ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 4 РАДИОФИЗИКА. 1970

УДК 531.391

К ТЕОРИИ ВИБРОУДАРНИКА СО СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

В. С. Метрикин

Методом точечных преобразований исследуется поведение виброударной системы при малых случайных изменениях зазора и коэффициента восстановления скорости при ударе.

В большинстве работ* по исследованию динамики ударно-колебательных систем обычно предполагается, что в процессе работы параметры этих систем остаются неизменными. Однако в действительности параметры, особенно коэффициент восстановления скорости при ударе R и зазор ξ_0, изменяются от удара к удару случайным образом. Поэтому изучение виброударных систем, близких к реальным условиям, приводит к задаче об исследовании динамических систем при наличии случайно изменяющихся параметров.

Ниже методом точечных отображений рассматривается динамика одномассового виброударного механизма [2, 3] при наличии случайно изменяющихся R и ξ_0**. В результате исследований найдены статистические характеристики системы***. Проведен анализ среднеквадратичной стохастической устойчивости. Рассмотрены случаи дельта- и недельта-коррелированных изменений параметров. В области устойчивости [2] для малых случайных изменений коэффициента восстановления скорости при ударе исследовано изменение средней максимальной ударной скорости.

1. ОТЫСКАНИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ R и ξ_0

Рассмотрим динамику одномассового виброударника [2], схема которого представлена на рис. 1, в предположении, что коэффициент восстановления скорости и зазор при n-м ударе имеют значения $R_n = R_0 + \Delta R_n$ и $\xi_n = \xi_0 + \Delta\xi_n$, где ΔR_n и $\Delta\xi_n$ — соответственно малые случайные отклонения от R и ξ_0 с нулевым средним значением и дисперсией, отличной от нуля, при которых в детерминированном случае существует устойчивый периодический режим.

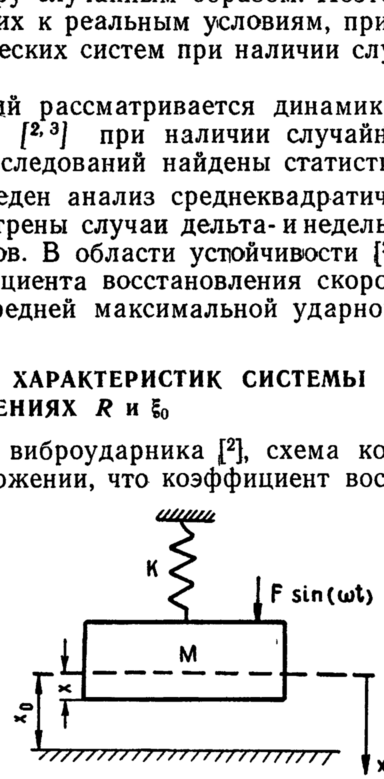

Рис. 1.

Точечное преобразование в безразмерных переменных $\xi = M\omega^2 x/F - P/F\lambda^2$, $\tau \doteq \omega t$, где $\lambda^2 = k/M\omega^2$, запишется в следующем виде:

---

* Смотри [1] и приведенную в ней литературу.

** Исследование методом точечных отображений автоколебательных систем со случайными возмущениями было выполнено в работе [4].

*** Некоторые исследования различных виброударных систем со случайными возмущениями проведены в [5, 6, 14] и других работах.

$$\begin{gathered}\xi_{n+1}=\xi_n\cos[\lambda(\tau_{n+1}-\tau_n)]-\alpha\sin\tau_n\cos[\lambda(\tau_{n+1}-\tau_n)]+\\+\alpha\sin\tau_{n+1}-\alpha\lambda^{-1}\cos\tau_n\sin[\lambda(\tau_{n+1}-\tau_n)]-y_n\lambda^{-1}\sin[\lambda(\tau_{n+1}-\tau_n)],\\y_{n+1}=R_{n+1}\{\xi_n\lambda\sin[\lambda(\tau_{n+1}-\tau_n)]-\lambda\alpha\sin\tau_n\sin[\lambda(\tau_{n+1}-\tau_n)]-\\-\alpha\cos\tau_{n+1}+\alpha\cos\tau_n\cos[\lambda(\tau_{n+1}-\tau_n)]-y_n\cos[\lambda(\tau_{n+1}-\tau_n)]\},\end{gathered}\qquad(1.1)$$

где через y_n обозначена скорость непосредственно после n-го удара, а $\alpha=1(\lambda^2-1)$.

