

УДК 531.391

## ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВИБРОГАСИТЕЛЯ С УПРУГО-ГИСТЕРЕЗИСНОЙ СВЯЗЬЮ МЕЖДУ КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ МАССАМИ

В. Г. Климов

Методом точечных преобразований с применением теории бифуркаций изучаются динамические свойства модели виброгашения с упруго-гистерезисной связью между колеблющимися массами и ограничителями движения виброгасителя. Дан анализ фазового пространства и возможных типов движений в системе, в пространстве параметров построены границы существования устойчивых периодических движений, изучены резонансные свойства системы, даны рекомендации по ее оптимальной настройке.

В последнее время в практике гашения вибрации получают распространение такие материалы, как резина, сочетающие в себе упругие и вязкостные свойства. В связи с этим появилось большое число работ, посвященных как исследованию динамики систем с материалами, обладающими внутренним трением, так и изучению свойств самих материалов. До настоящего времени не изучалась точными методами динамика двухмассовой модели виброгашения с упруго-гистерезисной связью между колеблющимися массами и ограничителями движения виброгасителя. Задача является сложной, так как система имеет две степени свободы и две существенные нелинейности. Некоторые результаты удастся получить, используя метод продолжения по параметру на основе данных качественного анализа и выделения вырожденных движений (особые бифуркационные случаи).

Более полный анализ точечных преобразований с некоторой точностью, зависящей от исходных дифференциальных уравнений движения, производится с помощью ЭВМ.

### 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Рассмотрим динамическую модель виброгашения, представляющую собой упруго закрепленную массу  $M$ , на которую действует сила вязкого трения  $C\xi$  и возмущающая сила  $P_0 \cos(\Omega\tau)$  (рис. 1 а). Поглотитель

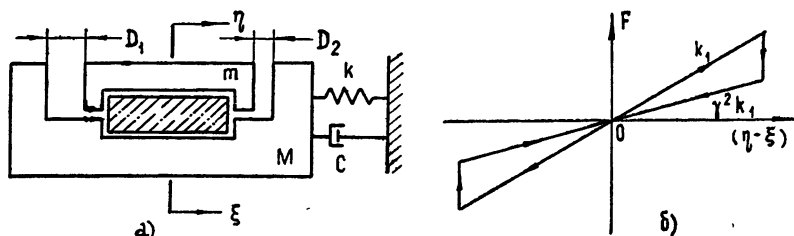


Рис. 1

колебаний представляет собой малую массу  $m$ , упруго-гистерезисно связанную с первой. Нелинейная характеристика связи представлена

на рис. 1 б. Движение виброгасителя ограничено двумя преградами, на которых может происходить ударное взаимодействие колеблющихся масс.

Примем за начало отсчета недеформированное состояние обеих упругостей. Тогда при обычных предположениях для рассматриваемого круга задач безразмерные уравнения движения динамической модели записываются следующим образом:

а) Движение масс в промежутках времени между ударами

$$\begin{aligned} \ddot{x}_+ + \lambda \dot{x}_+ + x - f(y) &= \cos(\omega t) \\ \mu(\ddot{x} + \dot{y}) + f(y) &= 0 \end{aligned} \quad (-d_1 < y < d_2), \quad (1.1)$$

причем  $f(y) = qy$  (при  $yy' > 0$ ) и  $f(y) = \gamma^2 qy$  (при  $yy' < 0$ ). Первый случай соответствует сжатию, а второй — растяжению. Система обладает демфирующими свойствами, поскольку  $\gamma^2 \leq 1$ . Здесь и в дальнейшем в безразмерном виде обозначено:  $x$  — смещение главной массы,  $y$  — относительное смещение малой массы,  $d_1, d_2$  — зазоры между колеблющимися массами в состоянии равновесия,  $\omega$  — частота вынуждающей силы,  $\mu$  — отношение масс,  $q$  — отношение жесткостей,  $\lambda$  — коэффициент, характеризующий вязкое трение,  $\gamma$  — коэффициент, характеризующий упруго-гистерезисную связь (рис. 1).

б) Соударение колеблющихся масс

$$\begin{aligned} \dot{y}_+ &= -R\dot{y}_-, \quad \dot{x}_+ = \dot{x}_- + \frac{\mu(1+R)}{1+\mu} \dot{y}_- \\ &(\text{при } |y| = d_{1,2}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\dot{y}_+$ ,  $\dot{x}_+$  и  $\dot{y}_-$ ,  $\dot{x}_-$  — соответственно послеударные и доударные скорости, а  $R$  — коэффициент восстановления скорости при ударе.

в) Скользящий режим, представляющий собой движение масс в кинематической связи:

$$(1 + \mu) \ddot{x} + \lambda \dot{x} + x = \cos(\omega t), \quad y = \text{const} \quad (1.3)$$

Данный режим может иметь место в двух случаях.

а) На поверхности удара при

$$\mu \ddot{y}_I \cdot y = [\mu(x + \lambda \dot{x} - \cos(\omega t)) - (1 + \mu) qy] \cdot y > 0.$$

б) Неоднозначное значение силы связи между поглотителем и колеблющейся массой  $M$  при  $\dot{y} = 0$  может привести к их совместному движению при  $\ddot{y}_I y < 0$ , а

$$\mu \ddot{y}_{II} \cdot y = [\mu(x + \lambda \dot{x} - \cos(\omega t)) - (1 + \mu) \gamma^2 qy] y > 0,$$

где  $-d_1 < y < d_2$ .

