ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1970*

УДК 517.9

СТРУКТУРА ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ И ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Л. З. Фишман

Доказано, что система с малым параметром при производной и последействием имеет в своем фазовом пространстве асимптотически устойчивую, инвариантную, интегральную поверхность «медленных движений». Показано, что асимптотическое поведение фазовых траекторий на инвариантной поверхности описывается обыкновенным дифференциальным уравнением без запаздываний.

В настоящей работе доказано существование асимптотически устойчивой, инвариантной, интегральной поверхности у систем с малым параметром при производной и последействием. Показано, что поведение фазовых траекторий на инвариантной поверхности описывается обыкновенным дифференциальным уравнением без запаздываний. Аналогичные результаты для линейных систем с малым параметром при производной и запаздыванием получены в работах Халаная [1], Курцвейля [2], для нелинейных систем с малым параметром при производной и малым запаздыванием — в работе Митропольского и Фодчука [3].

Настоящая работа является обобщением на системы с малым параметром при производной и последействием результатов, полученных в работе [4] для квазилинейных систем с последействием.

Рассматривается система

$$\begin{aligned} \mu_1\dot{x}_1 &= A(x_2)\,x_1 + g(x_1,\ x_2) + \mu_2 P_1(x_1,\ x_2,\ x_1(t-\tau),\ x_2(t-\tau)), \\ \dot{x}_2 &= Q(x_1,\ x_2) + \mu_2 P_2(x_1,\ x_2,\ x_1(t-\tau),\ x_2(t-\tau)), \end{aligned} \tag{1}$$

где x_1, x_2 есть n- и m-мерные векторы, матрица $A(x_2)$ при любом x_2 имеет собственные числа, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{Re}\lambda_i(x_2) < -\sigma < 0$, вектор-функции $P_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $P_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $Q(x_1, x_2)$, $A(x_2)$, $A^{-1}(x_2)$ ограничены по модулю постоянной N при любых значениях своих аргументов, вместе с частными производными до второго порядка по своим аргументам

$$\| P_1 \| < N, \qquad \| P'_{1x_1} \| \leqslant N, \ldots \tag{2}$$

Вектор-функция $g(x_1, x_2)$ удовлетворяет условиям

$$\| g \| \leqslant M \| x_1 \|^2, \qquad \| g'_{x_1}(x_1,\ x_2) \| \leqslant M \| x_1 \|,$$

$$\| g'_{x_2}(x_1,\ x_2) \| \leqslant M \| x_1 \|^2,$$

где $g'_{x_1}(x_1, x_2)$ $g'_{x_2}(x_1, x_2)$ есть частные производные функции $g(x_1, x_2)$ по переменным x_1, x_2, $M > 0$ — постоянная.

1. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ (1)

Теорема 1. Решение системы (1) $\{x_1(t), x_2(t)\}$ на отрезке $t \in [0, T]$ при начальных условиях $x_1(s) = \varphi_1(s)$, $x_2(s) = \varphi_2(s)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\| x_1(t) \| \leqslant a(\varepsilon + \mu_2), \tag{3}$$

если $\| \varphi_1 \| \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малая постоянная, $a > 0$ — постоянная, $T > \tau$ — постоянная.

Доказательство. Будем рассматривать систему (1) как неавтономную систему без запаздываний, у которой в функции $P_1(x_1, x_2, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau))$, $P_2(x_1, x_2, x_1(t-\tau), x_2(t-\tau))$ подставлено некоторое фиксированное решение $x_1 = f_1(t), x_2 = f_2(t)$. Эта неавтономная система запишется в виде

