ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1970*

УДК 519.281 2 62—50

ИССЛЕДОВАНИЕ ОЦЕНОК ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ МЕТОДОМ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

В. М. Перельмутер

Рассматриваются оценки характеристик динамических систем методом максимального правдоподобия, и проводится сравнение этого метода с методом наименьших квадратов. Сравнение проведено методом статистических испытаний

В настоящее время основным методом оценки динамических характеристик объектов регулирования в процессе нормальной эксплуатации является метод наименьших квадратов (МНК). Преимущество этого метода заключается в том, что при его применении не требуется знания статистических характеристик входных сигналов и помех. Однако при наличии каких-либо априорных данных возникает задача их наилучшего использования. В том случае, когда известен закон распределения помехи, наиболее целесообразно применение метода максимального правдоподобия (ММП).

Известно, что оценки ММП являются асимптотически эффективными, т. е. предел отношения минимально возможной дисперсии оценки, определяемой неравенством Крамера—Рао, к дисперсии ММП равен единице, тогда как оценки МНК асимптотически эффективны только для независимых наблюдений. Таким образом, в общем случае оценки ММП эффективнее оценок МНК, однако уменьшение дисперсии, достигаемое применением ММП, возможно вычислить только в простейших случаях. В некоторых работах проводится сравнение ММП и МНК по их асимптотической эффективности [1], где показывается, что в ряде случаев эти оценки имеют одинаковые асимптотические свойства, однако на практике представляют интерес не столько асимптотические свойства оценки, сколько ее преимущества при конечном, относительно небольшом времени наблюдения. В связи с этим представляет интерес определение того увеличения точности оценки динамических характеристик, которое достигается при применении метода максимального правдоподобия вместо метода наименьших квадратов. В связи с трудностью получения теоретических формул целесообразно для анализа применить метод статистических испытаний.

Работа состоит из трех частей. В первой части исследуются некоторые методы идентификации дискретных систем, причем помеха предполагается нормально распределенной, во второй части рассматривается также дискретная система, но помеха предполагается распределенной по закону Лапласа, в третьей части анализируются методы идентификации непрерывных систем. Предполагается, что объект линейный, входная величина которого $f(t)$ измеряется точно, а выход $x(t)$ искажен независимой помехой $n(t)$, т. е. измеряется $z(t) = x(t) + n(t)$. Все сигналы—стационарные случайные функции времени, или временные ряды.

1. Объект управления описывается уравнениями

$$x(k) = \sum_{i=0}^{N_0} h_i f(k-i) \qquad (k \geqslant N_0 + 1), \tag{1.1}$$

$$z(k) = x(k) + n(k), \tag{1.2}$$

h_i — ординаты дискретной импульсной переходной функции (ИПФ), $n(k)$ распределена нормально с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K_n(i\Delta)$, Δ — шаг дискретности.

Пусть измерена последовательность $z(k), \ldots, z(k+N)$. Тогда условная плотность вероятности $x(k), \ldots, x(k+N)$

$$P\{x(k), \ldots, x(k+N) \mid z(k), \ldots, z(k+N)\} = P_n\{n(k), \ldots, n(k+N)\},$$

где P_n — закон распределения помехи. Если P_n — нормальный закон распределения, то ММП заключается в минимизации величины

$$J = \boldsymbol{n}^t \Lambda \boldsymbol{n}, \tag{1.3}$$

где $\Lambda = D_n^{-1}$, D_n — ковариационная матрица помехи,

$$D_n = \| d_{n_{ij}} \| = \| K_n(i-j)\Delta \|, \quad \boldsymbol{n}^t = | n(k), \ldots, n(k+N) | .$$

Так как $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{z} - F\boldsymbol{h}$, где $\boldsymbol{z} = |z(k), \ldots, z(k+N)|^t$, $\boldsymbol{h}^t = |h_0, h_1, \ldots, h_{N_0}|$, $F = \| f_{ij} \| = \| f(k+i-j) \|$ — прямоугольная матрица $(N+1) \times (N_0+1)$, то, дифференцируя (1.3), находим уравнение для определения $\boldsymbol{h}$ -

$$(F^t \Lambda F)\boldsymbol{h} = F^t \Lambda \boldsymbol{z}. \tag{1.4}$$

Оценка $\boldsymbol{h}$ получается несмещенной с ковариационной матрицей

$$M[\Delta \boldsymbol{h}\, \Delta \boldsymbol{h}^t] = M_F[(F^t \Lambda F)^{-1}]. \tag{1.5}$$

Для МНК ковариационная матрица

$$M[\Delta \boldsymbol{h}\, \Delta \boldsymbol{h}^t] = M_F[(F^t F)^{-1} F^t D_n F (F^t F)^{-1}]. \tag{1.6}$$

Если n — белый шум или число измерений равно числу ординат ИПФ ($N = N_0$), то ковариационные матрицы для обоих случаев оказываются одинаковыми.

