ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 4 РАДИОФИЗИКА 1970

УДК 517.63

УПРОЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Д. М. Лернер, Г. М. Лернер

Рассматривается численный метод определения оригинала по изображению, предложенный А. Папулисом. Излагается модификация этого метода, позволяющая улучшить сходимость полученного ряда и повысить точность вычислений. Дано приближенное аналитическое выражение обратного преобразования Лапласа для начальной стадии переходного процесса.

В некоторых задачах электротехники и математической физики приходится прибегать к численным методам обращения преобразования Лапласа. Например, переходные процессы, описываемые уравнением диффузии, характеризуются тем, что в начальный момент оригинал обращается в нуль вместе со всеми своими производными (процессы с запаздыванием). Ряды, получающиеся по теореме разложения [1], неудобны для описания начальной стадии процесса, которая определяется в основном полюсами изображения, отстоящими достаточно далеко от мнимой оси, т. е. необходимо удерживать слишком большое число членов ряда. Разложение изображения в ряд по обратным степеням оператора в этом случае невозможно, так как функция убывает экспоненциально.

По-видимому, одним из наиболее простых численных методов, использующих равноотстоящие значения изображения, является метод, предложенный Папулисом [2]. Он основан на разложении оригинала $F(t) \div f(p)$ в ряд Фурье

$$F(t) = \frac{4\sigma}{\pi} \sum_{0}^{\infty} C_k \sin(2k+1)\,\varphi, \tag{1}$$

где

$$\varphi = \arccos \exp(-\sigma t) \qquad (\text{при } \sigma > 0). \tag{2}$$

Коэффициенты разложения C_k определяются уравнениями

$$\sum_{0}^{n} \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right] C_{n-k} = f_n. \tag{3}$$

Правые части уравнений (3) вычисляются по значениям изображения в равноотстоящих точках с абсциссами

$$p_n = (2n+1)\,\sigma; \quad f_n = 4^n f(p_n). \tag{4}$$

Метод основан на допущениях, что оригинал ограничен и имеет нулевое начальное значение, но после несложных преобразований эти ограничения могут быть сняты.

Однако непосредственное применение метода Папулиса для вычислений на ЦВМ показало, что он имеет два существенных недостатка.

1. При произвольном фиксированном шаге σ сходимость ряда Фурье (1) может оказаться очень медленной. Для улучшения сходимости рекомендуется выбирать при малых t большие σ и, наоборот, малые σ — для больших t, что делает алгоритм громоздким.

2. Вычисление C_n по рекуррентной формуле из (3)

$$C_n = f_n - \sum_{1}^{n} \left[\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right] C_{n-k} \tag{5}$$

необходимо выполнять с очень большой точностью, иначе накопление ошибок округления приведет к потере всех верных значащих цифр, начиная с некоторого n ($n = 10$ при вычислениях с восемью знаками). Кроме того, невозможность написать общий член ряда (1) в явном виде не позволяет применять преобразования, улучшающие его сходимость.

Чтобы выполнить условие оптимального выбора шага и упростить алгоритм, положим $\sigma t = \mathrm{const}$. Это значит, что коэффициенты разложения меняются от точки к точке, но суммирование повсюду осуществляется при некотором фиксированном φ.

Наиболее простой вид формула (1) принимает, если $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Тогда

$$F(t) = \frac{\sqrt{2}\ln 2}{\pi t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} C_k, \tag{6}$$

$$\sigma = \frac{\ln\sqrt{2}}{t}. \tag{7}$$

Чтобы вычислить C_k независимо друг от друга, нужно отыскать общее решение системы (3). Как удалось показать, оно имеет вид

$$C_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \binom{n+k}{2k} f_k. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (6) и меняя порядок суммирования, находим приближенную формулу для вычисления оригинала при выбранных t и n

$$F(t) \simeq \frac{\sqrt{2}\ln 2}{\Pi t} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k \sum_{m=k}^{n} (-1)^{\left[-\frac{m}{2}\right]} \binom{m+k}{2k}. \tag{9}$$

Если не задавать n заранее, то лучше использовать прямо выражение (6), позволяющее оценить погрешность вычислений и скорость сходимости.

Группируя соседние члены ряда по четыре, получим

$$B_n = C_{4n} + C_{4n+1} - C_{4n+2} - C_{4n+3} = \sum_{k=0}^{4n+3} b_{nk} f_k,$$

где

$$b_{n0} = 0;\ b_{n1} = -2;\ b_{nk} = (-1)^k \cdot 2 \binom{4n+k}{2k-3} \frac{2n+1}{k-1} \qquad (10)$$

$$(k = 2, 3, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

$$F(t) \simeq \frac{\sqrt{2}\ln 2}{\pi t} \sum_{m=0}^{4n} (-1)^{\left[-\frac{m}{2}\right]} C_m = \frac{\sqrt{2}\ln 2}{\pi t} \sum_{m=0}^{n} B_m. \qquad (11)$$

Ряд (11) сходится быстрее исходного ряда (6). Удерживая в формуле (11) только первый член, получим простое приближенное выражение для оригинала при малых t

$$F(t) \simeq \frac{20}{t}\left[f\left(\frac{1{,}733}{t}\right) - f\left(\frac{2{,}426}{t}\right) - 0{,}125\, f\left(\frac{1{,}040}{t}\right)\right]. \qquad (12)$$

Для проверки алгоритма на ЦВМ был вычислен оригинал функции

$$\frac{\exp(-\sqrt{p})}{p} \div \operatorname{erfc}\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Два первых члена ряда (11) дали три верных знака при $t \leqslant 2$. При расчете до $t = 10$ погрешность не превышала 1,5%. Формула (12) (один член ряда) дала погрешность не более 2% при $t \leqslant 1$. Далее приведена таблица величин b_{nk} для первых четырех членов ряда (11).

Таблица 1

k \ n	0	1	2	3
1	−2	−2	−2	−2
2	4	36	100	196
3	−1	−105	−825	−3185
4		112	2640	20384
5		−54	−4290	−68068
6		12	4004	136136
7		−1	−2275	−176385
8			800	155040
9			−170	−94962
10			20	40964
11			−1	−12397
12				2576
13				−350
14				28
15				−1

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Витков, ЖТФ, 35, № 3, 410 (1965).
2. Г. Деч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, изд. Наука, М., 1965.

Ленинградский электротехнический институт

Поступила в редакцию
11 августа 1969 г.

SIMPLIFIED ALGORITHM FOR INVERSE LAPLACE TRANSFORMATION

D. M. Lerner, G. M. Lerner

The numerical method for determination of origin through image suggested by A. Papulis is considered. The expounded modification of this method enables to improve the convergence of obtained series and the accuracy of calculations. The approximate analytical expression for inverse Laplace transformation is given.