Зависимости между безразмерными и исходными переменными и параметрами выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \xi k/P_0, \quad y = (\eta - \xi) k/P_0, \quad t = \tau(k/M)^{1/2}, \\ \mu &= m/M, \quad q = k_1/k, \quad \omega = \Omega(M/k)^{1/2}, \\ \lambda &= C(kM)^{-1/2}, \quad d_1 = D_1 k/P_0, \quad d_2 = D_2 k/P_0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Соответственно разным типам движения пятимерное фазовое пространство системы  $(y, \dot{y}, x, \dot{x}, t)$  разделяется на ряд областей, поведение фазовых траекторий в которых описывается уравнениями (1.1) —

—(1.3) при соответствующих значениях  $f(y)$ ; а на границах этих областей определяется условием непрерывности траекторий. Скачкообразные изменения скоростей  $\dot{y}$  и  $\dot{x}$  на поверхности удара рассматриваются так же, как участки фазовых траекторий.

а) В области  $G_{II}$  ( $y \cdot \dot{y} < 0$ ,  $-d_1 < y < d_2$ ) поведение фазовых траекторий описывается уравнением (1.1) при  $f(y) = \gamma^2 qy$ . К указанной области относится также граничная поверхность  $\Pi_2$ , с которой фазовые траектории уходят в  $G_{II}$ , а именно, участок гиперплоскости  $-d_1 \leq y \leq d_2$ ,  $\dot{y} = 0$ ,  $\dot{y}_{II} \cdot y < 0$ , а также участки гиперплоскостей  $y = d_2$ ,  $\dot{y} < 0$ , либо  $y = -d_1$ ,  $\dot{y} > 0$ , на которых изображающая точка может оказаться после удара при  $R \neq 0$ . Уравнения (1.1) имеют различные решения в зависимости от  $\lambda$ . Рассмотрим случай  $\lambda = 0$ , при котором наиболее отчетливо можно выявить специфику рассматриваемой модели виброгашения. Решение уравнения (1.1) при начальных условиях, взятых на поверхности  $\Pi_2$  ( $t = t^*$ ,  $y = y^*$ ,  $x = x^*$ ,  $\dot{y} = \dot{y}^*$ ,  $\dot{x} = \dot{x}^*$ ), имеет вид

$$y_{II}(t) = \frac{1 - \bar{v}_1^2}{\gamma^2 q} \left\{ \bar{A}_2^* \cos [\bar{v}_1(t - t^*)] + \frac{\bar{B}_2^*}{\bar{v}_1} \sin [\bar{v}_1(t - t^*)] \right\} + \\ + \frac{1 - \bar{v}_2^2}{\gamma^2 q} \left\{ -\bar{A}_1^* \cos [\bar{v}_2(t - t^*)] - \frac{\bar{B}_1^*}{\bar{v}_2} \sin [\bar{v}_2(t - t^*)] \right\} + \quad (1.5) \\ + \bar{Y} \cos(\omega t).$$

$$X_{II}(t) = \left\{ \bar{A}_2^* \cos [\bar{v}_1(t - t^*)] + \frac{\bar{B}_2^*}{\bar{v}_1} \sin [\bar{v}_1(t - t^*)] \right\} + \\ + \left\{ -\bar{A}_1^* \cos [\bar{v}_2(t - t^*)] - \frac{\bar{B}_1^*}{\bar{v}_2} \sin [\bar{v}_2(t - t^*)] \right\} + \bar{X} \cos(\omega t),$$

где

$$\bar{A}_i^* = \frac{\gamma^2 q}{\bar{v}_i^2 - \bar{v}_2^2} \left[ \left( \frac{1 - \bar{v}_i^2}{\gamma^2 q} x^* - y^* \right) - \cos(\omega t^*) \left( \frac{1 - \bar{v}_i^2}{\gamma^2 q} \bar{X} - \bar{Y} \right) \right], \\ \bar{B}_i^* = \frac{\gamma^2 q}{\bar{v}_i^2 - \bar{v}_2^2} \left[ \left( \frac{1 - \bar{v}_i^2}{\gamma^2 q} \dot{x}^* - \dot{y}^* \right) + \omega \sin(\omega t^*) \left( \frac{1 - \bar{v}_i^2}{\gamma^2 q} \bar{X} - \bar{Y} \right) \right], \\ \bar{v}_i^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma^2 q}{\mu} + \gamma^2 q + 1 \right) \pm \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\gamma^2 q}{\mu} + \gamma^2 q + 1 \right)^2 - \frac{\gamma^2 q}{\mu} \right]^{1/2}, \quad (1.6)$$

$$\bar{Y} = \frac{\omega^2}{(1 - \omega^2) \left[ \gamma^2 q \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) - \omega^2 \right] - \gamma^2 q}, \quad (l = 1, 2)$$

$$\bar{X} = \frac{1 + \gamma^2 q \bar{Y}}{1 - \omega^2}.$$

б) В области  $G_I$  ( $y \cdot \dot{y} > 0$ ,  $-d_1 < y < d_2$ ) поведение фазовых траекторий описывается уравнением (1.1) при  $f(y) = qy$ . К указанной области относится также граничная поверхность  $\Pi_1$ , с которой фазовые траектории уходят в  $G_I$ , а именно, гиперплоскость  $y = 0$  и участок гиперплоскости  $-d_1 < y < d_2$ ,  $\dot{y} = 0$ ,  $\dot{y}_I y > 0$ .

