

УДК 531 391

О САМОМОДУЛЯЦИИ КОЛЕБАНИЙ В ГЕНЕРАТОРЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

П. А. Перепелятник

На основе низкочастотного эквивалента высокочастотного автогенератора производится качественное исследование самомодулированных колебаний. Определяется класс нелинейных характеристик, при которых возможно существование в автогенераторе амплитудной самомодуляции. Выводятся условия, необходимые для устойчивости таких колебаний.

Физика явлений в автогенераторе с запаздывающей обратной связью (ЗОС) при стационарной самомодуляции достаточно сложна. В связи со сложностью точного математического исследования самомодуляции целесообразно и вполне оправдано использование всех возможностей по упрощению исследования.

Анализ самомодулированных колебаний на основе низкочастотного эквивалента генератора дает несколько более четкое представление о физике процессов, сопровождающих самомодуляцию, хотя и упускает из вида целый ряд интересных, но более тонких явлений.

Исследование дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом и несимметричной нелинейностью, которым описан низкочастотный эквивалент генератора, представляет определенный самостоятельный интерес, поскольку такого рода уравнения встречаются в теории колебаний, теории автоматического регулирования и др. Следует также подчеркнуть и методическую ценность объяснения самомодуляции на основе низкочастотного эквивалента генератора, которое характеризуется относительной простотой и наглядностью.

1. НИЗКОЧАСТОТНЫЙ ЭКВИВАЛЕНТ ГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В работе [3] было показано, что при некоторых условиях амплитуда колебаний в высокочастотном генераторе с запаздыванием не может быть устойчивой. Генератор при этом переходит в режим самомодулированных колебаний. Поведение амплитуды колебаний в стационарном и переходных режимах работы такого генератора может быть описано уравнением

$$T\dot{X} + X - RI_{a1\tau} = 0 \quad (X \geq 0), \quad (1)$$

где $T = 2RC$ — постоянная времени контура, $I_{a1\tau}$ — текущее значение первой гармоники тока в момент $t - \tau$.

Высокочастотный генератор (рис. 1), таким образом, может быть замещен эквивалентным низкочастотным генератором с запаздыванием, изображенным на рис. 2. Заметим, что если воспользоваться аналогией между полосовым фильтром и фильтром нижних частот [5], то

* Доклад на Всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Черновцы, 1965.

для исследуемого генератора в районе резонансной частоты контура можно построить низкочастотный эквивалент, описываемый уравнением (1).

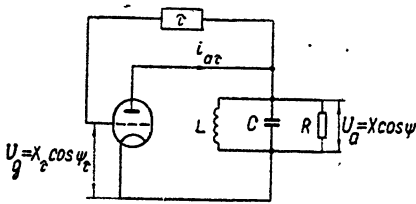


Рис. 1.

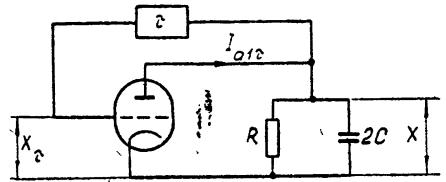


Рис. 2.

Уравнение (1) отличается от ранее исследованных и известных автору тем, что оно имеет несимметричную нелинейность, не допускающую симметричных колебаний. Случай симметричных колебаний в нелинейном дифференциальном уравнении первого порядка с запаздывающим аргументом исследовался в работе [2].

Ранее в работах [3, 4] было показано, что при запаздывании, несколько превышающем третье критическое, в генераторе возникает синусоидальная самомодуляция. Глубина самомодуляции и установившийся при этом уровень несущей определяются параметрами системы. Если время задержки значительно превышает третье критическое, то в системе смогут одновременно выполняться условия существования для двух, трех и большего числа частот самомодуляции и форма огибающей из синусоидальной превращается в прямоугольную. В дальнейшем высшие частоты самомодуляции будем называть гармониками огибающей.

