ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIII, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1970*

УДК 62—504

АБСОЛЮТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ АСТАТИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

В. М. Муттер

Находятся аналитические условия абсолютной устойчивости астатических нелинейных импульсных автоматических систем, соответствующие критерию Джури-Ли. Рассмотрены частные случаи. Дан пример выбора неотрицательного числа, фигурирующего в критерии устойчивости.

1. Исследованию абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем (НИС) посвящено большое число работ, например, [1—4]. В [4] показано, что для НИС с астатизмом первого порядка могут быть получены аналитические условия абсолютной устойчивости. В настоящей работе условия абсолютной устойчивости в аналитической форме находятся для двух классов астатических НИС: с непрерывным или с дискретным интегратором и с типовой приведенной непрерывной линейной частью (ПНЛЧ).

2. На рис. 1 приведены структурные схемы астатических НИС. Отметим, что НИС, показанная на рис. 1 б (к таким системам сводятся, например, следящие аналого-цифровые преобразователи [5]), эквивалентна НИС с непрерывным интегратором, но без фиксатора.

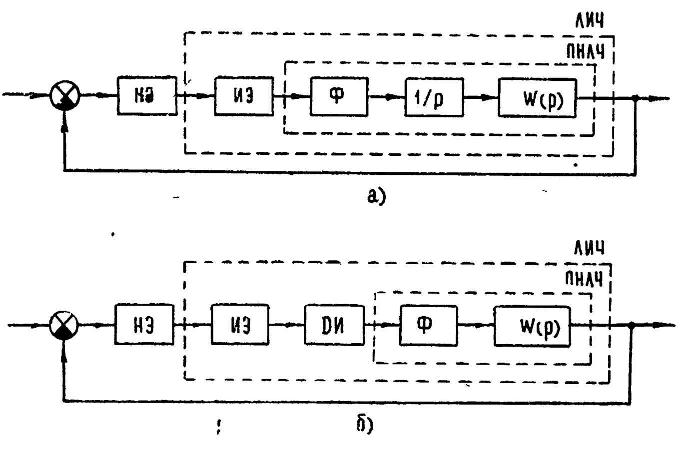

Рис. 1. Структурные схемы автоматических НИС с непрерывным (а) и с дискретным (б) интегратором. ЛИЧ—линейная импульсная часть, НЭ—нелинейный элемент, ИЭ—импульсный элемент с периодом прерывания T_0, Ф—фиксатор, ДИ—дискретный интегратор.

В достаточно общем случае $W(p)$ можно принять равным

$$W(p)=K\exp(-p\Theta)H(p)=K\exp(-p\Theta)\prod_{r=1}^{m}(J_r p+1):\prod_{i=1}^{n}(T_i p+1),\quad m\leqslant n. \tag{1}$$

Пусть характеристика НЭ удовлетворяет условиям

$$h(0)=0, \quad 0<\frac{h(\Omega)}{\Omega}<L, \quad \Lambda_1<\left|\frac{dh(\Omega)}{d\Omega}\right|<\infty. \tag{2}$$

Тогда, согласно [3], для абсолютной устойчивости положения равновесия НИС достаточно удовлетворить неравенству

$$\operatorname{Re} W_1(z)-q\frac{\Lambda_1}{2}R^2(z)+\frac{1}{L}\geqslant 0, \tag{3}$$

где $W_1(z)$ и $R(z)$ — преобразованные характеристики, равные

$$W_1(z)=\left(1+q\frac{z-1}{z}\right)W(z), \quad R(z)=|(z-1)W(z)|, \tag{4}$$

$W(z)$ — импульсная передаточная функция ЛИЧ, q — неотрицательное число, $z=\exp(j\bar{\omega})$ — оператор z-преобразования, $\bar{\omega}-\omega T_0$ — относительная частота.

Если на характеристику НЭ наложены следующие ограничения

$$h(0)=0, \quad 0<\frac{h(\Omega)}{\Omega}<L, \quad \left|\frac{dh(\Omega)}{d\Omega}\right|<\Lambda_2, \tag{5}$$

то (см. [2]) положение равновесия НИС абсолютно устойчиво при

$$\operatorname{Re} W_2(z)-q\frac{\Lambda_2}{2}R^2(z)+\frac{1}{L}\geqslant 0, \tag{6}$$

где $W_2(z)$ — преобразованная характеристика, равная

$$W_2(z)=[1+q(z-1)]\,W(z). \tag{7}$$

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая, когда при увеличении частоты $\bar{\omega}$ вещественные частотные характеристики $\operatorname{Re}W_1(z=\exp(j\bar{\omega}))$ и $\operatorname{Re}W_2(z=\exp(j\bar{\omega}))$ не убывают, а амплитудная частотная характеристика $R(z=\exp(j\bar{\omega}))$ убывает, т. е. случая, когда имеют место соотношения:

$$\lim_{z\to 1}\operatorname{Re} W_1(z)\leqslant \operatorname{Re} W_1(z), \tag{8}$$

$$\lim_{z\to 1}\operatorname{Re} W_2(z)\leqslant \operatorname{Re} W_2(z), \tag{9}$$

$$\lim_{z\to 1}R(z)\geqslant R(z). \tag{10}$$

Тогда условия (3) и (6) заменятся на следующие:

$$\lim_{z\to 1}\operatorname{Re} W_1(z)-q\frac{\Lambda_1}{2}\lim_{z\to 1}R^2(z)+\frac{1}{L}\geqslant 0, \tag{11}$$

$$\lim_{z\to 1}\operatorname{Re} W_2(z)-q\frac{\Lambda_2}{2}\lim_{z\to 1}R^2(z)+\frac{1}{L}\geqslant 0. \tag{12}$$