Поведение фазовых траекторий при начальных условиях, взятых на поверхности  $\Pi_1$ , описываются уравнениями, получающимися из (1.5) — (1.6) при  $\gamma^2 = 1$  путем следующих замен:

$$\begin{aligned} y_{II} &\rightarrow y_I, \quad x_{II} \rightarrow x_I, \quad \bar{v}_I \rightarrow v_I, \quad \bar{A}_I^* \rightarrow A_I^*, \\ \bar{B}_I^* &\rightarrow B_I^*, \quad \bar{Y} \rightarrow Y, \quad \bar{X} \rightarrow X. \end{aligned} \quad (1.7)$$

в) При попадании изображающей точки на поверхность удара  $\Pi_s$  ( $y = d_2$  при  $\dot{y} > 0$  либо  $y = -d_1$  при  $\dot{y} < 0$ ) ее дальнейшее поведение описывается уравнениями (1.2).

г) В области  $G_s$ , ограниченной прямыми  $\mu [x + \lambda x - \cos(\omega t)] = (1 + \mu) qy$  и  $\mu [x + \lambda x - \cos(\omega t)] = (1 + \mu) \gamma^2 qy$  (при  $\dot{y} = 0$  и  $-d_1 < y < d_2$ ), имеет место движение масс в кинематической связи, согласно уравнениям (1.3). К указанной области относятся также участки прямых  $y = 0$ ,  $y_{II} \cdot y > 0$ , где  $y = d_2, -d_1$ .

Решение уравнений (1.3) при  $\omega^2 \neq \frac{1}{1 + \mu}$  имеет вид

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \left[ \dot{x}^* + \frac{\omega \sin(\omega t^*)}{1 - \omega^2(1 + \mu)} \right] \sin [(1 + \mu)^{-\frac{1}{2}} (t - t^*)] + \\ &+ \left[ x^* - \frac{\cos(\omega t^*)}{1 - \omega^2(1 + \mu)} \right] \cos [(1 + \mu)^{-\frac{1}{2}} (t - t^*)] + \frac{\cos(\omega t)}{1 - \omega^2(1 + \mu)}; \\ y_s(t) &= \text{const.} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Будем рассматривать любое движение в изучаемой кусочно-линейной системе как некоторую последовательность простейших точечных отображений конфигураций  $\Pi_i$  ( $i = 1, 2, 3, s$ ) фазового пространства друг в друга или самих в себя. Анализ показал, что в фазовом пространстве рассматриваемой модели возможны следующие точечные отображения:

$$\begin{aligned} T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{1s}, T_{21}, T_{22}, T_{2s}, \\ T_{32}, T_{3s} (R = 0), T_{s1}, T_{s2}, T_{ss}. \end{aligned}$$

Обозначим каждый участок фазовой траектории двузначным числом  $ij$ , совпадающим с индексом соответствующего ему преобразования  $T_{ij}$ , и будем описывать прохождение фазовой точки по траектории некоторой последовательностью двузначных чисел  $[1, 2]$  (рис. 2)\*. При этом числа 12, 13, 1s, 21, 2s, 32, 3s ( $R = 0$ ), s1, s2 описывают участки фазовых траекторий, отображающие конфигурации  $\Pi_i$  друг в друга, а числа 11,

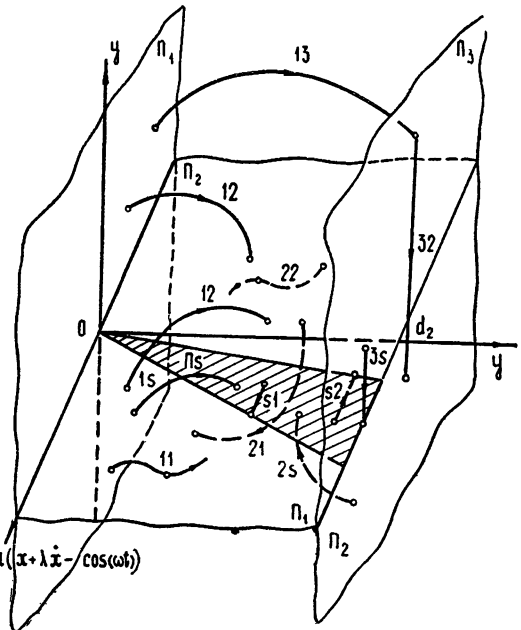


Рис. 2

\* На рис. 2 изображена часть фазового пространства для  $y \geq 0$ .

22,  $ss$  — участки траекторий, отображающие соответствующие конфигурации сами в себя.

