ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Том XIII, № 4* *РАДИОФИЗИКА* *1970*

УДК 62—507

# СЧИТАЮЩИЕ АВТОМАТЫ И НЕРАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Л. П. Гаврилова, Д. И. Коган*

Рассматриваются автоматы с конечным ( > 1) числом счетчиков. Доказывается неразрешимость проблемы пустоты для множеств, представимых автоматами такого рода. Вводится один класс дискретных управляемых систем — $n$-мерные векторные системы. При достаточно большой размерности показана неразрешимость проблем осуществимости перевода системы из начального в заданное состояние или подпространство состояний.

1. Конечный автомат с $n$ счетчиками (далее $n$-КА) состоит из устройства ввода и управления (УВУ), имеющего конечное число состояний, и $n$ счетчиков, каждый из которых содержит одно натуральное число (содержимое счетчика будем называть его показанием). Опишем работу $n$-КА над входным словом $\alpha$. Вначале УВУ находится в заранее предписанном (начальном) состоянии, показания всех счетчиков равны нулю. Далее, в каждый такт дискретного времени на вход поступает следующая буква слова $\alpha$. Действие автомата зависит от этой буквы, состояния УВУ и того, показания каких счетчиков равны нулю. Оно состоит в переходе УВУ в новое состояние и изменении показаний счетчиков. Показание любого счетчика за один такт работы меняется не более чем на единицу. Время работы автомата над словом $\alpha$ равно количеству букв в нем. Автомат выделяет множество тех слов, которые переводят его УВУ в предписанное подмножество состояний. Ниже состояния УВУ будут называться состояниями самого $n$-КА.

Перейдем к точному описанию модели.

$n$-КА над алфавитом $A$—это четверка $\Sigma = \langle Q, f, q_1, F \rangle$, где $Q$ — конечное непустое множество (состояния автомата); $f$ — функция, определенная на множестве $Q \times A \times \{0, 1\}^n$ со значениями в $Q \times \{-1, 0, +1\}^n$, такая, что из $f(q_i, a_j, (\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_n)) = (q'_i, (\sigma'_1, \sigma'_2,\ldots,\sigma'_n))$ и $\sigma_k=0$ следует неотрицательность $\sigma'_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. ($f$ — функция действия автомата); $q_1 \in Q$ — начальное состояние автомата; $F \subseteq Q$ (выделенное подмножество состояний).

Пусть $A^*$ — множество всех слов алфавита $A$; $N^n$ — множество всех $n$-ок натуральных чисел; $\operatorname{sg} x$ — функция, равная нулю при $x = 0$ и равная единице в остальных случаях; для $\alpha \in A^*$ пусть $l(\alpha)$ — длина слова $\alpha$, количество букв в нем.

Позициями $n$-КА $\Sigma$ будем называть элементы множества $Q \times N^n$. Каждому $\alpha = a_{i_1}, a_{i_2},\ldots, a_{i_p}$ ($\alpha \in A^*$) ставим в соответствие последовательность позиций $\Pi^0_\alpha, \Pi^1_\alpha,\ldots, \Pi^p_\alpha$, определяемую так: а) $\Pi^0_\alpha = \{q_1, (0, 0,\ldots,0)\}$, б) если $\Pi^{r-1}_\alpha = (q_i, (\pi_1, \pi_2,\ldots, \pi_n))$, то $\Pi^r_\alpha = (q_j(\pi_1 + \sigma_1, \pi_2 + \sigma_2,\ldots, \pi_n + \sigma_n)\}$, где $(q_j(\sigma_1, \sigma_2,\ldots, \sigma_n)) = f(q_i, a_{i_r}, (\operatorname{sg}\pi_1, \operatorname{sg}\pi_2,\ldots, \operatorname{sg}\pi_n))$, $r = 1, 2,\ldots, p$. Для слова $\alpha$ позицию $\Pi^{l(\alpha)}_\alpha$ будем называть финальной, примем для нее обозначение $\Pi(\Sigma, \alpha)$. Если $\Pi(\Sigma, \alpha) = (q_l, (\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_n))$, то $q_l$ — —финальное состояние автомата, а $\rho_1, \rho_2,\ldots, \rho_n$ — финальные показания его счетчиков, $\rho_1$ — финальное показание первого счетчика—назовем выходом автомата $\Sigma$ при входе $\alpha$ (обозначение $\Sigma(\alpha)$).