При проведении первой серии опытов сравнение обоих методов проводилось путем определения следа ковариационных матриц (1.5) и (1.6), причем усреднение по F в (1.5) и (1.6) производилось методом статистических испытаний. Принято $N_0 = 4$, $N = 4, 6, 8$. Корреляционные функции $f(k)$ и $n(k)$ равны $K_f(i-j) = \exp(-\beta\Delta|i-j|)$, $K_n(i-j) = \exp(-\alpha\Delta|i-j|)$, $f(k)$ формировалось из последовательности независимых нормальных величин $N(0,1)$ по рекуррентным формулам [2]. В табл. 1 приведены величины следов ковариационных матриц для обоих методов в зависимости от корреляционных функций f и n числа измерений.

Таблица 1

α, β	$N = 4$		$N = 6$		$N = 8$	
	МНК	ММП	МНК	ММП	МНК	ММП
$\alpha = \beta = 1$	13,1	13,1	2,29	2,14	1,02	0,93
$\alpha = 1$, $\beta = 0,33$	10,6	10,6	2,6	2,44	1,65	1,53
$\alpha = 0,1$, $\beta = 0,33$	2,1	2,1	1,47	0,57	0,75	0,36

Во второй серии опытов рассмотрен метод идентификации, при котором объект моделируется несколькими параллельно соединенными звеньями с заданными динамическими характеристиками и переменными коэффициентами передачи a_i. Обозначим $u_j(k)$ — сигналы на выходе этих звеньев, т. е. $x(k) = \sum_{j=1}^{m} a_j^* u_j(k)$. Принято $j = 2$, $a_1^* = a_2^* = 1$, первое звено описывается уравнением $u_1(k+1) = 0{,}368\, u_1(k) + 0{,}93\, y(k+1)$, а второе — $u_2(k+1) = 0{,}719\, u_2(k) + 0{,}695\, y(k+1)$, $y(k)$ — последовательность независимых нормально распределенных величин. Оценки по ММП находились из уравнения (1.4), а по МНК — из того же уравнения при $\Lambda = E$, где E — единичная матрица. Корреляционная функция помехи такая же, как и в предыдущем случае. Число наблюдений $N = 5$. В табл. 2 приведены данные 10 опытов.

Таблица 2

α	Метод	Параметр	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	МНК	a_1	0,87	0,68	0,96	0,74	1,02	1,37	0,93	1,07	0,94	1,05
		a_2	1,05	1,23	0,95	1,35	1,06	0.58	0,91	0,82	1,05	0.9
	ММП	a_1	0,89	0,76	0,93	0,8	1,03	1,37	0,96	0,93	0,89	1,0
		a_2	1,03	1,18	0,97	1,31	1,04	0,58	0,91	0,98	1,2	0,94
0,1	МНК	a_1	0,86	0,99	0,96	1,0	0,95	0,76	0,67	0,87	1,1	1,18
		a_2	1,19	1,02	1,08	0,83	1,12	1,34	1,3	1,36	0,7	0,78
	ММП	a_1	0,97	0,99	0,87	1,13	0,99	0,87	1,01	0,97	0,95	1,17
		a_2	1,01	1,02	1,18	0,75	1,0	0,17	0,97	1,13	1,11	0,8

Средние величины суммы дисперсий оценок коэффициентов для $\alpha = 1$ МНК—0,075, ММП—0,063; для $\alpha = 0{,}1$ МНК—0,081, ММП—0,028. Результаты вычислений свидетельствуют о значительной эффективности оценок ММП в тех случаях, когда время корреляции помехи соизмеримо или превосходит время наблюдения и время корреляции входного сигнала.