Таким образом, любое движение системы, состоящее из вышеперечисленных участков фазовых траекторий, может характеризоваться последовательностью двузначных чисел, в которой за числом  $ij$  может следовать лишь  $jk$ . Аналитическое выражение любого, сколь угодно сложного преобразования получается путем последовательного решения уравнений (1.5) — (1.8) и сшивки начальных условий и конечных результатов на границах.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЗМОЖНЫХ С-БИФУРКАЦИЙ, УРАВНЕНИЯ БИФУРКАЦИОННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Нарушения условий существования периодических режимов, связанные с изменением числа «сшиваемых» участков фазовых траекторий, можно формально описать некоторыми неориентированными подстановками, если соответствующее изменение хода фазовых траекторий не нарушает непрерывность точечного отображения. Бифуркация  $ij \cdot jk \leftrightarrow ik$  возможна, если участки траекторий  $ij$  и  $jk$  реализуются в фазовом пространстве и имеются участки границы конфигураций  $\Pi$  и  $\Pi_k$ , принадлежащие  $\Pi_k$  [2].

Как известно [1, 2], уравнения бифуркационных поверхностей включают в себя уравнения соответствующего периодического движения и некоторые дополнительные условия, при написании которых возможен двоякий подход. При первом подходе, бифуркационная фазовая траектория рассматривается как граничный случай перехода от более сложного периодического движения к менее сложному. Дополнительные условия сводятся в этом случае к обращению в нуль одного из интервалов времени  $\tau_{ij}$  движения фазовой точки по исчезающему участку траектории более сложного режима.

При втором подходе, бифуркационную фазовую траекторию следует рассматривать как граничный случай перехода от менее сложного периодического режима к более сложному. В этом случае на фазовую траекторию периодического движения налагаются условия прохождения ее через границу сшивания конфигураций.

В изучаемой нами системе возможны следующие бифуркации:

$$\begin{array}{lll} 1s. s1 \leftrightarrow 11 & 21. 1s \leftrightarrow 2s & 13. 32 \leftrightarrow 12 \\ 2s. s2 \leftrightarrow 22 & 1s. s2 \leftrightarrow 12 & s1. 1s \leftrightarrow ss \\ 12. 2s \leftrightarrow 1s & 2s. s1 \leftrightarrow 21 & s2. 2s \leftrightarrow ss. \end{array}$$

Перейдем к их анализу.

а) Бифуркация  $C_1(1s.s1 \leftrightarrow 11)$  имеет место в случае появления или исчезновения участка скольжения  $s1$ , т. е. при касании фазовой траекторией границы между  $\Pi_1$  и  $\Pi_s$ . Уравнение бифуркационной границы получим из условия, что при  $t = t^*$

$$\dot{y}_I(t^*) = \ddot{y}_I(t^*) = 0. \quad (2.1)$$

Бифуркация  $C_2(2s.s2 \leftrightarrow 22)$  соответствует появлению или исчезновению участка скользящего движения  $s2$  при касании фазовой траекторией границы между  $\Pi_2$  и  $\Pi_s$  при движении в области  $G_{II}$ . Ее уравнение получается из условия существования такого  $t^*$ , при котором

$$\dot{y}_{II}(t^*) = \ddot{y}_{II}(t^*) = 0. \quad (2.2)$$

Оба бифуркационных случая изображены на рис. 3 а.

б) Бифуркациям  $C_3(12.s2 \leftrightarrow 1s)$  и  $C_4(21.1s \leftrightarrow 2s)$  соответствует попадание фазовой траектории при движении в области  $G_I (G_{II})$  на

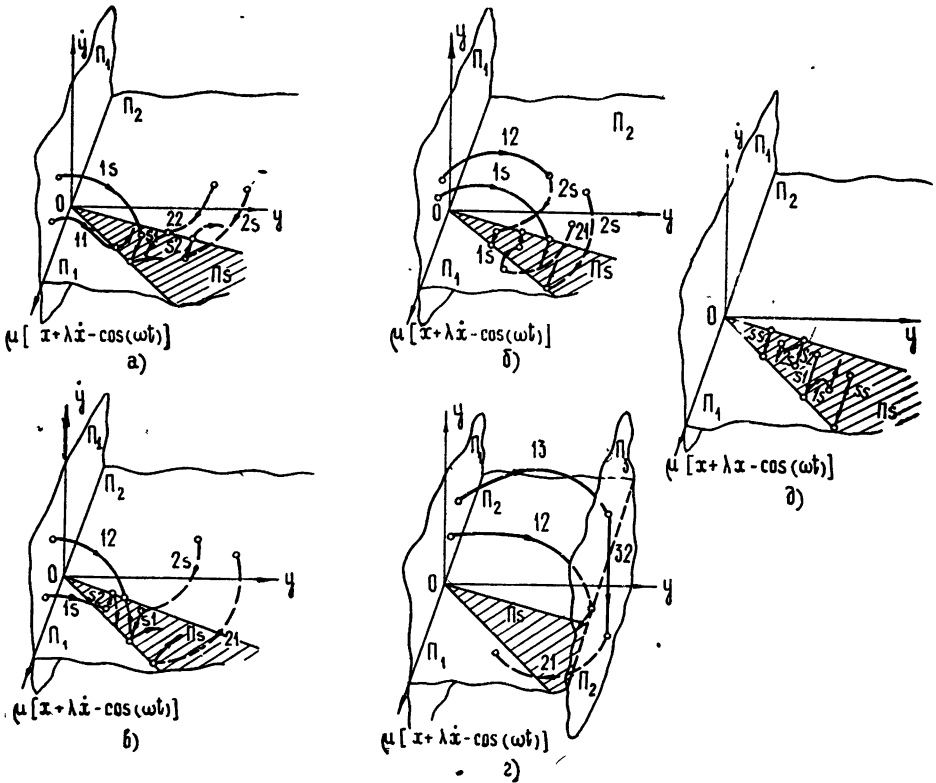


Рис. 3

границу между  $\Pi_2$  и  $\Pi_s$  ( $\Pi_1$  и  $\Pi_s$ ), принадлежащую  $\Pi_s$ . Уравнение бифуркационных границ получим из условия существования такого  $t^*$ , что