Общее выражение для огибающей высокочастотных колебаний можно записать в виде ряда Фурье

$$X = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cos(n\Omega t + \alpha_n). \quad (2)$$

Здесь X_0 — постоянная составляющая огибающей, ξ_n — амплитуда n -й гармоники огибающей, Ω — частота первой гармоники огибающей, α_n — фазовый угол n -й гармоники огибающей.

Режим синусоидальной самомодуляции будет существовать при запаздываниях, незначительно превышающих третье критическое [3]. В этом случае в уравнении (2) можно положить $n = 1$ и фазовый угол $\alpha_1 = 0$. Тогда получим

$$X = X_0 + \xi \cos \varphi = X_0 + x, \quad (3)$$

где $x = \xi \cos \varphi$, $\varphi = \Omega t$ — медленно меняющийся аргумент.

Подставим (3) в (1), после чего полученное выражение разложим в ряд Фурье по медленно меняющемуся аргументу φ . Сгруппировав постоянные члены и члены, зависящие от медленно меняющегося аргумента, соответственно получим

$$1 - K_X = 0, \quad (4)$$

$$T\dot{x} + x - K_\xi x_\tau = 0, \quad (5)$$

где

$$K_X = \frac{1}{2\pi X_0} \int_0^{2\pi} R I_{a1c} d\varphi_\tau, \quad (6)$$

$$K_{\xi} = \frac{1}{\pi \xi} \int_{-\pi}^{\pi} R I_{a1\tau} \cos \varphi_{\tau} d\varphi_{\tau}. \quad (7)$$

Если зависимость анодного тока (i_a) от напряжения на сетке лампы (U_g) представить в виде

$$i_a = S_1 U_g - S_3 U_g^3, \quad (8)$$

то соответствующие выражения для первой гармоники тока I_{a1} и коэффициентов K_X и K_{ξ} примут вид

$$\begin{aligned} I_{a1} &= \left(S_1 - \frac{3}{4} S_3 X^2 \right) X, \\ K_X &= R \left[S_1 - \frac{3}{4} S_3 \left(X_0^2 + \frac{3}{2} \xi^2 \right) \right], \\ K_{\xi} &= R \left[S_1 - \frac{9}{4} S_3 \left(X_0^2 + \frac{1}{4} \xi^2 \right) \right]; \end{aligned} \quad (9)$$

K_X представляет собой усредненный по времени коэффициент передачи нелинейностью первой гармоники напряжения высокой частоты при наличии самомодуляции; K_{ξ} — коэффициент передачи нелинейностью напряжения первой гармоники огибающей высокочастотного самомодулированного колебания.

Применив к уравнению (5) преобразование Лапласа и имея в виду, что исследуется стационарная самомодуляция, получим

$$TP + 1 - K_{\xi} e^{-P\tau} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) для $\xi = 0$ совпадает с уравнением, полученным ранее иным путем в работе [3] (уравнение (23)).

Так как уравнение (10) соответствует стационарному режиму, то его корни должны быть чисто мнимыми. На этом основании в уравнение (10) можно подставить неизвестный пока мнимый корень $P = \pm j\Omega$ и приравнять действительную и мнимую части полученного выражения нулю, тогда получим

$$\begin{aligned} 1 - K_{\xi} \cos(\Omega\tau) &= 0, \\ T\Omega + K_{\xi} \sin(\Omega\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Запишем уравнения (11) в иной форме

$$W(X_0, \xi, \Omega) = \frac{|K_{\xi}|}{\sqrt{1 + T^2 \Omega^2}} = 1, \quad (12)$$

$$\tau = \frac{1}{\Omega} [(2n - 1)\pi - \operatorname{arctg}(T\Omega)] \quad (n = 1, 2, 3, \dots \text{ при } K_{\xi} < -1), \quad (13a)$$

$$\tau = \frac{1}{\Omega} [2n\pi - \operatorname{arctg}(T\Omega)] \quad (n = 1, 2, 3 \dots \text{ при } K_{\xi} > 1). \quad (13b)$$

Выражение $W(X, 0, \Omega)$, которое может быть получено из (12) при $\xi = 0$, имеет величину, большую единицы, и представляет собой коэффициент передачи по напряжению синусоидального возмущения огибающей на частоте Ω по разомкнутой петле обратной связи. При $|K(X, 0)| < 1$ коэффициент передачи по напряжению возмущения

огibaющей по петле обратной связи меньше единицы и самомодуляция не сможет возникнуть.