С $n$-КА $\Sigma$ будем ассоциировать также словарное множество $v(\Sigma)$, определяемое так: $\alpha \in v(\Sigma) \longleftrightarrow \Pi(\Sigma, \alpha) \in F \times N^n$.

Множество слов $U$ назовем $S_n$-множеством, если существует $n$-КА $\Sigma_u$ такой, что $U = v(\Sigma_u)$. Множество $U$ назовем $S$-множеством. если оно является $S_n$-множеством для некоторого $n$. Ряд результатов для $S$- и $S_n$- множеств получен в [1]. Ниже будет показано. что проблема пустоты для $S$-множеств является неразрешимой.

2. Пусть $A_0$ — алфавит, состоящий из двух букв, 1 и $*$. $1^x$ обозначает слово длины $x$, состоящее только из единиц (если $x = 0$, то $1^x$ — пустое слово). Ниже, мы всегда будем полагать, что переменные в функциях и предикатах принимают значения на множестве натуральных чисел.

Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ назовем счетчиковым, если существуют такое $n$ и такой $n$-КА $\Sigma_p$ над алфавитом $A_0$, что $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \{P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \longleftrightarrow \exists x(*1^{x_1}*1^{x_2}*\ldots*1^{x_m}*1^x* \in v(\Sigma_r))\}$. Будем говорить, что $n$-КА $\Sigma_p$ вычисляет предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Отметим, что если проблема пустоты для $S$-множеств разрешима, то разрешима и проблема пустоты области истинности для счетчиковых предикатов.

Предикат $Q(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ назовем $\omega$-счетчиковым, если существуют такое $n$ и такой $n$-КА $\Sigma_Q$ над алфавитом $A_0$, что

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \{Q(x_1, x_2, \ldots, x_m) \longleftrightarrow \exists x(\Pi(\Sigma_Q, *1^{x_1}* 1^{x_2}*\ldots*1^{x_m}*1^x*) = (q_2, (0, 0, \ldots, 0))\}.$$

*Лемма 1.* Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ тогда и только тогда является счетчиковым, когда он $\omega$-счетчиковый. Если $P$ вычисляется автоматом с $n$ счетчиками, то для его $\omega$-вычисления также достаточно автомата с $n$ счетчиками.

Функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, отображающую $N^m$ в $N$, назовем счетчиковой, если существуют такое $n$ и такой $n$-КА $\Sigma_f$, что

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \{\exists x(*1^{x_1}*1^{x_2}*\ldots*1^{x_m}*1^x* \in v(\Sigma_f)) \,\&$$
$$\forall x[(*1^{x_1}*1^{x_2}*\ldots*1^{x_m}*1^x* \in v(\Sigma_f)) \to (\Sigma_f(*1^{x_1}*1^{x_2}*\ldots$$
$$\ldots *1^{x_m}*1^x*) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m))]\}.$$

*Лемма 2.* Пусть предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ истинен тогда и только тогда, когда $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Если функции $f_1$ и $f_2$ счетчиковые, то таковым является и предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

*Лемма 3.* Функции $f_1^i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_i$, $f_2^i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 2^{x_i}$, $f^c(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \mathrm{const}\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ являются счетчиковыми.

*Лемма 4.* Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — счетчиковые функции, то их сумма и произведение также счетчиковые функции.

Несложные доказательства лемм 1—4, состоящие в непосредственном указании автоматных конструкций, мы опускаем.

*Лемма 5.* Пусть $P_i(x, x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ $(i = 1, 2)$ — полиномы с натуральными коэффициентами, $s$ — натуральная константа. Тогда предикат $Q_s(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, истинный тогда и только тогда, когда $P_1(s, x_1, x_2, \ldots, x_m, 2^{x_1}, 2^{x_2}, \ldots, 2^{x_m}) = P_2(s, x_1, x_2, \ldots, x_m, 2^{x_1}, 2^{x_2}, \ldots, 2^{x_m})$, является счетчиковым.

Лемма 5—следствие лемм 2—4; существует эффективная процедура построения по полиномам $P_1$ и $P_2$ автомата, вычисляющего $Q_s(x_1, x_2,..., x_m)$.