$$\text{для } C_3 \quad \dot{y}_I(t^*) = 0, \quad \ddot{y}_{II}(t^*) = 0, \quad (2.3)$$

$$\text{для } C_4 \quad \dot{y}_{II}(t^*) = 0, \quad \ddot{y}_I(t^*) = 0. \quad (2.4)$$

Данные бифуркационные случаи изображены на рис. 3б. Оба они могут иметь место лишь при наличии сложного режима со скольжением.

в) Бифуркации  $C_5(1s.s2 \leftrightarrow 12)$  соответствует появление или исчезновение участка скользящего движения  $s2$  в случае попадания фазовой траектории из области  $G_I$  на границу между  $\Pi_2$  и  $\Pi_s$ , принадлежащую  $\Pi_2$ , а бифуркации  $C_6(2s.s1 \leftrightarrow 21)$  — участка скольжения  $s1$  при попадании фазовой траектории из области  $G_{II}$  на границу между  $\Pi_1$  и  $\Pi_s$  (граница принадлежит  $\Pi_1$ ). Для осуществления этих бифуркаций необходимо выполнить условия:

$$\text{для } C_5 \quad \dot{y}_I(t^*) = \ddot{y}_{II}(t^*) = 0, \quad (2.5)$$

$$\text{для } C_6 \quad \dot{y}_{II}(t^*) = \ddot{y}_I(t^*) = 0. \quad (2.6)$$

Данные бифуркационные случаи изображены на рис. 3в, и оба

имеют место для сложных режимов со скольжением. Так, например, для простейшего симметричного безударного периодического режима 12, 21, 12.21 бифуркации  $C_5$  соответствует попадание фазовой траектории в область  $G_{II}$  в момент  $t^*$ , а бифуркация  $C_6$  не имеет места.

г) Бифуркации  $C_7(13.32 \leftrightarrow 12)$  соответствует касание фазовой траекторией поверхности ударного взаимодействия (рис. 3г). Это значит, что существует такое  $t^*$ , для которого

$$|y_I(t^*)| = d_{1,2}; \quad \dot{y}_I(t^*) = 0. \quad (2.7)$$

д) Бифуркациям  $C_8(1s \leftrightarrow ss)$  и  $C_9(2s \leftrightarrow ss)$  соответствует появление или исчезновение участка фазовой траектории  $1s$  (либо  $2s$ ) между двумя участками скользящих движений, что может иметь место при

$$\ddot{y}_I(t^*) = \ddot{y}_I(t^*) = \ddot{y}_I(t^*) = 0 \quad (\text{для } C_8) \quad (2.8)$$

и

$$\ddot{y}_{II}(t^*) = \ddot{y}_{II}(t^*) = \ddot{y}_{II}(t^*) = 0 \quad (\text{для } C_9). \quad (2.9)$$

Данные бифуркационные случаи имеют более высокий порядок, чем вышерассмотренные, и изображены на рис. 3д.

Для построения каждой бифуркационной границы необходимо решить соответствующую систему трансцендентных уравнений, включающую в себя уравнения для определения координат неподвижной точки преобразования и одно из дополнительных условий (2.1) — (2.9).

### 3. ПРОСТЕЙШЕЕ СИММЕТРИЧНОЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ УДАРНОГО ВИБРОГАСИТЕЛЯ БЕЗ УЧЕТА ВЯЗКОСТИ

$$(d_1 = d_2 = d, \lambda = 0)$$

Начнем изучение вынужденных колебаний динамической модели виброгашения с упруго-гистерезисной связью между колеблющимися массами с рассмотрения простейшего симметричного периодического движения ударного виброгасителя, описываемого преобразованиями 21.13.32.21.13.32. Из-за симметрии движения будем рассматривать половину периода колебаний системы. Пусть в начальный момент времени изображающая точка находится на поверхности  $\Pi_2$  и имеет координаты  $t^* = t_0$ ,  $y^* = y_0 = d$ ,  $\dot{y}^* = \dot{y}_0$ ,  $x^* = x_0$ ,  $\dot{x}^* = \dot{x}_0$ . Ее движение описывается уравнениями (1.5), (1.6) с индексацией 0 (например,  $\bar{A}_1^0$  и т. п.).

При  $t^* = t_1$  изображающая точка попадает на поверхность переключения  $\Pi_1$ , дальнейшее движение происходит в области  $G_1$  согласно уравнениям (1.7) с индексацией 1 при начальных условиях:  $t^* = t_1$ ,  $y^* = y_1 = 0$ ,  $\dot{y}^* = \dot{y}_1$ ,  $x^* = x_1$ ,  $\dot{x}^* = \dot{x}_1$ .