$$\begin{aligned} \mu_1 \dot{x}_1 &= A(x_2) x_1 + g(x_1, x_2) + \mu_2 P_1(f_1(t), f_2(t), f_1(t-\tau), f_2(t-\tau)), \\ \dot{x}_2 &= Q(x_1, x_2) + \mu_2 P_2(f_1(t), f_2(t), f_1(t-\tau), f_2(t-\tau)). \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим точечное отображение $T_{\mu_1 L}\ (x_1, x_2) = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, где $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ — решение системы (4) при $t = \mu_1 L$ и начальных условиях $x_1(0) = x_1$, $x_2(0) = x_2$. Определим это отображение в области $\{ \| x_1 \| \leqslant \varepsilon \times G_{x_2} \}$, где $G_{x_2} = E_m$, E_m — эвклидово пространство размерности m, $x_1 \in E_n$, E_n — эвклидово пространство размерности n. Так как матрица $A(x_2)$ имеет собственные числа, удовлетворяющие условию $\mathrm{Re}\,\lambda_i(x_2) < -\sigma < 0$, отображение $T_{\mu_1 L}$ переводит область $\{ \| x_1 \| \leqslant \varepsilon \times G_{x_2} \}$ в область $\{ \| \overline{x}_1 \| \leqslant \varepsilon \times G_{x_2} \}$ при $\varepsilon > 0$ достаточно малом, $L > 0$ — достаточно большом. Аналогичный факт установлен в работе [5]. Из этого факта следует неравенство (3). Теорема доказана.

Теорема 2. Решение системы (1) $\{x_1(t), x_2(t)\}$ на отрезке $t \in [0, T]$ при начальных условиях $x_1(s) = \varphi_1(s)$, $x_2(s) = \varphi_2(s)$, где $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s) \in C[-\tau, 0]$ — пространству непрерывных вектор-функций на отрезке $[-\tau, 0]$, представляется в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \Phi(t)\, \varphi_1(0) + \Omega_1[t, \varphi_1, \varphi_2], \\ x_2(t) &= f(t, \varphi_2(0)) + \Omega_2[t, \varphi_1, \varphi_2], \end{aligned} \tag{5}$$

где матрица-функция $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\mu_1 \dot{\Phi} = A[f(t, \varphi_2(0))]\, \Phi, \tag{6}$$

вектор-функция $f(t, \varphi_2(0))$ удовлетворяет системе

$$\dot{y} = Q[0, y] \tag{7}$$

с начальным условием $y(0) = \varphi_2(0)$, а операторы Ω_1, Ω_2 вместе со своими частными производными Фреше по $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} &\| \Omega_1 \| \leqslant a(\varepsilon^2 + \mu_1 + \mu_2), && \| \Omega'_{1\varphi_1} \| \leqslant a(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2), \\ &\| \Omega'_{1\varphi_2} \| \leqslant a(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2), && \| \Omega_2 \| \leqslant a(\varepsilon^2 + \mu_1 + \mu_2), \\ &\| \Omega'_{2\varphi_1} \| \leqslant a(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2), && \| \Omega'_{2\varphi_2} \| \leqslant a(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2) \end{aligned} \tag{8}$$

в области $\| \varphi_1 \| \leqslant \varepsilon$, $\varphi_2(s)$ — любая функция из пространства $C[-\tau, 0]$, $a > 0$ — некоторая постоянная, $\varepsilon > 0$ — достаточно малая постоянная.

Доказательство. Для решения $x_2(t)$ на отрезке $[0, T]$ получим из системы (1) следующее интегральное уравнение

$$x_2(t) = \varphi_2(0) + \int_0^t Q\Big[\overline{\Phi}(s)\,\varphi_1(0) + \frac{1}{\mu_1}\int_0^s \overline{\Phi}(s)\,\overline{\Phi}^{-1}(\nu)\,g(x_1, x_2)\,d\nu +$$

$$+\frac{\mu_2}{\mu_1}\int_0^s \overline{\Phi}(s)\,\overline{\Phi}(\nu)\,P_1(x_1(\nu),\ x_2(\nu),\ x_1(\nu-\tau),\ x_2(\nu-\tau))\,d\nu,\ x_2(s)\Big]\,ds + \tag{9}$$

$$+\mu_2\int_0^t P_2(x_1(\nu),\ x_2(\nu),\ x_1(\nu-\tau),\ x_2(\nu-\tau))\,d\nu,$$

