

УДК 517.948 + 513.88

## ОБ ОДНОМ СТРУКТУРНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ

*B. V. Лаврентьев*

Рассматривается возможность изучения двумерной системы в терминах общей теории линейных операторов в конечномерном пространстве; показано, что приведение матрицы линейного оператора двумерной системы к каноническому виду интерпретируется структурным преобразованием, приводящим к схеме замещения с двумя независимыми контурами.

В настоящее время в теории автоматического регулирования выделяются и получают самостоятельное развитие методы исследования одного частного вида систем регулирования с обратной связью, так называемых двухканальных (двумерных), каковыми являются, например, большинство устройств пространственного слежения, наведения, стабилизации.

Имеется большое число работ, в которых развиваются общие методы исследования многомерных систем (с числом регулируемых параметров  $n \geq 2$ ), ряд из которых (например, [1-3]) посвящен проблеме отыскания системы замещения из нескольких более простых изолированных систем. Наибольший интерес представляет возможность построения системы замещения из  $n$  независимых контуров. Под независимым контуром мы понимаем здесь всякий замкнутый контур, не содержащий внутри себя никакого другого замкнутого контура. Класс  $n$ -мерных систем, для которого доказано существование структурного преобразования, приводящего к схеме замещения из  $n$  независимых контуров, в самом общем случае ограничен линейно инвариантными системами [3].

Покажем, что при  $n = 2$ , класс систем, допускающих структурное преобразование к схеме замещения из двух независимых контуров, совпадает с классом  $D$  всех линейных двумерных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пусть  $s \in D$  приведена к структуре с прямыми перекрестными связями и единичной обратной связью (рис. 1)  $W_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — дробно-рациональные функции,

$$A = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$$

— передаточная матрица (неособенная) системы,  $E$  — единичная матрица,

$$\begin{pmatrix} \zeta_1(p) \\ \zeta_2(p) \end{pmatrix} = [z], \quad \begin{pmatrix} \eta_1(p) \\ \eta_2(p) \end{pmatrix} = [y], \quad \begin{pmatrix} \xi_1(p) \\ \xi_2(p) \end{pmatrix} = [x]$$

— столбцы координат векторов  $z$ ,  $y$  и  $x = z - y$ .

$$[A + E][x] = [z]$$

— уравнение системы в матричной форме.

Пусть теперь  $R$  — поле дробно-рациональных функций и  $U$  — линейное пространство размерности 2 над  $R$ . Далее важно принять во внимание тот факт, что всякий линейный оператор на  $U$  может быть задан своей матрицей в некотором фиксированном базисе всего пространства и всякая неособенная матрица (в нашем случае из дробно-рациональных функций) задает на  $U$  линейный оператор [4]. Выбор базиса в  $U$  однозначно определяет вид матрицы линейного оператора. Следовательно, проблема построения схемы замещения из  $n$  независимых контуров сводится к отысканию канонического базиса пространства, в котором матрица данного оператора диагональна или имеет форму Жордана [4, 2].

Нетрудно понять, что в  $U$  не для всякого линейного оператора его характеристический многочлен

$$P(V) = \det(A - VE),$$

где  $A$  — матрица оператора в каком-нибудь базисе, имеет корни. Действительно, например, для  $n = 2$  многочлен  $P(V) = V^2 - W$ , ( $W \in R$ ) в общем случае не имеет корней в  $R$ . Отсутствие в  $R$  корней многочлена с произвольными коэффициентами из  $R$  не позволяет строить в  $U$  схемы замещения для систем общего вида.

Покажем, что при  $n = 2$  существует такое расширение  $T \supset U$ , в котором для  $\forall s \in D$  может быть построена схема замещения из двух независимых контуров. Для этого, очевидно, достаточно показать, что существует такое расширение  $L \supset R$ , в котором лежат корни многочлена второй степени с произвольными коэффициентами из  $R$ . Тогда, выбрав в качестве  $T$  линейное пространство над  $L$ , получим искомое расширение пространства  $U$ .