Для пояснения механизма самомодуляции изобразим зависимость напряжения первой гармоники на контуре от напряжения на входе усилителя (рис. 3). Точка А соответствует стационарному одночастотному колебанию при отсутствии самомодуляции.

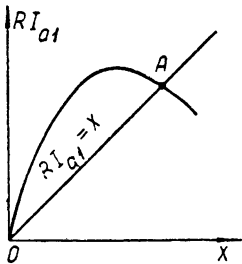


Рис. 3.

Крутизна кривой в точке А представляет собой коэффициент передачи нелинейностью возмущения огibaющей, т. е. $RdI_{a1}/dX = K_{\xi}(X, 0)$. При самомодуляции мгновенное значение RI_{a1} периодически изменяется. Разложив переменную величину RI_{a1} в ряд Фурье, получим постоянный член, первую гармонику и гармоники высших порядков. Постоянный член этого ряда, деленный на X_0 , есть усредненный во времени коэффициент передачи нелинейностью первой гармоники высокочастотного самомодулированного колебания $K_X(X, \xi)$. Амплитуда же первой

гармоники переменной RI_{a1} , деленная на ξ , есть коэффициент передачи нелинейностью первой гармоники огibaющей высокочастотного самомодулированного колебания $K_{\xi}(X, \xi)$.

Воспользовавшись уравнениями (4), (9), (12) и (13) можно для конкретной величины запаздывания определить амплитуду несущей, а также амплитуду и частоту модуляции. Для этого вначале из (13) определяется частота самомодуляции, затем из двух уравнений (4) и (12) определяется амплитуда несущей X_0 и амплитуда самомодуляции ξ .

Пример. Пусть $K_X = R \left[10^{-3} - 10^{-5} \left(X_0^2 + \frac{3}{2} \xi^2 \right) \right]$, $R = 2,5$ ком, $T = 50$ мксек, $\tau = 100$ мксек. Этот пример был рассмотрен в работе [3] и для него определено третье критическое время запаздывания $\tau_{кр3} = 61$ мксек. Так как $K_{\xi} < -1$, то для определения частоты самомодуляции воспользуемся уравнением (13 а) при $n = 1$. Отсюда найдем $\Omega = 2\pi \cdot 3,65 \cdot 10^3$ сек $^{-1}$. Из (12) определим $K_{\xi} = -1,52$. Используя уравнения (4) и (9), найдем $\xi = 2,25$ в и $X_0 = 7,25$ в. Таким образом, в данном примере глубина самомодуляции $M = \xi/X_0 = 0,31$.

При больших запаздываниях самомодуляция из синусоидальной становится прямоугольной, и помимо основной синусоиды огibaющей появляются ее высшие гармоники. Для оценки запаздывания, при котором следует ожидать появления гармоник огibaющей, можно воспользоваться уравнениями (13) при $n \geq 2$ и $\Omega = \Omega_{\max}$, определяемой из уравнения

$$\Omega_{\max} = T^{-1} [K_{\xi}^2(X, 0) - 1]^{1/2}. \quad (14)$$

В формировании гармоник огibaющей участвует линия задержки. В интересующем нас случае $K_{\xi} < -1$, соответствующем устойчивой самомодуляции (это мы покажем ниже), образуются лишь нечетные гармоники огibaющей — первая, третья, пятая и т. д. Соотношение гармоник таково, что из них формируется прямоугольный импульс. Из экспериментов также видно, что при запаздываниях, сравнимых с постоянной времени контура, форма огibaющей высокочастотных колебаний при самомодуляции имеет синусоидальный характер, при больших запаздываниях — прямоугольный с длительностью примерно равной времени задержки.