Замечание. Пусть $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ — произвольный счетчиковый предикат, а $\Sigma_p$ — автомат со счетчиками, его вычисляющий. Тогда существует эффективная процедура построения по $\Sigma_p$ автомата $\tilde{\Sigma}_p$, вычисляющего тот же предикат и имеющего только два счетчика.

Верность данного утверждения легко устанавливается, если основываться на идее доказательства леммы 4 в работе Фишера [2]

*Теорема 1.* Проблема пустоты множеств $v(\Sigma)$ для конечных автоматов $\Sigma$ с двумя счетчиками неразрешима.

Пусть $M$ — произвольное рекурсивно-перечислимое множество. Из результатов статьи [3] следует существование полиномов с натуральными коэффициентами $P_1^M$ $(x, x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ... y_n)$ и $P_2^M$ $(x, x_1, x_2, ... x_n, y_1, y_2,..., y_n)$, таких, что $s \in M \longleftrightarrow \{\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n [P_1^M(s, x_1, x_2,... ..., x_n, 2^{x_1}, 2^{x_2},..., 2^{x_n}) = P_2^M(s, x_1, x_2,..., x_n, 2^{x_1}, 2^{x_2},..., 2^{x_n})]\}$. Для каждого $s$ эффективно строится автомат с двумя счетчиками, вычисляющий $Q_s^M(x_1, x_2,..., x_n)$ (этот предикат определяется так же, как в лемме 5). Очевидно, что если бы проблема пустоты для автоматов с двумя счетчиками была разрешимой, то существовала бы эффективная процедура проверки истинности предложения „$s \in M$“ $(s = 0, 1, 2, ...)$. Из существования нерекурсивных рекурсивно-перечислимых множеств следует неразрешимость проблемы пустоты для автоматов с двумя счетчиками.

Обозначим $w(\Sigma)$ множество слов $\alpha$, таких, что $\Pi(\Sigma, \alpha) = (q_2(0, 0,.. ..., 0))$. Из леммы 1 и доказательства теоремы 1 следует

*Теорема 1-а.* Проблема пустоты множеств $w(\Sigma)$ для конечных автоматов $\Sigma$ с двумя счетчиками неразрешима.

Отметим, что если конечный автомат имеет только один счетчик, то проблемы пустоты множеств $v(\Sigma)$ и $w(\Sigma)$ разрешимы, так как $v(\Sigma)$ и $w(\Sigma)$ в этом случае — бесконтекстные языки [4].

3. Пусть состояние некоторой физической или экономической системы определяется вектором $V$ с целочисленными координатами (координаты — параметры системы). И пусть возможность управления системой формально означает возможность прибавления к вектору $V$ любого вектора из конечного множества $B(V)$ целочисленных векторов. Мы будем считать, что пространство параметров разбито на конечное число областей, в каждой из которых возможности управления одинаковы, т. е. если векторы $V_1$ и $V_2$ принадлежат одной области, то множества $B(V_1)$ и $B(V_2)$ совпадают. Для систем такого рода интересны проблемы существования последовательности управлений, переводящей систему из начального состояния в заданное состояние или заданное подпространство состояний.

Ниже будет показано несуществование алгоритмов решения этих проблем при достаточно большой размерности пространства параметров и достаточном количестве различных значений функции $B(V)$, хотя сама структура разбиения пространства параметров на области может предполагаться чрезвычайно простой.

Дадим формальное определение рассматриваемого класса систем.

$n$-мерной векторной $m$ — системой (далее ($n, m$ — ВС) будем называть совокупность $D = < \mathbf{S}, \{(C_1^1, C_2^1,..., C_k^1), (C_1^2, C_2^2,..., C_k^2),..., (C_1^m, C_2^m,..., C_k^m)\}, \beta, A >$, где $\mathbf{S}$ — $n$-мерный вектор с целочисленными координатами (стартовый вектор); $C_i^j$ $(i = 1, 2, ..., k;\ j = 1, 2, ..., m)$ — $n$-мерные векторы с целочисленными координатами (векторы управлений); $\beta$-функция, определенная на множестве всех $n$-ок целых чисел со значениями в множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$ (функция, указывающая множество возможных управлений), $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — алфавит (множество управляющих воздействий).