2. Рассмотрим влияние отклонения закона распределения помехи от нормального на оценки максимального правдоподобия. Примем, что помеха распределена по закону Лапласа с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией $P_n(x) = (1/\sqrt{2}) \exp(-\sqrt{2}|x|)$. Известно, что МНК обеспечивает линейную оценку параметров с наименьшей дисперсией. Оценка ММП для закона распределения Лапласа является нелинейной и минимизирует величину

$$J_1 = \sum_{i=1}^{N} |z_i - x_i|, \quad \boldsymbol{x} = |x_1, \ldots, x_N|^t = \boldsymbol{F h}, \tag{2.1}$$

так как величины $n(k)$ предполагаются взаимно независимыми.

При расчетах было принято $N_0 = 4$, $N = 8$. $f(k)$ представляет временной ряд с экспоненциальной корреляционной функцией. Отношение дисперсии помехи к дисперсии $x(k)$ принято 0,05. Сигнал помехи $n(k)$ образуется из равномерно распределенных в (0,1) независимых величин по известным методам [3]. Расчеты проводились в следующей последовательности: формирование матрицы $\boldsymbol{F}$ из независимых нормально распределенных величин по рекуррентным формулам [2], нахождение $\boldsymbol{x}$ для заданного вектора $\boldsymbol{h}^*$, расчет $\boldsymbol{n}$, нахождение $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}$, минимизация величины J_1 при найденном $\boldsymbol{z}$ путем подбора вектора $\boldsymbol{h}$. Для сравнения оценки $\boldsymbol{h}$ вектора $\boldsymbol{h}^*$ находились также методом наименьших квадратов.

В табл. 3 приведены величины $\sum_{i=1}^{4} \Delta h_i^2$ суммы квадратов отклонений оценок от истинных значений h_i^* для 10 опытов для одной из серии измерений.

Таблица 3

№ опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ММП	0,002	0,04	0,004	0.046	0,07	0,014	0,007	0,005	0,005	0,01
МНК	0,006	0,043	0,018	0,037	0,14	0,009	0,02	0,003	0,017	0,009

Средние величины для ММП—0,02; для МНК—0,03.

Хотя в данном случае строгое обоснование эффективности ММП наталкивается на некоторые трудности, связанные с недифференцируемостью функции правдоподобия, он обеспечивает значительно меньшую дисперсию, чем МНК, даже для независимых наблюдений.

3. При применении ММП к непрерывным системам и сигналам в соответствии с [4] целесообразно информацию, содержащуюся в полученных функциях времени, преобразовать в последовательность вещественных чисел, которые называются наблюдаемыми координатами процесса. Желательно, чтобы эти координаты, которые являются случайными величинами, были бы взаимно независимы. Возможно в качестве наблюдаемых координат принять коэффициенты канонического разложения случайного процесса. В качестве координатных функций канонического разложения примем собственные функции $\varphi_\nu(t)$ интегрального уравнения

$$\int_a^b K_n(t, s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = \lambda_\nu\, \varphi_\nu(t), \tag{3.1}$$

где $K_n(t, s)$ — корреляционная функция помехи, λ_ν — собственные числа.

Наблюдаемые координаты $n(t)$

$$c_\nu = \int_a^b n(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt, \tag{3.2}$$

$$M[c_\nu] = 0, \quad M[c_\nu c_\mu] = \lambda_\nu \delta_{\nu\mu}, \tag{3.3}$$

где $\delta_{\nu\mu}$ — символ Кронекера.

Если $n(t)$ имеет нормальный закон распределения, то c_ν также распределены нормально. Совместную плотность вероятностей величин c_ν можно записать в виде

$$P\{c_\nu\} = \lim_{\mu\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^\mu \sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_\mu}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{c_\nu^2}{\lambda_\nu}\right). \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что оценка максимального правдоподобия должна минимизировать.