В работе [6] показано, что при временах запаздывания, значительно превышающих постоянную времени контура, уравнение (1)

можно упростить, отбросив в нем член $T\dot{X}$. Тогда уравнение примет вид

$$X - RI_{a1\tau} = 0. \quad (15)$$

Выражение (15) есть функциональное уравнение с запаздывающим аргументом. Методы решения таких уравнений в применении к некоторым колебательным системам можно найти, например, в работе [1].

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Метод исследования устойчивости, использованный в настоящей работе, аналогичен методу медленно меняющихся амплитуд. Подчеркнем, что этот метод не может дать ответ о возможности возникновения высших гармоник огибающей.

Имея в виду решение (3), уравнение (1) можно записать в иной форме

$$T\dot{X} + X - R(I_0 + I_1 \cos \varphi_\tau) = 0. \quad (16)$$

Здесь

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_{a1\tau} d\varphi_\tau,$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_{a1\tau} \cos \varphi_\tau d\varphi_\tau.$$

Для случая стационарного решения (3) уравнение (16) распадается на три отдельных, связанных между собою, уравнения следующего вида:

$$X_0 = RI_0,$$

$$\xi - RI_1 \cos(\Omega\tau) = 0,$$

$$T\Omega\xi + RI_1 \sin(\Omega\tau) = 0. \quad (17)$$

Для перехода от уравнений (17) к уравнениям (4), (11) следует пользоваться соотношениями

$$K_X = \frac{RI_0}{X_0}, \quad K_\xi = \frac{RI_1}{\xi}. \quad (18)$$

Дадим малые возмущения постоянной составляющей, амплитуде самомодуляции и фазовому углу, т. е. положим решение в виде

$$X = X_0 + dX_0 + (\xi + d\xi) \cos(\varphi + d\varphi), \quad (19)$$

тогда главная часть приращения определится как

$$dX = dX_0 + \cos \varphi d\xi - \xi \sin \varphi d\varphi. \quad (20)$$

Главная часть приращения компонент анодного тока найдется из выражения

$$dI_{a1\tau} = d(I_0 + I_1 \cos \varphi_\tau) = \left(\frac{\partial}{\partial X_0} dX_{0\tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} d\xi_\tau + \frac{\partial}{\partial \varphi_\tau} d\varphi_\tau \right) (I_0 + I_1 \cos \varphi_\tau) =$$

$$= \frac{\partial I_0}{\partial X_0} dX_{0\tau} + \frac{\partial I_0}{\partial \xi} d\xi_\tau + \left(\frac{\partial I_1}{\partial X_0} dX_{0\tau} + \frac{\partial I_1}{\partial \xi} d\xi_\tau \right) \cos \varphi_\tau -$$

$$- I_1 \sin \varphi_\tau d\varphi_\tau. \quad (21)$$

Подставив выражения (20), (21) в уравнение для малых возмущений

$$d\dot{X} + dX - Rd(I_0 + I_1 \cos \varphi_\tau) = 0, \quad (22)$$

на основании принципа гармонического баланса получим систему трех уравнений

$$\begin{aligned} Td\dot{X}_0 + dX_0 - R \frac{\partial I_0}{\partial X_0} dX_{0\tau} - R \frac{\partial I_0}{\partial \xi} d\xi_\tau = 0, \\ T d\dot{\xi} + d\xi - R \cos(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial \xi} d\xi_\tau - R \cos(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial X_0} dX_{0\tau} - T\xi\Omega d\varphi - \\ - RI_1 \sin(\Omega\tau) d\varphi_\tau = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} T\xi d\dot{\varphi} + \xi d\varphi - RI_1 \cos(\Omega\tau) d\varphi_\tau + T\Omega d\xi + R \sin(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial \xi} d\xi_\tau + \\ + R \sin(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial X_0} dX_{0\tau} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку решение вида (3) справедливо для значений $W(X_0, 0, \Omega)$, незначительно превышающих единицу, и запаздывании, немногим больше чем треть критическое, то возмущенное движение будет расходиться или сходиться к стационарному достаточно медленно, так что решения для двух соседних циклов как по амплитуде, так и по фазе будут отличаться незначительно. Поэтому можно положить

$$dX_0 \sim dX_{0\tau}, \quad d\xi \sim d\xi_\tau, \quad d\varphi \sim d\varphi_\tau. \quad (24)$$