На поверхности  $\Pi_3$  происходит соударение колеблющихся масс, описываемое уравнениями (1.2), при начальных условиях  $t^* = t_2$ ,  $y_- = y_2 = -d$ ,  $y_+ = y_2$ ,  $x_- = x_2$ ,  $x_+ = x_2$ .

Будем искать периодическое движение с частотой вынуждающей силы. Уравнения для определения координат неподвижной точки преобразования  $T_{21}, T_{13}, T_{32}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{A}_2^0 \cos [\bar{\nu}_1 (t_1 - t_0)] + \frac{\bar{B}_2^0}{\bar{\nu}_1} \sin [\bar{\nu}_1 (t_1 - t_0)] &= \bar{A}_2^1, \\ -\bar{\nu}_1 \bar{A}_2^0 \sin [\bar{\nu}_1 (t_1 - t_0)] + \bar{B}_2^0 \cos [\bar{\nu}_1 (t_1 - t_0)] &= \bar{B}_2^1, \\ \bar{A}_1^0 \cos [\bar{\nu}_2 (t_1 - t_0)] + \frac{\bar{B}_1^0}{\bar{\nu}_2} \sin [\bar{\nu}_2 (t_1 - t_0)] &= \bar{A}_1^1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
 -\bar{v}_2 \bar{A}_1^0 \sin [\bar{v}_2 (t_1 - t_0)] + \bar{B}_1^0 \cos [\bar{v}_2 (t_1 - t_0)] &= \bar{B}_1^1, \\
 A_2^1 \cos [v_1 (t_2 - t_1)] + \frac{B_2^1}{v_1} \sin [v_1 (t_2 - t_1)] &= A_2^2, \\
 -v_1 A_2^1 \sin [v_1 (t_2 - t_1)] + B_2^1 \cos [v_1 (t_2 - t_1)] &= B_2^2, \\
 A_1^1 \cos [v_2 (t_2 - t_1)] + \frac{B_1^1}{v_2} \sin [v_2 (t_2 - t_1)] &= A_1^2, \\
 -v_2 A_1^1 \sin [v_2 (t_2 - t_1)] + B_1^1 \cos [v_2 (t_2 - t_1)] &= B_1^2,
 \end{aligned}$$

где

$$t_2 - t_0 = \frac{\pi}{\omega}, \quad y_0 = d, \quad y_2 = -d, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = -x_0, \quad (3.2)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{R} \dot{y}_0, \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_0 - \frac{\mu(1+R)}{R(1+\mu)} \dot{y}_0.$$

Уравнения имеют симметричную форму, удобную для решения на ЭВМ

Исследуемый режим может либо терять устойчивость на  $N$ -границах, либо переходить в более сложный на границах  $C_1$ , либо  $C_2$  или в безударный на границе  $C_7$ .

Найдем аналитическое выражение бифуркационной границы  $C_7$ , разграничивающей области ударных и безударных взаимодействий для отсутствия в системе внутреннего трения ( $\gamma^2 = 1$ ). В этом случае

$$\bar{v}_i = v_i, \quad \bar{X} = X, \quad \bar{Y} = Y, \quad y_1 = 0, \quad t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \frac{\pi}{2\omega}, \quad (3.3)$$

а начало ударных взаимодействий имеет место при  $\dot{y}_0 = 0$ .

Преобразовав уравнение (3.1) и считая в общем случае собственные частоты системы  $v_i$  некрратными частоте вынуждающей силы  $\omega$ , получим уравнение бифуркационной границы  $C_7$  в виде

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{1 - v_i^2}{q} x_0 - d \right) - \cos(\omega t_0) \left( \frac{1 - v_i^2}{q} X - Y \right) &= 0, \\
 \left( \frac{1 - v_i^2}{q} \dot{x}_1 - \dot{y}_1 \right) + \omega \cos(\omega t_0) \left( \frac{1 - v_i^2}{q} X - Y \right) &= 0, \\
 \left( \frac{1 - v_i^2}{q} x_1 \right) + \sin(\omega t_0) \left( \frac{1 - v_i^2}{q} X - Y \right) &= 0, \\
 \left( \frac{1 - v_i^2}{q} \dot{x}_0 \right) + \omega \sin(\omega t_0) \left( \frac{1 - v_i^2}{q} X - Y \right) &= 0.
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Система уравнений (3.4) имеет решение

$$\begin{aligned}
 t_0 = \frac{k\pi}{\omega}, \quad x_0 = \frac{qd \pm 1}{1 - \omega^2} > 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad x_1 = 0, \\
 \dot{x}_1 = -\omega x_0, \quad \dot{y}_1 = -\omega d, \quad Y = \pm d, \quad X = \frac{1 \pm qd}{1 - \omega^2}.
 \end{aligned} \quad (3.5)$$



Из него получаются связи на параметры системы

$$d = \pm \frac{\omega^2}{(1 - \omega^2) \left[ q \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) - \omega^2 \right] - q} > 0$$

или

$$q = \frac{\omega^2 (1 - \omega^2) \pm \omega^2/d}{(1 - \omega^2) \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) - 1} > 0. \quad (3.6)$$

Их анализ показывает, что при частоте вынуждающей силы  $\omega$ , равной одной из собственных частот системы  $\gamma_i$ , безударное движение возможно лишь при бесконечно большом зазоре между колеблющимися массами  $d = \infty$ . Безударное движение при  $\omega^2 = \frac{1}{1 + \mu}$  возможно лишь при бесконечно большой жесткости связи  $q$ .