$$J_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu^2}{\lambda_\nu}.$$

Пусть ИПФ объекта, которую необходимо определить, равна $w(\tau)$ Измеряемый выход объекта

$$z(t) = \int_0^{T_s} w(\tau) f(t-\tau)\, d\tau + n(t). \tag{3.5}$$

Для исключения влияния начальных условий измерения выходной координаты должны начаться спустя T_s после начала измерения входной и длиться не менее T_s Таким образом, время наблюдения $T \geqslant 2T_s$ и $z(t)$ наблюдается в интервале (T_s, T). Минимизируя J_2 с учетом (3.2) и (3.5), получаем интегральное уравнение для определения $w(\tau)$ по методу максимального правдоподобия

$$\int_0^{T_s} R_f(\tau_1, \tau_2)\, w(\tau_1)\, d\tau_1 = R_{fz}(\tau_2), \tag{3.6}$$

$$R_f = \int_{T_s}^{T}\int_{T_s}^{T} r(t_1, t_2) f(t_1-\tau_1) f(t_2-\tau_2)\, dt_1\, dt_2, \tag{3.7}$$

$$R_{fz} = \int_{T_s}^{T}\int_{T_s}^{T} r(t_1, t_2)\, z(t_1) f(t_2-\tau_2)\, dt_1\, dt_2, \tag{3.8}$$

$$r(t_1, t_2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(t_1)\, \varphi_\nu(t_2). \tag{3.9}$$

Величины (3.7) и (3.8) можно рассматривать как скалярные произведения (зависящие от параметров τ_1 и τ_2) в так называемом воспроизводящем ядро гильбертовом пространстве [5].

Кроме (3.6), для определения $w(\tau)$ возможно использовать представление $w(\tau)$ в виде суммы линейно независимых функций: $w(\tau) = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i \psi_i(\tau)$. Тогда

$$z(t) = n(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \int_0^{T_s} \psi_i(\tau) f(t-\tau)\, d\tau. \tag{3.10}$$

Минимизируя J_2 с учетом (3.2) и (3.10), получаем систему уравнений для определения $A = |a_1, \ldots, a_N|^t$

$$CA = L, \tag{3.11}$$

где

$$l_i = \int_0^{T}\int_0^{T} r(t_1, t_2)\, z(t_1)\, \omega_i(\tau_2)\, dt_1\, dt_2,$$

$$c_{ij} = \int_0^{T}\int_0^{T} r(t_1, t_2)\, \omega_i(t_1)\, \omega_j(t_2)\, dt_1\, dt_2, \tag{3.12}$$

$$\omega_i(t) = \int_0^{T_s} \psi_i(\tau) f(t-\tau)\, d\tau.$$

Ковариационная матрица

$$M[\Delta A\, \Delta A^t] = M_f[C^{-1}]. \tag{3.13}$$

Система (3.10), (3.11), (3.12) получена в [5].

Для вычисления воспроизводящего ядро внутреннего произведения

$$\varepsilon = \int\limits_a^b \int\limits_a^b r(t_1, t_2)\, u\,(t_1)\, v\,(t_2)\, dt_1\, dt_2 \tag{3.14}$$

представим его в виде

$$\varepsilon = \int\limits_a^b y(t_2)\, v\,(t_2)\, dt_2, \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered} y(t_2) = \int\limits_a^b r(t_1, t_2)\, u\,(t_1)\, dt_1 = \\ = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(t_2) \int\limits_a^b \varphi_\nu\,(t_1)\, u\,(t_1)\, dt_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(t_2)\, u_\nu, \end{gathered} \tag{3.16}$$

u_ν — коэффициенты разложения $u(t)$ по системе $\varphi_\nu(t)$. Отсюда следует [6], что $y(t)$ является решением уравнения

$$\int\limits_a^b K_n(t_1, t_2)\, y\,(t_2)\, dt_2 = u(t_1). \tag{3.17}$$

Методы решения (3.17) для случая, когда преобразование Фурье корреляционной функции $K_n(\tau)$ является дробно-рациональной функцией

$$S_n(p) = \frac{M(p^2)}{N(p^2)} = \frac{M_1(p)\, M_1(-p)}{N_1(p)\, N_1(-p)}, \tag{3.18}$$

хорошо разработаны [6]. Пусть порядок полинома M_1 равен m, полинома N_1 — n. Рассмотрим сначала случай, когда $M(p^2) = 1$. Тогда

$$y\,(t) = N\,(D)\, u\,(t) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_i\, \delta^{(i)}(t - a) + \rho_i'\, \delta^{(i)}(t - b), \tag{3.19}$$

где D — символ дифференцирования.