Используя условия стационарности (17) и условия (24), уравнения для малых возмущений (23) после упрощения представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} Td\dot{X}_0 + \left(1 - R \frac{\partial I_0}{\partial X_0}\right) dX_0 - R \frac{\partial I_0}{\partial \xi} d\xi = 0, \\ Td\dot{\xi} + \left[1 - R \cos(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial \xi}\right] d\xi - R \cos(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial X_0} dX_0 = 0, \quad (25) \\ T\xi d\dot{\varphi} + \left[T\Omega + R \sin(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial \xi}\right] d\xi - R \sin(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial X_0} dX_0 = 0. \end{aligned}$$

Для системы (25) характеристическое уравнение запишется в виде

$$D(TP) = \begin{vmatrix} TP+1 - R \frac{\partial I_0}{\partial X_0} & -R \frac{\partial I_0}{\partial \xi} & 0 \\ -R \cos(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial X_0} & TP+1 - R \cos(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial \xi} & 0 \\ -R \sin(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial X_0} & T\Omega + R \sin(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial \xi} & T\xi P \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

Оно имеет три корня. Один корень нулевой. Он характеризует автономность системы и не влияет на устойчивость. Два других корня найдутся из уравнения

$$\lambda^2 + \lambda \left\{ 2 - R \left[\cos(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial \xi} + \frac{\partial I_0}{\partial X_0} \right] \right\} + 1 - R \left[\cos(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial \xi} + \frac{\partial I_0}{\partial X_0} \right] + R^2 \cos(\Omega\tau) \left(\frac{\partial I_0}{\partial X_0} \frac{\partial I_1}{\partial \xi} - \frac{\partial I_0}{\partial \xi} \frac{\partial I_1}{\partial X_0} \right) = 0, \quad (27)$$

где $\lambda = TP$.

На основании критерия Гурвица для устойчивости стационарной самомодуляции, как видно из уравнения (27), необходимо потребовать выполнение неравенств

$$2 - R \left[\cos(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial \xi} + \frac{\partial I_0}{\partial X_0} \right] > 0, \quad (28)$$

$$1 - R \left[\cos(\Omega\tau) \frac{\partial I_1}{\partial \xi} + \frac{\partial I_0}{\partial X_0} \right] + R^2 \cos(\Omega\tau) \left(\frac{\partial I_0}{\partial X_0} \frac{\partial I_1}{\partial \xi} - \frac{\partial I_0}{\partial \xi} \frac{\partial I_1}{\partial X_0} \right) > 0.$$

Воспользовавшись соотношениями

$$R \cos(\Omega\tau) = \xi/I_1, \quad R = X_0/I_0, \quad (29)$$

неравенства (28) можно представить в более удобном виде:

$$2 - \frac{\xi}{I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \xi} - \frac{X_0}{I_0} \frac{\partial I_0}{\partial X_0} > 0, \quad (30a)$$

$$1 - \frac{\xi}{I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \xi} - \frac{X_0}{I_0} \frac{\partial I_0}{\partial X_0} + \frac{\xi}{I_1} \frac{X_0}{I_0} \left(\frac{\partial I_0}{\partial X_0} \frac{\partial I_1}{\partial \xi} - \frac{\partial I_0}{\partial \xi} \frac{\partial I_1}{\partial X_0} \right) > 0. \quad (30б)$$

При выполнении неравенств (30) стационарное самомодулированное колебание будет устойчиво.