1.1. Малые случайные изменения R при постоянном зазоре. Линеаризуя точечное преобразование (1.1) в окрестности устойчивого периодического режима, получим систему двух уравнений в конечных разностях

$$\begin{gathered}\Delta y_{n+1}=(P_1P_2+Q_2)\,\Delta\tau_n+(M+P_2Q_1)\,\Delta y_n-\dot\xi_0\Delta R_{n+1},\\\Delta\tau_{n+1}=P_1\Delta\tau_n+Q_1\Delta y_n,\end{gathered}\qquad(1.2)$$

где

$$\begin{gathered}P_1=\{1-\alpha\nu[(1-\gamma)\cos\tau_0-v\sin\tau_0]\},\qquad Q_1=-\nu v,\\M=-R\gamma,\ P_2=Rf_1,\ T=2\pi n,\ \gamma=\cos(\lambda T),\ \nu=\dot\xi_0^{-1},\\Q_2=-R[2^{-1}f_2+\alpha\lambda^2v\cos\tau_0],\quad v=\lambda^{-1}\sin(\lambda T),\\f_1=\sin\tau_0-\lambda^2\xi_0,\ f_2=2[\lambda^2\xi_0-\alpha(\lambda^2-\gamma)\sin\tau_0].\end{gathered}\qquad(1.3)$$

Решая [7] систему (1.2) и учитывая, что корни характеристического уравнения этой системы z_i $(i=1,2)$ по предположению о существовании устойчивого периодического движения удовлетворяют неравенству $|z_i|<1$, находим

$$\begin{gathered}\Delta\tau_n=v\sum_{i=-\infty}^{n-1}L_{n,i}\Delta R_{i+1},\\\Delta y_n=\dot\xi_0\sum_{i=-\infty}^{n-1}L_{n,i}\ (P_1\Delta R_{i+1}-\Delta R_{i+2}),\end{gathered}\qquad(1.4)$$

где

$$L_{n,i}=\frac{z_1^{n-i-1}-z_2^{n-i-1}}{z_1-z_2}.$$

Из первого соотношения (1.4) находим, что при $\lambda_k=\dfrac{2k+1}{2n}$, где n — кратность периода движения периоду внешней силы и $k=0,1,2,\ldots$, моменты ударов не зависят от случайных отклонений R (λ_k, соответствующие границам, опускаются).

Если случайные изменения R дельта-коррелированы, получим для среднеквадратичных отклонений следующие выражения:

$$\begin{gathered}\overline{\Delta\tau_n^2}=kuv^2\overline{\Delta R^2}=T^2C_{11}\overline{\Delta R^2},\\\Delta y_n^2=k\dot\xi_0^2\left[\left(1+P_1^2\right)u-2P_1w\right]\overline{\Delta R^2}=\dot\xi_0^2C_{12}\overline{\Delta R^2},\end{gathered}\qquad(1.5)$$

где обозначено

$$k=\left[(1-z_1z_2)\left(1-z_1^2\right)\left(1-z_2^2\right)\right]^{-1},\qquad u=(1+z_1z_2),$$
$$w=(z_1+z_2).$$

Переходя к пределу в (1.5) при $\lambda \to 0$, что соответствует беспружинному одномассовому виброударнику [3], получим выражения для среднеквадратичных отклонений в виде

$$\overline{\Delta\tau_n^2} = kT^2u\overline{\Delta R^2} = T^2C_1^0\overline{\Delta R^2},$$
$$\overline{\Delta y_n^2} = \frac{kT^2p^2}{(1+R)^2}\left[(1+m^2)u - 2wm\right]\overline{\Delta R^2}, \tag{1.6}$$

где через m обозначено $1 - \dfrac{1+R}{p}\cos\tau_0$.

