

УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

Э. Н. Казанцев

В данной работе рассматривается система линейных неравенств транспортного типа, матрица коэффициентов которой состоит из нулей и единиц. Рассматриваются необходимые и достаточные условия совместности систем данного вида.

Пусть заданы матрица $A = \{a_{ij}\}$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) и векторы $P = \{p_k\}$ ($k = 1, \dots, m$) и $Q = \{q_k\}$ ($k = 1, \dots, n$). Предполагается, что a_{ij} принимают только два значения: либо нуль, либо единица; $P \geq 0$ и $Q \geq 0$.

Рассмотрим систему линейных неравенств транспортного типа

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \geq p_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq q_j, \quad x_{ij} \geq 0. \quad (1)$$

$$(i = 1, \dots, m) \quad (j = 1, \dots, n)$$

Требуется определить совместность системы (1). Данную задачу можно рассматривать в двух вариантах. В первом случае требуется построить алгоритм, проверяющий совместность системы (1). Во втором случае требуется написать систему линейных неравенств, связывающую координаты векторов P и Q , такую, что удовлетворение этой системы необходимо и достаточно для совместности системы (1).

Рассматриваемая задача возникает при решении многих экономических и производственных задач. Например, при определении достаточности производства однородного продукта в некоторых пунктах $i = 1, \dots, n$, если задано потребление этого продукта в пунктах $j = 1, \dots, m$ и запрещены поставки продуктов из некоторых пунктов производства в некоторые пункты потребления.

Второй вариант решения задачи совместности системы (1) требуется при рассмотрении задачи календарного планирования на предприятии, которое имеет возможность отправлять потребителям вместо одного продукта другой продукт. Например, иногда предприятие имеет право послать потребителям продукт более высокого качества вместо требуемого продукта.

Построим транспортную сеть с числом узлов, равным $n + m$. Все множество узлов разобьем на два подмножества N и M . Множеству N будут принадлежать узлы с номерами $1, \dots, n$; а множеству M — с номерами $n + 1, \dots, n + m$. Пропускная способность $K(x, y)$ ребра, соединяющего узлы x и y , определяется следующим образом: $K(x, y) = 0$, если или $x, y \in N$, или $x, y \in M$, или $a_{y-n, x} = 0$; $K(x, y) = +\infty$, если $x \in N$, $y \in M$ и $a_{y-n, x} = 1$.

Каждому узлу $x \in N$ ставится в соответствие число q_x — производительность узла x . Каждому узлу $y \in M$ ставится в соответствие число p_{y-n} — емкость узла y .

Нетрудно показать, что задача совместности системы (1) эквивалентна допустимости задачи о перевозках для построенной выше транспортной сети. Д. Гейл сформулировал необходимые и достаточные условия допустимости общей задачи о перевозках [1].

Теорема Д. Гейла. Задача о перевозках допустима в том и только в том случае, когда для каждого множества узлов S выполняются неравенства

$$p(\bar{S} \cap M) - q(\bar{S} \cap N) \leq K(S, \bar{S}).$$

Под S здесь понимается дополнение S в NUM . Если S — произвольное множество, принадлежащее NUM , то $p(S) = \sum_{x \in S \cap M} p_{x-n}$;

$$q(S) = \sum_{x \in S \cap N} q_x, \quad K(S, \bar{S}) = \sum_{\substack{x \in S \\ y \in \bar{S}}} K(x, y).$$

Непосредственно из теоремы Д. Гейла получается система линейных неравенств, удовлетворение которых необходимо и достаточно для совместности системы (1). Получающаяся при этом система содержит 2^{n+m} неравенств. Дальнейшая наша задача заключается в том, чтобы, используя специальный вид системы (1) (точнее, матрицы A), уменьшить число неравенств и указать способ их построения, использующий вид матрицы A .

Пусть $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — произвольный двоичный набор длины n . Обозначим через $X(\sigma)$ множество узлов, таких, что узел $i \in X(\sigma)$ тогда и только тогда, когда $\sigma_i = 1$. Аналогично определяется множество $Y(\beta)$, $i \in Y(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta_{i-n} = 1$, здесь $\beta = \beta_1, \dots, \beta_m$ — двоичный набор длины m . Очевидно, что $X(\sigma) \subseteq N$, $Y(\beta) \subseteq M$.

Как обычно, через $\bar{\sigma}$ обозначим набор $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; \sigma^1 \vee \sigma^2 = \sigma_1^1 \vee \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^1 \vee \sigma_n^2$. Равенство $\beta = A\sigma$ означает, что $\beta_i = \bigvee_{j=1}^n a_{ij} \sigma_j$ ($i = 1, \dots, m$).

Лемма. Для того, чтобы система (1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств

$$\sum_{i=1}^m \beta_i p_i - \sum_{i=1}^n \sigma_i q_i \leq 0. \quad (2)$$

Здесь берутся всевозможные двоичные наборы σ , а $\beta = \bar{A}\bar{\sigma}$. Доказательство следует из теоремы Д. Гейла.