где $\overline{\Phi}(s)$ — фундаментальная матрица решений дифференциального уравнения

$$\mu_1\dot{\overline{\Phi}} = A(x_2(t))\,\overline{\Phi}. \tag{10}$$

Из уравнения (7) имеем интегральное уравнение

$$y(t) = \varphi_2(0) + \int_0^t Q[0,\ y(s)]\,ds. \tag{11}$$

По определению функции Ω_2 получаем $\Omega_2 = x_2(t) - y(t)$, так как $y(t) = f[t, \varphi_2(0)]$. Вычтем из уравнения (9) уравнение (11). Получим в результате

$$\Omega_2 = \int_0^t \Big\{Q\Big[\overline{\Phi}(s)\,\varphi_1(0) + \int_0^s \overline{\Phi}(s)\overline{\Phi}^{-1}(\nu)\,\mu_1^{-1}g(x_1,\ x_2)\,d\nu +$$

$$+\mu_2\mu_1^{-1}\int_0^s \overline{\Phi}(s)\overline{\Phi}^{-1}(\nu)\,P_1(x_1(\nu),\ x_2(\nu),\ x_1(\nu-\tau),\ x_2(\nu-\tau))\,d\nu,\ x_2\Big] - \tag{12}$$

$$-Q[0,\ y(s)]\Big\}\,ds + \mu_2\int_0^t P_2(x_1(s),\ x_2(s),\ x_1(s-\tau),\ x_2(s-\tau))\,ds.$$

Оценим по норме Ω_2 из системы (12). Так как по предположению $\|P_1\| \leqslant N$, $\|P_2\| \leqslant N$, $\|Q\| \leqslant N$, то из (12) получаем

$$\|\Omega_2(t)\| \leqslant N\int_0^t \Big\|\overline{\Phi}(s)\,\varphi_1(0) + \mu_1^{-1}\int_0^s \overline{\Phi}(s)\,\overline{\Phi}^{-1}(\nu)\,g(x_1,\ x_2)\,d\nu +$$

$$+\mu_2\mu_1^{-1}\int_0^s \overline{\Phi}(s)\,\overline{\Phi}^{-1}(\nu)\,P_1(x_1(\nu),\ x_2(\nu),\ x_1(\nu-\tau),\ x_2(\nu-\tau))\,d\nu\Big\|\,ds + \tag{13}$$

$$+N\int_0^t \|\Omega(s)\|\,ds + \mu_2 N\tau.$$

Из результатов работы [6] следует, что

$$\begin{aligned} &\|\overline{\Phi}(t)\| \leqslant Ce^{-\sigma t/\mu},\\ &\|\overline{\Phi}(t)\,\overline{\Phi}^{-1}(s)\| \leqslant Ce^{-\sigma(t-s)/\mu}, \end{aligned} \tag{14}$$

где C — положительная постоянная. Из неравенства (13), используя неравенства (14), получаем

$$\| \Omega_2(t) \| \leqslant \mu_1 N_1 \| \varphi_1(s) \| + \mu_2 N_2 + N \int\limits_0^t \| \Omega_2(s) \| \, ds + \overline{M} \| x_1^2(s) \| , \tag{15}$$

где

$$N_1 = N\sigma^{-1}C, \; N_2 = CN\tau + \sigma^{-1}N^2C, \; \overline{M} = NC\sigma^{-1}.$$

Из неравенств (3), (15), используя лемму Беллмана [7], получаем

$$\| \Omega_2 \| \leqslant a(\varepsilon^2 + \mu_1 + \mu_2).$$

Аналогично устанавливаются остальные неравенства (8). Теорема доказана.

2. ТОЧЕЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ (1)

Рассмотрим точечное отображение: $T(\varphi_1, \varphi_2) = [\overline{x_1}(s), \overline{x_2}(s)]$, где $\overline{x_1}(s) = x_1(s+T)$, $\overline{x_2} = x_2(s+T)$, $\{x_1(t), x_2(t)\}$ — решение системы (1) с начальными функциями $\{\varphi_1(s), \varphi_2(s)\}$. Это отображение по формулам (5) записывается в виде

$$\begin{aligned} \overline{x_1}(s) &= \Phi(s+T)\, \varphi_1(0) + \Omega_1[s+T, \varphi_1, \varphi_2, \mu_1, \mu_2], \\ \overline{x_2}(s) &= f[s+T, \varphi_2(0)] + \Omega_2[s+T, \varphi_1, \varphi_2, \mu_1, \mu_2]. \end{aligned} \tag{16}$$

Фазовое пространство Φ системы (1) представляет собой пространство непрерывных вектор-функций $\{\varphi_1(s), \varphi_2(s)\}$, заданных на отрезке $[-\tau, 0]$. Представим пространство Φ в виде прямого произведения пространств U и V, где U — пространство непрерывных вектор-функций, удовлетворяющих уравнению (7) и заданных на отрезке $[-\tau, 0]$, $V = V_1 \times V_2$, где $V_1 = C[-\tau, 0]$, V_2 — пространство непрерывных вектор-функций $\varphi(s)$, заданных на отрезке $[-\tau, 0]$, удовлетворяющих условию $\varphi(0) = 0$. Точке $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ соответствуют следующие точки пространств U и V: $u = y(s)$ есть решение дифференциального уравнения (7) с начальным условием $y(0) = \varphi_2(0)$, v есть вектор $\{v_1, v_2\}$, где $v_1 = \varphi_1(s)$, $v_2 = \varphi_2(s) - y(s)$ (17). Точке $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}\}$ соответствуют точки $\overline{u}$ и $\overline{v}$, где $\overline{u} = \overline{y}(s)$ есть решение дифференциального уравнения (7) с начальным условием $\overline{y}(0) = \overline{x_2}(0) = x_2(T)$

$$\begin{aligned} \overline{v}_1 &= \Phi(s+T)\, \varphi_1(0) + \Omega_1[s+T, \varphi_1, \varphi_2, \mu_1, \mu_2], \\ \overline{v}_2 &= f[s+T, \varphi_2(0)] + \Omega_2[s+T, \varphi_1, \varphi_2, \mu_1, \mu_2] - \overline{y}(s). \end{aligned} \tag{18}$$

Вектор-функция $\overline{y}(s)$ аналогично вектор-функции $x_2(t)$ из теоремы 2 раздела 1 имеет вид

$$\overline{y}(s) = f[s+T, \varphi_2(0)] + \Omega_3[s, \varphi_1, \varphi_2, \mu_1, \mu_2], \tag{19}$$

где

$$\| \Omega_3 \| \leqslant a(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2), \qquad \| \Omega'_{3\varphi_1} \| \leqslant a(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2),$$

$$\| \Omega'_{3\varphi_2} \| \leqslant a(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2).$$

Используя формулу (19), из выражений (18) получаем

$$\overline{v}_1 = \Phi(s+T)\, v_1(0) + \Omega_1[s+T, v_1, v_2 + u, \mu_1, \mu_2],$$

$$\overline{v}_2 = \Omega_2[s+T,\ v_1,\ v_2+u] - \Omega_3[s,\ v_1,\ v_2+u,\ \mu_1,\ \mu_2], \tag{20}$$
$$\overline{u} = f[s+T,\ u(0)] + \Omega_3[s,\ v_1,\ v_2+u,\ \mu_1,\ \mu_2].$$

Выражение (20) представляет собой точечное отображение $T(u, v) = (\overline{u}, \overline{v})$, определенное на пространстве $U \times V$. Будем рассматривать это отображение в области $G_u \times G_v$, где $G_u = U$, $G_v = \{ \| v_1 \| \leqslant \varepsilon \times V_2, v_1 \in V_1\}$.