Найдем значения пределов в неравенствах (11), (12) для рассматриваемого класса систем. С учетом (1) для $W(z)$ НИС (рис. 1 а, б) можно написать

$$W_a(z)=\frac{KT_0}{z^{\nu}(z-1)}+\frac{K(A-\xi T_0)}{z^{\nu+1}}+\frac{K(z-1)}{z^{\nu+2}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{B}{T_i p+1}\right\}^{*}_{\sigma=1-\xi}, \tag{13}$$

$$W_б(z) = \frac{K}{z^\nu(z-1)} - K\sum_{i=1}^{n} \frac{\exp[-(T_0 - \xi T_0)/T_i]}{z^\nu[z - \exp(-T_0/T_i)]} C_i. \qquad (14)$$

Здесь использованы обозначения

$$A = \sum_{k=1}^{m} J_k - \sum_{i=1}^{n} T_i, \quad C_i = \prod_{r=1}^{m}(1 - J_r/T_i) \Big/ \prod_{s=1, s\neq i}^{n} (1 - T_s/T_i),$$

ν, ε — соответственно целая и дробная части числа Θ/T_0, σ — параметр модифицированного z-преобразования. (Значение B не приводится, так как оно в дальнейшем не используется.) Индексами «а» и «б» помечены передаточные функции систем, показанных на рис. 1 а, б.

Из (4) и (7) следует, что $\lim\limits_{z\to 1} W_1(z) = \lim\limits_{z\to 1} W_2(z)$. Поэтому, подставляя (13), (14) в (4) и устремляя z к 1, получим после преобразований

$$\lim_{z\to 1} \operatorname{Re}\frac{W_а(z)}{K} = A - \Theta + (2q - 1)\frac{T_0}{2}, \qquad (15)$$

$$\lim_{z\to 1} \operatorname{Re}\frac{W_б(z)}{K} = -\frac{1}{2} - \nu - \sum_{i=1}^{n} \frac{\exp[-(T_0 - \xi T_0)/T_i]}{1 - \exp(-T_0/T_i)} C_i + q, \qquad (16)$$

$$\lim_{z\to 1} \frac{R_а(z)}{T_0} = \lim_{z\to 1} R_б(z) = K. \qquad (17)$$

Таким образом, с учетом (15)—(17) условия (11), (12) абсолютной устойчивости положения равновесия записываются в виде

для НИС, изображенной на рис. 1 а,

$$q\frac{\Lambda}{2} T_0^2 K + \sum_{i=1}^{n} T_i - \sum_{r=1}^{m} J_r + \Theta - (2q - 1)\frac{T_0}{2} - \frac{1}{KL} \leqslant 0, \qquad (18)$$

для НИС, изображенной на рис. 1 б,

$$q\frac{\Lambda}{2} K + \sum_{i=1}^{n} \frac{\exp[-(T_0 - \xi T_0)/T_i]}{1 - \exp(-T_0/T_i)} \cdot C_i + \nu - \left(q - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{KL} \leqslant 0. \qquad (19)$$

В (18) и (19) $\Lambda = \Lambda_1$ при ограничениях характеристики НЭ вида (2) и $\Lambda = \Lambda_2$ при ограничениях вида (5).

3. Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть НЭ имеет одну из характеристик, показанных на рис. 2 а, б, в. Так как эти характеристики

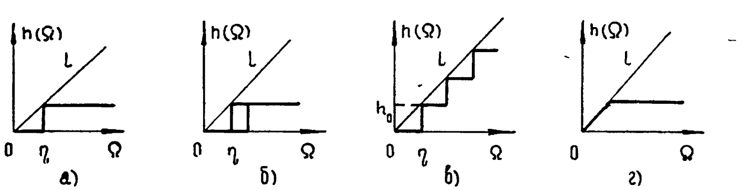

Рис. 2. Характеристики нелинейных элементов, принадлежащих сектору $LO\Omega$: а—реле с зоной нечувствительности η, б—реле с зоной нечувствительности η и гистерезисом, в—квантователь с шагом квантования h_0, г—усилитель с насыщением.

удовлетворяют (2) при $\Lambda_1 = 0$, то аналитические условия абсолютной устойчивости множества положений равновесия НИС на отрезке покоя $(-\eta, \eta)$ следуют из (18), (19) при $\Lambda_1 = 0$.