На бифуркационной границе  $C_7$  расположены особые точки, соответствующие слипанию колеблющихся масс. Известно [3], что в окрестности таких точек существуют простейшие симметричные ударные и безударные режимы. Они соответствуют случаю касания фазовой траектории поверхности ударных взаимодействий

$$y(t^*) = d, \quad \dot{y}_i(t^*) = \ddot{y}_i(t^*) = 0. \quad (3.7)$$

Для случая  $\gamma^2 = 1$  в пространстве параметров  $(\omega, q, d, \mu)$  легко определяется точка, соответствующая слипанию колеблющихся масс, из условия

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + q + \frac{q}{\mu} \pm \frac{1}{d} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( 1 + q + \frac{q}{\mu} \pm \frac{1}{d} \right)^2 - \frac{q}{\mu}} =$$

$$= \frac{dq}{qd(1 + \mu) \pm \mu} \geq 0. \quad (3.8)$$

Данные соотношения имеют два явных решения  $q = 0, \omega = 0$  и  $qd = 1, \omega = 1$ .

Знание уравнения бифуркационной границы  $C_7$  и точки слипания колеблющихся масс может явиться отправным пунктом для более полного исследования пространства параметров с помощью ЭВМ, с использованием метода продолжения по параметру [4].

#### 4. ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ. РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА

На основе данных качественного анализа приступим к изучению динамических свойств системы с помощью ЭВМ. Оно сводится к исследованию точечных преобразований (1.2), (1.5) — (1.8). Для оценки точности численных решений воспользуемся, например, определениями, данными в работе [5] и цитируемой в ней литературе.

Исследуемая система имеет шесть независимых параметров  $(\mu, q, d, R, \gamma^2, \omega)$ . Ограничим их число и оставим наиболее интересные. Наименее изученными параметрами, характеризующими специфику виброгашения за счет упруго-гистерезисной связи между колеблющимися массами, являются  $\gamma^2$  и  $\omega$ . Значения остальных параметров выберем такими, которые наиболее часто встречаются при исследованиях [6, 7]

$$\mu = q = 0,1, \quad R = 0,5, \quad d_{1,2} = 10.$$

Будем моделировать уравнения движения (1.2), (1.5)—(1.8) на ЭВМ, анализируя тип режима и контролируя его сходимость.

На рис. 4 дано разбиение плоскости параметров  $(\gamma^2, \omega)$  на области существования различных периодических движений.

Область существования и устойчивости простейшего симметричного безударного периодического режима 12.21 (штриховка—снизу вверх направо) ограничена бифуркационными кривыми  $C_7, C_5$  и  $C_2$ , при переходе через которые он сменяется режимами 13.32.21, 1s.s2.21 и 12.2s.s2.21 соответственно. (При  $d > 10$  режим 12.21 имеет место и в окрестности точки  $\gamma^2 = \omega = 1$ ). Бифуркационная кривая  $C_3$  разграничивает области существования и устойчивости режимов 1s.s2.21 и 12.2s.s2.21. В области ударных движений (штриховка—сверху вниз направо) вблизи границы  $C_7$  имеют место простейшие симметричные периодические режимы, которые в районе  $0,9 < \omega < 1,1$  сильно усложняются, однако являются «устойчивыми по Пуассону» [5]. В незаштрихованной области имеют место многооборотные периодические режимы без скольжения. Следует отметить, что в изучаемой динамической модели имеет место явление зависимости типа движения от начальных условий (область с двойной штриховкой).

Поскольку с инженерной точки зрения особый интерес представляет эффективность рассматриваемой модели виброгашения, было проведено изучение ее резонансных свойств.

На рис. 5 приведены амплитудные характеристики  $A_x(\omega)$  колебаний главной массы при различных значениях параметра  $\gamma^2$ . Введение

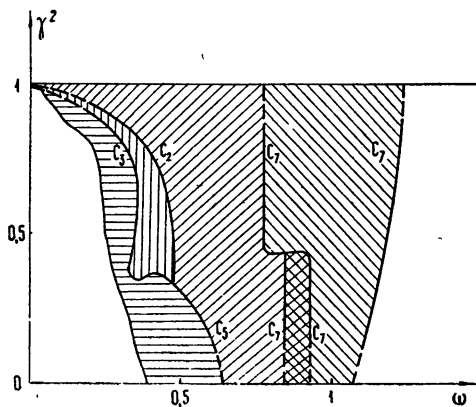


Рис. 4

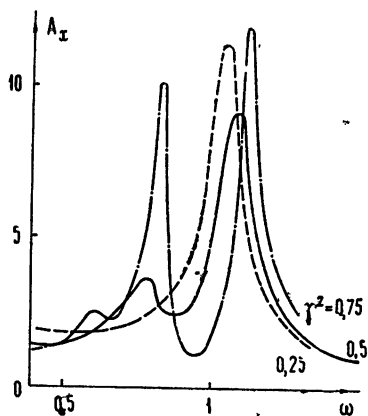


Рис. 5

в систему вязкого трения и постепенное его увеличение по своему действию аналогично уменьшению параметра  $\gamma^2$ , оптимальное значение которого с точки зрения минимального значения амплитуды колебаний на резонансной частоте лежит вблизи  $\gamma^2 = 0,5$ . В этом случае виброгаситель с упруго-гистерезисной связью между колеблющимися массами (ограничители движения отсутствуют) по своей эффективности близок к широкополосному линейному виброгасителю с затуханием, у которого

$$\text{при } q/\mu = 1/(1 + \mu)^2, A_x \leq \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} \text{ [6].}$$