Стратегиями системы будем называть слова алфавита $A$. Пусть $\alpha = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r}$ — стратегия. Она определяет последовательность векторов $V_0, V_1, \ldots, V_r$, получаемую следующим образом: $V_0 = S$; $V_j = V_{j-1} + C_{i_j}$, где $p = \beta(v^1_{j-1}, v^2_{j-1}, \ldots, v^n_{j-1})$, здесь $v^1_{j-1}, v^2_{j-1}, \ldots, v^n_{j-1}$ суть координаты вектора $V_{j-1}(j = 1, 2, \ldots, r)$. Будем писать $V_r = D(\alpha)$ и называть вектор $V_r$ результатом стратегии $\alpha$.

Пусть $L$ — линейное многообразие в пространстве $n$-ок действительных чисел. Обозначим $R(D, L)$ множество стратегий системы $D$, таких, что их результаты принадлежат $L$. Множество слов $Z$, $Z \subseteq A^*$, будем называть $(n, m)$—$D$-множеством, если существуют $(n, m)$-векторная система $D_Z$ с алфавитом управляющих воздействий $A$ и линейное многообразие $L_Z$, такие, что $Z = R(D_Z, L_Z)$. Если линейное многообразие состоит из одного вектора, будем обозначать его $L^0$ (многообразие нулевой размерности).

Обозначим $\Pi(\Sigma, \alpha, s)$ финальную позицию автомата $\Sigma$ после работы над словом $\alpha$. Если эта работа началась с позиции $(q_1\ (s, 0, 0, \ldots, 0))$; $v(\Sigma, s)$ — множество слов, определяемое следующим образом: $\alpha \in v(\Sigma, s) \longleftrightarrow \Pi(\Sigma, \alpha, s) \in F \times N^n$. Аналогично $\alpha \in w(\Sigma, s) \longleftrightarrow \Pi(\Sigma, \alpha, s) = (q_2(0, 0, \ldots, 0))$.

*Лемма 6.* Существует натуральное $m$, такое, что проблемы пустоты множеств $v(\Sigma, s)$ и $w(\Sigma, s)$ для некоторого (фиксированного) 2-КА $\Sigma$, имеющего $m$ состояний, являются неразрешимыми.

Действительно, как несложно показать, проблема пустоты области истинности предиката $Q^M_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, рассматривавшегося при доказательстве теоремы 1, сводится к проблеме пустоты множества $v(\Sigma, s)$ или $w(\Sigma, s)$ для некоторого 2-КА $\Sigma$, имеющего $m$ состояний ($m$—константа, зависящая только от $M$).

*Лемма 7.* Пусть $\Sigma$ — произвольный $n$-КА, имеющий $m$ состояний, и $s$—натуральная константа. Тогда по $\Sigma$ и $s$ эффективно строятся $(m + n, m \cdot 2^n)$-ВС $D^s_\Sigma$ и линейные многообразия $L_\Sigma$ и $L^0_\Sigma$, такие, что $R(D^s_\Sigma, L_\Sigma) = v(\Sigma, s)$; $R(D^s_\Sigma, L^0_\Sigma) = w(\Sigma, s)$.

Позиции автомата $\Sigma$ будем кодировать $(m + n)$-мерными векторами. Позиции $\Pi = (q_i, (\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n))$ соответствует вектор $Q(\Pi) = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{im}, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$, здесь $\delta_{ij}$ равно единице, если $i = j$, и равно нулю в противном случае. Качеством позиции $\Pi$ назовем вектор $K(\Pi) = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{im}, \mathrm{sg}\,\pi_1, \mathrm{sg}\,\pi_2, \ldots, \mathrm{sg}\,\pi_n)$. Позиции автомата $\Sigma$ имеют $m \cdot 2^n$ различных качеств. Полагаем эти качества занумерованными, $\varphi(K)$ — функция, осуществляющая нумерацию. Изменение позиции в результате каждого такта работы автомата определяется ее качеством и входным символом, т. е., если позиция $\Pi_1$ сменяет позицию $\Pi$ под воздействием входного символа $a_i$, то $Q(\Pi_1) - Q(\Pi)$ является функцией от $K(\Pi)$ и $a_i$, обозначим ее $\Phi(K(\Pi), a_i)$ или $\tilde{\Phi}(x, i)$, где $x = \varphi(K(\Pi))$, $i$—порядковый номер входного символа.