В случае недельта-коррелированных отклонений R [8], что в реальных системах и имеет место, соотношения (1.6) перепишутся в более громоздком виде

$$\overline{\Delta\tau_n^2} = \frac{T^2}{(1-R^2)(z_1-z_2)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_1^{k+1}}{1-z_1^2} - \frac{z_2^{k+1}}{1-z_2^2}\right)\overline{\Delta R_m \Delta R_{m-k}}\right\},$$
$$\overline{\Delta y_n^2} = \frac{\dot\xi_0^2}{(1-R^2)(z_1-z_2)}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1+m^2)\left(\frac{z_1^{k+1}}{1-z_1^2} - \frac{z_2^{k+1}}{1-z_2^2}\right) - \right.\right. \tag{1.7}$$
$$\left.\left. - 2m\left(\frac{z_1^k}{1-z_1^2} - \frac{z_2^k}{1-z_2^2}\right)\right]\overline{\Delta R_m \Delta R_{m-k}}\right\}.$$

Выбирая конкретную функцию корреляции, например, в виде

$$\overline{\Delta R_m \Delta R_{m-k}} = \begin{cases} \overline{\Delta R^2} & (\text{при } k=0) \\ 0{,}5\,\overline{\Delta R^2} & (\text{при } k=1) \\ 0 & (\text{при } k>1) \end{cases}, \tag{1.8}$$

что означает зависимость коэффициента восстановления только от предыдущего удара, выражения (1.7) перепишутся

$$\overline{\Delta\tau_n^2} = kT^2(u+0{,}5w)\overline{\Delta R^2} = T^2C_1\overline{\Delta R^2},$$
$$\Delta y_n^2 = k\dot\xi_0^2\left\{(1+m^2)(u+0{,}5w) - 2m\left[w + 0{,}5(w^2 - R^2u)\right]\right\}\overline{\Delta R^2}. \tag{1.9}$$

1.2. Малые случайные изменения зазора при постоянном коэффициенте восстановления.

В этом случае из (1.1) получаем разностные уравнения

$$\Delta\tau_{n+1} = P_1\Delta\tau_n + Q_1\Delta y_n + \nu(\Delta\xi_{n+1} - \gamma\Delta\xi_n),$$
$$\Delta y_{n+1} = (P_1P_2 + Q_2)\Delta\tau_n + (P_2Q_1 + M)\Delta y_n + R\lambda^2 v\Delta\xi_n + \tag{1.10}$$
$$+ P_2\nu(\Delta\xi_{n+1} - \gamma\Delta\xi_n),$$

решения которых можно записать в виде

$$\Delta\tau_n = \nu\sum_{i=\infty}^{n-1} L_{n,i}(f_0\Delta\xi_{i+1} - R\Delta\xi_i + \Delta\xi_{i+2}),$$
$$\Delta y_n = -R\nu\sum_{i=-\infty}^{n-1} L_{n,i}\left[f_1(\Delta\xi_i + \Delta\xi_{i+2}) + f_2\Delta\xi_{i+1}\right]. \tag{1.11}$$

где $f_0 = \gamma(R-1)$.

Предполагая далее, что случайные изменения зазора от удара к удару дельта-коррелированы, получим

$$\overline{\Delta\tau_n^2} = k\nu^2\{u(u + 2R^3 + f_0^2) + 2w[f_0(1-R) - Rw]\} \times \times \overline{\Delta\xi^2} = \nu^2 C_{21}\overline{\Delta\xi^2}, \tag{1.12}$$

$$\overline{\Delta y_n^2} = kR^2\nu^2\{u[2f_1^2(1-R^2) + f_2^2] + 2w[2f_1f_2 + f_1^2 w]\} \times \times \overline{\Delta\xi^2} = \nu^2 C_{22}\overline{\Delta\xi^2}.$$

Здесь, как и в случае 1.1, можно получить аналогично формулам (1.7)—(1.9) выражения для средних квадратов в случае недельта-коррелированных изменений зазора*.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Для исследования устойчивости стохастических систем в [12, 13] были введены понятия устойчивости в смысле Ляпунова. Однако полученные результаты применимы в основном к линейным системам или системам, близким к линейным. В работе [9] введено понятие стохастической устойчивости, которое можно применять для существенно нелинейных систем. Используя это определение в случае малых случайных отклонений R, можно считать, что система будет стохастически устойчива, если существует постоянная C, зависящая только от параметров системы, такая, что при достаточно большом n выполняется неравенство**

$$\overline{\Delta\tau_n^2} + \overline{\Delta y_n^2} \leqslant C\overline{\Delta R^2}. \tag{2.1}$$

Ввиду ограниченности C и малости $\overline{\Delta R^2}$ величина $C\overline{\Delta R^2}$ мала.