Коэффициенты ρ_i и ρ_i' определяются путем подстановки (3.19) в (3.17) и представляют собой линейные комбинации величин $u^{(i)}(a)$ и $u^{(i)}(b)$ соответственно. Отсюда

$$\varepsilon = \int\limits_a^b N_1\,(D)\, N_1\,(-D)\;\; u(t)\, v\,(t)\, dt + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\rho_i\, v^{(i)}\,(a) + \rho_i'\, v^{(i)}\,(b)\right]. \tag{3.20}$$

Интегрированием по частям (3.20) можно привести к виду, при котором необходимый порядок дифференцирования уменьшается вдвое [5]

$$\varepsilon = \int\limits_a^b N_1(D)\, u\,(t)\, N_1(D)\, v\,(t)\, dt + \sum_{i,\,j=0}^{n-1} \gamma_{ij}\, u^{(i)}\,(a)\, v^{(i)}\,(a). \tag{3.21}$$

В частности, для $K_n = e^{-\beta|\tau|}$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\beta D_n} \left[\int\limits_a^b (D + \beta)\, u\,(t)\, (D + \beta)\, v\,(t)\, dt + 2\beta\, u\,(0)\, v\,(0) \right], \tag{3.22}$$

$$\text{для } K_n = e^{-\alpha|\tau|}\left[\cos(\beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta|\tau|)\right], \quad \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4\alpha\gamma^2 D_n}\left[\int_a^b (D^2 + 2\alpha D + \gamma^2)\,u(t)\,(D^2 + 2\alpha D + \gamma^2)\,v(t)\,dt + \right. \\ \left. + 4\alpha\gamma^2 u(a)\,v(a) + 4\alpha\,u'(a)\,v'(a)\right]. \tag{3.23}$$

Для R_f и R_{fz} получаем

$$R_f = \int_{T_s}^{T} N_1(D)\,f(t-\tau_1)N_1(D)\,f(t-\tau_2)\,dt + \sum_{i,\,j=0}^{n-1} \gamma_{ij} f^{(i)}(T_s - \tau_1)\,f^{(j)}(T_s - \tau_2), \tag{3.24}$$

$$R_{fz} = \int_{T_s}^{T} N_1(D)\,f(t-\tau_2)\,N_1(D)\,z(t)\,dt + \sum_{i,\,j=0}^{n-1} \gamma_{ij} f^{(i)}(T_s - \tau_2)z^{(j)}(T_s). \tag{3.25}$$

Таким образом, для получения оценок максимального правдоподобия используются те же сигналы, что и для получения оценок наименьших квадратов, но пропущенные через дифференцирующую цепь $N_1(p)$, и кроме того, учитываются граничные значения сигналов. При достаточно большой величине $T - T_s$ граничные значения можно не учитывать.

Более сложным является случай, когда $M(p^2) \neq 1$. Для определенности рассмотрим получение оценок максимального правдоподобия для $K_n = e^{-\alpha|\tau|}\cos(\beta\tau)$. Решение (3.17) ищем в виде

$$y(t) = D^4 u_1 - 2(\alpha^2 - \beta^2)\,D^2 u_1 + \gamma^4 u_1 + A\delta(t-a) + B\delta(t-b) + \\ + G_1 e^{\gamma t} + G_2 e^{-\gamma t}, \tag{3.26}$$

где $u_1(t)$ связано с $u(t)$ дифференциальным уравнением

$$-2\alpha D^2 u_1 + 2\alpha\gamma^2 u_1 = u. \tag{3.27}$$

Подставляя в (3.15), находим для $a = 0$, $b = T$

$$\varepsilon_1 = \int_0^T (D^2 + 2\alpha D + \gamma^2)u_1(t)\,(D^2 + 2\alpha D + \gamma^2)\,v(t)dt + \int_0^T (G_1 e^{\gamma t} + \\ + G_2 e^{-\gamma t})\,v(t)dt + \frac{G_1}{2\gamma}\,[v(0) - e^{\gamma t} v(T)] - \frac{G_2}{2\gamma}\,[v(0) - e^{-\gamma t} v(T)] + \\ + u_1''(0)\,[v'(0) - \alpha v(0)] + 2\alpha u_1'(0)\,[v'(0) + \alpha v(0)] + \gamma^2 u_1(0) \times \\ \times [3\alpha v(0) + v'(0)] - [v'(T) + \alpha v(T)]\,[u_1''(T) + 2\alpha u_1'(T) + \gamma^2 u_1(T)], \tag{3.28}$$