Обозначим оператор $\bar{A}\bar{\sigma}$ для удобства через $F(\sigma)$. Можно заметить, что оператор $F(\sigma)$ обладает следующими свойствами:

- 1) если $\sigma_1^1 \leq \sigma_2^1$, то $F(\sigma_1^1) \leq F(\sigma_2^1)$,
- 2) $F(\sigma^1 \cdot \sigma^2) = F(\sigma^1) \cdot F(\sigma^2)$,
- 3) если $\beta = F(\sigma)$ и $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, то $\beta_i = 1$ тогда и только тогда, когда $a_i \leq \sigma$, здесь $a_i = a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ — i -ая строка матрицы A .

Пусть имеется l двоичных наборов одинаковой длины b^1, b^2, \dots, b^l . Через $\{b^1, b^2, \dots, b^l\}$ обозначим множество всех двоичных наборов той же длины, получающихся при помощи дизъюнкции произвольного числа исходных наборов. Иными словами: $b \in \{b^1, b^2, \dots, b^l\}$ тогда и только тогда, когда $b = \bigvee_{j=1}^k b^{i_j}$, $1 \leq k \leq l$, где $b^{i_j} \in \{b^1, b^2, \dots, b^l\}$, $j = 1, \dots, k$.

Теорема 1. Система неравенств (2) эквивалентна системе неравенств

$$\sum_{i=1}^m \beta_i p_i - \sum_{i=1}^n \sigma_i q_i \leq 0, \quad (3)$$

$$\sigma \in [a_1, a_2, \dots, a_m], \quad \beta = F(\sigma).$$

Так как система неравенств (3) содержится в системе неравенств (2), то для доказательства теоремы нужно показать, что неравенства системы (2), не вошедшие в систему (3), являются зависимыми от неравенств системы (3). Последнее нетрудно показать, используя свойства оператора $F(\sigma)$ и неотрицательность P и Q .

Как следствие из теоремы 1, получается известное условие совместности транспортной системы. В этом случае $a_1 = a_2 = \dots = a_m = \sigma(1)$. Здесь $\sigma(1)$ — двоичный набор, состоящий из одних только единиц. Тогда $[a_1, \dots, a_m] = \sigma(1)$ и система (3) состоит только из одного неравенства

$$\sum_{i=1}^m p_i - \sum_{i=1}^n q_i \leq 0.$$

В худшем случае система (3) может состоять из 2^n неравенств ($n = m, A = E$ — единичная матрица). Но в этом случае можно показать, что большую часть неравенств в системе (3) можно исключить, не нарушая эквивалентности системы.

Будем говорить, что двоичный набор σ является зависимым относительно матрицы A и заданной совокупности наборов b^1, b^2, \dots, b^l , если $\sigma \in [b^1, b^2, \dots, b^l]$ и существуют наборы σ' и σ'' , принадлежащие $[b^1, b^2, \dots, b^l]$, что $\sigma = \sigma' \vee \sigma'', \sigma' \cdot \sigma'' = \sigma(0)$ — нулевой набор; $\sigma'' \neq \sigma(0); \sigma'' \neq \sigma(0); F(\sigma' \vee \sigma'') = F(\sigma') \vee F(\sigma'')$. Обозначим через $[b^1, \dots, b^l]_0$ множество всех двоичных наборов, получающееся из множества $[b^1, \dots, b^l]$ удалением всех зависимых наборов.

Теорема 2: Для того, чтобы система (1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялась система неравенств

$$\sum_{i=1}^m \beta_i p_i - \sum_{i=1}^n \sigma_i q_i \leq 0, \quad (4)$$

$$\sigma \in [a_1, \dots, a_m]_0, \quad \beta = F(\sigma).$$

Теперь в случае $m = n$ и $A = E$ нетрудно показать, что $[a_1, \dots, a_m]_0 = = [a_1, \dots, a_m]$ и система (4) имеет вид $p_i - q_i \leq 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Интересно было бы исследовать для различных классов матриц A множества $[a_1, \dots, a_m]_0$, какова их наибольшая мощность. Можно показать, что в случае $n = m$ существует такая матрица A , что число элементов в множестве $[a_1, \dots, a_m]_0$ равно 2^{n-1} . Это получается в том случае, если положить $a_{ii} = 1, a_{ii} = 1$ ($i = 1, \dots, n$); $a_{ij} = 0$ в остальных случаях.

Как уже отмечалось выше, задача определения совместности системы (1) и запись необходимых и достаточных условий совместности этой же системы в виде системы линейных неравенств имеют различный смысл. В первом случае обычно требуется построить алгоритм, определяющий совместность системы (1). При этом алгоритм может содержать и нелинейные операции. Так, в последнем примере, если мы используем операцию усеченной разности $a - b = \max(0, a - b)$, то условие совместности системы (1) запишется в довольно простом виде. Для того, чтобы система (1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=2}^n p_i - q_i + (p_1 - q_1) \leq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Гейл, Теория линейных экономических моделей, ИЛ, М., 1963.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском университете

Поступила в редакцию
30 июня 1969 г.

COMPATIBILITY CONDITIONS FOR A SET OF TRANSPORT
LINEAR INEQUALITIES

E. N. Kasantzev

A set of linear inequalities of transport type coefficient matrix of which consists of zeros and units is considered.

Necessary and sufficient conditions of compatibility for this type systems are studied.