По значению постоянной C, а следовательно, по значениям C_{ij} $(i, j = 1,2)$, можно судить о степени устойчивости системы. На рис. 2 (а, б) в области устойчивости [2] для $\lambda < 1$ построены линии уровня величин соответственно C_{11} и C_{12} для $n = 1$, $R = 0{,}6$***. Пунктирной линией нанесена граница C_τ. Из рис. 2 видно, что наименьшее значение

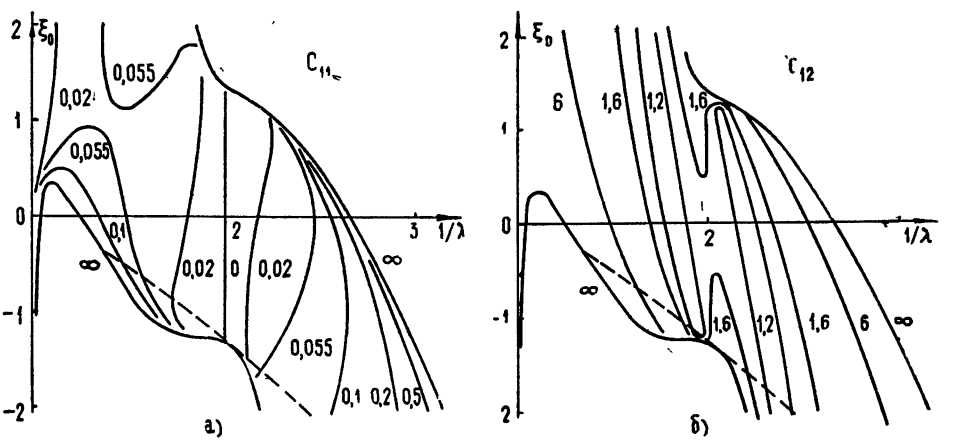

Рис. 2.

* Из-за их громоздкости они не приводятся.

** Аналогичные неравенства можно написать и для случая малых отклонений зазора, заменив $\overline{\Delta R^2}$ на $\overline{\Delta\xi^2}$.

*** Для $\lambda > 1$ эти графики опускаются ввиду того, что значительная часть области устойчивости отсекается бифуркационной кривой C_τ [10].

коэффициента C находится в окрестности $\lambda = 0{,}5$, поэтому, выбирая λ в окрестности этого значения, влияние случайных изменений коэффициента восстановления скорости будет незначительно*. Этот вывод справедлив и для случайных отклонений зазора. Приближаясь к границам устойчивости, значение C возрастает, на границе оно равно бесконечности, однако случай границы устойчивости не входит в данное рассмотрение.

На рис. 3 пунктирными линиями построены линии уровня C_1, а сплошными — линии уровня C_1^0. Внутри области устойчивости существует разграничивающая кривая

$$\varkappa = 2(1 + R)^2/[4(1 + R^2)^2 + (1 - R^2)^2\, T^2]^{1/2}.$$

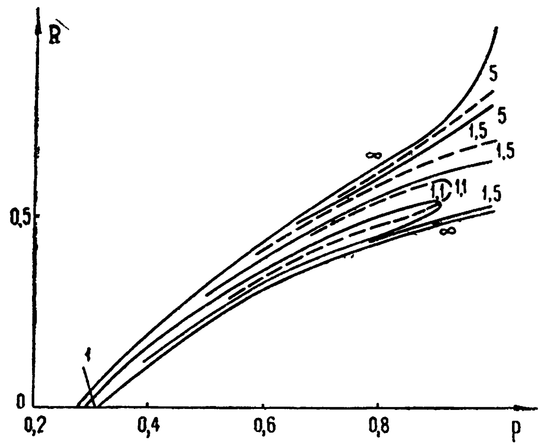

Рис. 3.

Учет корреляции при случайном изменении R приводит к смещению линий уровня в область меньших p для $p \leqslant \varkappa$ и в область больших p для $p > \varkappa$. Необходимо отметить, что при $p > \varkappa$ вероятность выхода системы из заданного режима чрезвычайно большая, так как значения C_1 и C_1^0 практически стремятся к бесконечности. Поэтому при выборе параметров системы необходимо руководствоваться неравенством $p < \varkappa$.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕДНЕЙ ОПТИМАЛЬНОЙ УДАРНОЙ СКОРОСТИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ R

Для настройки системы на оптимальный режим необходимо учитывать величину смещения максимальной ударной скорости при случайном изменении коэффициента восстановления.