где G_1 и G_2 определяются из системы уравнений

$$\frac{G_1}{2\gamma(\gamma+\alpha)} + \frac{G_2}{2\gamma(\gamma-\alpha)} = -u_1''(0) + 2\alpha u_1'(0) - \gamma^2 u_1(0), \\ \frac{G_1 e^{\gamma T}}{2\gamma(\gamma-\alpha)} + \frac{G_2 e^{-\gamma T}}{2\gamma(\gamma+\alpha)} = -u_1''(T) - 2\alpha u_1'(T) - \gamma^2 u_1(T). \tag{3.29}$$

Начальные условия для $u_1(t)$ можно задать произвольно, так как получающееся при этом изменение функции $u_1(t)$ компенсируется соответствующими изменениями G_1 и G_2, и $y(t)$ не меняется.

Целесообразно задать граничные условия в виде

$$u_1''(0) - 2\alpha u_1'(0) + \gamma^2 u_1(0) = u_1''(T) + 2\alpha u_1'(T) + \gamma^2 u_1(T) = 0,$$

что обеспечивает $G_1 = G_2 = 0$. Тогда $\varepsilon_1/4\alpha\gamma^2 D_n$ определяется (3.23), где $u(t)$ замечено на $u_1(t)$,которое определяется соотношением

$$u_1(t) = C_1 e^{\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t} + \int\limits_0^t h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = C_1 e^{\gamma t} + C_2 e^{-\gamma t} + u_{1\,0}(t). \quad (3.30)$$

Коэффициенты C_1 и C_2 определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2\gamma(\alpha-\gamma)\, C_1 - 2\gamma(\alpha+\gamma) C_2 &= -u(0)/2\alpha, \\ 2\gamma(\alpha+\gamma)\, e^{\gamma T} C_1 - 2\gamma(\alpha-\gamma)\, e^{-\gamma T} C_2 &= -u_{1\,0}''(T) - 2\alpha u_{1\,0}'(T) - \gamma^2 u_{1\,0}(T). \end{aligned} \quad (3.31)$$

На основании приведенных выше соотношений возможно получить формулы для R_f и R_{fz}, которые здесь не приводятся. Вычисление этих величин возможно произвести с помощью цифровой техники.

Для определения эффективности оценок максимального правдоподобия был проведен ряд опытов и расчетов.

В первой серии опытов определялся один параметр—коэффициент усиления ИПФ. Входной сигнал двух типов: случайный с корреляционной функцией $e^{-0,1|\tau|}\cos(0,3\tau)$ и синусоидальный с частотой 0,3 *гц*. Помеха — с экспоненциальной корреляционной функцией с показателем α. Время усреднения 10 *сек*.

Для синусоидального входного сигнала можно получить приближенную формулу для вычисления отношения дисперсии оценки по МНК к дисперсии оценки ММП при относительно большом T $(\omega T \gg 1)$

$$\frac{D_{a\,\text{МНК}}}{D_{a\,\text{ММП}}} \simeq \frac{(x + x^2 + z^2)\,[x(z^2+x^2) - x^2 + z^2]}{x(z^2 + x^2)^2}, \quad (3.32)$$

где $x = \alpha T$, $z = \omega T$. Это отношение больше единицы и уменьшается при увеличении x и уменьшении z.

Для случайного входного сигнала было проведено 6 групп опытов по 10 опытов в каждой для $\alpha = 1$. Для групп 1—3 дисперсия помехи в 2,9 раза меньше, чем для групп 4—6. Получающиеся величины дисперсий оценок, усредненные в каждой группе, приведены в табл. 4.

Таблица 4

№ серии	1	2	3	4	5	6
МНК	0,0083	0,0067	0,0042	0,016	0,012	0,029
ММП	0,0042	0,0062	0,0026	0,014	0,012	0,015

Для синусоидального входного сигнала величины дисперсий оценок приведены в табл. 5.

Таблица 5

	$\alpha = 1$	$\alpha = 0,1$
МНК	0,16	0,019
ММП	0,125	0,0082

Сравнение этих величин с рассчитанными по (3.32) показывает удовлетворительное совпадение.