ВС $D^s_\Sigma$ определяется так. Стартовый вектор—код начальной позиции $(q_1, (s, 0, \ldots, 0))$. Алфавит системы считается совпадающим с входным алфавитом автомата $\Sigma$ и содержащим $k$ символов. Векторы управлений $C^j_i$ равны $\tilde{\Phi}(j, i)$ $(i = 1, 2, \ldots k;\ j = 1, 2, \ldots, m \cdot 2^n)$ $\beta(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ полагается равной $\varphi(\mathrm{sg}\,x_1, \mathrm{sg}\,x_2, \ldots, \mathrm{sg}\,x_{m+n})$. Так, заданная функция $\beta$ не является всюду определенной. Однако никакая стратегия в системе не приведет к вектору, для которого $\beta$ не определена, так как для любого $\alpha \in A^*$ имеет место равенство $(^*)\, D^s_\Sigma(\alpha) = Q(\Pi(\Sigma, \alpha, s))$. Равенство это доказывается индукцией по длине слова $\alpha$. Минимальное подпространство, содержащее множество кодов позиций, принадлежащих $F \times N^n$, обозначим $L_\Sigma$. Учитывая равенство $(^*)$, мы можем записать цепочку $\alpha \in v(\Sigma, s) \longleftrightarrow \Pi(\Sigma, \alpha, s) \in F \times N^n \longleftrightarrow D^s_\Sigma(\alpha) \in L \longleftrightarrow \alpha \in R(D^s_\Sigma, L_\Sigma)$. Итак, множества $v(\Sigma, s)$ и $R(D^s_\Sigma, L_\Sigma)$ совпадают. Аналогично для $L^0_\Sigma = (0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ имеем $\alpha \in w(\Sigma, s) \longleftrightarrow \Pi(\Sigma, \alpha, s) = (q_2, (0, 0, \ldots, 0)) \longleftrightarrow D^s_\Sigma(\alpha) = L^0_\Sigma \longleftrightarrow \alpha \in R(D^s_\Sigma, L^0_\Sigma)$. Множества $w(\Sigma, s)$ и $R(D^s_\Sigma, L^0_\Sigma)$ совпадают.

Векторную систему будем называть элементарной, если а) векторы управлений имеют координаты, равные нулю или $\pm 1$, и б) функция $\beta$ такова, что $\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \beta(\mathrm{sg}\, x_1, \mathrm{sg}\, x_2, \ldots, \mathrm{sg}\, x_n)$. Отметим, что при доказательстве леммы 7 мы построили ВС $D^s_\Sigma$, являющуюся элементарной.

*Теорема 2.* Существуют натуральные $p$ и $q$ такие, что для $(p, q)$—ВС $D$ неразрешимы проблемы пустоты множеств $R(D, L)$ и $R(D, L^0)$, даже в случае, когда $D$—элементарная ВС, а $L(L^0)$—некоторое фиксированное подпространство.

Данная теорема — следствие леммы 6 и леммы 7 вместе с ее доказательством.

Неразрешимость указанных проблем означает несуществование алгоритмов для определения возможности перевода системы из начального (стартового) состояния в заданное состояние или состояние, принадлежащее заданному подпространству.

Авторы благодарны Ю. В. Глебскому за интерес и внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. P. Fisher, A. Meyer, Mathematical systems theory, 2, № 2, 265 (1968).
2. P. Fisher, Information and control, 9, 364 (1966).
3. M. Davis, H. Putnam, J. Robinson, Ann. Math., 74, 423 (1961). Математика (Сб. переводов), 8, № 5 (1964).
4. S. Ginsburg, The Mathematical Theory of context free languages, Mcgraw—Hill, 1966.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 10 июля 1969 г.

## COUNTING AUTOMATA AND UNSOLVABLE PDOBLEMS OF DISCRETE CONTROL

*L. P. Gavrilova, D. I. Kogan*

Automata with a finite number (> 1) of counters are studied. Unsolvability of the emptyness problem for sets represented by this type automata is proved. One class of discrete controlled systems—n-dimensional vector svstemsis untroduced. Unsolvability for problems of transition of system from its original state into given one or into states subspase is proved if the dimension is sufficiently large.