Среднее значение $\Delta\dot{\xi}_n$ найдем, разлагая точечное отображение (1.1) в ряд по $\Delta\tau_n$ и $\Delta\dot{\xi}_n$ до второго порядка включительно, после чего получаем

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{n+1} &= a_1\Delta\tau_n - RQ_1\Delta\dot{\xi}_n + v\Delta R_n + L(n), \\ \Delta\dot{\xi}_{n+1} &= b_1\Delta\tau_n + f_1\Delta\tau_{n+1} - \dot{\xi}_0\gamma\Delta R_n + M\Delta\dot{\xi}_n + S(n), \end{aligned} \qquad (3.1)$$

в которых через $L(n) = \sum_{i=1}^{8} c_i x_i$ и $S(n) = \sum_{i=1}^{8} g_i x_i$ обозначены величины второго порядка относительно $\Delta\tau_n$ и $\Delta\dot{\xi}_n$, где

$$x_1 = \Delta\tau_n\Delta\tau_{n+1}, \quad x_2 = \Delta\tau_n\Delta R_n, \quad x_3 = \Delta\tau_n\Delta\dot{\xi}_n,$$
$$x_4 = \Delta\tau_n\Delta R_n, \quad x_5 = \Delta\tau_{n+1}\Delta\dot{\xi}_n, \quad x_6 = \Delta R_n\Delta\dot{\xi}_n,$$
$$x_7 = \Delta\tau_n^2, \quad x_8 = \Delta\tau_{n+1}^2, \quad c_1 = 2c_2c_8,$$

---

* Все сказанное относится и к окрестностям других $\lambda_k = \dfrac{2k+1}{2n}$,

$$
\begin{gathered}
c_2 = -c_4 = g_6 = -\gamma, \quad c_3 = -c_5 = M\nu, \quad c_6 = -Q_1, \\
c_7 = 2^{-1}(v\nu c_4 - c_1), \quad c_8 = -2^{-1}\nu f_1, \quad g_1 = \lambda^2\xi_0(f_1c_6 - Rc_4), \\
g_2 = -g_4 = \lambda^2\dot{\xi}_0^2 Q_1, \quad g_3 = -g_5 = -R\lambda^2 v, \\
g_7 = 2^{-1}(c_2\cos\tau_0 - g_1), \quad g_8 = 2^{-1}(\cos\tau_0 - \lambda^2\xi_0), \\
b_1 = -(f_1\gamma + R\dot{\xi}_0\lambda^2 v), \quad a_1 = M - f_1Q_1, \\
b_2 = f_1.
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

Исключая $\Delta\tau_n$ из (3.1), для $\Delta\dot{\xi}_n$ получаем уравнение, после усреднения [11] которого будем иметь

$$
\overline{\Delta\dot{\xi}_{n+2}} = \alpha\overline{\Delta\dot{\xi}_{n+1}} + \beta\overline{\Delta\dot{\xi}_n} + (b_1 + f_1)\,\overline{L(n)} + (1 - a_1)\,\overline{S(n)}, \tag{3.3}
$$

где α, β — коэффициент характеристического уравнения (1.2).

Вторые моменты, входящие в $\overline{L(n)}$ и $\overline{S(n)}$, находим, пользуясь формулами (1.4). После подстановки в $\overline{L(n)}$ и $\overline{S(n)}$ необходимых моментов решения уравнения (3.3) запишутся в виде (при условии $|z_i| < 1$)

$$
\overline{\Delta\dot{\xi}_n} = [(b_1 + b_2)\,\Phi_1 + (1 - a_1)\,\Phi_2]\,\overline{\Delta R^2} = E\overline{\Delta R^2}, \tag{3.4}
$$