Пример. Рассмотрим устойчивость самомодулированного колебания в системе с кубической аппроксимацией нелинейности. Из (9) найдем

$$I_0 = \left[S_1 - \frac{3}{4} S_3 \left(X_0^2 + \frac{3}{2} \xi^2 \right) \right] X_0, \quad (31)$$

$$I_1 = \left[S_1 - \frac{9}{4} S_3 \left(X_0^2 + \frac{1}{4} \xi^2 \right) \right] \xi.$$

Подставив (31) в (30 а), получим неравенство

$$\frac{3}{4} \frac{\xi^2}{K_\xi} + X_0^2 > 0. \quad (32)$$

При наших исходных условиях имеем $\xi < X_0$, $|K_\xi| > 1$. Следовательно, при любом знаке K_ξ неравенство (32) выполняется. Подставив (31) в неравенство (30 б), получим условие устойчивости

$$-1/K_\xi > 0. \quad (33)$$

Следовательно, при $K_\xi < 0$ неравенство (30 б) выполняется и самомодуляция при значениях $K_\xi < -1$ будет устойчивой. При $K_\xi > 1$ самомодуляция неустойчива.

На рис. 4 показана зависимость RI_{a1} от X для аппроксимации нелинейности полиномом пятой степени в случае жесткого режима возбуждения колебаний. В точках A_1 и A_2 кривая RI_{a1} имеет пересечение с прямой обратной связи, определяемой выражением $RI_{a1} = X$. В точке A_1 коэффициент передачи нелинейностью первой гармоники

огibaющей больше единицы ($K_{\xi} > 1$) и поэтому самомодуляция колебаний в окрестности точки A_1 будет неустойчива. Точка A_1 соответствует неустойчивому предельному циклу в системе без запаздывания. В системе с запаздыванием, как следует из наших исследований, неустойчивый предельный цикл ни при каком запаздывании не может быть сделан устойчивым. При $X < X_1$ колебания затухают, при $X > X_1$ колебания растут и достигают значения, определяемого точкой A_2 . Если время запаздывания больше третьего критического и в окрестности точки A_2 $K_{\xi} < -1$, то в этой точке будет существовать устойчивая самомодуляция. Если же в точке A_2 $-1 \leq K_{\xi} \leq 1$, то амплитуда колебаний будет устойчивой при любом запаздывании, т. е. решение (3) будет содержать только постоянную составляющую X_0 , амплитуда же самомодуляции будет равна нулю ($\xi = 0$).

В связи с полученным результатом заметим, что работа [7] в части, касающейся самомодуляции колебаний в автогенераторе с запаздыванием при релейной характеристике нелинейности, ошибочна. В автоколебательной системе с запаздыванием при релейной характеристике нелинейности не могут существовать самомодулированные по амплитуде колебания. Покажем это. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{U}_a + 2\delta\dot{U}_a + \omega_0^2 U_a = -2\delta R \frac{di_{a\tau}}{dt}, \quad (34)$$

определяющее поведение напряжения на контуре автогенератора с запаздыванием (рис. 1). Отсутствие в схеме рис. 1 трансформатора, переворачивающего фазу напряжения на 180° , не меняет существа исследования. В случае синусоидального колебания вида

$$U_a = X \cos \psi, \quad \psi = \omega t \quad (35)$$

правую часть уравнения (34) можно записать иначе:

$$\ddot{U}_a + 2\delta\dot{U}_a + \omega_0^2 U_a = -2\delta R \frac{di_{a1\tau}}{dt}, \quad (36)$$

где

$$i_{a1\tau} = I_{a1} \cos \psi_c, \quad (37)$$

$$I_{a1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i_a \cos \psi \, d\psi.$$

Для релейной нелинейности (рис. 5)

$$I_{a1} = 2I_m/\pi. \quad (38)$$

Для случая стационарного режима колебаний вида (35) из уравнения (34) получим

$$1 + K_X \cos(\omega\tau) = 0, \quad (39)$$

$$Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) + K_X \sin(\omega\tau) = 0,$$

