2} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{S_k^2}{\hat{\nu}^2 + \hat{A}^2\hat{\mu}^2 S_k^2}\left[1 - \frac{(u_k - \hat{A}S_k)^2}{(\hat{\nu}^2 + \hat{A}^2\hat{\mu}^2 S_k^2)^2}\right] = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{N} S_k \frac{u_k - \hat{A}S_k}{\hat{\nu}^2 + \hat{A}^2\hat{\mu}^2 S_k^2} = 0.$$

Если в этой системе положить $\hat{\mu} = 0$, получим из последнего уравнения $\hat{A}_1 = \overline{uS}/\overline{S^2}$; при $\nu = 0$ $\hat{A}_2 = (\overline{u/S})$, что совпадает с формулами предыдущих разделов.

Если параметры помех μ и ν известны точно, получаем

$$\hat{A} = \overline{\left(\frac{uS}{\nu^2 + \hat{A}^2\mu^2 S^2}\right)} \left[\overline{\left(\frac{S^2}{\nu^2 + \hat{A}^2\mu^2 S^2}\right)}\right]^{-1}.$$

В общем случае это уравнение можно решить на ЭВМ. Если преобладает один из видов помехи ($\nu^2 \gg A^2\mu^2 S^2$ или $\nu^2 \ll A^2\mu^2 S^2$), решение можно найти итерациями по формуле

$$\hat{A}_{n+1} = \overline{\left(\frac{uS}{\nu^2 + \hat{A}_n^2\mu^2 S^2}\right)} \left[\overline{\left(\frac{S^2}{\nu^2 + \hat{A}_n^2\mu^2 S^2}\right)}\right]^{-1},$$

начав с $\hat{A}_0 = \overline{uS}/\overline{S^2}$ при $\nu^2 \gg A^2\mu^2 S^2$ или с $\hat{A}_0 = (\overline{u/S})$ при $\nu^2 \ll A^2\mu^2 S^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Вудворт, Теория вероятности и теория информации с применением в радиолокации, изд. Сов. радио, М, 1955.
2. И Н. Амиантов, Применение теории решений к задачам обнаружения сигналов и выделения сигналов из шумов, изд. ВВИА им Н. Е Жуковского, М., 1958.
3. Я. Б. Шор, Статические методы анализа и контроля качества и надежности, изд Сов. радио, М., 1962.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
4 ноября 1968 г,
после доработки
22 сентября 1969 г.

THE USE OF THE METHOD OF STATISTICAL ESTIMATIONS IN RADIO ASTRONOMICAL MEASUREMENTS OF THE DISCRETE SOURCE INTENSITIES

L. G. Sodin

The optimal determination of the intensity of the point source of cosmic radio emission in the presence of additive and multiplicative noises in the input of radiometer with the given HF transmission band has been considered. The radiation pattern of the radio telescope is assumed known exactly.