где введены обозначения

$$
\Phi_1 = \sum_{i=1}^{8} c_i t_i, \qquad \Phi_2 = \sum_{i=1}^{8} g_i t_i,
$$

$$
\begin{gathered}
t_1 = kv^2w, \quad t_2 = t_6 = 0, \quad t_3 = vk\dot{\xi}_0(P_1u - Rw), \\
t_4 = v, \quad t_5 = vk\dot{\xi}_0[P_1w - R(w^2 - R^2u)], \\
t_7 = t_8 = kv^2u.
\end{gathered}
$$

На рис. 4 в области устойчивости сплошными линиями приведены линии уровня E, а пунктирной — линия, на которой лежит максималь-

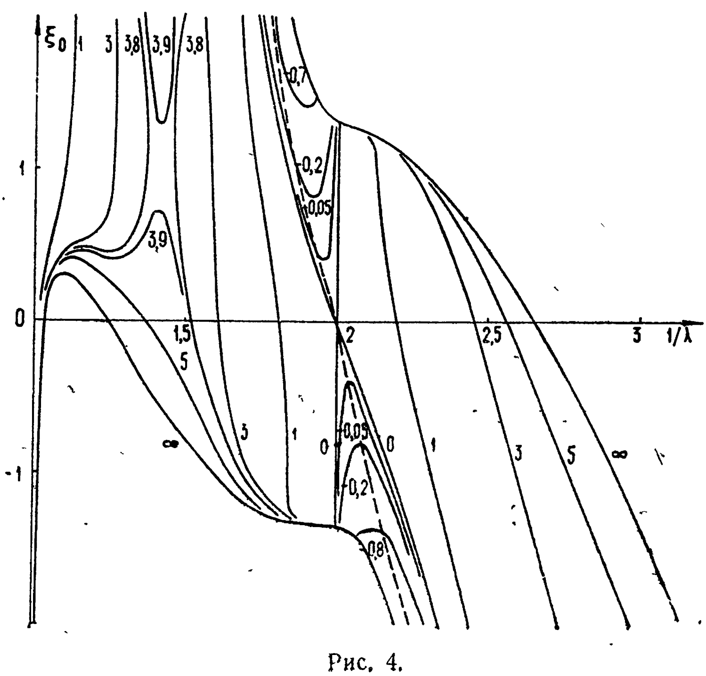

Рис. 4.

ное значение $\dot{\xi}_0$ (соответствующая детерминированному случаю). Из рис. 3 видно, что в плоскости $1/\lambda$, $\dot{\xi}_0$ есть область, ограниченная кривой 1 и прямой $\lambda = 0{,}5$, внутри которой значения E отрицательны, а вне ее — положительны. На границе области значение E равно нулю. Линия, на которой расположены максимальные значения ударной скорости $\dot{\xi}_0$, лежит внутри области.

На рис. 5, 6 сплошными линиями приведены зависимости ударной скорости от λ при постоянном зазоре для детерминированного случая, а пунктирными линиями нанесены кривые ударной скорости с учетом случайных отклонений R для $n = 1$, $R = 0{,}6$ и $\overline{\Delta R^2} = 0.1$.

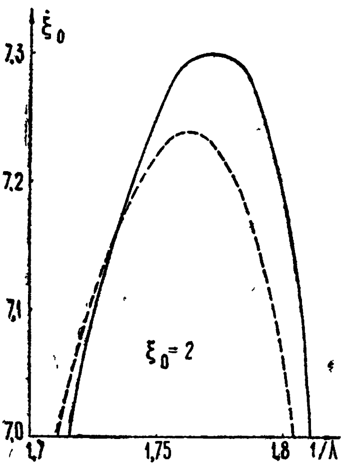

Рис. 5.

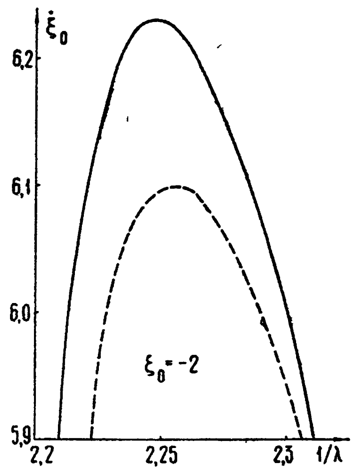

Рис. 6.