где

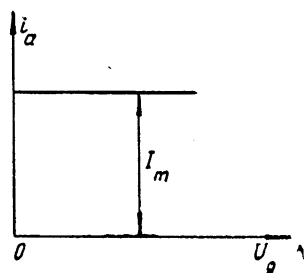


Рис. 5.

$$K_X = \frac{RI_{a1}}{X} = \frac{R2I_m}{\pi X}, \quad Q = R\omega_0 C.$$

В случае возмущенного движения вида

$$U_a = (X + \xi) \cos(\psi + \varphi), \quad (40)$$

где ξ и φ — малые, медленно меняющиеся величины, главная часть приращения для U_a и $\frac{di_{a1\tau}}{dt}$ примет вид

$$dU_a = \cos\psi \xi - X \sin\psi \varphi, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{di_{a1\tau}}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}(di_{a1\tau}) = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial}{\partial X}\xi_\tau + \frac{\partial}{\partial \psi_\tau}\varphi_\tau\right) I_{a1} \cos\psi_\tau\right] = \\ &= \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial I_{a1}}{\partial X} \cos\psi_\tau\right)\xi_\tau - (I_{a1} \sin\psi_\tau)\varphi_\tau\right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Из условий стационарности имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial I_{a1}}{\partial X} = 0, \quad \dot{I}_{a1} = 0, \quad \dot{\psi}_\tau = \omega. \quad (43)$$

Воспользовавшись условием медленности изменения малых возмущений

$$\ddot{\xi} \text{ и } \delta\dot{\xi} \ll \omega\dot{\xi}, \quad \ddot{\varphi} \text{ и } \delta\dot{\varphi} \ll \omega\dot{\varphi} \quad (44)$$

и уравнениями (39), (41)—(43), из уравнения для малых приращений

$$d\dot{U}_a + 2\delta d\dot{U}_a + \omega_0^2 dU_a = -2\delta R \frac{d}{dt}(di_{a1\tau}) \quad (45)$$

получим два линейных дифференциальных уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} T\dot{\xi} + \xi - \gamma\xi_\tau + XQ\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)(\varphi - \varphi_\tau) &= 0, \\ T\dot{\varphi} + \varphi - \varphi_\tau - \frac{1}{X}Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)(\xi - \gamma\xi_\tau) &= 0, \end{aligned} \quad (46)$$

где

$$\gamma = \frac{K_\xi}{K_X}, \quad K_\xi = R \frac{\partial I_{a1}}{\partial X}, \quad Q = R\omega_0 C.$$

Для релейной характеристики имеем $K_\xi = 0$, т. е. $\gamma = 0$. Из уравнений (46) немедленно следует, что стационарное решение (35) устойчиво и амплитудная самомодуляция не сможет возникнуть ни при каком сколь угодно большом запаздывании. Этот вывод может быть распространен на все одноконтурные автоколебательные системы с однозначными нелинейностями, не имеющими участков с отрицательной крутизной.

В заключение рассмотрим связь между полным (34) и упрощенным (1) уравнениями.

Если амплитуда и скорость изменения фазы периодически медленно меняются, то вместо (35) можно положить

$$U_a = X(t) \cos[\omega t + \varphi(t)] = X(t) \cos\psi, \quad (47)$$

где $X(t)$, $\varphi(t)$ — стационарные, медленно меняющиеся величины. Под-

ставив (47) в уравнение (34) и отбросив высшие гармоники, получим на основании принципа гармонического баланса две группы членов. Одна из них содержит множитель $\cos \psi$, вторая $\sin \psi$. Сгруппировав все коэффициенты, стоящие при $\sin \psi$, получим уравнение, справедливое как при стационарной самомодуляции, так и в случае медленных переходных процессов,

$$F_{1s} = X\ddot{\psi} + 2\delta X\dot{\psi} + 2\dot{X}\dot{\psi} + 2\delta [X_{\tau}\dot{\psi}_{\tau} K_{X_{\tau}} \cos(\Delta\psi) - \dot{X}_{\tau} K_{\xi_{\tau}} \sin(\Delta\psi)] = 0. \quad (48)$$