3. О СУЩЕСТВОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВОЙ, ИНВАРИАНТНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ «МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ» У СИСТЕМЫ (1)

Используя неравенства (8), получаем для отображения $T(u, v)$ в области $G_u \times G_v$ неравенства

$$\begin{gathered} \| \delta\overline{v} \| \leqslant q(\mu_1,\ \mu_2,\ \varepsilon) \| \delta v \| + \alpha(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2) \| \delta u \|, \\ \| \delta\overline{u} \| \geqslant p \| \delta u \| - \beta(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2) \| \delta v \|, \\ \| \delta\overline{u} \| \leqslant \gamma(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2) \| \delta v \| \qquad (\delta u = 0), \end{gathered} \tag{21}$$

где $q(\varepsilon, \mu_1, \mu_2) \to 0$ при $(\varepsilon, \mu_1, \mu_2) \to 0$, p, σ, β, γ — положительные постоянные.

На основании теоремы Неймарка [5] отображение $T(u, v)$ имеет устойчивую, инвариантную поверхность σ: $v = \varphi(u)$ при μ_1, μ_2, ε — достаточно малых. Эта поверхность в пространстве Φ представляется как множество точек

$$\{\varphi_1(u),\ \varphi_2(u) + u\} \tag{22}$$

при всевозможных u. Это множество точек представляет собой конечномерную (размерности m), устойчивую, инвариантную, интегральную поверхность «медленных движений» системы (1). На основании теоремы Неймарка [5]

$$\begin{gathered} \| \varphi(u) \| \leqslant a(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2), \\ \| \varphi'_u(u) \| \leqslant a(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2). \end{gathered} \tag{23}$$

Предположим, что в системе (1) $g(x_1, x_2) \equiv 0$. Тогда эта система примет вид

$$\begin{gathered} \mu_1 \dot{x}_1 = A(x_2)\, x_1 + \mu_2 P_1(x_1,\ x_2,\ x_1(t-\tau),\ x_2(t-\tau)), \\ \dot{x}_2 = Q(x_1,\ x_2) + \mu_2 P_2(x_1,\ x_2,\ x_1(t-\tau),\ x_2(t-\tau)). \end{gathered} \tag{24}$$

Теорема 3. Решение системы (24) $\{x_1(t), x_2(t)\}$ с начальными функциями $x_1(s) = \varphi_1(s)$, $x_2(s) = \varphi_2(s)$ удовлетворяет неравенству

$$\| x_1(t) \| \leqslant \varepsilon \tag{25}$$

при $0 < t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + T$, $t_1 = -\mu_0\sigma^{-1} \ln(\varepsilon/2R)$, если вектор-функции φ_1, $\varphi_2 \in C[-\tau, 0]$ и $\| \varphi_1 \| \leqslant R$, $R > 0$ — постоянная, μ_1, μ_2, ε, μ_0 — достаточно малы.

Доказательство. Из системы (24) получаем

$$x_1(t) = \widetilde{\Phi}(t)\, \varphi_1(0) + \mu_2\mu_1^{-1} \int_0^t \widetilde{\Phi}(t)\, \widetilde{\Phi}^{-1}(s)\, P_1(x_1(s),\ x_2(s),\ x_1(s-\tau),\ x_2(s-\tau))\, ds, \tag{26}$$

где матрица-функция $\tilde{\Phi}(t)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $\mu_1 \dot{x}_1 = A(x_2) x_1$. Так же, как матрица-функция $\overline{\Phi}(t)$, матрица-функция $\tilde{\Phi}(t)$ на основании работы [6] удовлетворяет неравенствам

$$\| \tilde{\Phi}(t) \| \leqslant Ce^{-\sigma t/\mu_1}, \quad \| \tilde{\Phi}(t) \tilde{\Phi}^{-1}(s) \| \leqslant Ce^{-\sigma(t-s)/\mu}. \tag{27}$$