Пусть НЭ имеет характеристику типа насыщение (рис. 2г), удовлетворяющую (5) при $\Lambda_2 = L$. Тогда условия абсолютной устойчивости положения равновесия НИС (рис. 1а, б) следуют из (18), (19) при $\Lambda_2 = L$.

4. В полученных условиях (18), (19) важное значение имеет выбор числа q^*. Продемонстрируем прием выбора этого числа в одном достаточно общем случае.

Пронумеруем постоянные времени в (1) так, чтобы

$$T_1 \geqslant T_2 \geqslant T_3 \geqslant \cdots \geqslant T_n > 0, \quad J_1 \geqslant J_2 \geqslant \cdots \geqslant J_m > 0. \tag{20}$$

Пусть при этом выполняются неравенства

$$T_{f+1} \geqslant J_f > T_0, \; f = 1, 2, 3, \ldots \; l \leqslant m < n. \tag{21}$$

Воспользовавшись понятием псевдочастоты [6] $\lambda = 2(z-1)/(z+1)T_0 j$, можем амплитудные преобразованные частотные характеристики представить в виде

$$R_а(\lambda) = \frac{R_б(\lambda)\,T_0}{[1+(0{,}5\lambda T_0)^2]^{1/2}} = \frac{T_0 K}{[1+(0{,}5\lambda T_0)^2]^{1/2}} \cdot \frac{\{1+[(0{,}5T_0 - T_\Sigma)\lambda]^2\}^{1/2}}{|H(p=j\lambda)|^{-1}}, \tag{22}$$

$$|W_а(j\lambda)| = \frac{|W_б(j\lambda)|\,T_0}{[1+(0{,}5\lambda T_0)^2]^{1/2}} = \frac{K[1+(\lambda T_q)^2]^{1/2}}{\lambda[1+(0{,}5\lambda T_0)^2]^{1/2}} \cdot \frac{\{1+[(0{,}5T_0 - T_\Sigma)\lambda]^2\}^{1/2}}{|H(p=j\lambda)|^{-1}}, \tag{23}$$

где $T_\Sigma = \xi T_0 + \sum\limits_{d=l+2}^{n} T_d + \sum\limits_{f=l+1}^{m} J_f$, $T_q = (2q+1)\dfrac{T_0}{2}$ при ограничениях характеристики НЭ вида (2), $T_q = (2q-1)\dfrac{T_0}{2}$ — при ограничениях вида (5), а $H(p)$ определяется из (1).

Из (20) — (22) следует, что $R_а(\lambda)$ и $R_б(\lambda)$ являются монотонно убывающими функциями, т. е. принимают наибольшее значение при $\lambda = 0$. Таким образом, неравенство (10) выполняется.

На рис. 3а построена низкочастотная ветвь логарифмической характеристики, соответствующей (23). Очевидно, неравенства (8), (9) выполняются вплоть до $T_q = T_1$ (рис. 3б), т. е. до тех пор, пока амплитудная характеристика (23) остается монотонно убывающей.

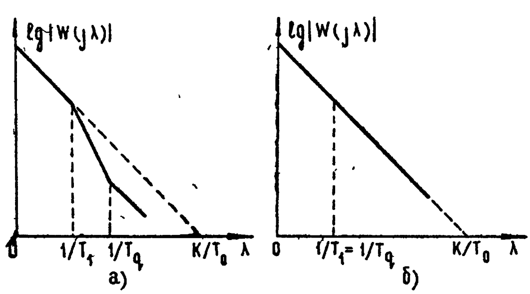

Рис. 3. Низкочастотная ветвь логарифмической амплитудной частотной преобразованной характеристики.

Таким образом, при выполнении соотношений (20) и (21) число q может быть выбрано равным $q = T_1/T_0 \pm 1/2$, причем знак плюс берется в случае, если на характеристику НЭ наложены ограничения вида (5), а знак минус — вида (2).

* При $q = 0$ (3), (6) совпадают с условиями устойчивости НИС работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. З. Цыпкин, Тр. II Конгресса ИФАК, 2, 63 (1963).
2. E. Jury, B. Lee, IEEE Trans. Automat. Control, **9**, № 1, 51 (1964).
3. E. Jury, B. Lee, IEEE Trans. Automat. Control, **9**, № 4, 551 (1964).
4. А. А. Вавилов, В. Б. Яковлев, Исследование периодических режимов и абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем, Учебное пособие, изд. Лен. электротехн. ин-та, 1967.
5. В. М. Муттер, Автометрия, № 5, 77 (1968).
6. С. М. Федоров, А. П. Литвинов, Автоматические системы с цифровыми управляющими машинами, изд Энергия, М.—Л., 1965.

Севастопольский приборостроительный институт

Поступила в редакцию 12 июня 1969 г.

ABSOLUTE STABILITY OF ASTATIC NONLINEAR IMPULSE SYSTEMS

V. M. Mutter

Analytic conditions corresponding to the Jury—Lee criterion are determined for absolute stability of astatic nonlinear impulse automatic systems. Particular cases are studied. An example is provided to illustrate the choice of nonnegative number appearing in the stability criterion.