На рис. 6 приведены амплитудные значения  $A_y(\omega)$  колебаний поглотителя при тех же условиях ( $d = \infty$ ). Сопоставление рис. 5 и рис. 6 показывает, что на резонансных частотах амплитуда колебаний поглотителя приблизительно втрое превышает амплитуду колеба-

ний главной массы. Отметим, что при  $\gamma^2 \leq 0,25$  двухмассовая система ведет себя как система с одной степенью свободы.

Введение ограничителей движения поглотителя приводит к резкому изменению резонансных свойств системы. На рис. 7 приведены

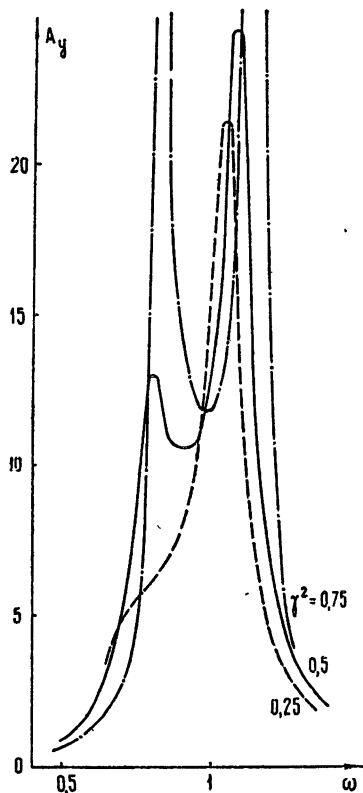


Рис. 6

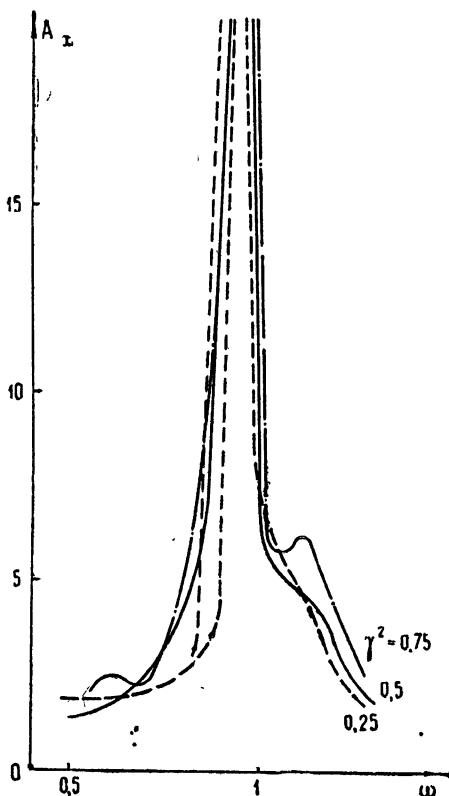


Рис. 7

характеристики  $A_x(\omega)$  для случая  $d_{1,2} = 10$ ,  $R = 0,5$ . Приводимые результаты исследования показывают, что постановка ограничителей движения (ударные взаимодействия) может значительно снизить эффективность виброгасителя. На резонансной частоте  $\omega = \sqrt{1/(1+\mu)}$  амплитуда колебаний главной массы может значительно превышать амплитуду вынуждающей силы при любых значениях  $\gamma^2$ .

Автор признателен М. И. Фейгину за ценные замечания и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Неймарк, М. И. Фейгин, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 7, № 2, 358 (1964).
2. М. И. Фейгин, Тезисы докладов и сообщений на Всесоюзном межвузовском симпозиуме по прикладной математике и кибернетике, Горький, 1967.
3. М. И. Фейгин, АН СССР, ПММ, 31, 3, 533 (1967).
4. Ю. И. Неймарк, Тр. II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, изд. Наука, 2, М., 1965.
5. З. С. Баталова, Инж. ж. мех. тв. тела, № 2 (1967).
6. Д. П. Ден-Гартог, Механические колебания, Физматгиз, М., 1960.
7. В. Г. Климов, М. И. Фейгин, Инж. ж. мех. тв. тела, № 5, 44 (1967).

---

DYNAMIC PROPERTIES OF A VIBRATION DAMPER WITH  
AN ELASTIC HYSTERESIS COUPLING OF VIBRATING MASSES

*V. G. Klimov*

Dynamic properties of a vibrodamping model with an elastic hysteresis coupling of vibrating masses and limiters for damper motions are studied by the point transformation method with application of the bifurcation theory. An analysis of phase space and of possible motion types in the system is provided. Existence boundaries for stable periodic motions are constructed in the parameter space. System resonance properties are studied and suggestions on system's optimal tuning are given.

---