Используя неравенства (2), (27), из выражения (26) получаем

$$\begin{gathered} \| x_1(t) \| \leqslant C \exp\left(-\frac{\sigma}{\mu_1} t\right) R + N \int_0^t \exp\left(-\frac{\sigma}{\mu_1}(t-s)\right) \frac{\mu_2}{\mu_1} ds \leqslant \\ \leqslant \exp\left(-\frac{\sigma}{\mu_1} t\right) \overline{R} + \mu_2 \frac{N}{\sigma}\left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma}{\mu_1} t\right)\right], \end{gathered} \tag{28}$$

где $\overline{R} = RC$.

Возьмем $t_1 = -\mu_0 \sigma^{-1} \ln(\varepsilon / 2\overline{R})$, где $\mu_0 > 0$ — постоянная такая, что при $0 < \mu_2 \leqslant \mu_0$

$$N\sigma^{-1}\mu_2 < \varepsilon/2. \tag{29}$$

При $t \geqslant t_1$ и $0 < \mu_1 \leqslant \mu^0$, где μ^0 — достаточно малая постоянная, имеем

$$\exp -\frac{\sigma}{\mu_1} t < \frac{\varepsilon}{2\overline{R}}. \tag{30}$$

Из неравенств (29), (30) следует неравенство (25).

Теорема доказана.

В разделе 3 доказано существование асимптотически устойчивой, инвариантной, интегральной поверхности «медленных движений» у системы (1), а значит, и в частном случае системы (1) в системе (24). Из теоремы Неймарка [5] следует, что решение этой системы с начальной функцией $x_1(s) = \varphi_1(s)$, удовлетворяющей условию $\| \varphi_1 \| \leqslant \varepsilon$, асимптотически стремится к этой поверхности. Отсюда и из теоремы 3 следует, что любое решение системы (24) с начальной функцией $x_1(s) = \varphi_1(s)$, удовлетворяющей условию $\| \varphi_1 \| \leqslant R$, при μ_1, μ_2, ε достаточно малых асимптотически стремится к инвариантной поверхности, т. е. инвариантная, интегральная поверхность системы (24) глобально устойчива.

4. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ИНВАРИАНТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ «МЕДЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ» СИСТЕМЫ (1)

На инвариантной поверхности будем иметь соотношения

$$x_1(t+s) = \varphi_1^*[s, x_2(t)], \qquad x_2(t+s) = \varphi_2^*[s, x_2(t)], \tag{31}$$

которые следуют из выражений (22).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \mu_1 \dot{x}_1 = A(x_2) x_1 + g(x_1, x_2) + \mu_2 P_1(x_1, x_2, x_1(t-\tau), \varphi_2^*(x_2)), \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2) + \mu_2 P_2(x_1, x_2, x_1(t-\tau), \varphi_2^*(x_2)), \end{gathered} \tag{32}$$

где $\varphi_2^*(x_2)$ обозначает $\varphi_2^*[-\tau, x_2]$. Эта система будет иметь инвариантную, интегральную поверхность

$$x_1(t+s) = \varphi_1^*[s, x_2(t)]. \tag{33}$$

Из неравенств (23) следует, что

$$\| \varphi_1^*(s, x_2') - \varphi_1^*(s, x_2'') \| \leqslant L_1(\varepsilon + \mu_1 + \mu_2) \| x_2' - x_2'' \|, \tag{34}$$

где $L_1 > 0$ — постоянная. В системе (32) сделаем замену переменных $\{x_1, x_2\}$ на переменные $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}\}$ по формулам

$$x_1 = \mu_2[\overline{x_1} - A(x_2)^{-1} P_1(0, x_2, 0, \varphi_2^*(x_2))], \quad x_2 = \overline{x}_2. \tag{35}$$

Аналогичная замена для систем с малым параметром при производной и без запаздывания была сделана в работе [8].