Отметим, что помеха формировалась путем пропускания напряжения генератора шума ГШ-1 через инерционное звено с постоянной времени $1/\alpha$.

Вторая серия опытов отличалась от первой тем, что при их выполнении производилась дискретизация сигналов, и производные вычислялись с помощью конечных разностей, что соответствует обработке сигналов на ЭЦВМ. Входной сигнал — случайный, $D_n/D_f=0{,}01$. Величина дисперсии, вычисленная по 20 опытам, оказалась равной 0,0053 для МНК и 0,0035 для ММП.

В третьей серии опытов идентифицировался объект с передаточной функцией $a_1^*/(p+1)+a_2^*/(0{,}5p+1)$, $a_1^*=a_2^*=1$. Входной сигнал — синусоидальный с частотой 1 *гц*, $K_n=e^{-|\tau|}$. Определение параметров a_1 и a_2 проводилось по формулам (3.11), (3.12), (3.13), (3.22). В результате 10 опытов для МНК получена сумма дисперсий оценок 0,067, для ММП — 0,052.

В заключение была проведена идентификация объекта с передаточной функцией $1/(p^2+p+1)$ по формулам (3.6), (3.24), (3.25). Входной сигнал — случайный процесс, полученный в результате прохождения случайного процесса с корреляционной функцией $e^{-0{,}1|\tau|}\cos(0{,}3\tau)$ через звено $1/(p+1)^3$. Помеха — экспоненциальная $\alpha=1$, $T_s=5$ *сек.*, $T=10$ *сек.* С помощью шлейфового осциллографа были записаны сигналы $f(t)$ и $z(t)$, а также эти сигналы, пропущенные через дифференцирующие звенья с передаточной функцией $(p+1)/(0{,}01p+1)$. Решение интегрального уравнения (3.6) проводилось путем сведения его к системе линейных алгебраических уравнений и последующим применением методов регуляризации [7]. В результате для МНК получена величина ошибки $\int_0^{T_s}\Delta w^2(\tau)d\tau$, где $\Delta w(\tau)$ — разность между истинной ИПФ и ее оценкой, равная 0,054, для ММП — 0,049.

Рассмотренные в статье способы идентификации динамических систем с помощью ММП за счет использования априорных данных о законе распределения помехи обеспечивают меньшие величины ошибок, чем МНК. Эффективность оценок максимального правдоподобия обычно возрастает при сильно коррелированной помехе. При слабо коррелированной помехе применение ММП целесообразно при проведении ответственных или дорогостоящих экспериментов, так как получение априорных данных требует затраты времени или средств. Отметим, что во многих случаях, например, для нормально распределенной помехи с дробно-рациональной спектральной плотностью за счет усложнения вычислительного устройства возможно определение корреляционной функции помехи, необходимой для формирования оценок максимального правдоподобия, непосредственно в процессе идентификации [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Фортус, А. М. Яглом, сб. Проблемы передачи информации, вып. 14, изд. АН СССР, М., 1963.
2. П. Д. Крутько, Статистическая динамика импульсных систем, изд. Сов. радио, М., 1963.
3. Н. П. Бусленко, Д. И. Голенко, И. М. Соболь, В. Г. Срагович, Ю. А. Шрейдер, Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), Физматгиз, М., 1962.
4. У. Гренандер, Случайные процессы и статистические выводы, ИЛ., М., 1961.

5. E. Parzen, Mathematical Optimization Techniques, Berkeley—Los Angeles, Univ. California Press, 1963.
6. П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский, С. Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В. Я. Стеценко, Интегральные уравнения, изд. Наука, М., 1968.
7. А. Н. Тихонов, ДАН СССР, 153 № 1, 49 (1963).
8. К. Ж. Астром, Т. Болин, сб. Теория самонастраивающихся систем управления, Тр. II международного симпозиума ИФАК, изд Наука, М., 1969.

Всесоюзный научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт электроаппаратов

Поступила в редакцию 16 июня 1969 г.

INVESTIGATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS ESTIMATIONS FOR CONTROLLED PLANTS BY THE MAXIMUM LIKELHOOD METHOD

V. M. Perelmuter

Estimations of dynamic system characteristics are considered by the maximum likelihood method and this method is compared with that of least squares. The comparison is carried out by the statistical tests method.