Переходим к доказательству сформулированного утверждения. Учитывая взаимно однозначное соответствие оригиналов и изображений, устанавливаемое преобразованием Лапласа, а также соответствие свертки оригиналов произведению изображений, нетрудно убедиться, что функции вида  $\sqrt{W}$  ( $W \in R$ ) являются преобразованиями Лапласа (обращаемы). Действительно,  $\forall W \in R$  можно представить в виде

$$W(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

многочлены  $M$  и  $N$  разложимы над полем вещественных чисел на множители двух видов

$$p^2 + \alpha p + \beta \quad \text{и} \quad p + \gamma.$$

Множители  $\sqrt{p^2 + \alpha p + \beta}$  и  $\sqrt{p + \gamma}$  обращаемы по Лапласу [5], а оригинал для  $\sqrt{W}$  может быть получен сверткой оригиналов соответствующих сомножителей.

Так как корни характеристического уравнения

$$\det(A - VE) = V^2 - (W_{11} + W_{22})V + W_{11}W_{22} - W_{12}W_{21} = 0$$

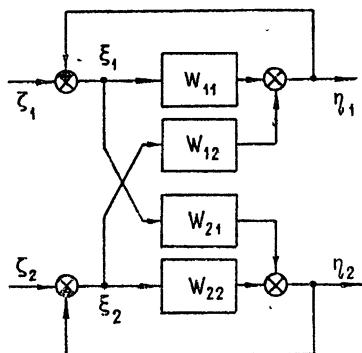


Рис. 1.

могут быть выражены в радикалах

$$V_{1,2} = \frac{W_{11} + W_{22}}{2} \pm \left[ \left( \frac{W_{11} + W_{22}}{2} \right)^2 - (W_{11} W_{22} - W_{12} W_{21}) \right]^{1/2},$$

то  $V_{1,2}$  обращаемы.

Выбирая теперь в качестве  $L$  множество функций переменного  $p$ , обращающихся по Лапласу, получаем пространство  $T$  над  $L$ , в котором существует канонический базис [4] матрицы линейного оператора  $\forall s \in D$ . Формально, отыскание канонического базиса и построение матриц преобразования координат  $C$  и  $C^{-1}(CC^{-1} = E)$  производится обычными способами [4].

Структурная схема двумерной системы в исходном базисе, отражающая и факт преобразования координат, для случая различных собственных значений оператора  $V_1$  и  $V_2$  приведена на рис. 2:

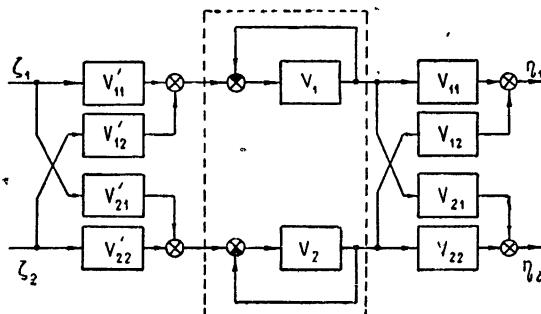


Рис. 2.

$$\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = C, \quad \begin{pmatrix} V'_{11} & V'_{12} \\ V'_{21} & V'_{22} \end{pmatrix} = C^{-1},$$

$$V_{ij} \in L \quad (i, j = 1, 2), \quad V'_{ij} \in L \quad (i, j = 1, 2).$$

Пунктиром показана искомая схема замещения в каноническом базисе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Красовский, Автоматика и телемеханика, 18, № 2, 126 (1957).
2. О. С. Соболев, сб. Теория многосвязного регулирования, изд. Наука, М., 1967, стр. 143.
3. Е. Д. Якубович, Изв. высш. уч. зав.—Радиофизика, 12, № 3, 362 (1969).
4. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, изд. Наука, М., 1968.
5. Г. Бейтмен и Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, 1, изд. Наука, М., 1969, стр. 210.

Ленинградский институт точной  
механики и оптики

Поступила в редакцию  
14 апреля 1969 г.

#### ON ONE STRUCTURAL TRANSFORMATION OF A TWO— DIMENSIONAL SYSTEM

*V. V. Lavrentiev*

The possibility to study a two-dimensional system in the terms of the general theory of linear operators in finitedimensional space is considered; it is shown that the reduction of a matrix of a two-dimensional system linear operator to the canonical form can be interpreted by a structural transformation leading to a substitution scheme with two independent contours.