После замены система (32) принимает вид

$$\begin{gathered} \mu_1\dot{\overline{x}}_1 = A(\overline{x}_2)\,\overline{x}_1 + g[\mu_2\overline{x}_1 - \mu_2 A(\overline{x}_2)^{-1} P_1(0, \overline{x}_2, 0, \varphi_2^*(\overline{x}_2)), \overline{x}_2] + \\ + \mu_2\overline{P}_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_1(t-\tau), \overline{x}_2(t-\tau)) + \mu_1\widetilde{P}_1(\overline{x}_1, \overline{x}_2, x_1(t-\tau), \overline{x}_2(t-\tau)), \\ \dot{\overline{x}}_2 = Q[\mu_2\overline{x}_1 - \mu_2 A(\overline{x}_2)^{-1} P_1(0, \overline{x}_2, 0, \varphi_2^*(\overline{x}_2)), \overline{x}_2] + \\ + \mu_2\overline{P}_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_1(t-\tau), \overline{x}_2(t-\tau)), \end{gathered} \tag{36}$$

где $\overline{P}_1$, $\widetilde{P}_1$, $\overline{P}_2$ — некоторые вектор-функции, получающиеся из вектор-функций P_1, P_2, $A(x_2)$.

Так как система (36) имеет вид системы (1) и для ее правых частей выполняются все условия, которые наложены на правые части системы (1), то она имеет асимптотическую устойчивую, инвариантную, интегральную поверхность

$$\overline{x}_1(t+s) = \psi_1(s, \overline{x}_2(t)), \qquad \overline{x}_2(t+s) = \psi_2(s, \overline{x}_2(t)). \tag{37}$$

На основании замены (35) система (32) будет иметь решения

$$\begin{gathered} x_1(t+s) = \mu_2[\psi_1(s, \overline{x}_2(t)) - A(\overline{x}_2(t+s))^{-1} P_1(0, \overline{x}_2, 0, \varphi_2^*(\overline{x}_2))] = \\ = \overline{\varphi}_1(s, \overline{x}_2(t)) \\ x_2(t) = \overline{x}_2(t), \end{gathered} \tag{38}$$

где

$$\dot{x}_2 = Q(\overline{\varphi}_1(0, x_2), x_2) + \mu_2 P_2(\overline{\varphi}_1(0, x_2), x_2, \overline{\varphi}_1(-\tau, x_2), \varphi_2^*(x_2)). \tag{39}$$

Отсюда следует, что система (32) имеет инвариантную, интегральную поверхность

$$x_1(t+s) = \overline{\varphi}_1(s, x_2(t)). \tag{40}$$

Из выражения (38) следует, что $\| \overline{\varphi}_1(s, x_2') - \overline{\varphi}_1(s, x_2'') \| \leqslant \mu_2 L_1 \| x_2' - x_2'' \|$. Рассмотрим точечное отображение

$$\begin{gathered} \overline{x}_1(s) = T_1\ (x_1(s), x_2), \\ \overline{x}_2 = T_2\ (x_1(s), x_2), \end{gathered} \tag{41}$$

где $\overline{x}_1(s) = x_1(s+T), \overline{x}_2 = x_2(T)$, $\{x_1(t), x_2(t)\}$ — решение системы (32) с начальным условием $\{x_1(s), z_2\}$. Будем рассматривать это отображение в области $G_{x_1} \times G_{x_2}$, где G_{x_1} есть шар $\| x_1 \| \leqslant \varepsilon$, $x_1(s) \in C[-\tau, 0]$, $G_{x_2} = E_m$, E_m — m-мерное эвклидово пространство.