Максимальное значение ударной скорости уменьшается, и максимум смещается при $\xi_0 > 0$ в сторону больших λ, а для $\xi_0 < 0$ — в область меньших λ (рис. 4, 5). Ввиду этого для поддержания режима в реальных условиях следует увеличивать частоту внешней силы ω для положительных зазоров и уменьшать ее для отрицательных зазоров, а для сохранения величины ударного импульса необходимо несколько увеличивать зазор по сравнению с детерминированным случаем.

Исследовался также вопрос о вероятности выхода системы из заданного одноударного движения. Для этого в плоскости начальных условий τ_0, $\dot{\xi}_0$ при значениях параметров, принадлежащих области устойчивости одноударных однократных периодических движений (в случае детерминированных значений R и ξ_0), находилась область притяжения соответствующего периодического движения. Далее, по размерам области притяжений с использованием известных неравенств Чебышева [15]

$$P\{|x - \xi| \geqslant a\} \leqslant \frac{\sigma^2}{a^2},$$

можно найти оценку сверху вероятности выхода системы из одноударного движения. Так, для беспружинного одномассового виброударника [3] при случайных отклонениях R, равных 0,01, для значений параметров $P = 0{,}6$ и $R = 0.31$; 0.33; 0.38; 0.4; 0.42; 0.43 вероятности выхода ограничены соответственно следующими приближенными значениями 0,442; 0,0531; 0,0438; 0,0479; 0,119; 0,259.

Для сравнения теоретических результатов с реальными был проведен эксперимент на ЭЦВМ. Оказалось, что теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментом. Так, для значений параметров $\lambda^{-1} = 1{,}5$, $\xi_0 = 1{,}0$ и $R_0 = 0{,}6$ величина средней ударной скорости равна $1.6 \cdot 10^{-3}$ при эксперименте, где разброс R принимался равным $R_1 = 0{,}55$ с вероятностью $P_1 = 0{,}15$, $R_0 = 0{,}6$ с $P_0 = 0{,}7$ и $R_2 = 0{,}65$ с $P_2 = 0{,}15$ (распределение R бралось равновероятное), а теоретическая величина оказалась равной $9 \cdot 10^{-4}$ (см. рис. 4). Попутно выяснялся вопрос о вероятности сбоя по критерию $|\xi_k - \xi_0| > \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малая величина. Оказалось, что вероятность сбоя в среднем равна 0,14.

Автор признателен Ю. И. Неймарку и В. И. Беспалову за ценные советы и постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, Л. В. Беспалова, М. И. Фейгин, Инж. ж мех. тв. тела, № 1, 151 (1966).
2 Л. В. Беспалова, Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 3 (1957).
3. И. И. Быховский, А. Д. Дорохова, Л. Б Зарецкий, С И. Лукомский, Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 2, 161 (1964).
4. С. М. Рытов, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 2, № 1, 50 (1959).
5. Ю. М. Гольдин, Л. Б. Зарецкий, С И. Лукомский, V Совещание по основным проблемам теории машин и механизмов, Тезисы докладов, М., Тбилиси, 1967.
6. В. И. Бабицкий, М З. Коловский, Инж. ж. мех. тв. тела, № 9, 147 (1967)
7. А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Физматгиз, М., 1967.
8. Р. Х. Садеков, Изв высш. уч. зав — Радиофизика, 3, № 5, 796 (1960).
9. В. А. Брусин, М. Л. Тай, Изв. высш. уч. зав — Радиофизика, 10, № 7, 940 (1967).
10. Л. В Беспалова, В. С. Метрикин, Изв. АН СССР, Мех. тв. тела, № 2, 45 (1969).
11. В. И. Беспалов, ДАН СССР, 117, № 2, 209 (1957)
12. И Я. Кац, Н. Н. Красовский, ПММ, 24, № 5, 809 (1960).
13. М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский, Проблемы передачи информации, 2, № 3, 76 (1966).
14. А. А. Кобринский, Машиноведение, № 1, 4 (1969)
15. Г. Корн и Т. Корн, Справочник по математике для научных работников и инженеров, изд. Наука, М, 1968.

Научно-исследовательский физико-технический институт при Горьковском университете

Поступила в редакцию 14 июля 1969 г.

TO THE THEORY OF A VIBROPLUNGER WITH THE RANDOM VARIATION OF PARAMETERS

V. S. Metrikin

With the aid of the point transformation method the behaviour of vibroplunger system with small random variations of gap and speed recovery coefficient under impact is studied.