Здесь

$$\Delta\psi = \omega\tau + \varphi(t) - \varphi(t - \tau),$$

$$K_{X_{\tau}} = \frac{R}{\pi X_{\tau}} \int_{-\pi}^{\pi} i_{a\tau} \cos \psi_{\tau} d\psi_{\tau} = \frac{R I_{a1\tau}}{X_{\tau}}, \quad K_{\xi_{\tau}} = R \frac{\partial I_{a1\tau}}{\partial X_{\tau}}.$$

Положим, что при медленном периодическом изменении амплитуды частота колебаний примерно равна резонансной частоте контура, девиация медленной фазы настолько мала, что ею можно пренебречь, набег фазы за время задержки постоянен и примерно равен нечетному числу радиан, т. е. выполняются приближенные равенства

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &\simeq \omega_0, \quad \Delta\psi \simeq \omega_0\tau, \quad \tau \simeq (2n + 1)\pi/\omega_0, \\ \cos(\Delta\psi) &\simeq -1, \quad \sin(\Delta\psi) \simeq 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Тогда из уравнения (48) сразу следует упрощенное уравнение (1), подробно исследованное выше.

На основе нелинейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом второго порядка получено упрощенное нелинейное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом первого порядка. Этому уравнению соответствует низкочастотный эквивалент высокочастотного генератора.

Решение упрощенного уравнения представлено в виде суммы, состоящей из постоянной составляющей и синусоидального члена. Постоянная составляющая характеризует величину несущей высокочастотного колебания, а синусоидальный член—глубину и частоту самомодуляции. Найденное стационарное частное решение соответствует значению коэффициента передачи огибающей высокочастотного колебания по разомкнутой петле обратной связи, лишь немногим больше единицы, и времени задержки, незначительно превышающем треть критическое.

На основе двойного преобразования Фурье—Лапласа разработан метод и проведено исследование устойчивости стационарного решения. Найдено, что при отрицательном коэффициенте передачи огибающей по модулю, большем единицы, самомодуляция устойчива.

Показано, что неустойчивый предельный цикл, при наличии которого коэффициент передачи огибающей положителен и больше единицы, ни при каком запаздывании не может быть сделан устойчивым:

При коэффициенте передачи огибающей, равном нулю или по абсолютной величине меньшем единицы (релейная и некоторые другие подобные однозначные безынерционные нелинейности), амплитудная самомодуляция при любом запаздывании не сможет возникнуть и существовать.

Предложенная теория позволяет по виду нелинейности предсказать без длительного анализа возможность возникновения самомодуляции.

Это однозначно определяет целесообразность проведения исследований на устойчивость амплитуды высокочастотного колебания или исследований на получение режима самомодуляции амплитуды.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бовшеверов, ЖТФ, **6**, № 9, 1480 (1936).
2. В. Каннингхэм, Введение в теорию нелинейных систем, Госэнергоиздат, М.—Л., 1962.
3. П. А. Перепелятник, Радиотехника и электроника, **6**, № 10, 1601 (1961).
4. П. А. Перепелятник, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, **5**, № 6, 1187 (1962).
5. Переходные процессы в электрических цепях при передаче импульсов, перевод с англ. под ред. А. Я. Брейтбарта, изд. Сов. радио, М., 1951.
6. Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, Гостехиздат, М., 1956.
7. G. Gorelik, J. Phys., **1**, № 5—6, 465 (1939).

Поступила в редакцию
15 февраля 1968 г.

ON SELF-MODULATION OF OSCILLATIONS IN A GENERATOR
WITH DELAY

P. A. Perepelyatnik

A dualitative analysis of selfmodulated oscillations is carried out on the basis of a low frequency equivalent for a high frequency autogenerator. The class of nonlinear characteristics enabling the existence of amplitude selfmodulation in an autogenerator is determined. Stability conditions necessary for this kind oscillations are derived.