Рассмотрим множество поверхностей Σ $x_1(s) = \varphi(x_2)$, определенных в области $G_{x_1} \times G_{x_2}$, удовлетворяющих условию Липшица с постоянной L, не зависящей от $(\mu_1, \mu_2, \varepsilon)$. Множеству Σ принадлежат поверхности (33), (40). Точечное отображение (41) на основании теоремы Неймарка [5] в множестве Σ имеет единственную инвариантную поверхность. Так как поверхности (40), (33) являются инвариантными для отображения (41), то они совпадают, т. е.

$$x_1(t+s) = \varphi_1(s, x_2(t)) = \bar{\varphi}_1(s, x_2(t)). \tag{42}$$

Из формулы (38) получаем, что на инвариантной поверхности системы (1) выполняется соотношение

$$x_1(t) = \mu_2\left[\psi_1(0, x_2(t)) - A(x_2)^{-1} P_1(0, x_2, 0, \varphi_2^*(x_2))\right], \tag{43}$$

а из формулы (43) следует, что система дифференциальных уравнений на поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = Q(-\mu_2 A(x_2)^{-1} P_1(0, x_2, 0, f(-\tau, x_2)), x_2) + \\ + \mu_2 P_2(0, x_2, 0, f(-\tau, x_2)) + \Omega(x_2), \end{aligned} \tag{44}$$

где $\Omega(x_2)$ и $\Omega'(x_2)$ — величины порядка $0(\mu_2(\mu_1+\mu_2+\varepsilon))$. Если система

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = Q(-\mu_2 A(x_2)^{-1} P_1 0, x_2, 0, f(-\tau, x_2)), x_2 + \\ + \mu_2 P_2(0, x_2, 0, f(-\tau, x_2)) \end{aligned} \tag{45}$$

— второго порядка и груба, то она полностью определяет фазовую структуру системы (1), если $g(x_1, x_2) \equiv 0$, и определяет поведение фазовых траекторий системы (1) на инвариантной поверхности, если $g(x_1, x_2) \not\equiv 0$.

Таким образом, система (1) при сделанных предположениях имеет асимптотически устойчивую, инвариантную, интегральную поверхность «медленных движений» и имеет глобально устойчивую, инвариантную, интегральную поверхность, если вектор-функция $g(x_1, x_2) \equiv 0$. Аналогичную фазовую структуру имеют системы с последействием следующего вида

$$\begin{aligned} \mu_1 \dot{x}_1 &= A(x_2)\, x_1 + g(x_1, x_2) + \mu_2 P_1(x_{1_\tau}(t), x_{2_\tau}(t)), \\ \dot{x}_2 &= Q(x_1, x_2) + \mu_2 P_2(x_{1_\tau}(t), x_{2_\tau}(t)), \end{aligned} \tag{46}$$

где $x_{1_\tau}(t) = x_1(t+s)$, $x_{2_\tau}(t) = x_2(t+s)$.

В заключение выражаю благодарность профессору Ю. И. Неймарку за руководство при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Halanay, J. Differential Eqs., vol. 2, № 1, 33 (1966).
2. J. Kurzweil, Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., t. 13, № 8, 1113 (1968).
3. Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук, Укр. мат. журн., 2, № 6, 791 (1968).
4. Ю. И. Неймарк, Л. З. Фишман, ДАН СССР, 171, 51, 44 (1966); Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 9, № 6, 1210 (1966); 10, № 11, 1479 (1967); 12, № 7, 974 (1969).
5. Ю. И. Неймарк, Изв. высш. уч. зав. — Радиофизика, 10, № 3, 311 (1967).
6. A. Halanay, Rev. Roum. de Math. Pures et Appl, 8, № 2, 285 (1963).
7. Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1954.
8. Н. К. Гаврилов, Тезисы докладов конференции молодых научных работников, Горький, 1966.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском университете

Поступила в редакцию 12 июня 1969 г.

PHASE STRUCTURE FOR SETS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH AFTER—EFFECT AND DERIVATIVE WITH SMALL PARAMETER

L. Z. Fishman

The investigation of phase structure for a set of differential equations with after-effect and derivative with small parameter is proved to reduce to the investigation of phase structure for some set of differential equations without delay which could be expressed in an explicit form.